



UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

ANDREZA MODOLON DUART

MARCELO DOS SANTOS SILVA

**SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO:
SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO SUPERIOR UTILIZANDO A
METODOLOGIA PROPOSTA POR GEORGE POLYA**

Tubarão/SC

2020

**ANDREZA MODOLON DUART
MARCELO DOS SANTOS SILVA**

**SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO:
SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO SUPERIOR UTILIZANDO A
METODOLOGIA PROPOSTA POR GEORGE POLYA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof.. MSc. Dalmo Gomes de Carvalho.

Tubarão/SC

2020

**ANDREZA MODOLON DUART
MARCELO DOS SANTOS SILVA**

**SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO:
SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO SUPERIOR UTILIZANDO A
METODOLOGIA PROPOSTA POR GEORGE POLYA**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado à obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 08 de Dezembro de 2020.

Professor e orientador Dalmo Gomes de Carvalho, MSc.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Prof. Carlos Henrique Hobold, MSc.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Prof. Jorge Luís de Souza Mota, MSc.
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia, Campus Santa Rosa do Sul

Dedicamos este trabalho aos nossos familiares, pais e irmãos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus pela vida e pelas forças fornecidas em nossos corações para vencermos mais esta etapa.

A todos os professores que contribuíram com a nossa trajetória acadêmica, especialmente ao professor Dalmo, por dedicar seu tempo e conhecimento a nos instruir na construção deste trabalho.

À banca professor Carlos e professor Jorge por se disponibilizarem a contribuir e participar deste momento.

Aos nossos colegas de classe por proporcionarem momentos de descontração e aprendizado durante o percurso do curso.

Aos nossos familiares por toda força, auxílio e paciência nessa trajetória, sempre apoiando e contribuindo conforme lhes fossem possíveis.

Aos nossos companheiros de vida por toda parceria, apoio, carinho e compreensão, não nos deixando faltar amor e incentivando a continuar firmes.

“É necessário dizer que não é a quantidade de informações, nem a sofisticação em Matemática que podem dar sozinhas um conhecimento pertinente, mas sim a capacidade de colocar o conhecimento no contexto.” (Edgar Morin)

RESUMO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso possui como objetivo a elaboração de Sequências Didáticas referentes a Sólidos de Revolução, elaboradas utilizando como base cálculo diferencial e integral, para o Ensino Superior, contemplando o método de Resolução de Problemas proposto por George Polya. Para elaboração das sequências, inicialmente foi realizado um estudo acerca de metodologias de ensino e sólidos de revolução, buscando trazer métodos para resolução de questões problemas referentes ao tema. Com a elaboração e construção das sequências didáticas, concluímos por fim, que o método aplicado pode ser eficaz e útil no processo de ensino-aprendizagem de sólidos de revolução para o ensino superior.

Palavras-chave: Sólidos de Revolução. Método de Polya. Sequências Didáticas.

ABSTRACT

The purpose of this Course Conclusion Work is to prepare Didactic Sequences referring to Solids of Revolution, elaborated using differential and integral calculus for Higher Education, contemplating the Problem Solving method proposed by George Polya. To elaborate the sequences, a study was initially carried out on teaching methodologies and solids of revolution, seeking to bring methods for solving problems related to the theme. With the elaboration and construction of didactic sequences, we conclude at last, that the applied method can be effective and useful in the teaching-learning process of solids of revolution for higher education.

Keywords: Solids of Revolution. Polya method. Didactic Sequences.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.....	21
Figura 2: Sólido de Revolução formado a partir da rotação de uma reta em torno de um eixo	28
Figura 3: Superfície R e o sólido formado por $f(x)$ no intervalo $[a, b]$	33
Figura 4: Secção transversal do sólido formado por $f(x)$ no intervalo $[a, b]$	34
Figura 5: Região R formada por $f(x)$ e $g(x)$ no plano cartesiano	35
Figura 6: Tela de Abertura do <i>Software</i> GeoGebra Classic	38
Figura 7: Inserção de uma função no <i>software</i> GeoGebra	38
Figura 8: Comando de delimitação de função no <i>software</i> GeoGebra.....	39
Figura 9: Opção para visualização no plano de uma ou mais funções e comandos informados no aplicativo GeoGebra	39
Figura 10: Acessando a janela de visualização 3D GeoGebra	40
Figura 11: Construção de um sólido de revolução a partir de uma função através do <i>Software</i> GeoGebra.....	41
Figura 12: Sólido de revolução formado através do aplicativo GeoGebra.....	41
Figura 13: Construção de sólido de revolução a partir de duas funções	42
Figura 14: Visualização em 2D de um sólido de revolução de duas funções no aplicativo GeoGebra.....	42
Figura 15: Sólido de revolução formado a partir de duas funções no GeoGebra.....	43
Figura 16: Sólido de revolução “barril” representado no GeoGebra.....	44
Figura 17: Visualização do sólido de revolução “barril” representado no GeoGebra.....	45
Figura 18: Sólido oval representado no Geogebra	46
Figura 19: Visualização do sólido oval representado no Geogebra	47
Figura 20: Sólido “sino” representado no GeoGebra	48
Figura 21: Visualização do sólido “sino” representado no GeoGebra	49
Figura 22: Aplicação das funções no GeoGebra	50
Figura 23: Sólido “bola com furo” representado no GeoGebra	51
Figura 24: Visualização do sólido “bola com furo” representado no GeoGebra	51
Figura 25: Aplicação das funções do Sólido “pote” no GeoGebra	53
Figura 26: Sólido “pote” representado no GeoGebra.....	53
Figura 27: Visualização do Sólido “pote” representado no GeoGebra	54

LISTA DE GRÁFICOS

Quadro 1: Comparativo de resolução de problemas pelo método de ensino tradicional e método de resolução de problemas 21

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	11
1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA.....	11
1.2 PROBLEMATIZAÇÃO	11
1.3 JUSTIFICATIVAS	12
1.4 OBJETIVOS	12
1.4.1 Objetivo Geral	13
1.4.2 Objetivos Específicos.....	13
1.5 TIPO DA PESQUISA.....	13
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2. METODOLOGIA DE ENSINO.....	15
2.1 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS.....	16
2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	18
2.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E RECURSOS TECNOLÓGICOS	22
2.4 GEORGE POLYA.....	24
2.5 MÉTODO DE POLYA.....	25
3. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO.....	28
3.1 O INÍCIO DOS ESTUDOS A SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO	28
3.2 A IMPORTÂNCIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ESTUDO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO	29
3.3 O ESTUDO DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO EM LIVROS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.....	31
3.4 VOLUME DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO.....	32
3.4.1 Método de Disco	33
3.4.2 Método de Arruela	35
4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	37
4.1 GEOGEBRA.....	37
4.2 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS	43
4.2.1 Sólidos de Revolução - Método de Disco	44
4.2.2 Sólidos de Revolução - Método de Arruela.....	50
CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	56

1. INTRODUÇÃO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso possui como objetivo a elaboração de Sequências Didáticas referentes à temática Sólidos de Revolução, elaboradas utilizando como base o cálculo diferencial e integral, para o Ensino Superior, contemplando o método de Resolução de Problemas proposto por George Polya.

Inicialmente estão apresentados o tema, as justificativas e os objetivos e, em seguida, foram abordadas: uma breve introdução sobre o ensino matemático e as metodologias de ensino, um parecer referente à resolução de problemas e seu incremento em sala de aula; a utilização de resolução de problemas e recursos tecnológicos como metodologia de ensino.

Em um segundo momento, estão apresentados George Polya, seu método proposto para resolução de problemas, e tem-se uma apresentação dos fundamentos do estudo de sólidos de revolução, a importância do cálculo diferencial e integral, além de uma pesquisa referente à abordagem dos sólidos de revolução em livros de cálculos e formas e cálculos executados para encontrar o volume de sólidos de revolução, como o método de disco e método de arruela.

Em um terceiro momento, serão elaboradas sequências didáticas utilizando como suporte, o *software* livre GeoGebra para visualização das figuras formadas, e construção e desenvolvimento dos cálculos, utilizando o método de Resolução de Problemas proposto por George Polya.

1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA

Sólidos de Revolução. Sequências didáticas para o ensino superior utilizando a metodologia proposta por George Polya.

1.2 PROBLEMATIZAÇÃO

A temática dos sólidos de revolução é um objeto de aplicação dos conceitos de integração discutidos a partir da aplicação das integrais, sendo extremamente importante no cálculo de volumes desses sólidos.

Buscando aprimorar o processo de ensino dessa temática no ensino superior nos deparamos com a metodologia de resolução de problemas proposta por George Polya, que nos despertou o interesse a partir das possibilidades de estarmos discutindo a resolução de

problemas. Assim, podemos construir a problemática principal de nosso trabalho: A metodologia de resolução de problemas de George Polya pode contribuir para um melhor ensino-aprendizagem dos sólidos de revolução?

1.3 JUSTIFICATIVAS

Após uma fase de debates e pesquisas, considerou-se de importância significativa abordar sobre metodologia de ensino, visto que o ensino tradicional trabalhado em sala de aula, pela maioria, considera-se ultrapassado e de pouco aproveitamento pelos estudantes. A partir disso, foi necessário delimitar o tema da pesquisa e optando-se, então, por trabalhar com os métodos de resolução de problemas propostos por George Polya e com uma temática voltada ao ensino superior: processos de ensino-aprendizagem de sólidos de revolução.

Os sólidos de revolução estão presentes no nosso dia a dia em diversos objetos e nem sequer notamos. Por exemplo: a lata de refrigerante, uma pilha, uma bola, uma xícara, uma taça, dentre outros. Esses sólidos são formados a partir da rotação de superfícies planas em torno de um eixo e podemos encontrar o volume por meio do cálculo diferencial e integral discutido no ensino superior. Com isso, nos aprofundaremos em situações problemas, tendo como pano de fundo os métodos de Polya.

A metodologia de Polya é um método de resolução de problemas matemáticos que, mais que um simples passo a passo é uma técnica. São quatro etapas que nos guiam para a solução de um problema, fazendo com que possamos pensar sobre o mesmo de modo a descobrir uma solução. De forma resumida, essas etapas propõem: compreender o problema, planejar uma resolução ou um plano, executar o plano e examinar a solução.

Visto a importância de trazer para sala de aula temas e figuras presentes no dia a dia dos estudantes, o trabalho propõe buscar figuras que se assemelhem ou se aproximem de objetos reais e desenvolver sequências didáticas utilizáveis para o ensino superior, visto que sólidos de revolução, integrais e cálculo diferencial são temas pertinentes no currículo da graduação.

1.4 OBJETIVOS

Seguem os objetivos da pesquisa realizada.

1.4.1 Objetivo Geral

Investigar o processo de ensino-aprendizagem dos Sólidos de Revolução a partir da resolução de problemas.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Analisar bibliografias referente à didática proposta no método de resolução de problemas.
- Descrever e analisar o processo da resolução de problemas a partir do método de Polya.
- Pesquisar em documentos o conceito de sólidos de revolução e sua aplicação em cálculo diferencial.
- Atribuir funções que formam superfícies semelhantes a objetos reais.
- Propor sequências didáticas utilizando a resolução de problema de Polya do objeto de estudo Sólidos Geométricos.

1.5 TIPO DA PESQUISA

Quanto ao critério da abordagem, a pesquisa está classificada como qualitativa que de acordo com Rauén (2018), “consiste no tratamento descritivo-discursivo das características intrínsecas de fatos ou fenômenos, que vão sendo sucessivamente agrupadas por critérios descritivo-discursivos, de modo que as conclusões decorrem das propriedades emergentes destes agrupamentos”.

Quanto aos objetivos, pode ser classificada como descritiva, pois pretende realizar um estudo de análise e desenvolvimento de sequências didáticas de acordo com um método pré-estabelecido. Será estruturado o desenvolvimento de situações problemas, método, processo e realidade operacional. “As pesquisas qualitativas de descrição englobam estudos que não se conformam com dados bibliográficos, confiam na notação qualitativa e não intervêm na realidade” (RAUEN, 2018).

Quanto ao critério dos procedimentos, pode ser classificada como bibliográfica, pois o desenvolvimento do projeto será com base em artigos e trabalhos já publicados. Serão reunidos informações e dados que serviram de base para a construção da investigação proposta a partir do tema escolhido.

Segundo Lima e Mioto (2007),

Reafirma-se a pesquisa bibliográfica como um procedimento metodológico importante na produção do conhecimento científico capaz de gerar, especialmente em temas pouco explorados, a postulação de hipóteses ou interpretações que servirão de ponto de partida para outras pesquisas.

Por tais motivos, o trabalho possui como eixo os tipos de pesquisa qualitativa, descritiva e bibliográfica.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho é dividido em capítulos no intuito de ter uma boa organização e divisão. Inicialmente, no Capítulo 1, são apresentados: a introdução, tema, problematização, justificativas e objetivos do trabalho.

O referencial teórico está dividido em dois capítulos, sendo abordado no Capítulo 2 metodologia de ensino, sequências didáticas, resolução de problemas e recursos tecnológicos, George Polya e Método de Polya.

O Capítulo 3 tem-se informações acerca de sólidos de revolução, o início dos estudos a sólidos de revolução, a importância do cálculo diferencial e integral, o estudo de sólidos de revolução em livros de cálculo, volume dos sólidos de revolução pelos métodos de disco e de arrola.

No Capítulo 4 são apresentadas as sequências didáticas, contemplando inicialmente uma apresentação do *Software* Livre Geogebra.

Por fim, no quinto e último capítulo, tem-se a conclusão dos autores em relação a este trabalho e, logo em seguida, apresenta-se as referências bibliográficas.

2. METODOLOGIA DE ENSINO

A matemática é uma linguagem de interação entre o real e as diversas ciências, que propõe solucionar e resolver problemas de forma contextualizada, aplicando princípios científicos a situações reais ou simuladas (Parâmetros Curriculares Nacionais, 2000).

A matemática é vista muitas vezes como uma disciplina pronta e acabada (ARAÚJO *et al.*, 2009), não havendo espaço para discussões e diferentes caminhos; cabe aos professores buscar metodologias de ensino diversas que instiguem os estudantes a buscarem e formarem o conhecimento.

De acordo com Freire (2006, apud PAIVA *et al.*, 2016, p. 147), “quando o professor planeja sua atuação em sala de aula, adota uma postura de estar aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, a suas inibições”. O professor deve estar preparado para questões que vão além do plano de aula elaborado, podendo buscar novas estratégias conforme necessidade dos estudantes.

O ensino no Brasil, abordado na maioria das vezes pelo método tradicional, vem sendo cada vez mais questionado quanto a sua eficácia. O ensino tradicional é caracterizado como sendo o professor o transmissor de conhecimento e o aluno receptor, estando o ensino centrado no professor, o que se torna muitas vezes falho para o aprendizado dos estudantes.

Diversos pesquisadores apontam o ensino tradicional como ultrapassado, não havendo espaço para indagações e criatividade dos alunos (LEÃO, 1999; TEIXEIRA, 2018). Segundo Dullius *et al.* (2011, p. 1), “o modelo atual de ensino, onde os alunos normalmente são dependentes da orientação do professor, e geralmente não são utilizadas metodologias diferenciadas e variadas, demonstra que o processo ensino/aprendizagem não está alcançando seus objetivos”.

Porém, como alternativa a este problema, existem diversas metodologias que podem contribuir para um processo de ensino e aprendizagem mais significativo e satisfatório aos estudantes em classe que podem ser utilizados e/ou incrementados pelos professores no processo de ensino e saber.

Como exemplo de metodologias alternativas, tem-se a inserção de recursos tecnológicos, utilização de modelagem matemática, ensino híbrido e diversas outras. Dentre as diferentes metodologias que podem ser utilizadas ou incrementadas em sala de aula, ressalta-se que as mesmas devem ser previamente preparadas pelo professor a fim de evitar conflitos não mediados em sala de aula.

Para preparação das aulas, o professor elabora planos de ensino para o conteúdo, plano de aula para o dia de apresentação e podem ser elaboradas sequências didáticas, conforme apresentado a seguir.

2.1 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

A escolha da metodologia de ensino é um fator de extrema importância para o aprendizado dos estudantes, sendo necessária uma elaboração de um plano anterior do que será ensinado e aplicado em sala de aula, estando preparado para indagações e sugestões dos alunos.

Sequência didática é caracterizada como um conjunto de atividades articuladas que são planejadas com o intuito de atingir um objetivo didático e compreensão dos estudantes sobre os conteúdos, elaborado por etapas de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito.

De acordo com Zabala (1998, apud CABRAL, 2017, p. 33), os procedimentos de sequência didática “têm a virtude de manter o caráter unitário e reunir toda a complexidade da prática, ao mesmo tempo em que permitem incluir as três fases de toda intervenção reflexiva, quais sejam: o planejamento, aplicação e avaliação”.

A visão de Zabala (1998) possibilita ao professor criação e modificação de suas sequências criadas, sendo no planejamento o momento de organizar as ideias e metodologias que serão abordadas em sala de aula, atentando-se às etapas e aos objetivos de ensino. Na aplicação são materializadas a viabilidade e a pertinência do material sequenciado e a avaliação permite a (re)elaborar a partir da análise e discussão dos dados (CABRAL, 2017).

As sequências didáticas têm como objetivo

[...] introduzir nas diferentes formas de intervenção aquelas atividades que possibilitem uma melhora de nossa atuação nas aulas, como resultado de um conhecimento mais profundo das variáveis que intervêm e do papel que cada uma delas tem no processo de aprendizagem dos meninos e meninas. (ZABALA, 1998, p.54 apud BATISTA, OLIVEIRA e RODRIGUES, 2016, p. 5381).

Batista, Oliveira e Rodrigues (2016, p. 5382) consideram importante observar diversas relações interativas ao planejar uma sequência didática, como a relação “professor/aluno, aluno/aluno, (...) o papel do professor e o papel do aluno, a organização para os agrupamentos, a organização dos conteúdos, a organização do tempo e espaço, a organização dos recursos didáticos e avaliação”.

Estar atento a essas relações é fundamental para obter um resultado satisfatório por parte dos alunos quanto à técnica utilizada. Para Kobashigawa *et al.* (2008), o procedimento didático de sequência didática difere de um plano de aula para outro, uma vez que podem haver diferentes estratégias de ensino e aprendizagem, e por ser uma sequência que pode ser trabalhada por vários dias (CABRAL, 2017).

Nas concepções de Zabala (1998) e Oliveira (2013, apud Batista, Oliveira e Rodrigues, 2016, p. 5383),

Uma sequência didática deve ser desenvolvida na perspectiva do ensino de conteúdos através de atividades sequenciadas, organizadas com objetivos bem definidos e esclarecidos para os professores e alunos, que contribuirão para a aprendizagem e construção do conhecimento e de novos saberes.

Para Dolz *et al.*, (2004), existem quatro fases a serem seguidas para a construção de uma Sequência Didática, que são: apresentação da situação de ensino, a produção inicial, os módulos e a produção final (CABRAL, 2017).

De acordo com o autor, na primeira fase é repassado aos estudantes as informações relevantes do projeto de ensino em questão com os objetivos, estrutura e condições para produção e alcance dos saberes envolvidos.

Já o segundo momento, são guardadas às intervenções que visam diagnosticar as capacidades já adquiridas pelos estudantes em relação ao tema, e procura adequar as ações posteriores a fim de alcançar a aprendizagem objetivada.

Na terceira fase são aplicadas as sequências didáticas e as atividades elaboradas, desenvolvendo e variando o ensino e questões abordadas a fim de suprir as dificuldades encontradas pelos estudantes. O número de aulas deve se adequar à necessidade da turma e ao andamento da aula.

A quarta e última etapa é o momento de o aluno colocar em prática os conhecimentos adquiridos e, junto com o professor, avaliar os progressos alcançados. As etapas visam validar as sequências didáticas criadas e efetuar adaptações e melhorias visando o aprendizado dos estudantes.

Sequências didáticas podem ser elaboradas em qualquer nível de ensino, desde os anos iniciais quanto o ensino superior, sendo que, quando bem elaboradas, podem contribuir de forma significativa no aprendizado dos estudantes. Conforme Batista, Oliveira e Rodrigues, (2016, p. 5384) “uma sequência didática bem planejada permitirá ao educador visualizar o

conhecimento inicial do aluno, seu desempenho e perceber o que ainda necessita ser trabalhado para que se concretize a aprendizagem”.

A construção de uma sequência didática pode ser efetuada através de variadas metodologias de ensino e com objetivos diferentes. O nosso trabalho consiste na construção de sequência didática utilizando a metodologia de ensino através de resolução de problemas, conforme segue informações sobre a metodologia proposta.

2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No processo de ensino-aprendizagem, apenas o domínio do conteúdo que será ministrado não é suficiente, sendo necessário também, no ensino superior, aprender a ensinar. Segundo Paterlini (2010), para propiciar aos estudantes “fazer matemática” sugere-se que o professor trabalhe, em sala de aula, com atividades exploratórias e investigativas. O método de resolução de problemas pode ser um grande aliado em sala de aula, instigando os estudantes na construção do conhecimento, descentralizando o professor como transmissor do conteúdo e do saber.

A resolução de problemas consiste em uso de métodos para encontrar soluções para problemas anteriormente expostos, proporcionando um ensino mais investigativo e contextualizado, trazendo para sala de aula, situações reais e do cotidiano dos estudantes.

Existem diferenças entre exercícios e resolução de problemas. No primeiro, o aluno não precisa decidir sobre o procedimento a ser utilizado para chegar à solução, já na resolução de problemas, o estudante é levado a pensar no método para alcançar a solução e os caminhos possíveis a serem seguidos, não existindo, portanto, uma técnica específica.

Os exercícios, também conhecidos como problemas fechados, são classificados como problemas clássicos de matemática, limitando a criatividade do estudante.

De modo geral, os problemas são trabalhados em sala de aula para “fixar” os assuntos que acabaram de ser estudados. Eles se caracterizam como exercícios repetitivos, permitindo ao aluno identificar certas características que se repetem no processo de resolução, criando procedimentos padronizados para serem utilizados na resolução de problemas semelhantes (MEDEIROS, 2012, p. 2).

Nesse método, o estudante não precisa pensar nos procedimentos que irá utilizar e analisar as possibilidades. Na grande maioria dos problemas, os enunciados já trazem a resposta ao aluno e/ou o caminho exato que ele deve percorrer, limitando a imaginação.

Já os problemas abertos fornecem informações que levam os estudantes a se indagar e investigar o melhor caminho para encontrar uma solução, havendo diferentes caminhos a serem seguidos e até mesmo respostas alternativas; há mais espaço para imaginação e criatividade na construção da própria aprendizagem.

Caldeira (2009) apresenta as principais diferenças entre resolução matemática no contexto do ensino tradicional e de resolução de problemas, ressaltando a abordagem de resolução de problemas trabalhados em sala de aula (Quadro 1).

Quadro 1: Comparativo de resolução de problemas pelo método de ensino tradicional e método de resolução de problemas

Problemas	Método Tradicional	Ensino de Resolução de Problemas
Concepção	Problemas com exercícios.	Problemas como parte essencial da aprendizagem.
Escolha	Lista ordenada e organizada por nível de dificuldade.	Coleção de problemas de acordo com os objetivos enunciados.
Utilização (como e quando)	Aplicação no fim da aula ou no final de um tema ensinado.	Durante todo o processo de aprendizagem, de modo a facilitar e permitir a aquisição dos conhecimentos procedimentais e conceituais.
Papel do aluno	Aprende passivamente; Trabalha individualmente.	Aprende ativamente e trabalha em grupo.
Papel do Professor	Resolve um problema – tipo, para depois os alunos também o fazerem; Fornece os problemas a trabalhar.	Facilitador e organizador da aprendizagem; formula o problema e deixa o processo de resolução em aberto.

Fonte: Caldeira, 2009, p. 439.

Podemos observar através da comparação, que o ensino através da resolução de problemas (aberto) apresenta mais abertura para o estudante na construção do próprio conhecimento, estando o professor apenas como mediador. Nesse processo é fundamental o estudante ter conhecimentos necessários para alcançar os objetivos propostos a fim de que estejam motivados a buscar soluções.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática (BRASIL, 1998), “a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e

desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance” (RODRIGUES e MAGALHÃES, 2012, p. 2).

Existem três razões encontradas para os estudantes não serem capazes de resolver problemas:

(1) a resolução de problemas é uma atividade intelectual extremamente complexa; (2) há falta de saber dos envolvidos do que é necessário para a resolução de problemas; e (3) são dadas muito poucas oportunidades aos alunos para se envolverem realmente na resolução de problemas (LESTER, 1994 apud PONTES, 2019, p. 3).

Desta forma, vale ressaltar a importância de os estudantes estarem familiarizados com os temas propostos, tendo um conhecimento inicial acerca do assunto para estarem aptos a resolver as questões. Também o professor estar disponível na orientação do caminho a ser seguido caso o estudante apresente certa dificuldade após tentativas.

Alguns aspectos devem ser estimulados em um processo de ensino e aprendizagem através da resolução de problemas:

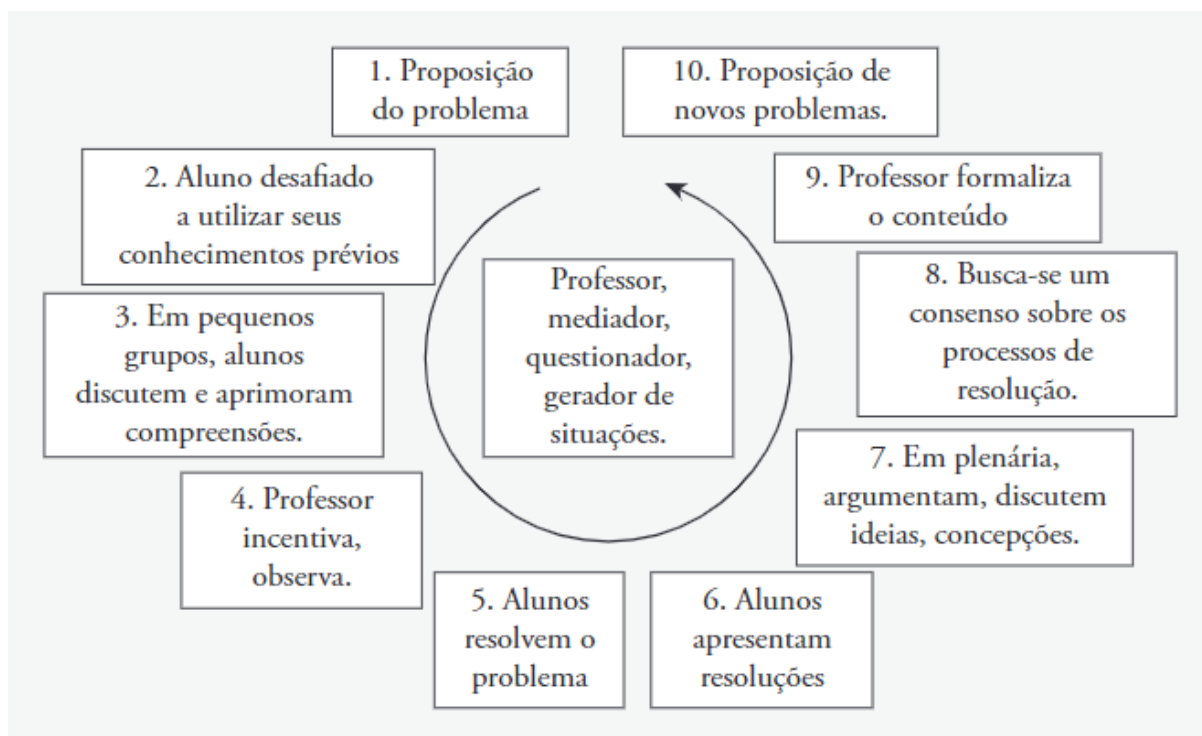
(1) compreender os dados de um problema, (2) tomar decisões para resolvê-lo, (3) estabelecer relações, (4) saber comunicar resultados e (5) ser capaz de usar técnicas conhecidas (ZUFFI e ONUCHIC, 2007 apud PONTES, 2019, p. 4).

Segundo os aspectos apresentados pelo professor, inicialmente o estudante deve conseguir analisar as informações e os dados que o problema lhe fornece, organizar esses dados e traçar estratégias para alcançar uma solução e compreender o caminho seguido para chegar ao resultado, conseguindo executá-lo novamente em outra questão caso solicitado.

Nessa concepção, Cai Lester (2012, p. 148 apud ALLEVATO e VIEIRA, 2016, p. 118) destaca que “o termo resolução de problemas refere-se a tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais para melhorar o entendimento e desenvolvimento matemático dos estudantes”.

Realizar a implementação do método de ensino através da resolução de problemas não é tão simples, uma vez que tanto os alunos como os professores estão acostumados com um modelo mais tradicional de ensino. Com isso, Onuchic (1999) desenvolveu etapas dessa metodologia, aprimorada e esquematizadas por Allevato e Vieira (2016, p. 119), conforme figura abaixo:

Figura 1: Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas



Fonte: Allevato e Vieira, 2016, p. 119.

Conforme o autor, as etapas elaboradas incentivam os estudantes a buscarem o próprio conhecimento e discutir maneiras de se alcançar solução com um grupo, estando o professor como mediador do conhecimento.

Na primeira etapa, é realizada a escolha da situação problema, sendo ela proposta pelo professor ou pelos estudantes. No segundo momento (etapa 2), os estudantes devem ler e analisar o problema individualmente, indagando-se e visualizando qual o caminho a seguir para a sua execução. Na etapa 3, os alunos são organizados em grupos para discutirem as ideias e os caminhos levantados individualmente. Na próxima etapa, o professor que está observando o raciocínio dos grupos, os incentiva e motiva a continuar, auxilia em dúvidas que podem surgir e organiza as ideias. Na etapa 5, os alunos resolvem o problema da forma como conseguiram e com o conhecimento adquirido, na próxima etapa é compartilhado com a turma a resolução e caminho seguido por cada grupo. Na etapa 7, o professor, em conjunto com a turma, discute as ideias e caminhos encontrados e juntos (etapa 8) buscam um consenso sobre o processo de resolução adequado. Na próxima etapa, o professor deve formalizar o conteúdo e (etapa 10) propor novos problemas a serem resolvidos.

“No trabalho com resolução de problemas que é implementado segundo estas etapas, os conteúdos matemáticos aprendidos fazem sentido para o aluno, que passa a ser

protagonista na construção do seu próprio conhecimento” (ALLEVATO e VIEIRA, 2016, p. 20).

As etapas apresentadas podem ser seguidas ou aperfeiçoadas conforme o objetivo de aprendizagem pretendido pelo professor, o qual pode realizar uma introdução inicial do conteúdo, realizar as resoluções dos exercícios individualmente, ou como se adequar melhor à turma, estando o aprendizado dos estudantes como centro.

Problemas de enunciados abertos, pelo impacto inicial que causam interesse que logo despertam no estudante, devidamente explorados pelo professor em sala de aula e nas usuais listas de problemas, mostram-se, da mesma forma, indubitavelmente úteis no delineamento de um conjunto articulado de ações que visa mudar o perfil do tradicional aluno resolvidor de problemas, origem de tantos insucessos (PEDUZZI, 1997, p. 248).

Leite (2001) caracteriza o ensino através das resoluções de problemas como uma estratégia inovadora, no qual os alunos são colocados em situações não apenas de aprender, mas de aprenderem a aprender, desenvolvendo competências relevantes para o cidadão comum.

É possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela (DANTE, 1991 apud SOUSA, 2005, p. 3).

A metodologia de resolução de problemas pode ser apresentada em conjunto com outros métodos, artefatos, como exemplo os recursos digitais, conforme apresentado abaixo.

2.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E RECURSOS TECNOLÓGICOS

As inovações tecnológicas, que impulsionaram um grande salto de desenvolvimento na atualidade está cada vez mais presente no dia a dia das pessoas, englobando os estudantes. As utilizações desses recursos em sala de aula são, em alguns casos, proibidas, e não muito utilizados por parte dos professores por terem aversão a sua utilização ou dificuldades de implementação dessas ferramentas em aula.

Muito se discute a eficácia e formas de incrementar os recursos tecnológicos em sala de aula, tornando-os aliados dos professores no processo de ensino-aprendizagem.

No processo de incorporação das tecnologias na escola aprende-se a lidar com a diversidade, a abrangência e a rapidez de acesso às informações, bem como com

novas possibilidades de comunicação e interação, o que poderia propiciar novas formas de aprender, ensinar e produzir conhecimento (PEREIRA e ARAÚJO, 2020, p. 3).

O uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) em sala de aula pode aproximar mais o professor dos alunos, trazer o cotidiano dos estudantes para a sala, dinamizando o desenvolvimento e andamento das aulas.

“O uso da tecnologia na educação pode sinalizar novos encaminhamentos e posturas docentes e discentes, atendendo tanto exigências de caráter pedagógico, como condições técnicas e financeiras de diversas realidades educacionais” (PEREIRA e ARAÚJO, 2020, p. 4). É preciso analisar o cenário e as condições da turma e verificar a melhor forma de incrementar as TICs de forma a somar com o processo educativo.

No ensino matemático há diversos *softwares* e ferramentas de fácil acesso que podem ser utilizados no ensino, trazendo diversos temas, construção de tabelas, gráficos e outras facilidades. Faz-se necessário, entretanto, uma análise inicial do professor sobre qual melhor ferramenta a ser utilizada, com uma linguagem compreensível pelos estudantes e preparação de sequências didáticas abertas a imprevistos em sua aplicação.

“Caberá a cada professor optar pela combinação que melhor se ajuste ao seu estilo docente e à formação de que dispõe, assim como os conteúdos a lecionar, atividades a desenvolver, características dos respectivos alunos” (RICOY e COUTO, 2012, p. 246).

O uso de recursos tecnológicos alinhados com resolução de problemas pode contribuir com o aprendizado dos estudantes. De acordo com Valente (1999, p. 2),

Quando o aluno usa o computador para construir o seu conhecimento, o computador passa a ser uma máquina para ser ensinada, propiciando condições para o aluno descrever a resolução de problemas, usando linguagens de programação, refletir sobre os resultados obtidos e depurar suas ideias por intermédio da busca de novos conteúdos e novas estratégias (VALENTE, 1999, p. 2).

Em pesquisas Althaus, Dullius e Amado (2016) concluem que associar a resolução de problemas com as tecnologias é um duplo desafio ao professor. Porém, se bem incrementado, possibilita o desenvolvimento das competências no domínio da resolução de problemas apoiadas na utilização de tecnologias.

A formulação e a resolução de problemas ocasionam a verificação da existência de diferentes maneiras de pensar um mesmo problema e obter a solução. O autor afirma que tais recursos podem ajudá-los a representarem os problemas, a compreenderem conceitualmente e refletirem quanto aos processos realizados (JONASSEN, 2003 apud FIGUEIREDO, GROENWALD e RECALCATI, 2019, p. 4).

Powell e Yokoyama (2010, p. 11), em seus estudos, concluem que através da resolução de problemas com o uso de recursos tecnológicos “os alunos perceberam que a matemática pode ser vista de uma outra maneira, que envolve o pensar matemático, a percepção de padrões, a formulação de problemas próprios e a criação de procedimentos para resolver seus problemas”.

A formulação e resolução de problemas, com o uso de recursos tecnológicos digitais, podem suscitar a ocorrência e a valorização de outros aspectos, como: a exploração de estratégias, a visualização por meio de imagens, a experimentação de recursos, a simulação de situações problemáticas, a reflexão no decorrer e após o processo, entre outros (FIGUEIREDO, GROENWALD e RECALCATI, 2019, p. 5).

Observa-se que em diversos estudos realizados há uma aceitação positiva em relação à inserção de recursos tecnológicos no ensino através de resoluções de problemas, nos quais os alunos podem explorar estratégias diversificadas para encontrar o resultado, utilizar a imaginação e construir o próprio conhecimento de forma mais prazerosa e descontraída. Porém, deve-se ter um conhecimento inicial pelo professor acerca da ferramenta que será utilizada em sala de aula, obtendo assim um melhor aproveitamento e aceitação pelos estudantes.

Há diversos métodos de resolução de problemas que podem ser abordados no ensino matemático, iremos abordar para o ensino matemático de nível superior, o método de Resolução de Problemas desenvolvido por George Polya em 1978.

2.4 GEORGE POLYA

George Polya nasceu em Budapeste (Hungria), em 13 de dezembro de 1887, de família judaica de origem polaca. Faleceu em 07 de setembro de 1985 em Palo Alto, na Califórnia. Realizou contribuições significativas para análise combinatória, teoria dos números, análise numérica e teoria da probabilidade.

Matemático, Polya foi um ótimo estudante do ensino secundário apesar da escola que frequentava valorizar a aprendizagem com base na memória e prática, considerada por ele monótona e sem utilidade.

Formou-se em licenciatura em 1905, ganhando por mérito uma bolsa de estudos na Universidade de Budapeste, na qual se interessou por diversos cursos e, em 1912, concluiu o doutorado.

Dentre as principais publicações podemos citar: A solução do problema do passeio aleatório (1913), A classificação dos planos de simetria em dezessete grupos (1924), Aufgaben und lehrsätze aus der Analysis (1925), Die grundlehren der mathematischen wissenschaften (1925), How to Solve it (1945), Isoperimetric Inequalities im Mathematical Physics (1951), Matemathics and Plausible Reasoning (1954) e Mathematical Discovery (1962-64).

Dentre suas contribuições e pesquisas, Polya em seu livro “How to Solve it” no português “A arte de Resolver Problemas” desenvolveu um método para resolução de problemas, conhecido como Método de Polya.

2.5 MÉTODO DE POLYA

Polya em 1945 escreveu o livro intitulado “A arte de resolver Problemas” que apresenta seu método para resolver problemas, destacando, inicialmente, que é importante o aluno ter habilidades e competências para dar conta da resolução de problemas. O método de Polya consiste no aluno como construtor do conhecimento, tendo as ferramentas necessárias, sendo capaz de definir estratégias para se alcançar o resultado do problema proposto. O método propõe o desenvolvimento de quatro fases:

- **Compreender o Problema:** o aluno deve compreender o enunciado verbal do problema e ter competência para identificar as partes do problema. Neste ponto o estudante deve conseguir separar as informações que o enunciado apresenta, compreender o que está sendo pedido e interpretá-lo. Qual é a incógnita? Quais os dados apresentados? Qual ponto a questão está solicitando? Dentre outras perguntas cabíveis de acordo com o enunciado da questão.
- **Designar um Plano:** o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Neste ponto é importante que o estudante tenha um conhecimento prévio acerca do assunto abordado que o induza a criar um plano para resolução da questão proposta.
- **Executar o Plano:** a execução do plano requer conhecimentos algébricos e operatórios, destacando todas as etapas de resolução intermediárias. Nesta etapa o estudante deve resolver o plano elaborado anteriormente, destacando os passos de sua execução, sem pular etapas dos cálculos e conceitos.
- **Retrospecto do problema:** Cabe ao professor orientar que os problemas não se esgotam e, portanto, algumas questões ainda podem ser levantadas. O estudante deve fazer um

retrospecto do desenvolvimento da questão, validando-a e verificando se não deixou alguma parte incompleta. Se é possível verificar se o resultado está correto e fazer uma ligação a outros exercícios e situações em que o plano e fórmulas utilizadas na questão podem ser utilizadas.

O método apresenta etapas bem delimitadas e elaboradas que, se bem executado, trará resultados esperados. “Neste sentido, paralelamente, às estratégias decorrentes da aplicação do método de Polya, a resolução de problemas desenvolve componentes cognitivas implicadas na compreensão da leitura” (Monteiro *et al.*, 2019, p. 70).

Pontes (2019) aponta que o tema de resolução de problemas através do método de Polya, possibilita ao professor facilitador e ao aluno aprendiz desenvolver novas habilidades no intuito de fortalecer o pensamento crítico e o raciocínio lógico. O método possibilita o estudante caminhar até a solução através dos quatro passos, embora cada aluno possua uma forma diferente de pensar e buscar o resultado, trilhando caminhos diferentes.

Ao procurarmos a solução, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encarar o problema. Temos de mudar de posição de quando em quando. É provável que a nossa concepção do problema seja muito incompleta no princípio; a nossa perspectiva é outra depois de feito algum progresso; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução (POLYA, 1995).

Em estudo de Gazzoni e Ost (2008) constata-se que, através do método de Polya, “com mais facilidade, organizam-se as ideias e se obtém a solução do problema com uma melhor compreensão do que se não tivéssemos seguido seu método”.

Monteiro (2019) aponta o método de Polya com resultados significativos de evolução de aprendizado em aplicação com turmas do 4º ano.

O conhecimento do método de Polya, articulado com a compreensão leitora e de diversificadas estratégias de resolução de problemas, motivou os alunos para a aquisição de conhecimento e, conseqüentemente, permitiu uma melhor prestação, resultante da compreensão das fases e das estratégias desenvolvidas ao longo da resolução de um problema matemático (MONTEIRO, 2019, p. 83).

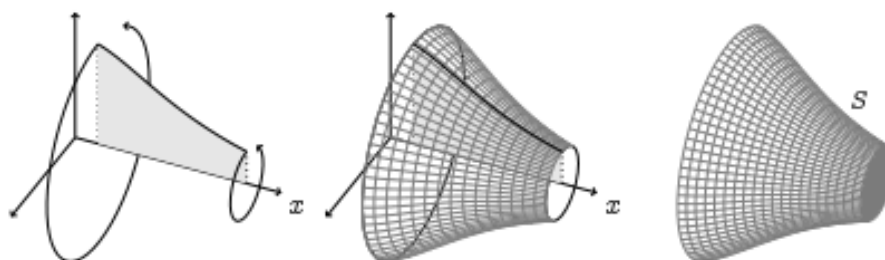
Em pesquisa, Souza *et al.* (2018), validara positivamente a utilização do método de Polya em sala de aula, apontando que os estudantes puderam expor melhor os conhecimentos e conseguiram apresentar mais exemplos sobre o tema, tornando possível o desenvolvimento de conhecimento por si próprio.

Por esses exemplos positivos dados sobre a utilização deste método, este trabalho objetiva a criação de sequências didáticas de nível superior através do método de resolução de problemas proposto por George Polya para o estudo de Sólidos de Revolução.

3. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Sólidos de revolução podem ser definidos como um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de uma reta, que denominamos de eixo de revolução, no plano deste eixo, conforme se pode observar no exemplo abaixo.

Figura 2: Sólido de Revolução formado a partir da rotação de uma reta em torno de um eixo



Fonte: E-scola Aprender num click, 2020.

3.1 O INÍCIO DOS ESTUDOS A SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Durante a educação básica, trabalha-se muito com figuras geométricas no ensino da matemática. É instruído sobre as dimensões e que ela classifica os objetos no espaço, traçando a diferença entre formas geométricas e sólidos geométricos. Por sua vez, sólidos geométricos são apresentados como uma figura definida com três dimensões (tridimensional).

A geometria é uma peça fundamental para o desenvolvimento da capacidade de abstração e de criatividade, através dela o aluno amplia sua percepção de enxergar o mundo de formas matemáticas. A metodologia empregada para ministrar uma aula desse tema deve ser tão relevante quanto à importância da mesma. Faz-se necessário que o aluno perceba a matemática como “um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la” (BRASIL, 1999, p. 251). Nesse sentido, a geometria deve ser vista como um instrumento fundamental para a interpretação do espaço.

No ensino superior, em cursos de Matemática e nas engenharias, é trabalhado com a geometria dos sólidos de revolução, uma parte da geometria que não é muito vista durante a educação básica, na qual são tratados como pequenas observações nos livros didáticos. Entretanto, é iniciado de forma sutil no ensino médio com os chamados sólidos cilíndricos: cilindro, cone, tronco de cone e esfera. Muitos desses sólidos que são trabalhados podem ser

obtidos através da rotação de uma região plana em torno de um eixo e é o que chamamos de revolução.

Segundo Rautenberg (2013), as formas de revolução podem ser obtidas pela rotação de uma região de um plano em torno de uma reta desse plano, chamado eixo de revolução ou rotação, que toca a fronteira da região ou não intersecta a região em nenhum ponto. Ou seja, uma figura plana gira em torno de um eixo que pode ser um dos seus lados ou algum eixo do plano formando um corpo, que então é chamado de sólido de revolução.

O estudo de sólidos de revolução envolve também o plano cartesiano e podem ser feitos por cálculos de área da figura matriz, área do corpo formado e o espaço em que ele ocupa (volume). Para figuras tradicionais, há artifícios matemáticos conhecidos como “fórmulas” para a resolução desses problemas. Porém, os sólidos de revolução podem apresentar formas incomuns, podendo conter curvas e direções diferentes. Nota-se, portanto, que os conhecimentos matemáticos elementares são insuficientes, havendo uma necessidade de utilizar uma ferramenta incrível, o cálculo diferencial integral.

3.2 A IMPORTÂNCIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ESTUDO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

De acordo com Vilches e Corrêa (s. d., p.325), na Matemática “observamos que somente “sabemos” calcular, efetivamente, uma área ou um volume, que estão delimitadas por segmentos de retas como retângulos, triângulos ou composições destes”. Podemos tranquilamente encontrar o volume de um cubo, de um paralelepípedo, de um prisma e de um cilindro aplicando o artifício “área da base multiplicada pela altura”. Para o cone e pirâmides, o volume é igual à terça parte do mesmo artifício.

Nota-se que há fórmulas prontas e acabadas para solucionarmos estes problemas envolvendo sólidos simples, formados por lados retos ou proporcionalmente inclinados ou círculos perfeitos. Contudo, há sólidos e figuras com formas diferentes e irregulares podendo conter diversas curvas na sua composição. Portanto, há necessidade de se buscar ferramentas matemáticas para perfazer o conteúdo de sólidos de revolução e, para isso, existem os conhecimentos do Cálculo.

O nome “Cálculo” é uma abreviação de “Cálculo Diferencial e Integral”. A palavra cálculo em seu sentido genérico significa qualquer manipulação sistemática de objetos matemáticos, sejam números ou símbolos abstratos (MAOR, 2008, p. 103).

Não é possível afirmar que o Cálculo é um objeto “inventado” por um único homem por ser consequência de estudos de diversos matemáticos ao longo dos séculos e, que, segundo Melchior e Soares (2013), há registros datados em 1.800 a.C. Mas na maior parte dos livros, artigos e documentários sobre o assunto, atribui-se a invenção do Cálculo a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1727) e Isaac Newton (1642-1727), de maneira independente, por chegarem a fórmulas para utilizar o cálculo de maneira funcional. “Na realidade, o cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz” (COURANT, 2000, p. 481). Grandes nomes da Matemática também deram suas contribuições para essa ferramenta, como os irmãos Bernoulli, L’Hospital, Lagrange, D’Alembert, Cauchy, Weierstrass e Riemann.

O Cálculo Diferencial e Integral expressa basicamente dois processos: a derivação e a integração. Segundo Baron (1985, p. 1), a derivação “está relacionada com a descrição e mensuração da maneira como as coisas variam, se movem e crescem”. Eves (2004) afirma que os primeiros problemas da história envolvendo a integração estavam relacionados ao cálculo de área e volumes.

Ao contrário de como nos é ensinado em cursos de cálculo, a integração surgiu muito antes da derivação. Dá para entender isso analisando como elas surgiram e as necessidades cotidianas da época, pois a integração foi criada através de problemas relacionados com comprimento, área e volume. Já a diferenciação por problemas de tangentes de curvas.

A ideia de integração teve origem em processos somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra (EVES, 2004, p. 417).

Antes desta descoberta, os matemáticos focavam seus estudos às questões estáticas de contar, medir e descrever as formas. Devlin (2010, p. 24-25) afirma que, com a descoberta, os matemáticos puderam estudar “o movimento do planeta e a queda dos corpos na terra, o funcionamento das máquinas, o fluxo dos líquidos, a expansão dos gases, forças físicas tais como o magnetismo e a eletricidade”. Foi a partir do século XVIII que os matemáticos aumentaram o interesse nos aspectos teóricos do Cálculo Diferencial e Integral, além dos interesses de sua aplicação. Com isso, o Cálculo propagou-se e diversos matemáticos foram concedendo suas contribuições ampliando cada vez mais a sua utilidade.

O conceito de Cálculo tratou com o problema de determinar uma função a partir de informações de acordo com a taxa de variação. Ele trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades (STEWART, 2012. p. 28). Isso permite determinar áreas de regiões irregulares no plano, medir o comprimento de curvas e determinar o volume e massa de sólidos arbitrários. Eves (2004) destaca que naquela época as formas determinadas por retas já haviam sido calculadas, porém cálculos precisos para formas de linhas curvas eram relativamente recentes.

Portanto, os Cálculos têm uma importância enorme nos estudos de sólidos de revolução, pois com ele é possível calcular o volume de sólidos formados a partir da revolução de superfícies curvas geradas por uma ou mais funções. Essa valiosa ferramenta matemática nos proporciona uma estimativa muito aproximada do valor que procuramos a partir da análise de função, seja área ou volume, dos Sólidos de Revolução.

3.3 O ESTUDO DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO EM LIVROS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Os conteúdos de sólidos de revolução têm destaque em livros didáticos das disciplinas de Cálculo. Há um grande acervo de obras que trazem os conhecimentos deste tema. Em análises feitas em alguns livros, constatou-se que há muita semelhança entre eles, atingindo praticamente uma mesma introdução ao falar sobre os sólidos de revolução.

Em artigos e monografias que trabalharam com o assunto, alguns autores citam livros que teriam um destaque maior sobre o assunto, segundo Neto (2003, p. 46) “o livro “O Cálculo com Geometria Analítica”, de Louis Leithold, estava presente na bibliografia de todos os programas pesquisados” e ainda cita “Cálculo A” de Diva M. Flemming e Mírian B. Gonçalves como preferências dos autores para pesquisa.

Tais livros ao iniciarem o capítulo dão uma breve descrição sobre sólidos de revolução. Flemming (2006, p. 346) explicam que “fazendo uma região plana girar em torno de uma reta no plano, obtemos um sólido, que é chamado sólido de revolução. A reta ao redor da qual a região gira é chamada eixo de revolução”.

Leithold (1994, p. 376) complementa que o eixo de revolução pode ou não interceptar a região em revolução. Ambos após iniciarem esta introdução trabalham com os conceitos de volume, utilizando a integral definida, nos sólidos de revolução. Não há uma explicação objetiva do porquê estariam sendo empregadas as ferramentas do cálculo, sendo nítida, apenas, para quem detém os conhecimentos de geometria, ao se deparar com as figuras que

estão sendo trabalhadas no livro. O fato é que os sólidos de revolução são tratados como uma das aplicações geométricas do Cálculo Diferencial e Integral, em todos os livros didáticos.

O trabalho feito em cima dos sólidos de revolução é gerado em problemas, por exemplo, que envolvem volume. São feitos diversos exemplos durante o capítulo, resolvendo alguns tipos de revolução. Flemming e Leithold trabalham com quatro casos: quando a rotação se dá em torno do eixo x , em torno do eixo y , em torno do lado da figura em revolução paralela ao eixo x e em torno do lado da figura em revolução paralela ao eixo y .

Em seus exemplos, Flemming não atribui uma função, apenas a figura formada no plano cartesiano e o intervalo dela, não chegando a um valor numérico para o volume, ficando apenas na fórmula montada. Somente nos exercícios é calculado o volume do objeto sendo atribuída a função da figura de revolução. Já nos exemplos de Leithold, todos resultam em um valor numérico para o volume dos sólidos.

3.4 VOLUME DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Volume, nos dicionários para geometria, significa o espaço ocupado por um corpo em forma gasosa, líquida ou sólida. Na Matemática calculamos um volume e no resultado não encontramos essas formas físicas. Porém, atribuímos unidades de medida cúbica, ao qual o sistema internacional atribui o centímetro cúbico para defini-los. Uma unidade cúbica pode ser entendida como um cubo que contém todos seus lados medindo uma unidade de medida.

O volume é muito visto durante a educação básica, sendo trabalhado em diversos objetos, mas apenas com formas comuns. Alguns corpos redondos têm o cálculo para volume definido, porém não serão vistos nesta seção. O objetivo desta é iniciar o desenvolvimento das atividades a serem feitas nesta monografia, do cálculo de volume dos sólidos de revolução através dos conhecimentos adquiridos da ferramenta do Cálculo Diferencial e Integral seguindo a sequência didática conforme apresentado previamente.

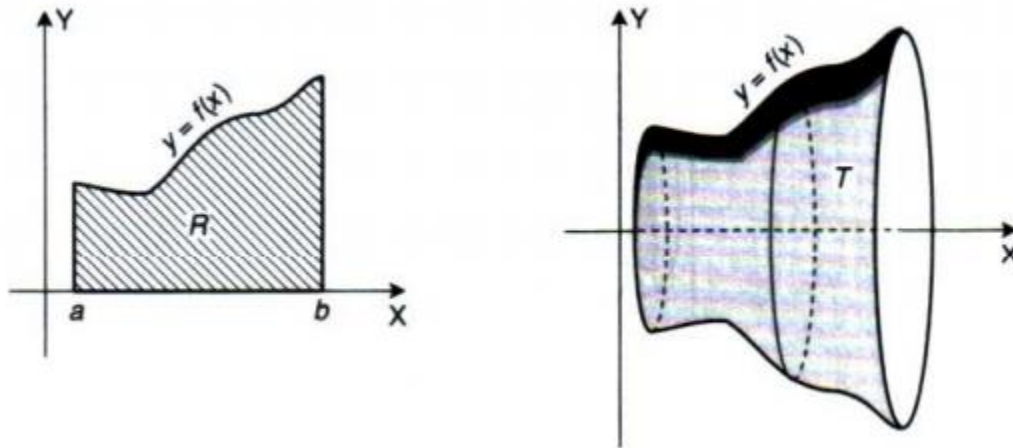
Para o primeiro momento é válido ressaltar os princípios matemáticos que serão necessários para efetuar o cálculo de volume de alguns sólidos de revolução. O ambiente no qual colocaremos o esboço do tal sólido será o plano cartesiano, contendo os eixos abscissa e ordenada. A figura em revolução será criada por, no mínimo, uma função. Caso esta função não seja conhecida, será utilizado o *software* GeoGebra para encontrá-la. E, por fim, esta superfície em revolução tem sua largura definida por um intervalo $[a, b]$ no eixo de rotação.

3.4.1 Método de Disco

O método de disco pode ser utilizado para calcular um volume do sólido de revolução que é formado pela rotação de um dos eixos do plano cartesiano. Nele, contém o Princípio de Cavalieri e a Soma de Riemann.

No livro “Cálculo A” (2006) de Flemming e Gonçalves definem o método de disco da seguinte forma: vamos definir o volume do sólido de revolução S , gerado pela rotação em torno do eixo x , da região plana R vista na figura 3. Suponhamos que $f(x)$ é contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$.

Figura 3: Superfície R e o sólido formado por $f(x)$ no intervalo $[a, b]$



Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006. Cálculo A, p. 347.

Observando a figura 3, vamos imaginar que a região R do intervalo $[a, b]$ fosse dividida em n retângulos, partindo o Princípio de Cavalieri. Agora, consideramos uma partição P de $[a, b]$, dada por:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i .

Para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$, construímos um retângulo R_i , de base Δx_i e altura $f(c_i)$.

Fazendo cada retângulo R_i girar em torno do eixo de revolução, que no caso é o eixo das abscissas, a revolução obtida é um cilindro (ver figura 4), cujo volume pode ser escrito partindo dos conhecimentos de geometria básica:

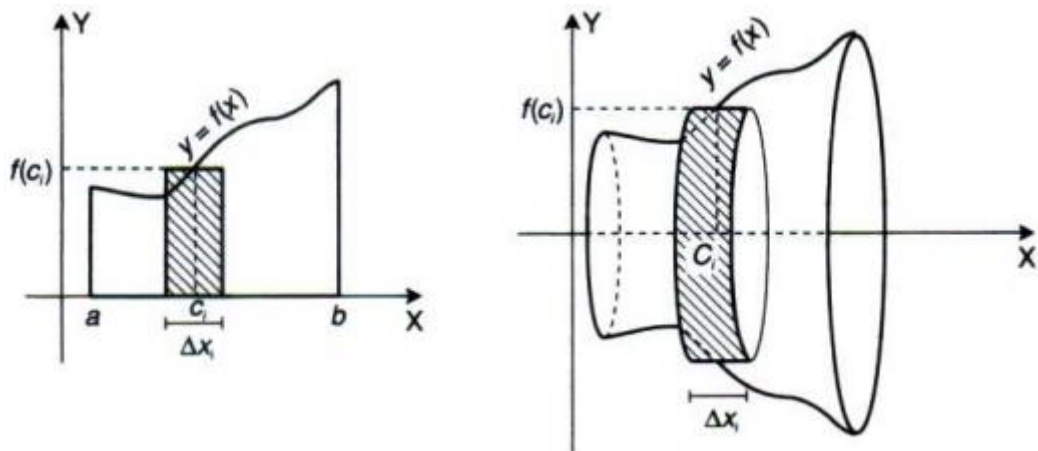
$$\pi[f(c_i)]^2\Delta x_i$$

Logo, a soma do volume dos n cilindros, que representaremos por V_n , é dada por:

$$V_n = \pi \sum_{i=1}^n [f(c_i)]^2 \Delta x_i$$

E nos dá uma aproximação do volume do sólido S .

Figura 4: Secção transversal do sólido formado por $f(x)$ no intervalo $[a, b]$



Fonte: Flemming e Gonçalves. 2006. Cálculo A, p. 347.

Concluindo, pela definição de Flemming e Gonçalves p. 347, seja $y = f(x)$ uma função contínua não negativa em $[a, b]$. Seja R a região sob o gráfico de f de a até b . O volume do sólido S , gerado pela revolução de R em torno do eixo dos x , é definido por:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n [f(c_i)]^2 \Delta x_i \quad (1)$$

A soma que aparece em (1) é uma soma de Riemann da função $[f(x)]^2$. Como f é contínua, o limite de (1) existe, e, então, pela definição da integral definida, temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

O mesmo ocorre quando o eixo de revolução é y em um intervalo $[c, d]$. No caso, o volume fica:

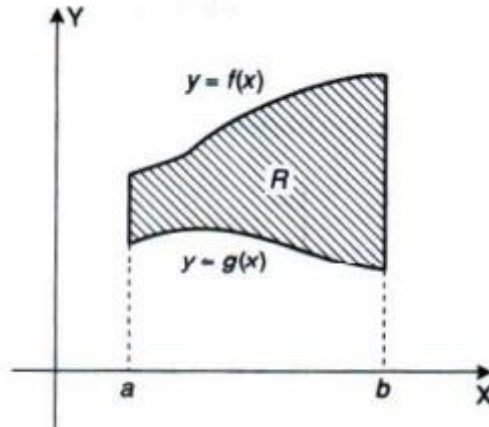
$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy$$

3.4.2 Método de Arruela

Este método é utilizado em caso em que a superfície de revolução é gerada por duas funções distintas. Nesses casos, o eixo de revolução não intersecta o sólido de revolução, resultando em um objeto com um orifício no meio. E então, as secções transversais não serão circunferências, mas sim arruelas, “circunferências com furo no meio”.

Para explicação deste método, Flemming e Gonçalves introduzem na seguinte maneira:

Figura 5: Região R formada por $f(x)$ e $g(x)$ no plano cartesiano



Fonte: Flemming; Gonçalves. 2006. Cálculo A p. 349.

Supondo $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, o volume do sólido formado a partir da rotação da região R em torno do eixo de revolução x é dado por:

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

Com base no exposto, os pareceres referentes a metodologias de ensino e os conhecimentos trazidos acerca de sólidos de revolução e seus cálculos, o trabalho possui como eixo principal, a construção de sequências didáticas para o ensino de sólidos de

revolução para turmas de ensino superior, levando como parâmetro, o método de resolução de problemas propostos por George Polya e utilizando como ferramenta de apoio o *Software* Livre GeoGebra.

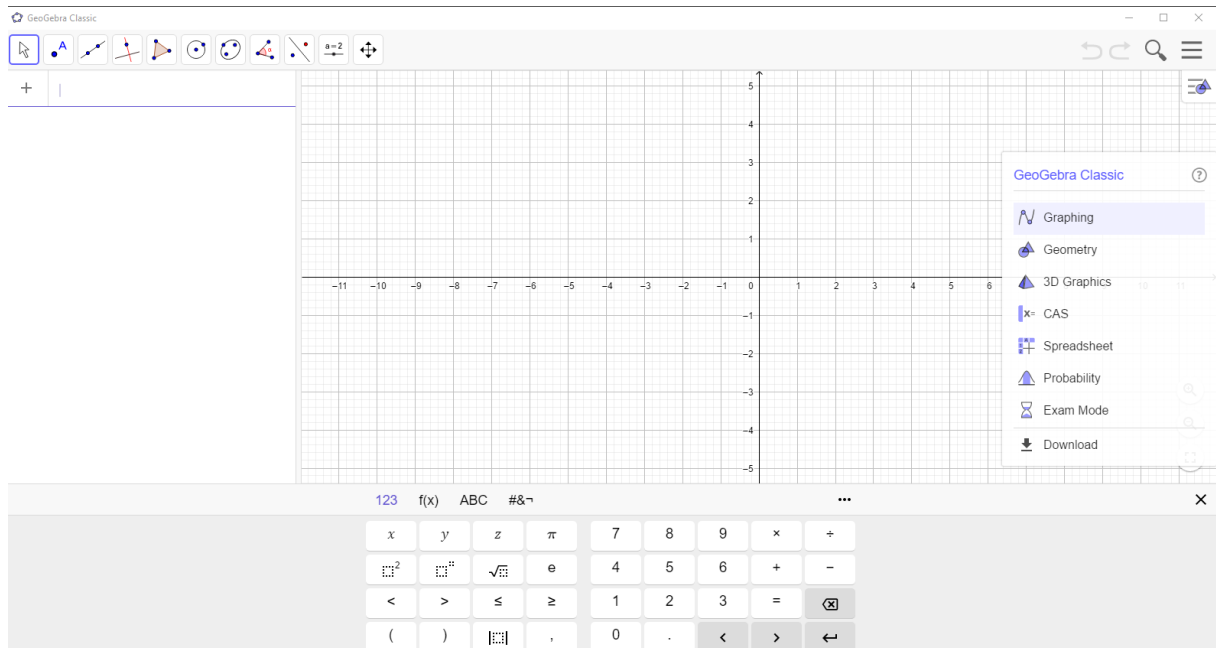
4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo estão apresentados, inicialmente, um passo a passo da utilização do *Software* Livre GeoGebra para construção de sólidos de revolução, conforme foram utilizados para resolução das sequências didáticas. Após, serão apresentadas questões pertinentes referentes a sólidos de revolução e o passo a passo para encontro da solução, conforme método de resolução de problemas proposto por George Polya.

4.1 GEOGEBRA

O GeoGebra é um *software* livre desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001 para o ensino da matemática nos vários níveis de ensino, do básico ao universitário. O aplicativo de matemática dinâmica combina geometria, álgebra e cálculos diversos, gráficos e estatística. O programa é disponível de forma gratuita para *download* tanto para computadores como celulares e possui uma linguagem de fácil compreensão. “O GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si” (NASCIMENTO, 2012, p. 113). O aplicativo possibilita a criação de sólidos de revolução, conforme será utilizado para facilitar a visualização na construção das sequências didáticas. A seguir, apresenta-se o procedimento para criação de sólidos de revolução no *software* GeoGebra Classic. Ao abrir o aplicativo, é apresentada a seguinte tela:

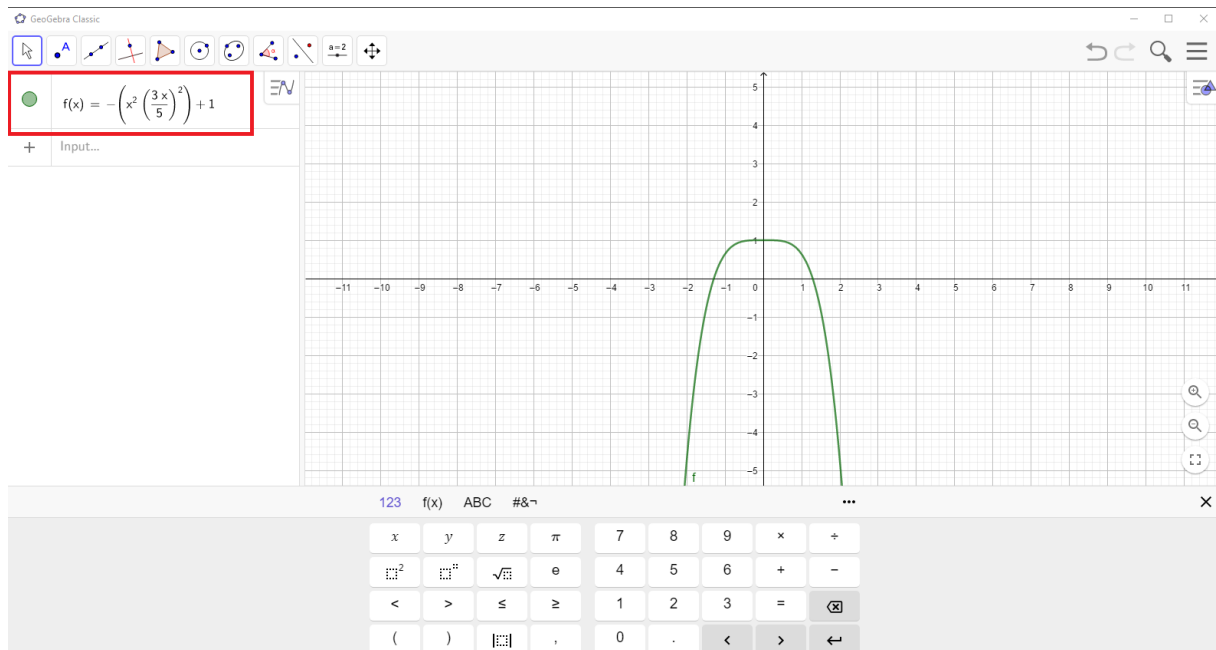
Figura 6: Tela de Abertura do *Software* GeoGebra Classic



Fonte: Autores, 2020.

Para construção da imagem, deve-se iniciar inserindo a função no campo conforme apresentado na figura abaixo:

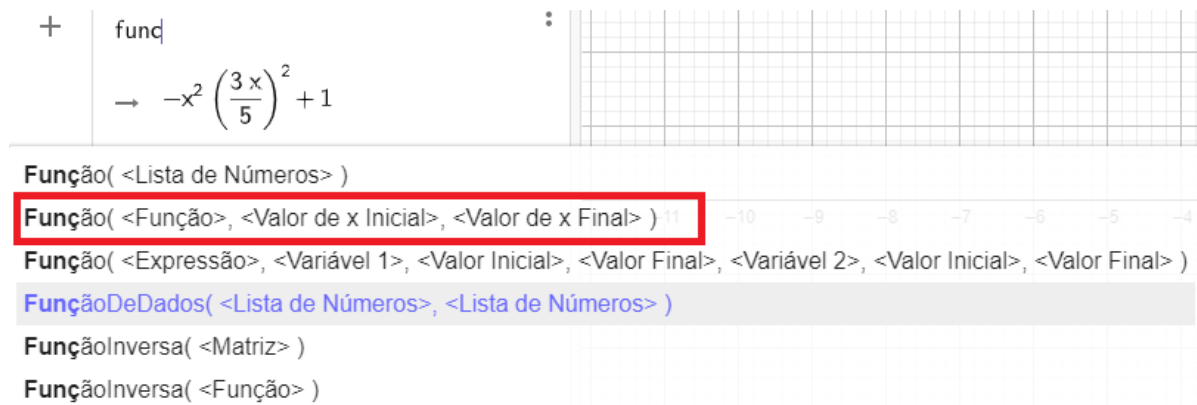
Figura 7: Inserção de uma função no *software* GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Observa-se que ao inserir a função, o programa automaticamente criará o gráfico. A próxima etapa consiste na delimitação de $f(x)$. Desta forma deve-se inserir a fórmula, escrevendo “**Função** (<Função>, <Valor de X inicial>, <Valor de X final>)” conforme imagem:

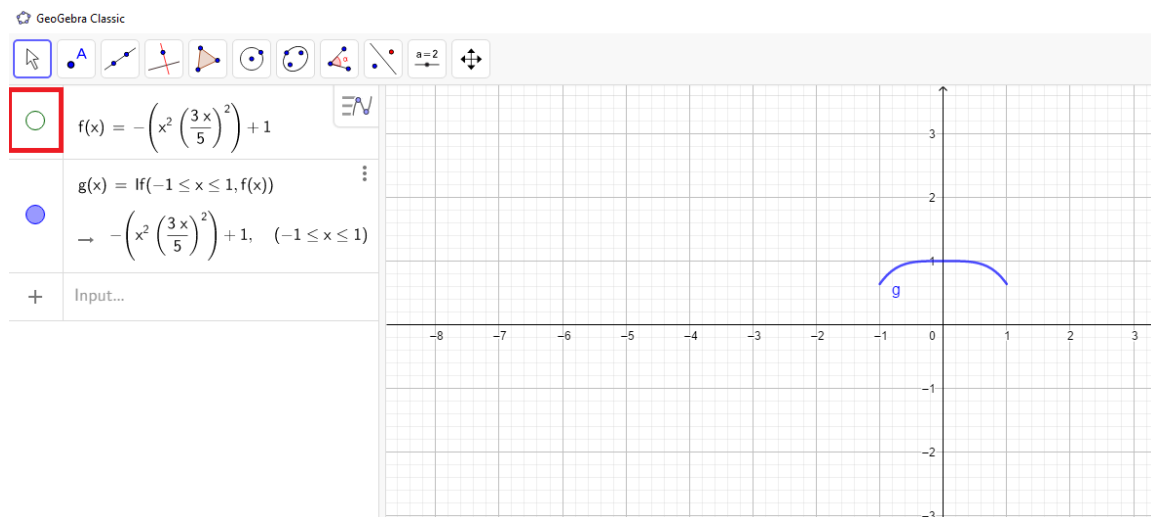
Figura 8: Comando de delimitação de função no *software* GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Selecionando a opção, deve-se informar os dados da fórmula, onde consta “Função” informa-se $f(x)$, em valor de x inicial e final informa-se **-1** e **1**, sucessivamente, ficando portanto, **Função($f(x)$,-1,1)**. Ao confirmar a função, note que o programa criará $g(x)$, correspondente à delimitação da função. Desse modo, deve-se desmarcar a função $f(x)$, de forma a facilitar a visualização, conforme imagem.

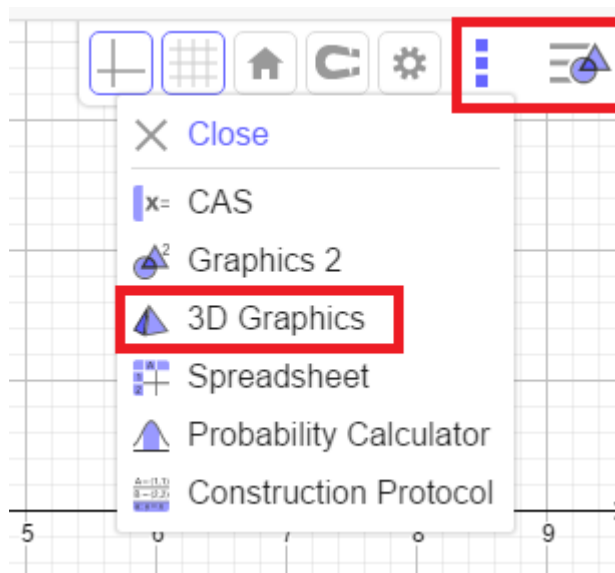
Figura 9: Opção para visualização no plano de uma ou mais funções e comandos informados no aplicativo GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Observa-se que ao desmarcar, ficará ilustrado apenas a imagem delimitada. O próximo passo consiste em realizar a visualização 3D da função, para isso, acessa-se o menu disponível no canto superior direito, conforme imagem:

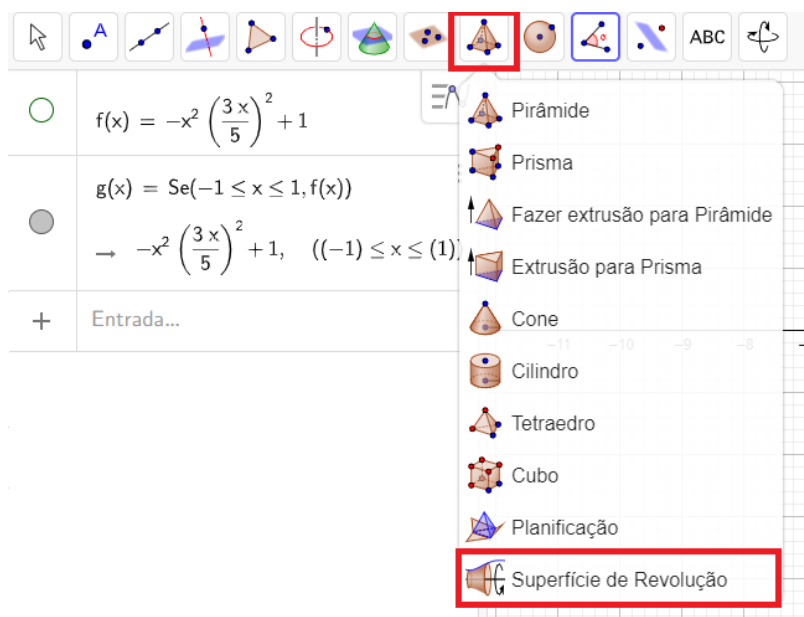
Figura 10: Acessando a janela de visualização 3D GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Ao selecionar a opção, a tela do GeoGebra se apresentará dividida entre a janela de visualização 2D e a janela 3D. Para a construção do sólido, a próxima etapa consiste em realizar a rotação da figura em torno do eixo X. Para isso utiliza-se a ferramenta **Superfície de Revolução**, disponível para a visualização em 3D. Para selecioná-la, basta acessar a opção conforme apresentado na imagem abaixo:

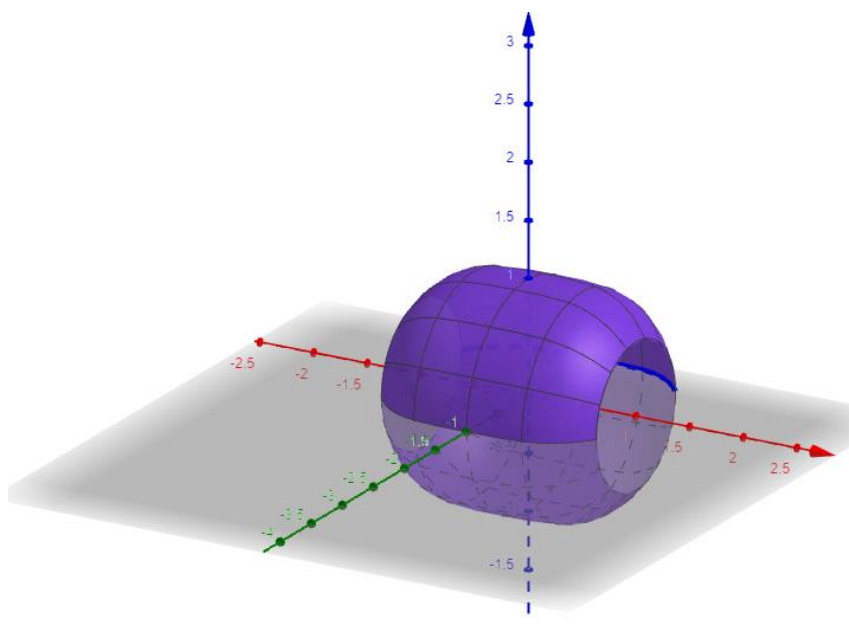
Figura 11: Construção de um sólido de revolução a partir de uma função através do *Software* GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Selecionado a opção, deve-se clicar na reta formada pela função na janela de visualização 3D. Observa-se que o aplicativo mostrará o sólido formado a partir da rotação da função em torno do eixo X.

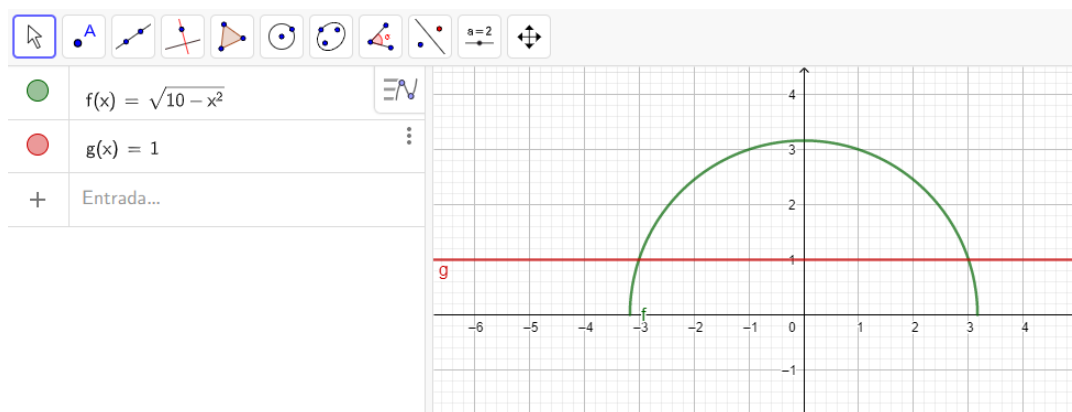
Figura 12: Sólido de revolução formado através do aplicativo GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Para construção de um sólido com mais de uma função o processo é semelhante ao apresentado. Inicia-se informando as funções no campo de entrada, que criará a função $f(x)$ e $g(x)$.

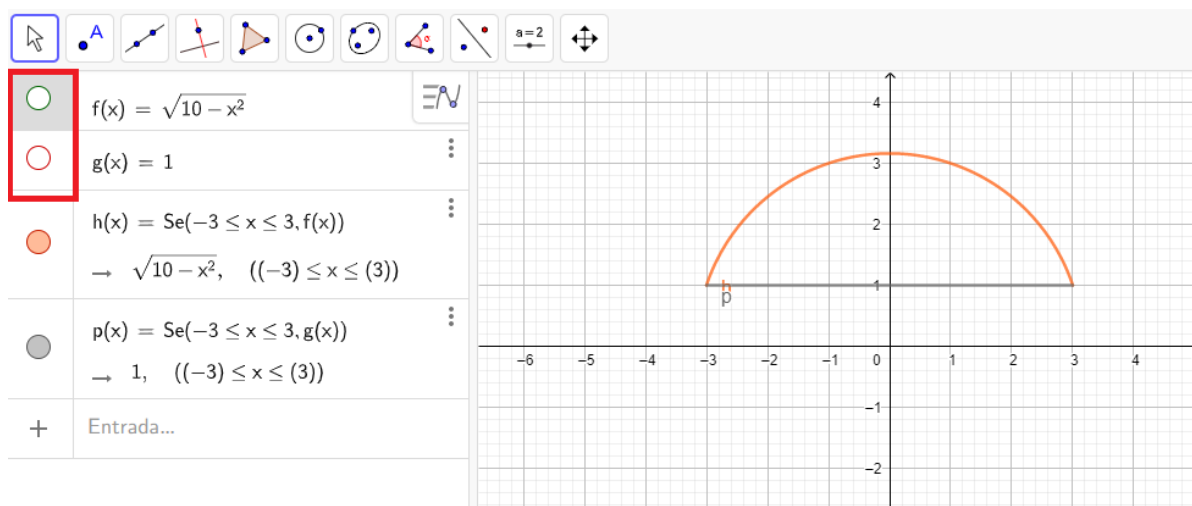
Figura 13: Construção de sólido de revolução a partir de duas funções



Fonte: Autores, 2020.

As funções se encontram em dois pontos $(-3;3)$ em função de x) nos quais iremos limitar as funções para a construção do sólido de revolução. Para delimitação utiliza-se o comando “**Função** (<Função>, <Valor de X inicial>, <Valor de X final>)”, porém como são duas funções, devemos dar entrada duas vezes, para $f(x)$ e outra para $g(x)$; **Função(f(x),-3,3)** e **Função(g(x),-3,3)**. Desmarcando a visualização de $f(x)$ e $g(x)$ teremos a seguinte visualização:

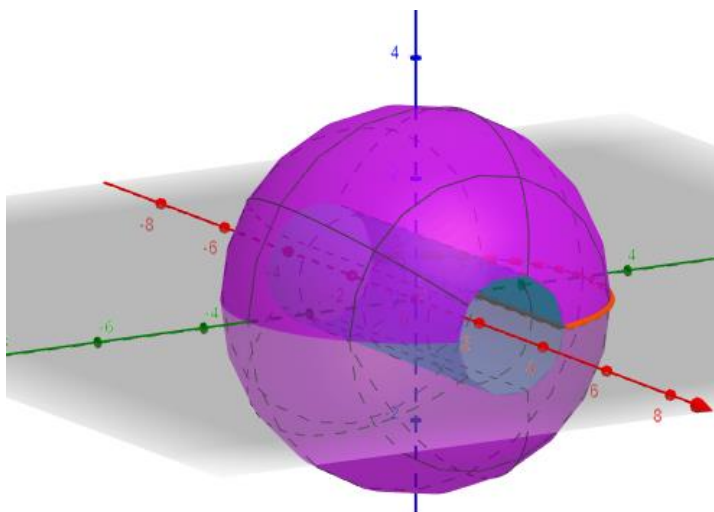
Figura 14: Visualização em 2D de um sólido de revolução de duas funções no aplicativo GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Em seguida, abrimos a janela de Visualização 3D e criamos a Superfície de Revolução, conforme os passos apresentados anteriormente. Selecionando a opção **Superfície de Revolução**, deve-se clicar em seguida sobre as duas linhas formadas através da função.

Figura 15: Sólido de revolução formado a partir de duas funções no GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Através da construção e visualização da figura formada, é possível ter um conhecimento mais significativo e uma definição melhor referente aos cálculos de volume de sólidos realizados em aula.

4.2 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Objetivos: Calcular volumes de sólidos geométricos a partir de conceitos de sólidos de revolução pelo método de disco.

Sequência didática: Para desenvolvimento da atividade vamos utilizar conceitos de sólidos de revolução discutidos na área de Cálculo Diferencial e Integral. Como recursos tecnológicos propomos a utilização do *software* gratuito GeoGebra.

4.2.1 Sólidos de Revolução - Método de Disco

Situação-problema 1: Dada a função $f(x) = -\left(\frac{9x^4}{25}\right) + 1$ determine e encontre o volume do sólido de revolução limitada em $(-1; 1)$. O formato do sólido será semelhante a um “barril”.

Aplicando o método de resolução de problemas proposto por Polya, temos:

a) **Compreensão do problema:**

O sólido de revolução que será trabalhado está associado a um “barril” pela sua semelhança com o objeto.

A função que cria a superfície de revolução é $f(x) = \frac{-9x^4}{25} + 1$ no intervalo $[-1, 1]$.

Para representação geométrica propõe-se a utilização do *software* GeoGebra.

b) **Estabelecimento de plano:**

O objeto foi, inicialmente, associado a um barril (deve-se representá-lo geometricamente com o auxílio do *software* GeoGebra). Na sequência, realizar a resolução do problema a partir dos conceitos de sólidos geométricos pelo método de disco, do qual se sugere utilizar a fórmula $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ que possibilitará encontrar por aproximação do volume do barril.

c) **Execução do plano:**

Com o auxílio do GeoGebra, visualiza-se a representação geométrica deste sólido, conforme mostram as figuras 16 e 17.

Figura 16: Sólido de revolução “barril” representado no GeoGebra

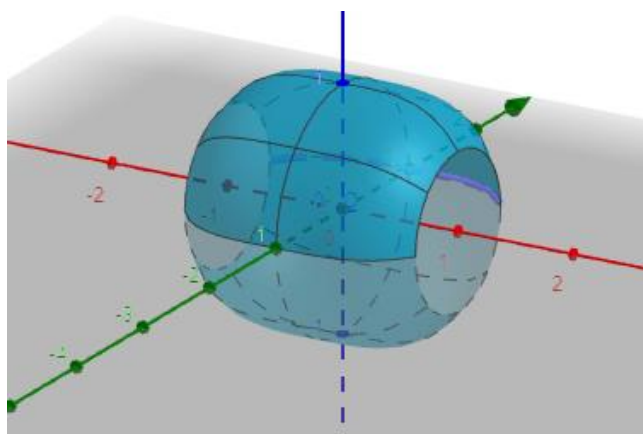
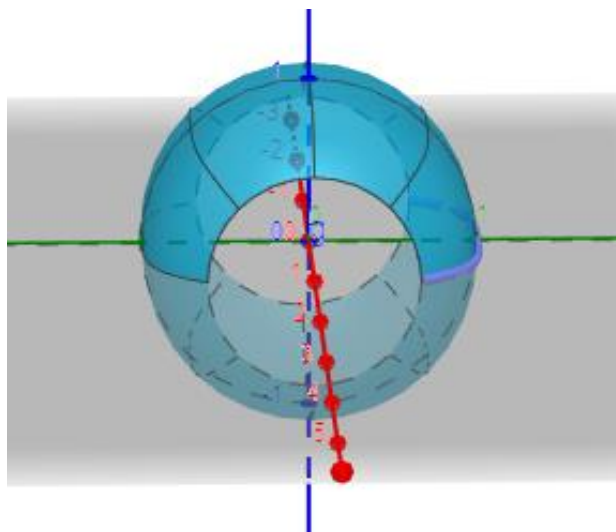


Figura 17: Visualização do sólido de revolução “barril” representado no GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Logo, apresentamos o cálculo do volume pelo Método de Disco:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left[\frac{-9x^4}{25} + 1 \right]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 \frac{81x^8}{625} + 1 dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{9x^9}{625} \right]_{-1}^1$$

$$V = \frac{18\pi}{625} u. v.$$

d) **Retrospectiva:**

O resultado obtido com o plano representa uma aproximação do volume para um barril, conforme estabelece a situação-problema, que teoricamente se mostra eficiente para uma situação hipotética.

Resultados esperados: Com a sequência didática espera-se que os alunos compreendam os conceitos de sólidos de revolução, fazendo uso do método de disco e consigam representar geometricamente os sólidos geométricos no GeoGebra.

Situação-problema 2: Um sólido de revolução pode ser construído a partir do giro no entorno de uma reta ou eixo. Encontre o sólido oval formado para a função $f(x) = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ limitada em $(-3; 3)$ e determine seu volume.

Aplicando o método de Polya para resolução de problemas, temos:

a) **Compreensão do problema:**

O sólido de revolução que iremos trabalhar possui um formato oval. A função que cria a superfície de revolução é $f(x) = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ no intervalo $[-3, 3]$. Com o auxílio do Geogebra pode-se visualizar a representação geométrica deste sólido.

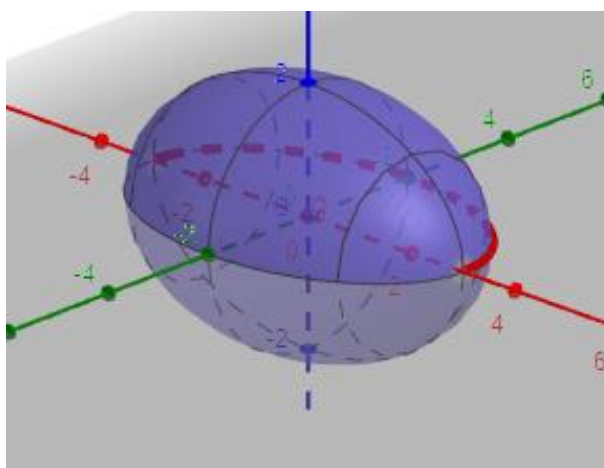
b) **Estabelecimento de plano:**

Realiza-se, inicialmente, a representação geométrica com o auxílio do *Software* Geogebra. Na sequência é proposta a resolução da situação problema utilizando conceitos de sólidos pelo método de disco, na qual utilizaremos a fórmula $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ para encontro aproximado do seu volume total.

c) **Execução do plano:**

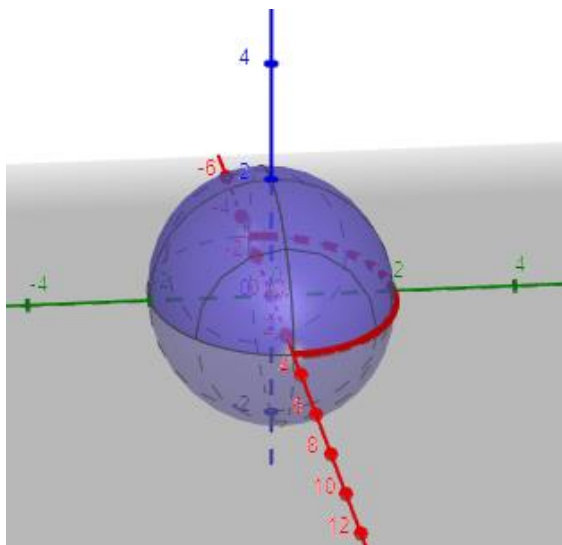
Visualização do sólido de revolução representado geometricamente com o auxílio do Geogebra, conforme figura 18 e 19.

Figura 18: Sólido oval representado no Geogebra



Fonte: Autores, 2020.

Figura 19: Visualização do sólido oval representado no Geogebra



Fonte: Autores, 2020.

Logo, seguindo o cálculo do seu volume pelo Método de Disco:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-3}^3 \left[2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \right]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-3}^3 4 - \frac{4x^2}{9} dx$$

$$V = \pi \cdot \left[4x - \frac{4x^3}{27} \right]_{-3}^3$$

$$V = 16\pi \text{ u. v.}$$

d) Retrospectiva:

O resultado encontrado através da execução do plano apresenta uma aproximação para o volume de um sólido no formato oval, conforme proposto na questão de uma situação hipotética.

Resultados esperados: Com a sequência didática, objetiva-se que os estudantes compreendam conceitos de sólidos de revolução se apropriando do método de disco e estejam aptos a representar sólidos geométricos no GeoGebra.

Situação-problema 3: Determine o sólido de revolução seno para a função $f(x) = \sin x + x + 2$ limitado de (0; 6) e calcule o seu volume.

Aplicando o Método de Polya, temos:

a) Compreensão do problema:

A questão que nos apresenta a função é $f(x) = \sin(x) + x + 2$ e o seu limite de (0;6) com a qual é possível determinar a superfície do Sólido de Revolução.

O sólido foi denominado de “sino” por conta de sua semelhança com o objeto, porém nesta representação ela se encontra na vertical.

Com o auxílio do GeoGebra, pode-se visualizar a representação geométrica deste sólido.

b) Estabelecimento de Plano:

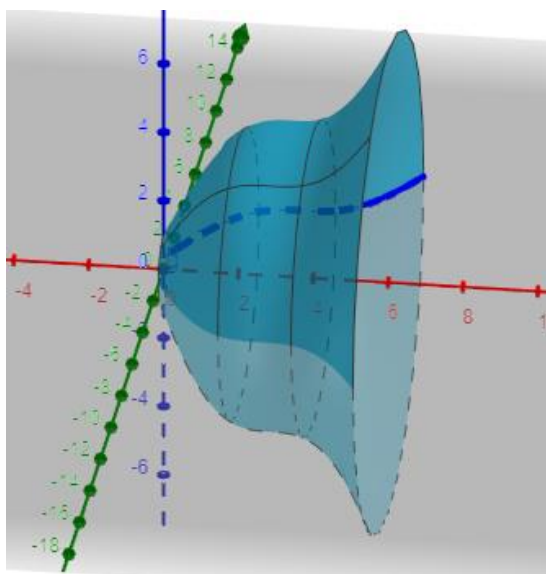
Inicialmente será representado o objeto geometricamente com o auxílio do *software* GeoGebra. Posteriormente, será calculado o volume total aproximado para o sólido, utilizando conceitos de sólidos pelo método de Disco, para o qual será utilizada a fórmula

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

c) Execução do Plano:

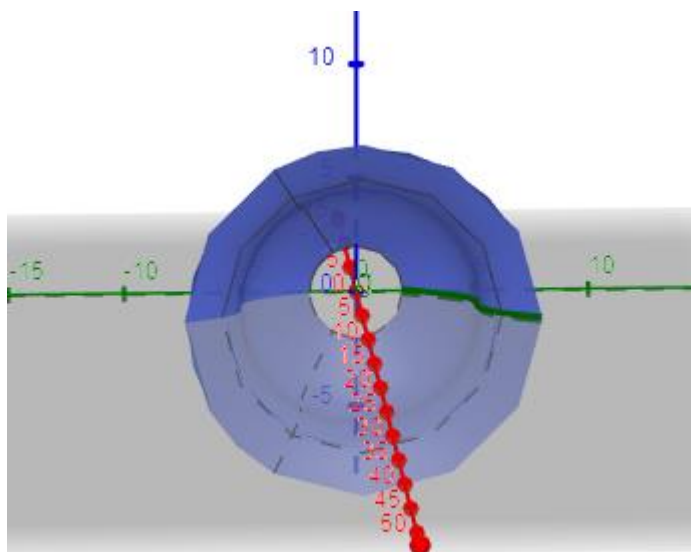
Projetando a função no GeoGebra, temos o Sólido, conforme imagem 20 e 21.

Figura 20: Sólido “sino” representado no GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Figura 21: Visualização do sólido “sino” representado no GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Logo, seguindo o cálculo do seu volume pelo Método de Disco:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^6 [\text{sen}(x) + x + 2]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^6 3\text{sen}^2(x) + 4\text{sen}(x) + x^2 + 4x + 4 dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + \frac{11}{2}x - \frac{3}{4}\text{sen}(2x) - 4\cos(x) \right] \Big|_0^6$$

$$V \cong 174\pi \text{ u. v.}$$

d) Retrospectiva:

O resultado obtido representa o volume aproximado para a figura sino hipotética, conforme solicitado na situação-problema apresentada, a qual se mostra eficiente para cálculo.

Resultados esperados: Com a sequência didática, espera-se que os estudantes desenvolvam habilidades para resolução de cálculos de sólidos de revolução através do método de disco e consigam realizar projeção geométrica de Sólidos de Revolução no Geogebra.

4.2.2 Sólidos de Revolução - Método de Arruela

Situação-problema 4: Sabendo que um sólido de revolução pode ser construído através de uma ou mais funções, calcule o volume total para o sólido bola com furo formado no intervalo das intersecções das funções $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$ e $g(x) = 1$.

Aplicando o método de Resolução de Problemas proposto por George Polya:

a) Compreensão do Problema:

O sólido de revolução que será trabalhado foi denominado de “bola com furo” pela sua formação conter um orifício em uma bola.

O sólido é formado por duas funções, sendo porém $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$ e $g(x) = 1$ sendo o intervalo encontrado através do ponto de encontro das funções após a representação no GeoGebra.

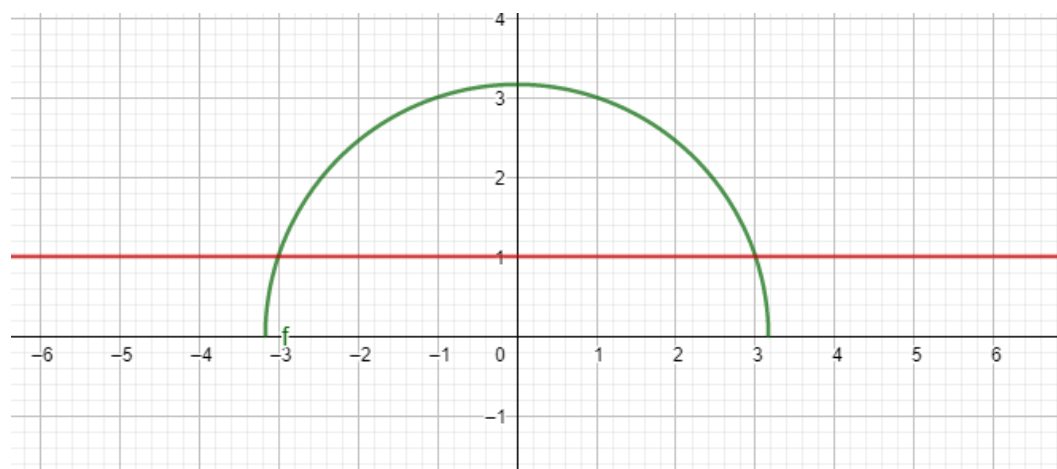
b) Estabelecimento de Plano:

Inicialmente será representado o sólido de revolução no GeoGebra e definido o limite da função. Em seguida, será realizado o cálculo para encontro aproximado do volume total do Sólido de Revolução, utilizando o Método da Arruela.

c) Execução do Plano:

Informando as funções no GeoGebra, conseguimos delimitar o sólido no intervalo de $(-3; 3)$, conforme figura 22.

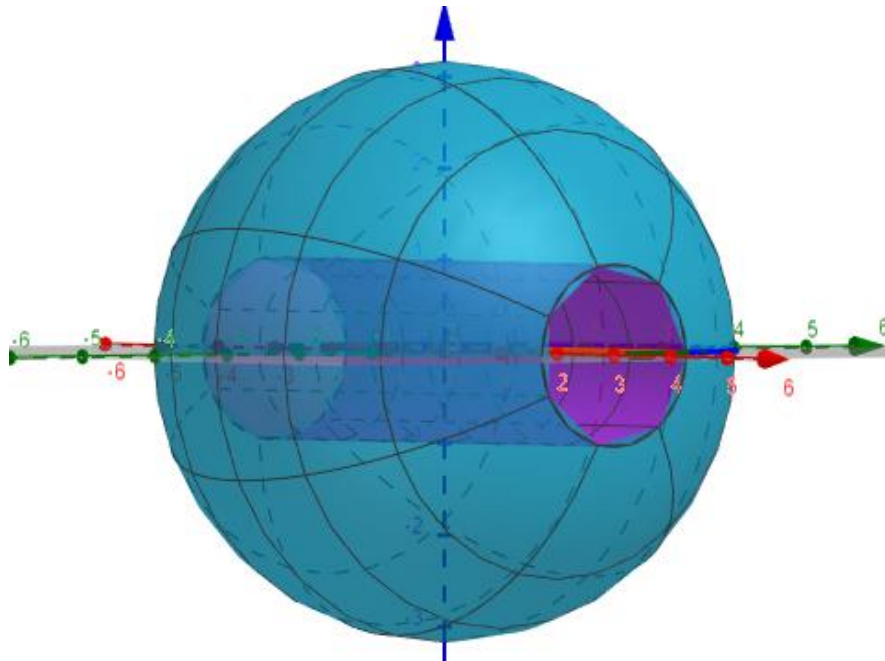
Figura 22: Aplicação das funções no GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

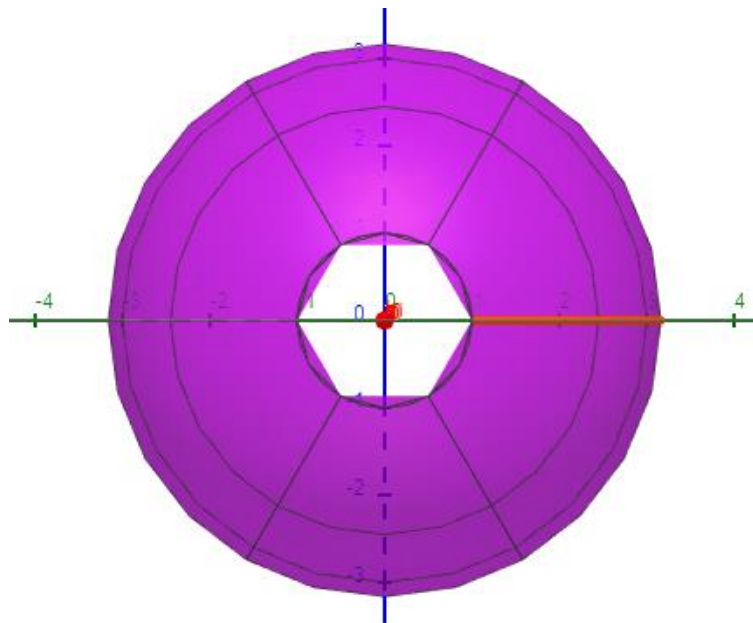
Após determinação do limite, projetando em 3D para visualização do Sólido, temos a projeção conforme apresentado na figura 23 e 24.

Figura 23: Sólido “bola com furo” representado no GeoGebra



Fonte: Os autores, 2020.

Figura 24: Visualização do sólido “bola com furo” representado no GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Logo, por serem duas funções, o cálculo do volume desse objeto será feito pelo Método da Arruela:

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

$$V = \pi \int_{-3}^3 \left([\sqrt{10 - x^2}]^2 - [1]^2 \right) dx$$

$$V = \pi \int_{-3}^3 10 - x^2 - 1 dx$$

$$V = \pi \cdot \left[10x - \frac{x^3}{3} - x \right]_{-3}^3$$

$$V = 36\pi \text{ u. v.}$$

d) **Retrospectiva:**

O resultado obtido representa o volume aproximado para o sólido bola com furo hipotético apresentado conforme estabelecido na situação-problema.

Resultados esperados: Com a sequência didática, espera-se que os estudantes compreendam os conceitos de sólidos de revolução e resolução através do método de arruela e consigam representar geometricamente os sólidos no GeoGebra.

Situação-problema 5: Determine o volume total do sólido de revolução pote formado pelo intervalo das intersecções das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x$

Aplicando o Método de Polya para Resolução de Problemas, temos:

a) **Compreensão do Problema:**

A questão apresenta duas funções e solicita o volume total do Sólido de Revolução encontrado através da delimitação de limite nos encontros da projeção das funções.

Para visualização, será utilizado o aplicativo GeoGebra, no qual será projetado o Sólido de Revolução formado.

Denomina-se o sólido de “pote” pela sua aparência ser similar ao objeto, no entanto, pelas funções formadoras este pote encontra-se na vertical.

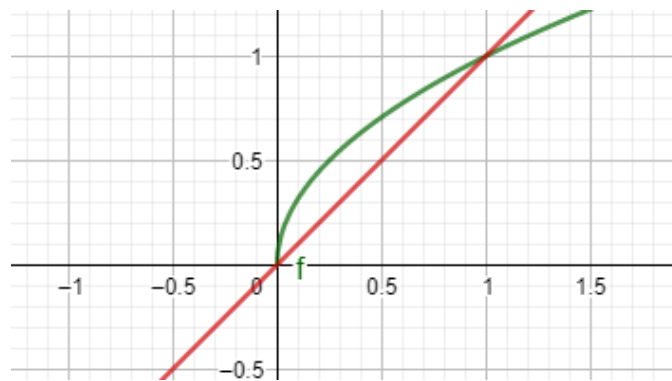
b) **Estabelecimento de Plano:**

Inicialmente será realizada a projeção no GeoGebra e determinado o limite para a função. Em seguida, será encontrado o valor aproximado para o volume total utilizando conceitos de sólidos através do Método de Arruela.

c) **Execução do Plano**

O sólido é traçado por duas funções sendo $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x$ onde a figura de revolução é formada no intervalo $[0, 1]$.

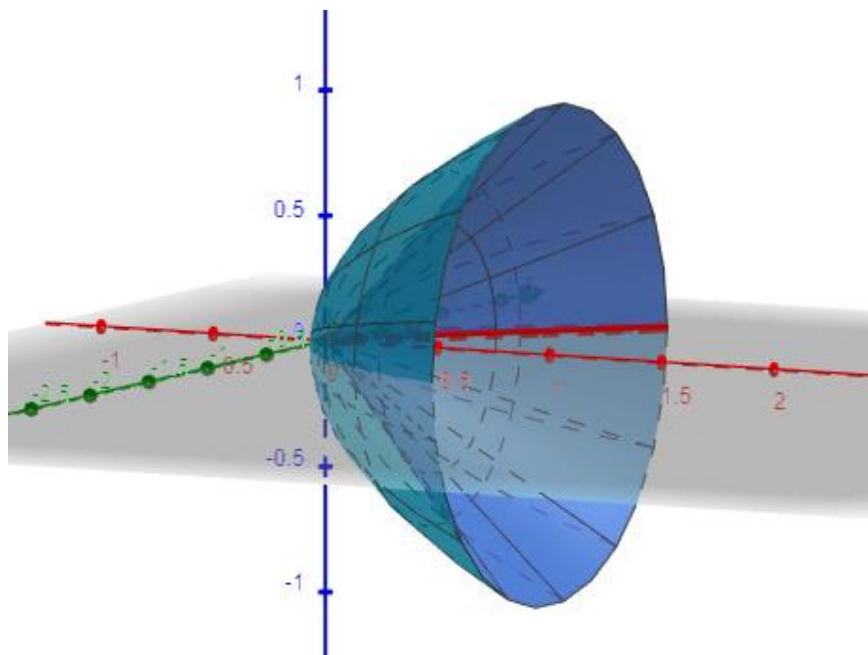
Figura 25: Aplicação das funções do Sólido “pote” no GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

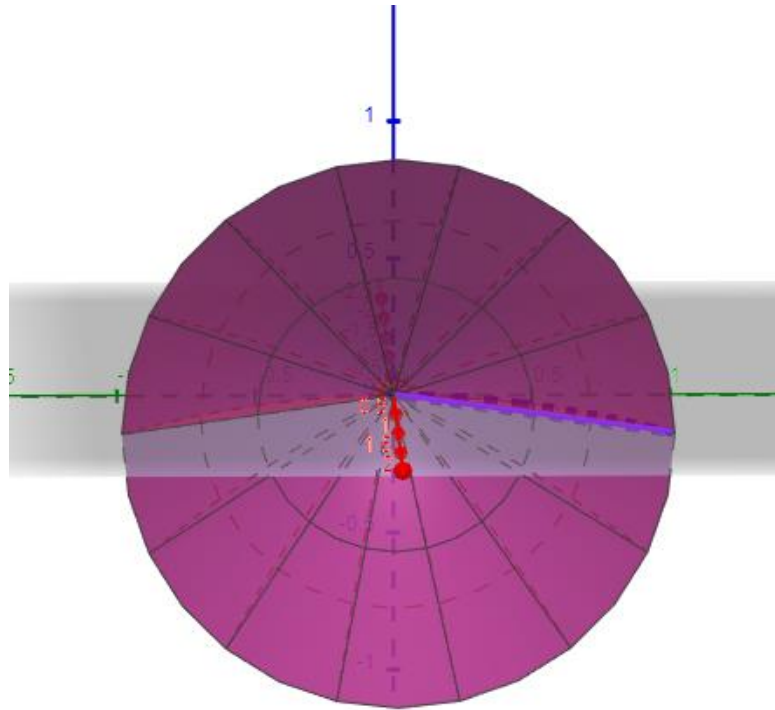
Com o auxílio do GeoGebra podemos visualizar a representação geométrica deste sólido, conforme figuras 26 e 27.

Figura 26: Sólido “pote” representado no GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Figura 27: Visualização do Sólido “pote” representado no GeoGebra



Fonte: Autores, 2020.

Logo, o cálculo do volume desse objeto realizado pelo Método de Arruela:

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

$$V = \pi \int_0^1 ([\sqrt{x}]^2 - [x]^2) dx$$

$$V = \pi \int_0^1 x - x^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$V = \frac{\pi}{6} u \cdot v.$$

d) **Retrospectiva:**

O resultado obtido representa o volume aproximado para o Sólido de Revolução pote hipotético, conforme proposto no problema.

Resultados esperados: Através da sequência didática, espera-se que os alunos desenvolvam habilidades para resolução de situações-problemas referentes a Sólidos de Revolução pelo Método de Arruela e estejam aptos a representar geometricamente os sólidos de revolução no GeoGebra.

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo a implementação da metodologia proposta por George Polya no processo ensino-aprendizagem do conteúdo de sólidos de revolução para o ensino superior, assim como uma abordagem sobre o Cálculo Integral, trazendo como foco a integral definida, para o cálculo de volume dos Sólidos de Revolução. Além disso, foi atribuído um recurso tecnológico de apoio, o *software* Geogebra, para interpretação das funções envolvidas nas sequências didáticas.

Foi investigado o processo de ensino-aprendizagem dos sólidos de revolução nos referenciais teóricos e atribuiu-se a proposta fornecida por George Polya para resolução de problemas que, no caso, envolve o volume de uma superfície após a sua revolução em torno de um eixo.

Foi relatado dois métodos envolvendo a ferramenta matemática Cálculo Integral para determinar o volume de sólidos formados por atribuição de funções que, limitadas em um certo intervalo e rotacionadas em torno de um eixo a fim de formar um sólido; corpos estes que tentamos aproximar o máximo possível de um objeto real.

Inicialmente foi questionado se a metodologia proposta por George Polya poderia contribuir para um melhor ensino-aprendizagem dos sólidos de revolução e, a partir do estudo feito, concluiu-se afirmando que esta metodologia acrescenta muito para a didática do tema. Visto, pois, com ela, o aluno terá que fazer uma interpretação do problema e retirar os dados da questão. Passos que são facilmente deixados de lado, induzindo ao erro. Sendo assim, conseqüentemente, contribuirá para o entendimento do assunto com uma visão clara e nítida, favorecendo a compreensão do conteúdo.

Os exercícios e sequências didáticas possíveis não se esgotam, sendo possível realizar outras investigações, como a modelagem de sólidos de revolução para posteriores cálculos. O trabalho possui como limitação, o curto espaço de tempo para sua elaboração, não havendo tempo hábil para a desejável aplicação da proposta em sala de aula com os estudantes a fim de validar de forma mais concreta, corroborando sua eficácia.

REFERÊNCIAS

- ALLEVADO, N.; VIEIRA, G. **Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem**, Quadrante, Vol. XXV, N.º 1, São Paulo (SP), 2016.
- ALTHAUS, N.; DULLIUS, M. M.; AMADO, N. M. P.; **Jogo computacional e resolução de problemas: três estudos de casos**, Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.1, pp. 17-42, 2016.
- ARAÚJO, G. L. D. de; ALVES, E. A. W.; AFONSO, R. F.; AZEVEDO, C. F.; SOUZA, G. N.; **Oficina brincar e educar: jogos matemáticos**, Viçosa – MG, 2009.
- BARON, M. E. **Curso da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. 5ª ed. Brasília: UNB, 1985.
- BATISTA, R. da C.; OLIVEIRA, J. E. de; RODRIGUES, S. de F. P.; **Sequência didática–ponderações teórico-metodológicas**, XVIII ENDIPE Didática e Prática de Ensino no contexto político contemporâneo: cenas da Educação Brasileira, ISSN 2177-336X, Alfale (MT), 2016.
- BOYER, C. B. **História da matemática**: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- BRASIL. **Secretaria de educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 1999.
- Cabral, N. F.; **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.
- CALDEIRA, M. F. T. H. S.; **A Importância dos Materiais para uma Aprendizagem Significativa da Matemática**, Tese de Doutorado, Facultad de Ciencias de la Educación, Málaga, Abril de 2009.
- COURANT, R. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. 621 p.
- DEVLIN, Keith. **O gene da matemática**. 5ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.
- DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. **Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento**. In: SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. (Orgs.). Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado das Letras, 2004.
- DULLIUS, M.; SCHOSSLER, A.; MACCALI, L.; MARCHI, M. I.; OLIVEIRA, E. C.; SCHOSSLER, D. C.; REGINATTO, V. P.; **Metodologias para o Ensino de Ciências Exatas**, Univates, Taquari (RS), 2011.
- E-scola – Aprender num Click. **Sólidos de Revolução**, disponível no endereço eletrônico < https://www.e-scola.edu.gov.cv/index.php?option=com_rea&id_disciplina=1&id_materia=6&id_capitulo=72&Itemid=220 > acessado dia 03/12/2020.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

FIGUEIREDO, F. F.; GROENWALD, C. L. O.; RECALCATI, L. A.; **A formulação e resolução de problemas com o uso de recursos tecnológicos digitais na Educação Matemática Financeira**, Revista de Educação Matemática e Tecnológica liberoamericana, Universidade Federal de Pernambuco, vol. 10 - número 2 – 2019.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração**, 6ª Edição – Revista E Ampliada, Florianópolis, 2006.

FULINI, M. A. **História do cálculo diferencial e integral**, São João Del-Rei, p. 56, 2016. Disponível em: <
http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/bitstream/handle/123456789/86/MARCIO%20ANTONIO%20FULINI_11929_assignsubmission_file_TCC%20Final%2003.12.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: out. 2020.

GAZZONI, A.; OST, A.; **A resolução de um problema: Soluções alternativas e variações na formulação**, VIDYA, v. 28, n. 2, p. 37-45, jul/dez, 2008.

GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração**. 6ª ed. Florianópolis: Makron Books do Brasil e Editora da UFSC, 2006.

LEÃO, D. M. M.; **Paradigmas contemporâneos de educação: Escola Tradicional e escola construtivista**, Cadernos de Pesquisa, nº 107, FACED - UFC, julho/1999.

LEITE, L. **Aprendizagem baseada na resolução de Problemas** – Características, organização e Supervisão. Boletín das Ciencias, Ano XIV Congresso de Enciga, 253 – 260, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3ª ed. São Paulo: Editora HARBRA Ltda, 1994.

LIMA, C. S. de; MIOTO, R. C. T.; **Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica**, Rev. Katál. v. 10 n. esp. p. 37-45, Florianópolis (SC), 2007.

MADEIRA, L. de L. **Sólidos de revolução: uma proposta de ensino**, Juiz de Fora, p. 78, 2014.

MAOR, E. e: **A história de um número**. Tradução de Jorge Calife. 4ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MEDEIROS, D M.; COSTA, P. T. **Sólidos de revolução e o Cálculo, uma extensão do estudo do volume e da área**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 2005, Ed. 03, Vol. 03, pp. 141-154.

MEDEIROS, M. de.; **O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula**, SEE-PE, 2012.

MELCHIORS, A.; SOARES, M. **História do cálculo diferencial e integral**, p. 13, Indaial. Disponível em: < <https://core.ac.uk/download/pdf/228914601.pdf> >. Acesso em: out. 2020.

MONTEIRO, I. T.; MASCARENHAS, D. F. M.; MORGADO, C. M. G. **Método de Polya e problemas verbais: estratégias de linearização sintático-semânticas**, *Sensos-e*, Vol.VI - n.2, 2019.

NASCIMENTO, E. G. A. do; **Avaliação do uso do Software Geogebra no Ensino de Geometria: Reflexão da prática na escola**, Universidade Federal do Ceará, Uruguaçu, 2012.

NETO, DJ. R. D. **VSR - apoio computacional para o estudo de volume de sólido de revolução**, p. 83, 2003. Disponível em: < <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/97041> >. Acesso em: out. 2020.

PAIVA, M. R. F.; PARENTE, J. R. F.; BRANDÃO, I. R.; QUEIROZ, A. H. B.; **Metodologias ativas de ensino-aprendizagem: Revisão Integrativa**, *SANARE*, Sobral - V.15 n.02, p.145-153, Jun./Dez. – 2016.

Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio), 2000. Disponível no meio eletrônico < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf> > visualizado dia 23/10/2020.

PATERLINI, R. R. **Aplicação da metodologia Resolução de Problemas abertos no Ensino Superior**, Departamento de Matemática – UFSCar, 2010.

PEDUZZI, L. O. Q. **Sobre a Resolução de Problemas no ensino da Física**, *Cad. Cat. Ens. Fis.*, v.14, n3: p.229-253, dez., Florianópolis, 1997.

PEREIRA, N. V.; ARAÚJO, M. S. T. de, **Utilização de recursos tecnológicos na Educação: caminhos e perspectivas**, *Research, Society and Development*, v. 9, n.8, e447985421, 2020.

PÓLYA, G.; **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTES, E. A. S.; **Método de Polya para resolução de problemas matemáticos: uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática na educação básica**, *HOLOS*, Ano 35, v.3, e6703, 2019.

POWELL, A. D.; YOKOYAMA, L. A. **Proposição de problemas colaborativos online: um estudo preliminar**, UFRJ, 2010.

RAUEN, F. J., **Roteiros de investigação científica** [recurso eletrônico] – 2ª ed. Ver. E atual. Tubarão (SC), 2018.

RAUTENBERG, R. R. **Os teoremas de pappus para os sólidos de revolução**. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

RICOY, M. C.; COUTO, M. J. V. S. **Os recursos educativos e a utilização das TIC no Ensino Secundário na Matemática**, *Revista Portuguesa de Educação*, 2012, 25(2), pp.241-262.

RODRIGUES, A.; MAGALHÃES, S. C.; **A resolução de Problemas nas aulas de Matemática: diagnosticando a prática pedagógica**, UNIS/MG, 2012.

SOUZA, A. V. P.; OHIRA, M. A.; PEREIRA, A. L.; **A arte de resolver problemas no ensino da matemática**, Revista Valore, Volta Redonda, 3 (Edição Especial): 376-389., 2018.

STEWART, J. **Cálculo**. volume I. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TEIXEIRA, L. H. O.; **A abordagem tradicional de ensino e suas repercussões sob a percepção de um aluno**, Revista Educação em Foco – Edição nº 10 – Ano: 2018.

VALENTE, J. A. **Informática na Educação no Brasil: Análise e Contextualização Histórica**, UFRGS, 1999.

VILCHES, M. A.; CORRÊA, M. L. **Integração definida: introdução**. In: VILCHES, MAURICIO A. Cálculo: volume I. Rio de Janeiro: Departamento de análise – IME, p. 325-331.

VIRGINO, F. de L. **Aplicações da integral definida na geometria espacial**: volume de sólidos de revolução, Rio Tinto, p. 65, 2020. Disponível em: < <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/18097/1/FJLV09042020.pdf> >. Acesso em: out. 2020.