UNISUL

UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

VANESSA ISABEL CATANEO

COMPREENSÃO CONCEPTUAL DE SISTEMAS LINEARES:
ESTUDO DE CASO COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA EM CELULARES

Tubarão

2020

UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA
VANESSA ISABEL CATANEO

COMPREENSÃO CONCEPTUAL DE SISTEMAS LINEARES: ESTUDO DE CASO COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA EM CELULARES

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ciências da Linguagem.

Prof. Dr. Fábio José Rauen (Orientador)

Tubarão

2020

C35 Cataneo, Vanessa Isabel, 1987-

Compreensão conceptual de sistemas lineares : estudo de caso com o software geogebra em celulares / Vanessa Isabel Cataneo. – 2020.

144 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (Doutorado) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Pós-graduação em Ciências da Linguagem.

Orientação: Prof. Dr. Fábio José Rauen

1. Semiótica. 2. Matemática. 3. Sistemas lineares - Estudo e ensino (Primeiro grau). 4. Aplicativos móveis. I. Rauen, Fábio José, 1965-. II. Universidade do Sul de Santa Catarina. III. Título.

CDD (21. ed.) 401.41

Ficha catalográfica elaborada por Carolini da Rocha CRB 14/1215

VANESSA ISABEL CATANEO

COMPREENSÃO CONCEPTUAL DE SISTEMAS LINEARES:
ESTUDO DE CASO COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA EM CELULARES

Esta Tese foi julgada adequada à obtenção do título de Doutora em Ciências da Linguagem e aprovada em sua forma final pelo Curso de Doutorado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 26 de junho de 2020.

____
Professor e orientador Fábio José Rauen, Doutor.
Universidade do Sul de Santa Catarina

presente por videoconferência

____
Professora Elizete Pozzamai Ribeiro, Doutora.
Instituto Federal Catarinense

presente por videoconferência

____
Professor Saddo Ag Almouloud, Doutor.
Pontifica Universidade Católica de São Paulo

presente por videoconferência

____
Professora Diva Marilia Flemming, Doutora.
Instituto Federal Catarinense

presente por videoconferência

____
Professora Maria Marta Furlanetto, Doutora.
Universidade do Sul de Santa Catarina

presente por videoconferência

____
Professora Silvânia Siebert, Doutora.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Nada depende do indivíduo isoladamente. Assim, dedico este trabalho a todas as pessoas que, ao longo de um processo contínuo, contribuíram para a minha formação educacional e para esta tese em particular.

AGRADECIMENTOS

A Deus, presença constante e vital de iluminação em minha vida.

A meus pais, Orlando e Valéria, por terem me dado à vida e serem meus primeiros e eternos educadores.

Ao meu irmão Anderson Cristóvão, pela amizade e por estar sempre torcendo pelas minhas conquistas.

Ao meu Amor Richard pelo carinho, incentivo e apoio incondicional.

Ao meu orientador Professor Dr. Fabio José Rauen, pelo estímulo, paciência, dedicação, amizade construída, minha eterna gratidão e respeito.

A todos os meus professores do Doutorado que souberam me guiar durante as pesquisas, contribuindo para a minha aprendizagem e crescimento intelectual.

Aos colegas do curso Ciências da Linguagem e do Grupo de Pesquisa em Pragmática Cognitiva, pelas horas de estudo e troca de experiências, em especial a Marleide Coan Cardoso e Bazilicio de Andrade Filho.

A direção da escola de Educação Básica Samuel Sandrini que possibilitou o contato com os estudantes, sujeitos fundamentais a pesquisa.

Aos estudantes do oitavo ano da escola Samuel Sandrini que colaboraram como sujeitos participantes desta pesquisa.

Ao Unibave, instituição de ensino na qual trabalho há 10 anos pelo incentivo em continuar me aperfeiçoando.

Aos professores desta banca de avaliação por seu tempo e pelas contribuições à pesquisa.

E, por fim, agradeço a todas as pessoas que de maneira direta ou indireta estiveram presentes nessa caminhada.

Muito obrigada!

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê” (Arthur Schopenhauer).

RESUMO

Título: Compreensão conceptual de sistemas lineares: estudo de caso com o *software* GeoGebra em celulares

Resumo: Verifica-se nesta tese – a partir das noções teóricas de conciliação de metas, relevância e registros de representação semiótica, e de atividades que demandam a conversão de representações mediadas pelo *software* GeoGebra em celulares – a potencialização da compreensão conceptual de sistemas lineares de 1º grau. Para tanto, elaborou-se uma sequência didática, que foi aplicada com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental da Escola de Educação Básica Samuel Sandrini de Orleans (SC) e avaliada em termos da pertinência da associação das teorias e da mediação do aplicativo. Os resultados sugerem que o uso individual consciente e planejado do aplicativo em sala de aula, como apoio para a interpretação gráfica e a classificação dos sistemas, contribuiu para o interesse e a produtividade dos estudantes, viabilizando a conversão de representações e auxiliando a aferir erros de tratamento. Além disso, o estudo sugere pistas de como operações cognitivas de identificação de unidades significativas, tratamento e conversão são orientadas por uma relação relevante de custos e benefícios cognitivos que, por sua vez, estão a serviço de um plano de ação intencional em direção a auto e/ou heteroconciliação de metas, sugerindo uma metodologia para elaborar e avaliar intervenções educacionais.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem de sistemas lineares do 1º grau. Aplicativos móveis em sala de aula. Conciliação de metas. Relevância. Registros de representação semiótica.

ABSTRACT

Title: Conceptual Understanding of Linear Systems: A Case Study with GeoGebra Software on Mobile Phones

Abstract: I verified in this thesis – from goal-conciliation, relevance and registers of semiotic representation theoretic notions, and through activities that require the conversion of representations mediated by GeoGebra software in cell phones – the increasing of the conceptual understanding of first-degree linear systems. So, I elaborated a didactic sequence, applied it with 8th-grade students from Samuel Sandrini Elementary School in Orleans (SC), and evaluated it in terms of the pertinence of the association of theories, and of the mediation of the application. The results suggest that the conscious and planned individual use application in the classroom, as a support for the systems graphics interpretation and classification, contributed to the students' interest and productivity, enabling the conversion of representations and helping the treatment. In addition, the study suggests pieces of evidence to understand how plans of intentional action toward goal self and/or hetero-conciliation superordinates relevant balances of cognitive costs and benefits, that superordinates the cognitive operations of identifying significant units, treatment, and conversion of semiotic representations, suggesting a methodology to elaborate and to evaluate educational interventions.

Keywords: Teaching and Learning of First-Degree Linear Systems. Mobile Applications in Classroom. Goal-Conciliation. Relevance. Registers of Semiotic Representation.

RESUMEN

Título: Comprensión conceptual de sistemas lineales: estudio de caso con el *software* GeoGebra en celulares

Resumen: Se verifica en esta tesis – a partir de las nociones teóricas de conciliación de metas, relevancia y registros de representación semiótica, y de actividades que demandan la conversión de representaciones mediadas por el software GeoGebra en teléfonos celulares – la potencialización de la comprensión conceptual de sistemas lineales de primer grado. Para eso, se elaboró una secuencia didáctica, que fue aplicada con estudiantes del 8º año de la Enseñanza Fundamental de la Escuela de Educación Básica Samuel Sandrini de Orleans (SC) y evaluada en términos de la pertinencia de la asociación de las teorías y de la mediación de la aplicación móvil. Los resultados sugieren que el uso individual consciente y planificado del software en el aula, como apoyo para la interpretación gráfica y la clasificación de los sistemas, contribuyó al interés y la productividad de los estudiantes, permitiendo la conversión de representaciones y ayudando a evaluar errores de tratamiento. Además, el estudio sugiere pistas de cómo operaciones cognitivas de identificación de unidades significativas, tratamiento y conversión están orientadas por una relación relevante de costos y beneficios cognitivos que, a su vez, están al servicio de un plan de acción intencional hacia a la auto- y/o hetero-conciliación de metas, sugiriendo una metodología para elaborar y evaluar intervenciones educativas.

Palabras-clave: Enseñanza y aprendizaje de sistemas lineales del primer grado. Aplicaciones móviles en el aula. Conciliación de metas. Relevancia. Registros de representación semiótica.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Conforme a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, cabe ao ensino fundamental desenvolver o letramento matemático enquanto "capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos" (BRASIL, 2018, p. 264)[1]. Para tanto, estabeleceram-se oito competências específicas, dentre as quais a quinta assume que os estudantes devem ser capazes de "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2018, p. 265).

Segundo o documento, a álgebra é uma das unidades temáticas da matemática, e a resolução algébrica, assim como a representação no plano cartesiano de sistemas de equações polinomiais de 1º grau, são objetos de conhecimento do 8º ano do ensino fundamental. Sobre esses conhecimentos, os alunos devem demonstrar habilidades para "resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso" (BNCC, 2018, p. 313, habilidade EF08MA08).

Segue-se dessa demanda, portanto, a necessidade de minimizar a distância entre a abstração e a aplicação em álgebra. Assim, embasada em teorias comunicacionais, propõe-se nesta tese que a promoção de uma aprendizagem com significado inclui condições para que o estudante, passando pela dimensão semântica, navegue de modo consciente e consistente da dimensão pragmática para a dimensão sintática e vice-versa[2].

---

[1] Conforme a BNCC, o distanciamento da matemática escolar com a realidade deve ser superado, de modo que o ensino deve partir de situações-problema que auxiliem o estudante a interpretar sua realidade. "Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem" (BRASIL, 2018, p. 277). Conforme o texto, essa é a razão que justifica a formulação "resolver e elaborar problemas envolvendo..." de algumas das habilidades formuladas. Resolver problemas não basta. É preciso que "os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada", ou ainda que "formulem problemas em outros contextos" (BRASIL, 2018, p. 277).

[2] Esta tese emerge do desejo da pesquisadora, como docente da disciplina de matemática nas séries finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e na Educação Superior, de pesquisar como o ensino da matemática pode tornar-se mais significativo para os estudantes. O interesse pelo ensino e aprendizagem de "sistemas lineares" como objeto de estudo surgiu do fato de a álgebra em geral e esse conteúdo em particular promover dificuldades recorrentes nas séries finais do Ensino Fundamental.

Argumenta-se neste estudo que essa trajetória somente acontece quando o indivíduo não somente observa determinada situação-problema da realidade (dimensão pragmática), atribui significado às variáveis relevantes desse problema em língua natural (dimensão semântica) e, a partir dessa atribuição de significado, conforme defende Duval (2009), converte essas variáveis em unidades significativas pertinentes do registro de representação algébrico, procede aos tratamentos que esse registro viabiliza, obtém o conjunto solução do problema (dimensão sintática) e é capaz de representá-lo graficamente; mas também quando elabora o caminho inverso, atribuindo em língua natural significado às unidades significativas dos registros de representação algébrico e gráfico que mapeiam variáveis pragmáticas relevantes da situação-problema.

Objetivamente, enquanto as aulas de álgebra ainda tendem a ser baseadas em definição, exemplos e reprodução, sem trocas, experiências ou conjecturas, cujo efeito é a manipulação de algoritmos sem compreensão dos conceitos envolvidos, o que se tem verificado em livros didáticos mais recentes do ensino fundamental[3] e nas avaliações nacionais de matemática[4] são justamente questões-problema que, partindo da linguagem natural em direção à linguagem simbólica, exigem do estudante a mobilização de conceitos e a conversão de sistemas semióticos para atingir a resolução.

Contudo, para promover uma aprendizagem significativa é necessário muito mais do que alterações nos materiais didáticos e nas formas como a aprendizagem é avaliada externamente. Reconhecer a importância da apreensão dos conceitos matemáticos é fundamental no planejamento docente. É por meio de um adequado planejamento que o docente pode criar condições com as quais o estudante pode superar dificuldades de aprendizagem, a exemplo da própria álgebra. No ensino de sistemas lineares, por exemplo, o docente precisa oferecer condições para que o estudante consiga apropriar-se do objeto matemático e, por consequência, seja capaz de interpretar situações-problema, organizá-las em sistemas de equações lineares e resolvê-las.

---

[3] Segundo Oliveira, essa mudança é interessante, pois o livro didático no Brasil tende a influenciar a forma como o ensino de matemática acontece em sala de aula. Para o autor (2006, p. 16), “o livro didático exerce grande influência no processo de ensino, pois, além de determinar o currículo a ser desenvolvido em sala de aula, constitui-se como importante instrumento pedagógico para o docente, já que lhe sugere conteúdo, metodologia e atividade”. Por exemplo, a introdução de sistemas lineares tem sido feita por situações-problema, seguidas de exemplos e exercícios que envolvem, além da álgebra, a linguagem natural e alguma representação gráfica. Além disso, alguns autores vêm usando representações gráficas para abordar as classificações dos sistemas lineares, a exemplo dos livros didáticos do oitavo e nono do Ensino Fundamental: *Matemática Bianchini* (BIANCHINI, 2015) e *Matemática Compreensão e Prática* (SILVEIRA, 2015). Sobre o tema, a propósito, vale conferir a análise do capítulo *Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas* do livro *Matemática compreensão e prática*, de Ênio Silveira, elaborada por Cataneo e Rauen (2018).

[4] Esse processo de ensino que busca partir de situações-problema para compreender o conceito matemático tem convergido, por exemplo, com as demandas das questões de matemática aplicadas em exames nacionais como a *Provinha Brasil*, as *Olimpíadas de Matemática* (OBMEP) e o *Exame Nacional do Ensino Médio* (ENEM). Estes exames vêm consistentemente apresentando questões que demandam a mobilização de relações, e a comparação e a interpretação dos dados.

Para dar conta dessa demanda, este estudo fundamenta-se na teoria dos registros de representação semiótica de Duval. Duval (2009) defende que a apreensão significativa de um objeto matemático só é possível mediante a conversão de uma representação elaborada em um registro de partida em outra representação elaborada em um registro de chegada. Para esse autor, a noção de representação é essencial em matemática, pois nessa área do conhecimento humano uma escrita, uma notação ou mesmo um símbolo representa objetos matemáticos abstratos, sejam eles números, equações, funções, sistemas, entre outros.

Nesse sentido, Duval considera estratégica a distinção entre objeto e representação na compreensão matemática. Se a meta que interessa à aprendizagem é o conhecimento do objeto matemático e se esse objeto é essencialmente formal, ou seja, uma abstração que não encontra sustentação empírica, há de se considerar que esse objeto nunca é diretamente acessível, a não ser por representações semióticas. Em outras palavras, "não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto e sua representação" (DUVAL, 2009, p. 14)[5].

Tome-se o conceito de "cinco", por exemplo. Esse conceito expressa um objeto matemático, mas não suas formas de representação. Esse objeto pode ser representado de inúmeras formas. Ele pode ser representado em diferentes sistemas de numeração, como o indo-arábico '5', o romano 'V', o binário '101'; por operações matemáticas como '$\sqrt{25}$', '$\frac{50}{10}$', '$\frac{1}{2}+\frac{9}{2}$'; ou também por figuras que o representam. Situações como essas demonstram que um objeto matemático pode ser acessado por distintos registros de representações instrumentais e intencionais, utilizadas conforme demandas contextuais. Para Duval (2009, p. 14), "é o objeto representado que importa e não as suas diversas representações semióticas possíveis".

Nesse contexto, dois aspectos essenciais do processo de compreensão em matemática devem ser distinguidos: a *noésis* e a *semiósis*. Visto que os objetos matemáticos nunca são acessados em sua totalidade, para ocorrer a construção conceitual de um objeto matemático a fim de se atingir uma aprendizagem significativa demandam-se relações entre *noésis* e *semiósis*. O conceito de *noésis* trata do processo consciente do trabalho cerebral, enquanto o conceito de *semiósis* trata da relação com os objetos imediatos.

---

[5] A propósito, vale destacar aqui que o ensino de matemática possui especificidades e requer metodologias de abordagem que viabilizem a compreensão de seus objetos formais. "Ensinar matemática não implica somente ensinar a lógica demonstrativa que lhe dá sustentação, mas também assimilar formas próprias de representação, uma vez que os objetos matemáticos necessitam de representações para serem acessados" (CARDOSO, 2015, p. 15). Segue-se que o acesso aos objetos matemáticos demanda compreender múltiplas formas de representá-los em sistemas de signos regidos por regras de formação propostas como universais, ainda que dependentes da linguagem natural como forma de comunicação, ensino e aprendizagem.

É no nível da *semiósis* que Duval (2009) sugere haver três atividades cognitivas essenciais: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. O autor trata por *formação de uma representação identificável* as unidades próprias de determinado registro de representação, por *tratamentos* as transformações das representações no próprio registro onde a representação foi formada e por *conversão* as transformações das representações entre diferentes sistemas ou registros de representação.

Duval (2009) argumenta sobre a importância de se mobilizarem distintos registros de representação para o estudo de um objeto matemático, uma vez que o estudo das representações é indispensável para a elaboração conceitual. Segundo ele, é por meio das representações que ocorre o processo de objetivação com o qual o indivíduo toma consciência de forma intencional de certos aspectos do objeto representado.

> Este caráter intencional das representações conscientes é essencial de um ponto de vista cognitivo, porque ele permite tomar conta do papel fundamental da significação na determinação dos objetos que podem ser remarcados por um sujeito. Em efeito, é sempre através da significação que se faz a apreensão perceptiva ou conceitual de um objeto. (DUVAL, 2009, p. 41).

Nesta perspectiva, este estudo visa a viabilizar a compreensão conceptual de sistemas lineares por estudantes das séries finais do Ensino Fundamental, assumindo ser essencial que eles saibam converter representações em diferentes registros semióticos. Para potencializar essas conversões, o estudo propõe a utilização de recursos informatizados.

Conforme Gravina e Santarosa (1998), ambientes informatizados podem acelerar o processo de apropriação de conhecimento, superando obstáculos de aprendizagem, na medida em que promovem a visualização, a experimentação, a interpretação e a demonstração, em ações que desafiam a capacidade cognitiva do estudante.

> [...] Ao trabalhar com os princípios da tecnologia educacional, o docente estará criando condições para que o aluno, em contato crítico com as tecnologias da/na escola, consiga lidar com as tecnologias da sociedade sem ser por elas dominado. Este tipo de trabalho só será concretizado de sua utilização (ou seja, porque e para que utilizá-las), quanto em termos de conhecimentos técnicos, ou seja, como utilizá-las de acordo com a realidade. (SAMPAIO; LEITE apud SOUZA, 2001, p. 83).

A interatividade viabilizada pela tela do computador, segundo Gravina e Santarosa (1998), oferece diferentes possibilidades de representação dos objetos matemáticos, pois permite ao estudante visualizar, representar e manipular essas representações, o que, conjectura-se, favorece o processo de aprendizagem.

Assumindo essa hipótese, pretende-se utilizar neste estudo o *software* GeoGebra, para, mediante a conversão de representações algébricas em representações gráficas e vice-versa, potencializar a compreensão do conceito e da classificação de sistemas lineares de 1º grau conforme suas possibilidades de solução. Em síntese, o que se busca nesta pesquisa é trabalhar com conversão de representações, tais como defendidas por Duval, empregando em sala de aula o *software* GeoGebra instalado em celulares dos próprios estudantes e assumindo que esse recurso é importante especialmente por viabilizar a conversão online dessas representações.

Além disso, neste processo de mobilização de diferentes registros, assume-se que o estudante tende a selecionar o primeiro registro pragmaticamente relevante ou eficiente para a solução de situações-problema. Dado que esse processo é idiossincrático, é legítimo pensar essa questão de um ponto de vista pragmático-cognitivo. Se isto estiver correto, entre muitas formas de abordar essa questão podem ser pensadas teorias fundamentadas no conceito de relevância, como defendido pela teoria da relevância – TR de Sperber e Wilson (1986, 1995).

A teoria da relevância é uma abordagem pragmático-cognitiva na qual o conceito de *relevância* é definido como uma propriedade potencial dos *inputs* direcionados à cognição, sejam eles enunciados, pensamentos, memórias, registros de representação, etc. Assumindo que o processamento de estímulos ostensivos comunicacionais por sistemas cognitivos com recursos cognitivos limitados como os dos seres humanos é inferencial e espontâneo, segue-se que a cognição humana deve alocar atenção e recursos de processamento a *inputs* que se mostrem mais relevantes. Em outras palavras, um *input* comunicacional ostensivo é relevante na medida em que seu processamento por um sistema cognitivo limitado vale a pena.

Para Sperber e Wilson (2001 [1986], p. 70), num modelo ostensivo-inferencial, "a comunicação é conseguida pelo reconhecimento por parte do ouvinte da intenção informativa da pessoa que comunica". Segue-se que a interpretação exige a atenção da audiência, antes mesmo do reconhecimento da intenção informativa do comunicador. Assim, a teoria está fundamentada numa economia de custos e efeitos cognitivos, de modo que uma informação é mais relevante na medida em que maiores forem os efeitos cognitivos ou menores forem os esforços de processamento.

Conforme Sperber e Wilson (2001 [1986], p. 95):

> No processamento de informações existe esforço; só será feito esse esforço na expectativa de alguma recompensa. Por isso, não interessa chamar a atenção de alguém para qualquer fenômeno, a não ser que pareça suficientemente relevante a essa pessoa para valer a pena prestar-lhe a sua atenção.

Rauen, por sua vez, assume que relevância é um predicado dependente de meta. Seguindo Lindsay e Gorayska (2004), afirma que “metas são representações simbólicas e abstratas de estados do mundo que podem ser objetos de planejamento” (2016, p. 1)[6]. Para ele, metas justificam e superordenam as ações desempenhadas pelo indivíduo, de forma que o indivíduo atribuirá relevância a *inputs* que se conectam com um propósito.

Neste sentido, Rauen (2013) propôs o que denominou *teoria de conciliação de metas* – TCM, cuja arquitetura descritivo-explanatória está organizada em quatro estágios. O primeiro estágio é o de formulação de uma meta *Q* e dá conta da projeção da meta. Os outros três estágios referem-se à formulação, execução e checagem de uma hipótese abdutiva antefactual *PQ*. Para o autor, os indivíduos podem ser propositivos ou proativos, agindo a partir de interesses predeterminados, de tal forma que os *inputs* são avaliados e ajustados a esses interesses. Em outras palavras, as ações são relevantes, na medida em que se ajustam aos interesses e às necessidades do indivíduo.

> Uma meta cognitiva decorre de, justifica-se por ou contribui para a elaboração ou a execução de metas finais, de maneira que sua especificação se associa a condições de satisfação que o agente acredita estarem alcançadas quando ele se encontra no estado de meta final. (RAUEN, 2016, p. 1, tradução da autora).[7]

Com base nesta constatação, o autor defende a hipótese de que ampliações cognitivas são abdutivas, de tal forma que a cognição é movida antes por uma conclusão presumida do que pela emergência de premissas. Assim, os indivíduos tendem a escolher premissas que melhor concorrem para a consecução de suas metas.

Considerando este argumento, um estudante que necessita resolver um problema matemático tem como *ponto de partida* ou *meta* algo como “atingir a resolução correta”. Para isso, abduz submetas para obter um resultado relevante que satisfaz suas expectativas iniciais. Neste contexto, o domínio dos distintos registros de representação semiótica é de fundamental importância, uma vez que um estudante que domina distintos registros de representação pode escolher rotas mais eficientes com menor custo de processamento.

---

[6] No original, “goals are abstract and symbolic representations of states of the world which can be considered objects of planning”. Conforme Lindsay e Gorayska (2004), metas podem ser cognitivas ou finais. Por metas cognitivas, define-se o conjunto de ações que se estabelece cognitivamente para se atingir uma meta final. Assim, quando se estabelece a meta cognitiva, mesmo que abstratamente, assume-se haver uma meta final.

[7] No original, “a *cognitive goal* stems from, is justified by, or contributes to the planning or execution of *final goals*. The specification of a cognitive goal is associated with conditions of satisfaction the agent believes are achieved when he/she is in the state of a final goal”.

Isso em mente, assume-se neste estudo que a *teoria da relevância* e a *teoria de conciliação de metas* são pertinentes tanto para planejar as atividades de ensino como para analisar as ações cognitivas desempenhadas pelos estudantes nos processos de formação de representações identificáveis, de tratamento de representações no interior de um registro de representação semiótica e na conversão de representações entre diferentes registros de representação semiótica, incluindo aqueles mediados pela tecnologia, necessários para a resolução de situações-problema envolvendo sistemas lineares do 1º grau.

Postas essas questões, este trabalho defende a tese de que a mobilização online e individual de representações pertinentes dos registros semióticos algébrico e gráfico no *software* GeoGebra instalado nos celulares dos estudantes, potencializa a compreensão conceptual de sistemas lineares. Em outras palavras, se o docente elaborar uma sequência didática enquanto plano de ação intencional em direção à heteroconciliação colaborativa de metas que privilegia processos de conversão, utilizando um aplicativo informatizado pertinente em celulares, então esse plano de ação intencional potencializará conversões conscientes e consistentes de representações semióticas algébricas e gráficas e, por consequência, a compreensão do conceito e da classificação de sistemas lineares do 1º grau.

Desse modo, propõe-se como **objetivo geral** verificar – a partir das noções teóricas de conciliação de metas, relevância e registros de representação semiótica, e mediante atividades que demandam a conversão de representações mediadas pelo *software* GeoGebra em celulares – a viabilização da compreensão conceptual de sistemas lineares de 1º grau.

Para dar conta desse objetivo, elegem-se como **objetivos específicos**:

a) elaborar uma sequência didática com situações-problema que, com apoio do *software* GeoGebra em celulares, demandem soluções por sistemas lineares do 1º grau;
b) aplicar a sequência didática com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental da Escola de Educação Básica Samuel Sandrini de Orleans (SC);
c) avaliar a sequência didática no que se refere à pertinência da associação das teorias de conciliação de metas, de relevância e de registros de representação semiótica e à mediação de recursos informatizados como potencializadores de uma apreensão significativa dos conceitos matemáticos em situações-problema que demandam soluções por sistemas lineares do 1º grau.

Para atingir esses objetivos, esta tese estrutura-se em mais cinco capítulos. No segundo capítulo, apresentam-se questões relacionadas com o ensino de sistemas lineares nos anos finais do ensino fundamental. No terceiro capítulo apresentam-se as teorias da relevância e de conciliação de metas. No quarto capítulo, expõem-se a metodologia da pesquisa e as quatro hipóteses que foram propostas para a análise dos resultados. No quinto capítulo apresenta-se a análise da aplicação da sequência didática. No sexto capítulo, apresentam-se as considerações finais do estudo, cotejando os resultados obtidos com os objetivos e as hipóteses do estudo e elencando limitações e potencialidades.

2 SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo, apresentam-se questões relacionadas com o ensino de sistemas lineares nos anos finais do Ensino Fundamental em três seções. Na primeira seção, destacam-se o conceito, a classificação e os métodos de resolução desses sistemas. Na segunda seção, destacam-se as noções centrais da teoria de registros de representação semiótica de Duval (2009). Na terceira seção, apresentam-se aspectos relativos à inserção de aplicativos informatizados no ensino e na aprendizagem desse conteúdo.

2.1 CONCEITO, CLASSIFICAÇÃO E MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), a matemática no Ensino Fundamental deve ser vista pelo estudante como um instrumento que o auxilia a compreender o mundo à sua volta e o estimula a desenvolver a capacidade de resolver problemas. Isto significa dizer que, mesmo sendo a matemática uma ciência hipotético-dedutiva em razão de se apoiar sobre um sistema de axiomas e postulados, é fundamental considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem matemática.

A BNCC orienta que os conteúdos de matemática sejam organizados por unidades de conhecimento que se encontram distribuídas em cinco eixos: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatísticas. Conforme o documento, o uso de sistemas de equação linear, relacionado ao eixo álgebra, pode ser visto como ferramenta de modelagem e resolução de situações-problema de tal modo que cada uma das equações do sistema é a expressão matemática de uma das condições da situação-problema.

O estudo da álgebra assume relevância na medida em que, além de viabilizar condições para a resolução de problemas, permite que o estudante desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização. É nesse momento da aprendizagem que se desenvolve um tipo especial de pensamento, o pensamento algébrico, “essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (BRASIL, 2018, p. 270). Esses símbolos ganham corpo na representação de sentenças matemáticas, como expressões algébricas e equações, de modo a contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes, visto ser necessária a tradução de uma situação em outras linguagens, como por exemplo, converter situações-problema apresentadas em língua natural em fórmulas, tabelas, gráficos e vice-versa.

Segundo a BNCC (2018, p. 313), é no oitavo ano do ensino fundamental que tem início o ensino de sistemas de equações lineares, assumindo, como já se antecipou na introdução, o objetivo de “resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso”.

Para a BNCC (2018, p. 276), a aprendizagem em matemática está intrinsecamente conectada com a compreensão dos objetos matemáticos, de modo que:

> Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.

No processo de ensino e aprendizagem, o docente deve ser capaz de organizar atividades que envolvam discussão e comparação de diferentes estratégias, de modo a viabilizar a compreensão da passagem de estratégias pessoais dos estudantes para estratégias formais. Além disso, o estudante precisa mobilizar a noção de relações, que é fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O conteúdo de sistemas lineares é um dos constituintes do currículo da matemática da educação básica. No ensino médio, este conteúdo é abordado com maior profundidade, envolvendo sistemas lineares em duas, três ou mais dimensões – R^2, R^3 e R^n – e suas diferentes representações. Este estudo, todavia, restringe-se ao ensino dos sistemas lineares em R^2, ou seja, organizados em duas dimensões, de acordo com o currículo de matemática para as séries finais do ensino fundamental, também denominado por “sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas”[8].

---

[8] Por se tratar de um estudo de sistemas lineares no ensino fundamental, isto é, de sistemas de equações do 1ºgrau com duas incógnitas, utilizaremos para melhores efeitos expositivos nesta tese, a expressão ‘sistemas lineares’ com o mesmo sentido de ‘sistemas de equações do 1ºgrau com duas incógnitas’.

Segundo Anton e Rorres (2001), uma equação linear consiste em uma linha reta no plano cartesiano em R^2. A expressão “linear” é empregada aqui porque o gráfico que se origina da equação é uma linha reta.

Uma equação linear em R^2 pode ser representada algebricamente por uma equação na forma:

$$a_1x + a_2y = b$$

onde $a_{1,}\ a_2\ e\ b$ são constantes reais. É importante destacar que uma equação linear não envolve quaisquer produtos ou raízes de variáveis, ou seja, todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais.

$x + 3y = 7$	Equação linear
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 10$	Equação linear
$x + 3\sqrt{y} = 5$	Não é equação linear, pois o expoente da incógnita y é $\frac{1}{2}$
$y = sen\ x$	Não é equação linear, pois é uma equação trigonométrica.

Para Kolman e Hill (2014), uma equação linear nas *n* variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode ser representada na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \text{ (1)}$$

onde $a_{1,}\ a_2, \ldots\ a_n$ e b são constantes reais e devemos encontrar o valor dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, chamados de incógnitas, que satisfazem a equação (1). Assim a solução de uma equação linear (1) é uma sequência de *n* números $s_{1,}s_2, \ldots, s_n$ que satisfazem a expressão (1) quando $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$,..., $x_n = s_n$ são substituídas nessa expressão.

Kolman e Hill (2014) explicam que um sistema de *m* equações lineares e *n* incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ou simplesmente um sistema linear, trata-se de um conjunto de *m* equações lineares, cada uma com *n* incógnitas. A representação algébrica genérica de um sistema linear pode ser convenientemente representada na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\quad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\quad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\quad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

onde $x_{1,}x_{2,}$ $x_{3,} \ldots, x_{n,}$ são as incógnitas, a_{ij} são os coeficientes e b_i são os termos independentes.

A solução de um sistema linear (2) é uma sequência de *n* números $s_{1,}s_2, \ldots, s_n$, que tem como propriedade o fato de que cada equação em (2) é satisfeita quando $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$,..., $x_n = s_n$ são substituídos em (2).

Conforme descrevem Kolman e Hill (2014, p. 29), "todo sistema de equações lineares tem ou nenhuma solução, ou exatamente uma, ou então uma infinidade de soluções". Segue-se dessa constatação que um sistema linear pode ser classificado em três tipos: a) *sistema impossível* (SI); b) *sistema possível e determinado* (SPD) e c) *sistema possível e indeterminado* (SPI).

Para ilustrar possibilidades de resolução de sistemas de equações lineares, considere-se um sistema arbitrário de duas equações lineares nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Cuja reta no gráfico é representada por l_1

Cuja reta no gráfico é representada por l_2

Estas equações são representadas graficamente por meio de retas identificadas como: l_1 e l_2. Um ponto (*x*, *y*) irá pertencer à reta se, e somente se, os números *x* e *y* satisfazem a equação da reta dada. A solução de um sistema de equações lineares está condicionada à existência de pontos de intersecção entre as retas l_1 e l_2.

Anton e Rorres (2001, p. 29) afirmam que as três classificações de um sistema linear podem ser assim justificadas:

> a) As retas l_1 e l_2 podem ser paralelas, caso em que não há intersecção e consequentemente não existe nenhuma solução do sistema.
> b) As retas l_1 e l_2 podem cortar-se em um único ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma solução.
> c) As retas l_1 e l_2 podem coincidir, caso em que existe uma infinidade de soluções do sistema.

Em relação à classificação dos sistemas lineares, cada caso admite um tipo de representação gráfica no plano cartesiano, de modo que a posição das retas no plano indicará qual é a classificação do sistema.

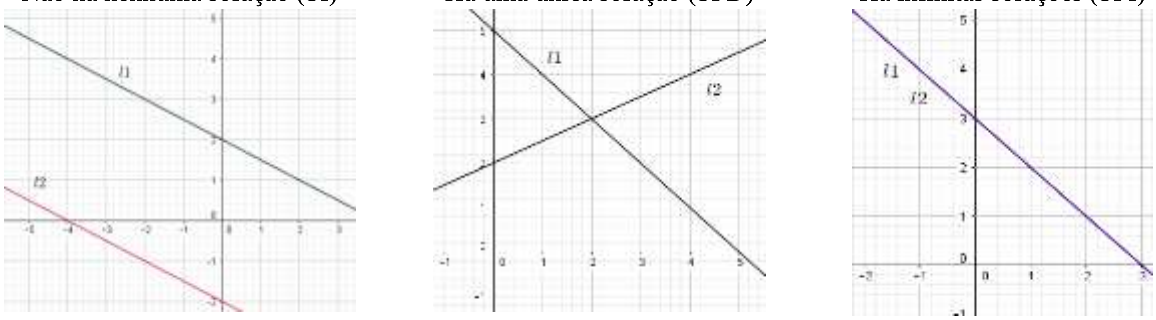
Neste sentido, apresenta-se na figura a seguir a representação das retas no plano cartesiano, conforme as três possibilidades de comportamento no registro gráfico.

Figura 1 – Classificação dos três tipos de sistemas lineares em relação à solução

l_1 e l_2 $são$ $r$etas paralelas
Não há nenhuma solução (SI)

l_1 e l_2 $são$ $r$etas concorrentes
Há uma única solução (SPD)

l_1 e l_2 $são$ $r$etas coincidentes.
Há infinitas soluções (SPI)



Fonte: Autora (2018).

No que diz respeito à resolução dos sistemas lineares no ensino fundamental, três algoritmos de resolução costumam ser abordados quase que exclusivamente pelo registro de representação algébrico: os métodos da *comparação*, da *substituição* e da *adição*, embora sistemas lineares possam também ser solucionados por *tentativa e erro*.

Veja-se o seguinte sistema de equações do 1º grau[9]:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Um indivíduo, utilizando o *método de tentativa e erro*, atribuiria valores para x e y, buscando encontrar um par ordenado que satisfizesse as duas equações do sistema. Os resultados dessas tentativas poderiam ser acomodados numa tabela que tornasse possível observar os resultados da substituição das incógnitas x e de y por sucessivos valores-tentativa. Como se pode ver na tabela a seguir, o conjunto solução $\boldsymbol{x = 7}$ e $\boldsymbol{y = 1}$ resulta da observação dos valores que satisfazem as duas equações do sistema.

[9] Exemplo desenvolvido em Cataneo e Rauen (2018).

Tabela 1 – Resolução do sistema de equações pelo método da tentativa:

x	y	$x+y=8$	$x-y=6$
2	6	$2+6=8$	$2-6=-4$
3	5	$3+5=8$	$3-5=-2$
4	4	$4+4=8$	$4-4=0$
5	3	$5+3=8$	$5-3=2$
6	2	$6+2=8$	$6-2=4$
7	**1**	$\mathbf{7+1=8}$	$\mathbf{7-1=6}$

Fonte: Cataneo e Rauen (2018, p. 145).

Caso o indivíduo estivesse utilizando o *método da comparação*, ele isolaria a incógnita y nas duas equações, a fim de compará-las.

$$y = 8 - x$$
$$y = x - 6$$

Em seguida, ele obteria o valor da incógnita x por comparação das equações:

$$8 - x = x - 6$$
$$8 + 6 = x + x$$
$$14 = 2x$$
$$x = \frac{14}{2}$$
$$\boldsymbol{x = 7}$$

Por fim, ele obteria o valor da incógnita y em uma das equações pela substituição do valor da incógnita x:

$$y = 8 - x$$
$$y = 8 - 7$$
$$\boldsymbol{y = 1}$$

Caso o indivíduo optasse pelo *método da substituição*, ele isolaria a incógnita x em uma das equações, por exemplo na primeira:

$$x + y = 8$$
$$x = 8 - y$$

Em seguida, ele obteria o valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $8 - y$:

$$x - y = 6$$
$$(8 - y) - y = 6$$
$$-y - y = 6 - 8$$

$$-2y = -2\,(-1)$$
$$2y = 2$$
$$y = \frac{2}{2}$$
$$\boldsymbol{y = 1}$$

Por fim, ele obteria o valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y:

$$x - y = 6$$
$$x - 1 = 6$$
$$x = 6 + 1$$
$$\mathbf{x = 7}$$

Finalmente, caso optasse pelo *método da adição*, o indivíduo obteria e resolveria a equação com uma incógnita pela adição membro a membro das equações de origem:

$$+\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$$
$$2x + 0y = 14$$
$$2x = 14$$
$$x = \frac{14}{2}$$
$$\boldsymbol{x = 7}$$

Por fim, ele obteria o valor da incógnita remanescente pela substituição da variável conhecida em uma das duas equações:

$$x + y = 8$$
$$7 + y = 8$$
$$y = 8 - 7$$
$$\boldsymbol{y = 1}$$

Conhecidos o conceito, a classificação e os métodos de resolução dos sistemas lineares, as noções centrais da teoria de registros de representação semiótica serão postas em cena na próxima seção.

2.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A formalização em matemática exige da mente humana a capacidade de operar com objetos abstratos. Segundo Rauen (2014, p. 43), “os critérios de cientificidade aplicados às ciências formais têm a ver com sua capacidade de validação ou de demonstração, e não com sua correlação com a realidade externa”. Nas ciências formais, como a matemática e a lógica, as sentenças são analíticas, visto que a condição de verdade independe de sua existência no mundo físico. Assim, a linguagem matemática possui um código semiológico próprio, exigindo do estudante que, além de aprender o conceito, também domine os respectivos símbolos e algoritmos.

A linguagem matemática constitui-se de um conjunto de símbolos vazios. Trata-se de formas sem conteúdo existencial. As representações dos símbolos que constituem a proposição matemática ‘$x^2 + 10 = 46$’ assumem significado a partir das línguas naturais e é no ensino da matemática que se revela a íntima relação entre essas distintas formas de representação. De um lado, há a linguagem formal que é inerente aos objetos matemáticos e suas representações; de outro, há a língua natural, veículo com o qual se processa a comunicação para que haja a transposição didática desses conteúdos (CARDOSO, 2015). Irremediavelmente, a língua natural se impõe de modo alternado ou simultâneo como mediador simbólico para ensinar e aprender matemática, conforme Santos (2009), e é justamente na interface das duas formas de linguagem que o docente atua. Nessa perspectiva, a linguagem natural é essencial para o ensino e a aprendizagem da matemática e, muitas vezes, dificuldades de compreensão podem estar relacionadas à sua própria estrutura, bem como suas contradições, deslocamentos, equívocos e ambiguidades.

Campos (2014, p. 3) argumenta que:

> A linguagem simbólica da matemática, embora fundamentalmente diferente da [língua] natural, é, como ela, uma criação humana. Apenas que, enquanto a primeira atinge um grande rigor e precisão em seus fins específicos, a segunda, em seu caráter histórico-social, desenvolve-se como um meio para diversos modos de expressão e comunicação, tornando-se, então, adequadamente flexível para os seus objetivos. À medida que sua utilização vai muito além da pura veiculação da verdade ou falsidade dos pensamentos, a linguagem natural em seus termos e formas gramaticais não reflete necessariamente, as formas lógicas do pensamento, constituindo-se, nesse sentido, num instrumento de mediação inadequado e problemático.

Além disso, a interpretação das informações comunicadas pelo docente depende não só do domínio linguístico, mas também da capacidade do estudante de mobilizar e compreender os registros de representação simbólicos da matemática. Por exemplo, se em língua natural a expressão 'um quarto' pode representar também um cômodo da casa, em linguagem formal esse significado se estreita para dar conta da noção de uma quarta parte, representável por '0,25' ou '$\frac{1}{4}$', por exemplo.

Neste sentido, dificuldades apresentadas pelos estudantes em matemática não decorrem apenas de problemas de tratamento da linguagem formal, ou seja, dos procedimentos de cálculo necessários como os algoritmos, símbolos, gráficos, equações, dentre outros. No processo de ensino e aprendizagem da matemática, além de lidar com linguagem formal, ao mesmo tempo restrita em certos aspectos e ampla em outros, docentes e estudantes enfrentam problemas inerentes ao domínio da língua natural.

Vale destacar que as representações desempenham função indispensável no ensino e na aprendizagem de matemática, visto que é somente por meio delas que os objetos matemáticos são acessados e exteriorizados. É por esse motivo que há nesta tese reflexões sobre os registros de representação semiótica mobilizados nestas ações.

Segundo Duval (2009), os registros de representação cumprem a função de representar semioticamente os objetos matemáticos. Conforme Duval (2009), a apreensão cognitiva dos objetos matemáticos requer a utilização de sistemas de expressão e de representação, além da linguagem natural ou das imagens, pois os objetos matemáticos não são espontaneamente inteligíveis à percepção ou em uma situação intuitiva imediata.

Duval (1993, p. 38-39) define essas representações como:

> [...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que se inserem em diferentes sistemas semióticos.

Segue-se disso que a garantia de apreensão de um objeto matemático não é determinada por representações ou por várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas pela coordenação entre estes registros de representação. A compreensão em matemática ocorre quando há a intersecção da *semiósis* e da *noésis*, de modo que o funcionamento cognitivo do pensamento demanda pela conexão entre elas.

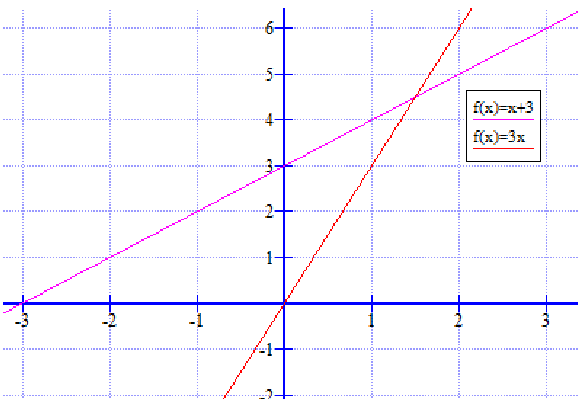
Como se antecipou na introdução, por *noésis* Duval concebe o processo consciente do trabalho cerebral que envolve a conceptualização do objeto matemático e por *semiósis*, entende a significação em função do contexto. Trata-se da relação com os objetos imediatos. Em resumo, enquanto os objetos matemáticos fazem parte do conhecimento noético, as múltiplas formas de representá-los fazem parte do conhecimento semiótico.

Duval (2009) afirma que há três atividades cognitivas numa semiose: a formação de uma representação identificável no interior de um registro semiótico, o tratamento no interior de um registro semiótico e a conversão entre diferentes registros semióticos.

A *formação de uma representação identificável* corresponde às unidades e às regras de formação próprias de determinado registro de representação. “Essa formação implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que ‘queremos’ representar” (DUVAL, 2009, p. 53), seja ela uma representação mental ou de um objeto real. Veja-se, por exemplo, a escrita de uma fórmula e as regras algorítmicas a ela pertinentes.

Segundo Duval, o estudante que consegue reconhecer em certo gráfico somente uma de duas retas correspondentes às equações ‘$y = 3x$’ e ‘$y = x + 3$’ não estaria apto a discriminar o que as retas representam. Isso ocorre porque a formação de uma representação identificável “implica a seleção de certo número de caracteres de um conteúdo percebido, imaginado ou já representado em função de possibilidades de representação próprias ao registro escolhido” (DUVAL, 2009, p. 56).

Figura 2 – Representação gráfica das funções $y = 3x$ e $y = x + 3$



Fonte: Autora (2018).

Situações como esta levam Duval (2008, p. 27) a defender que:

> Do ponto de vista cognitivo, os acertos elementares não são determinados por cada item separadamente, mas por reagrupamentos de itens, porque esses acertos só podem ser definidos em termos de discriminação: é necessário ser capaz de reconhecer no que diferem duas representações cujos componentes significantes, salvo uma, são as mesmas, ou que superficialmente parecem diferir somente por uma única componente, a qual na realidade combina duas diferenças.

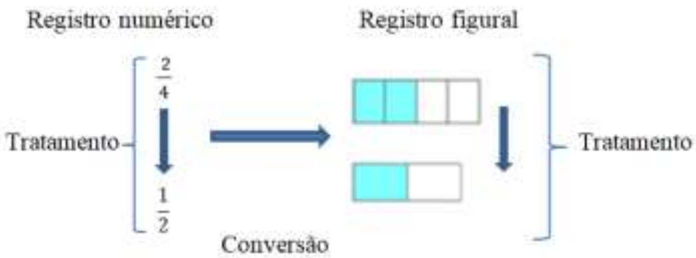
Os *tratamentos*, por sua vez, são transformações das representações no interior do registro onde a representação foi formada.

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação de números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria. (DUVAL, 2008, p. 16).

Diferente do tratamento, a *conversão* ocorre entre diferentes sistemas de representação, ou seja, ela extrapola o registro de partida, de modo que seu resultado lhe é exterior. “As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica” (DUVAL, 2003, p. 16).

Podemos, por exemplo, analisar a atividade de tratamento quando simplificamos uma fração ou quando operamos uma nova representação dentro do mesmo registro, e a atividade de conversão quando passamos de uma representação do registro numérico (fração) para uma representação no registro figural, como pode ser visto na figura a seguir.

Figura 3 – Transformações de representações semióticas



Fonte: Autora (2018).

Parafraseando Duval (2008, p. 16), do ponto de vista da linguagem matemática a conversão intervém apenas para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados serão mais econômicos (rápidos) e potentes ou, então, para se obter um segundo registro que serve de suporte aos tratamentos executados em outro registro. No entanto, do ponto de vista cognitivo, o autor ressalta que é justamente a capacidade de realizar conversões que sugere a compreensão no processo de aprendizagem.

No processo de conversão, segundo Duval (2009), pode haver diferentes graus de congruência, uma vez que se objetiva com essa operação que dois registros de representação diferentes representem um mesmo conteúdo. Para o autor, há congruência quando uma conversão é trivial, sendo tomada quase intuitivamente como mera codificação, de modo que a representação de partida pode ser considerada mais ou menos transparente a representação de chegada. Quando isso não acontece, há o que o autor chama de não congruência.

Duval (2011, p. 124) defende que "as variações de congruência e não congruência mostram que não existe nenhum isomorfismo entre as representações de um objeto matemático em um registro e suas possíveis representações nos outros registros". Isso reforça a ideia de que cada registro de representação apresenta unidades significativas diferentes que mobilizam, consequentemente, aspectos diferentes dos objetos matemáticos, sempre que estes forem acessados.

Para verificar se uma conversão de representação entre registros semióticos e suas unidades significativas apresenta congruência, Duval (2009, p. 68-69) estabelece três critérios. Quando um desses três critérios não é atingido, conforme o autor, há uma conversão de representação não congruente entre esses registros semióticos.

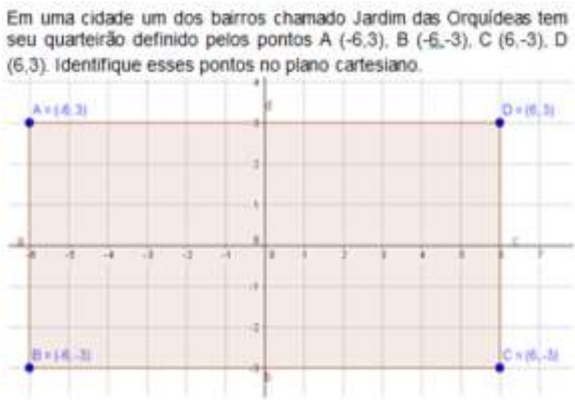
> O primeiro critério é a possibilidade de uma correspondência "semântica" dos elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar. [...] O segundo critério é a univocidade "semântica" terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma só unidade significante elementar no registro de representação de chegada. [...] O terceiro critério é relativo à organização das unidades significantes. As organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender nelas as unidades em correspondência semântica segundo a mesma ordem nas duas representações.

Destaque-se que a conversão de representação entre registros não deve ser estritamente classificada como absolutamente congruente ou não congruente, visto que é possível ocorrer conversões de representação mesmo em casos nos quais a não congruência é ampla, ou seja, quando simultaneamente há dificuldade para que exista correspondência semântica entre as unidades significativas analisadas, ordens diferentes de apreensão dessas unidades nas duas representações e impossibilidade de conversão de uma unidade significativa de representação de partida em uma única representação de chegada.

O grau de congruência entre registros poderá ser maior ou menor, dependendo das unidades significativas de cada registro envolvido no processo de conversão das representações de partida e de chegada. Isso tem a ver com as propriedades dos conteúdos, e não pode ser confundido com o nível de compreensão do estudante em relação à conversão.

Na figura a seguir, ilustra-se um problema matemático no qual o estudante deve mobilizar atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão, a fim de representar pares ordenados (x, y) no plano cartesiano. Isso exige que o estudante seja capaz de interpretar o ponto do par ordenado, mobilizar conceitos, compreender a construção do plano cartesiano e a localização do par ordenado em relação ao eixo das abcissas e ao eixo das ordenadas, realizando tratamentos e conversão entre a representação do registro em língua natural que compõe o enunciado do problema, a representação do registro algébrico do par ordenado (x, y) e a representação do registro gráfico. Tal situação demanda por conversões não congruentes das representações envolvidas. Mesmo assim, é possível que o estudante realize a conversão com o domínio das unidades significativas que compõem o problema.

Figura 4 – Situação-problema com a conversão de representações



Fonte: Autora (2018).

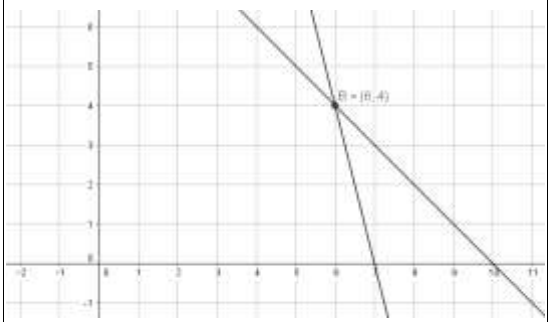
Assim, quando o estudante consegue efetuar e articular as unidades significativas que constituem cada um dos registros mobilizados no processo de resolução de um problema matemático, ele obtém um ganho cognitivo, pois, como argumenta Cardoso (2015, p. 46), “colocar em correspondência as unidades significativas de uma representação em outra é a condição cognitiva para reconhecer um mesmo objeto em suas diferentes representações”.

Isto reforça o argumento de Duval (2008) segundo o qual a compreensão em matemática implica a capacidade de converter em outra a representação de um registro semiótico. Consequentemente, assume-se nesta tese que o desenvolvimento cognitivo em matemática tem a ver com a mobilização de pelo menos dois registros de representação semiótica na atividade de conversão.

Vale frisar que Duval (2008, p. 22) chama a atenção para que a conversão não seja reduzida a uma atividade de codificação, que permite apenas uma leitura pontual e não global qualitativa das representações. Para o autor, “passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo registro”.

Para exemplificar essa situação, a figura a seguir apresenta a conversão da representação de um sistema linear em três registros, registro em língua natural, registro algébrico e registro gráfico[10].

Figura 5 – Exemplo de conversão de representação entre registros

Representação em língua natural	*Representação algébrica*	*Representação gráfica*
Para realizar o pagamento de uma dívida no valor de R$ 140,00, Paulo usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$ 5,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram utilizadas 10 notas?	$\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$	

Nota: Para facilitar a visualização gráfica da solução do problema, as grandezas envolvidas foram consideradas como contínuas, embora, a rigor, o problema trate de grandezas discretas.
Fonte: Autora (2018).

Na figura à esquerda, apresenta-se o enunciado de uma situação-problema no registro em língua natural, cuja possibilidade de resolução pode se dar por meio de sistemas lineares com a aplicação do método da adição, da substituição ou da comparação.

Na coluna central, apresenta-se a conversão da representação em língua natural para uma representação em registro algébrico. Para compor a estrutura do sistema linear é fundamental que se reconheça as unidades significativas que compõem o enunciado do problema. Nesta etapa, o estudante necessita mobilizar as unidades significativas como 'x' representando as notas de $R\$ 20{,}00$ e 'y' representando as notas de $R\$ 5{,}00$.

Ao utilizar o método da substituição, o estudante deve estruturar essas unidades significativas, a fim de resolver o problema. Isso implica isolar uma das incógnitas, 'x' ou 'y', na primeira equação para, na sequência, substituir o valor encontrado na segunda equação e, assim, encontrar o valor para a incógnita com a qual fez a opção para resolver o sistema. Na sequência, o estudante deve substituir o valor numérico que encontrou na primeira equação, a fim de calcular o valor numérico da incógnita isolada no início do algoritmo. Neste momento, o estudante encontra os dois valores que satisfazem as equações, $x = 6$ e $y = 4$. A seguir o estudante deve observar o comportamento das duas equações lineares no registro gráfico.

[10] Para a representação do registro gráfico utilizou-se como ferramenta o *software* GeoGebra.

Na figura à direita, apresentam-se as retas que compõem o sistema. Nessa representação, observa-se que as retas se interceptam em um único ponto, e o par ordenado que indica tal ponto é a solução para o sistema linear. Defende-se nesta tese que o emprego de *software* nessa situação proporciona um ambiente favorável para a investigação das relações entre as unidades significativas de um registro de representação para as unidades significativas de outro registro. Arbitrar a incógnita x para representar notas de vinte reais no registro algébrico significa dizer que no registro gráfico o número de notas de vinte reais está representado no eixo das abcissas (x). Arbitrar a incógnita y para representar notas de cinco reais no registro algébrico, significa dizer que no registro gráfico o número de notas de cinco reais está representado no eixo das ordenadas (y). Destaque-se que elaborar o registro gráfico sem recursos informatizados exige do estudante o domínio simultâneo de um conjunto de tratamentos e conversões envolvendo unidades significativas de registros de representação distintos. Assim, dado que o estudante precisa mobilizar mais conceitos, isso pode aumentar o custo de processamento para a resolução e interpretação do sistema linear.

Ao analisar o resultado nas três conversões, conclui-se que, no registro algébrico, o par ordenado que representa solução para o sistema linear é $(6; 4)$. No registro gráfico as retas são concorrentes e o ponto de intersecção entre elas é a solução do sistema, o que remete a classificação como (SPD). No registro de língua natural, a resposta a ser registrada é que "Paulo usou 6 notas de $R\$ 20{,}00$ e 4 notas de $R\$$ 5,00". Por consequência, assim fazendo, o estudante coordena três registros de representação, o que, por sua vez, potencializa o processo de compreensão e o significado conceptual do que representa a solução de um sistema linear.

Fundamentados em Duval (2009), ao analisar a conversão de representação do registro em língua natural para a representação do registro algébrico, ou a conversão de representação do registro em língua natural para a representação do registro gráfico que ocorre na situação-problema, constatamos que não há congruência. A sequência lexical "Paulo usou apenas notas de $R\$ 20{,}00$ e de $R\$ 5{,}00$" demanda a mobilização de conceitos a fim de representar esta informação matematicamente, visto que a pergunta "Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram utilizadas 10 notas?" exige que o estudante discrimine os dados pertinentes para representar e estabelecer relações entre as unidades significativas estabelecidas pelo problema e, com base nisso, encontrar a resposta.

Além disso, observe-se que, partindo-se da representação do registro gráfico, é impossível voltar à representação do registro da língua natural, sugerindo baixo nível de congruência envolvido nestas conversões de representações.

Independentemente dessas dificuldades, conforme Cardoso (2015, p. 103), “a conversão de diferentes registros de representação, apesar dos custos de processamento que exige, permite uma apreciação cada vez mais robusta do conceito matemático”. Isso ocorre porque o objeto matemático recebe diferentes recortes ao ser trabalhado por diferentes registros de representação, promovendo um acesso cada vez mais elaborado.

Assumindo que o acesso a distintos registros de representação amplia as possibilidades de compreensão dos objetos matemáticos e que a capacidade da conversão de registros implica benefícios cognitivos, a despeito do aumento dos custos de processamento, a próxima seção discute como o apoio dos recursos informatizados para a resolução de sistemas lineares pode contribuir nesse processo.

2.3 RECURSOS INFORMATIZADOS

Como se argumentou, a aprendizagem de matemática apresenta características próprias e distintas daquelas observadas em outras áreas do conhecimento. Uma vez que formais, os objetos da matemática não são acessíveis de modo imediato, mas mediados por diferentes representações. Para Duval (2009, p. 22), a efetiva aprendizagem das propriedades de um objeto ocorre justamente na passagem de uma representação em um determinado registro de partida para outra representação em outro determinado registro semiótico de chegada, de modo que a aprendizagem da matemática se caracteriza pela capacidade do indivíduo de converter representações entre registros. Diz o autor: “É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, isto é, o enclausuramento de cada registro”. É nesse sentido que os objetos matemáticos só podem ser acessados por meio de representações semióticas.

> Diferente de outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos de matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. (DUVAL, 2009, p. 21).

Nesta perspectiva, a aprendizagem da matemática depende de ações que caracterizam o fazer matemático. De acordo com Gravina e Santarosa (1998, p. 1), o fazer da matemática implica “experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar”. Neste contexto, o suporte oferecido pelas tecnologias de informação e comunicação – TICs pode auxiliar o ensino da matemática oferecendo formas diferenciadas para a representação dos objetos matemáticos: símbolos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos entre outros.

Para as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM quando se pensa

> na Tecnologia para a Matemática, há programas de computador (softwares) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o “pensar matematicamente”, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. (BRASIL, 2006, p. 88).

As TICs podem contribuir para a aquisição do conhecimento, visto que permitem a comunicação entre os indivíduos e a visualização simultânea de representações matemáticas diferentes de um mesmo objeto matemático.

Damm (2002, p. 135) destaca que

> em Matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto para seu ensino precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Gravina e Santarosa (1998, p. 1) defendem o uso dos recursos da informática (computador, *softwares*, dentre outros) para o ensino da matemática e, para isso, tomam como base teórica a teoria cognitivista de Jean Piaget, para quem “o conhecimento é construído a partir de percepções e ações do sujeito, constantemente mediadas por estruturas mentais já construídas” ou que vão se construindo ao longo do processo. Para as autoras, a teoria de Piaget ajuda a “compreender que o pensamento matemático não é, em essência, diferente do pensamento humano mais geral, no sentido de que ambos requerem habilidades como intuição, senso comum, apreciação de regularidades, senso estético, representação, abstração e generalização, etc.” (p. 3).

Assumindo que ambientes informatizados são ferramentas potentes para enfrentar obstáculos de aprendizagem, Gravina e Santarosa (1998, p. 10) os caracterizam como dinâmicos e interativo, destacando que:

> as novas tecnologias oferecem instâncias físicas em que a representação passa a ter caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito às concretizações mentais. Um mesmo objeto matemático passa a ter representação mutável, diferentemente da representação estática das instâncias físicas tipo 'lápis e papel ou giz e quadro-negro'. O dinamismo é obtido através de manipulação direta sobre as representações que se apresentam na tela do computador.

Borba e Penteado (2005) enfatizam a importância do uso das TICs na educação matemática por oferecer a possibilidade de se trabalhar experimentalmente em sala de aula. O uso de programas possibilita o traçado de gráficos de funções, por exemplo, propiciando discussões sobre a variação dos coeficientes, inclusive referindo-se no caso da função polinomial do segundo grau e o traçado gráfico correspondente. Isso ocorre porque, com o uso de *softwares*, pode-se manipular gráficos variados com rapidez.

Ao trabalhar o ensino de sistemas lineares em ambientes informatizados, é possível operar o tratamento dentro do registro numérico, algébrico ou gráfico, assim como operar a conversão de representação do registro algébrico para a representação do registro gráfico por meios dinâmicos, onde os entes matemáticos são manipulados, chegando a uma concretização mental e harmônica dos conceitos matemáticos. Os *softwares* fornecem meios interativos nos quais há uma dinâmica entre ações do estudante e reações do ambiente.

Desta forma, a utilização de *softwares* no estudo de uma situação-problema de sistemas lineares propicia ao estudante um modo mais dinâmico e iterativo para fazer a conversão de representações entre registros, além de oferecer condições rápidas para visualizar, interpretar e avaliar as três classificações de um sistema linear quanto ao comportamento das retas no plano cartesiano.

Esta experiência de visualização e interação que os *softwares* podem oferecer na conversão de representação entre registros é importante para a compreensão do objeto, do ponto de vista da teoria de registros de representação semiótica, ou seja, para a apreensão do conceito, pois segundo Duval (2009) o que garante a aquisição do conceito do objeto matemático não é a determinação de representações ou várias representações de um mesmo objeto, mas a coordenação entre registros.

Neste ponto, vale destacar na figura a seguir como Rauen e Cardoso (apud CARDOSO, 2011, p. 21) classificam as conversões realizadas em sala de aula em *conversões do tipo A* (domínio do ensino) e *conversões do tipo* B, (domínio da matemática).

Figura 6 – Domínio do ensino e domínio da matemática

$$\overbrace{[RLN_1 \leftrightarrow (\overbrace{RRA_2 + RRT_3 + RRG_4 + \ldots + RR_n}^{\textit{domínio da matemática}})]}^{\textit{Domínio do ensino}}$$

Fonte: Rauen e Cardoso (apud CARDOSO, 2011, p. 21).

Para os autores, a "*conversão do tipo A*" concerne à conversão de representações do registro em língua natural (RLN) para representações em registros específicos da matemática como: registro de representação algébrico (RRA), registro de representação tabular (RRT), registro de representação gráfica (RRG) entre outros (RRn). Neste grupo, as conversões de representação entre registros tendem a apresentar problemas próprios da língua natural como polissemia[11], ambiguidade e resistência à demonstração lógica.

As "*conversões do tipo B*" relacionam distintos registros de representação intrínsecos ao domínio da matemática ($RRA, RRT, RRG, \ldots RRn$). Como afirmam Rauen e Cardoso, as conversões neste grupo tendem a apresentar problemas de congruência e de não congruência entre os registros, ou seja, as dificuldades estruturais inerentes a cada registro de representação semiótica matemática do objeto matemático.

Segue-se dessa distinção que o ensino e a aprendizagem da matemática demandam ambos os grupos de conversão, pois a língua natural é o meio de comunicação que o professor utiliza para expressar e comunicar os registros intrínsecos ao campo da matemática, assumindo que é impossível a conceptualização do objeto matemático sem que haja a articulação de ambos os tipos de conversão.

Em específico, ao ensinar sistemas lineares, torna-se imprescindível que o docente compreenda a importância do registro da língua natural para que o estudante tenha acesso ao conceito do objeto matemático. Todavia, no ensino de sistemas lineares, a conversão de uma representação do registro em linguagem natural para uma representação em algum registro da linguagem matemática pode apresentar problemas estruturais em função da não preservação das unidades semânticas dos elementos apresentados em linguagem natural e simbólica, uma vez que a conversão da representação entre registros é, em geral, não congruente.

---

[11] Polissemia é um termo cujo significado envolve uma mesma palavra que possui diversos significados nos vários contextos em que pode ser inserida. É um conceito criado na área linguística, derivado do termo grego *polysemos*, cuja tradução pode ser entendida como "algo que tem muitos significados", ou seja, palavras polissêmicas possuem vários significados. (Disponível em: https://www.meusdicionarios.com.br/polissemia. Acesso em: 6 jul. 2017).

Apesar disso, Duval (2009) defende que, ao oferecer acesso a distintos registros de representação semiótica de um mesmo objeto ao estudante, o docente age como se estivesse oferecendo diferentes formas de explicação. Portanto, é possível que um mesmo objeto seja observado sob diferentes aspectos, na medida em que os registros de representação recortam os objetos de modos diferentes.

Duval (2008, p. 32) ressalta que:

> A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em um outro sistema semiótico, as podendo tomar significações diferentes para o sujeito que utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro.

Nesta perspectiva, os distintos registros de representação semiótica na abordagem dos objetos matemáticos viabilizam a apresentação de especificidades dos objetos. Uma vez que os distintos registros cortam parcialmente os objetos matemáticos, faz-se necessário convertê-los para se obter deles uma apreciação mais ampla.

Diante disto, deve-se considerar que o ensino aprendizagem da matemática é resultado de um conjunto de variáveis que envolvem conceitos e/ou objetos matemáticos que, para se configurarem como objetos de ensino, necessitam de significativas transformações. Neste contexto, a ação docente é determinante, pois é ele quem realiza as escolhas metodológicas para a abordagem dos objetos de ensino, especialmente quando se assume neste processo a participação e a diversidade dos estudantes diante da construção individual do conhecimento.

Assim, a matemática, enquanto ciência constituída de objetos abstratos, que se sustenta em sistemas lógicos formais e demonstrativos, exige do planejamento docente a utilização de múltiplos registros de representação semiótica. Logo, para o estudo que se propôs nesta tese, foram considerados os possíveis registros de representação semiótica aplicáveis ao ensino de sistemas lineares, destacando-se o registro gráfico.

O emprego dos recursos informatizados no ensino de matemática constitui-se ferramenta relevante especialmente para lidar com registros gráficos de difícil implementação manual em sala de aula. Cumprem essa função diferentes *softwares* matemáticos, dentre os quais se pode citar aplicativos como *GeoGebra, Graph e Winplot*. Na realização deste estudo, adotou-se o *software GeoGebra*[12], entre outras razões porque este *software* é gratuito e oferece condições de se trabalhar com geometria, álgebra, tabela, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema, de maneira dinâmica e oferecendo a possibilidade de ser usado em vários níveis de ensino, e de ser instalado tanto em computadores de laboratórios de informática da rede escolar de ensino como em aparelhos celulares.

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica ideal para se utilizar em ambiente de sala de aula, que reúne GEOmetria, álGEBRA e cálculo. Idealizado e criado em 2001 pelo professor da Universidade de Salzburg Markus Hohenwarter e por uma equipe internacional de programadores, o propósito da criação do *software* era o de dinamizar o estudo da Matemática. Para isso, o *software* foi escrito em linguagem Java com código aberto, funcionando em qualquer plataforma (*Microsoft Windows©, Linux, Macintosh©,* etc.).

Atualmente, o *software* pode ser encontrado com facilidade em sites de busca e já recebeu muitos prêmios internacionais incluindo o prêmio de *software* educativo Alemão e Europeu. Para Hohenwarter (2007, p. 1) "a característica mais destacável do GeoGebra é a percepção dupla dos objetos: cada expressão na janela de Álgebra corresponde a um objeto na Zona de Gráficos e vice-versa".

Ferreira (2010, p. 3), em seu artigo "Ensinando Matemática com o GeoGebra" destaca que:

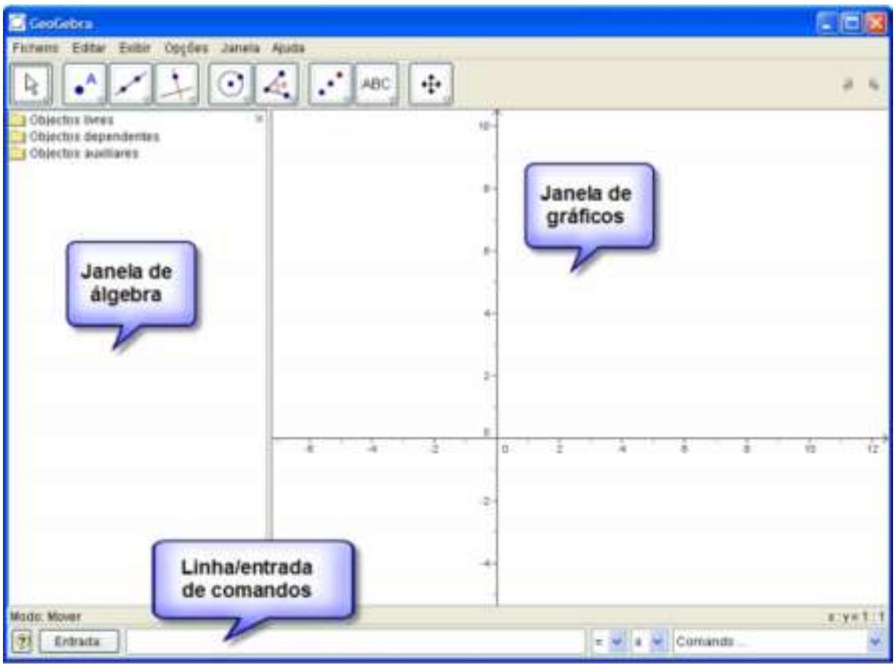
> Por ser um sistema dinâmico de geometria permite ao construtor que optar por seu uso, fazer construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas bem como funções e mudá-los dinamicamente depois, e ainda equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a habilidade de tratar das variáveis para números, vetores e pontos, permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos como Raízes ou Extremos.

Conforme Hohenwarter (2007, p. 2), a interface do *software* GeoGebra é constituída por três partes: a janela da esquerda ou janela de álgebra, onde aparecem indicações dos objetos (coordenadas de pontos, equações de retas, de circunferência, comprimentos, áreas…); a janela da direita ou janela de gráficos organizada por um sistema de eixos coordenados onde aparecem (pontos, figuras geométricas…) e a linha/entrada de comandos, zona destinada à entrada dos comandos/condições que definem os objetos. Essas descrições podem ser visualizadas na figura a seguir.

---

[12] A versão do *software* geogebra adotada nessa pesquisa foi "versão 5.0. 591.0".

Figura 7 – Tela inicial do *software* GeoGebra



Fonte: Hohenwarter (2007, p. 2).

Do ponto de vista didático, o *software* GeoGebra oportuniza ao estudante realizar a experimentação, que é um aspecto fundamental para a matemática. Por meio do *software*, o estudante tem a possibilidade de descobrir formas menos triviais de encontrar a solução do problema, pela visualização dos processos em três representações diferentes: gráfica, algébrica e nas células de planilha. O *software* permite também, criar ilustração, troca de cores, mudança de escalas e manipulações gráficas, analisando o que acontece com os coeficientes numéricos. Assim, no ensino de sistemas lineares, é possível o estudante perceber a elaboração e as alterações que ocorrem na representação gráfica a partir de situações propostas pelo docente ou pensadas por ele mesmo.

Vale destacar aqui que este estudo não tem a pretensão de analisar o uso das TICs como uma metodologia de ensino para a matemática, mas de analisar como o apoio de recursos informatizados potencializa a compreensão conceptual de sistemas lineares ao viabilizar a conversão de representações entre registros. Antes, contudo, faz-se necessário colocar em evidência que qualquer atividade em sala de aula pressupõe a consecução colaborativa de metas entre docente e estudantes para as quais processos comunicacionais guiados pela noção de relevância são essenciais. Assumindo a correção dessa linha de argumentação, apresenta-se no próximo capítulo a teoria de conciliação de metas proposta por Rauen (2014, 2016) e a teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995, 2005).

3 RELEVÂNCIA E CONCILIAÇÃO DE METAS

Este capítulo visa a apresentar duas teorias que fundamentam método e análise. Na primeira seção, apresenta-se a teoria de relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995, 2005) que se organiza em torno dos princípios cognitivo e comunicativo de relevância, a fim de investigar como os enunciados em língua natural são compreendidos e de extrapolar essa arquitetura para a compreensão de enunciados de diferentes registros de representação semiótica intrínsecos ao domínio da matemática.

Na segunda seção, apresenta-se a teoria de conciliação de metas de Rauen (2014, 2016), que parte do pressuposto de que a noção de meta superordena a atribuição de relevância a uma ação. A tese a ser defendida neste estudo é a de que planos de ação intencional guiados pela noção de conciliação de metas superordenarão, de modo relevante, a apreensão de unidades significativas, tratamentos e conversões de registros de representação semiótica mobilizados na resolução de situações-problema envolvendo sistemas lineares potencializados pelo uso do *software GeoGebra* instalado nos celulares dos estudantes.

Na terceira seção, ambas as teorias são postas em ação em exemplos retirados do capítulo *Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas* do livro *Matemática compreensão e prática*, de Ênio Silveira, que foi analisado por Cataneo e Rauen (2018).

3.1 RELEVÂNCIA

Para estudar a eficiência em termos de custos e benefícios cognitivos da mobilização dos distintos registros de representação semiótica na abordagem dos sistemas lineares, vale estabelecer um diálogo com a teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995), uma vez que o conceito de relevância está fundamentado numa economia de efeitos cognitivos, a serem maximizados, e esforços de processamento, a serem minimizados.

A noção de relevância fundamenta-se no princípio de que a cognição humana, na medida em que lida com recursos escassos, é constrangida a escolher informações potencialmente relevantes. Os autores chamam de princípio cognitivo de relevância, a capacidade de a cognição humana ser engrenada para maximizar a relevância dos estímulos a que está submetida.

> **Princípio cognitivo de relevância**
> A cognição humana tende a ser dirigida para a maximização da relevância.
> (WILSON, 2004, lição 4, p. 1, negrito no original, tradução de Fábio José Rauen).

Conforme a teoria, em igualdade de condições, quanto maiores são os efeitos cognitivos positivos do processamento de uma informação, ou seja, efeitos que aprimoram a representação de mundo do indivíduo, maior é a relevância dessa informação; e, inversamente, em igualdade de condições, quanto menor é o esforço de processamento necessário para processar uma informação, maior é a relevância dessa informação.[13]

Nesta tese, como se verá na próxima seção, assumindo a meta fixa de resolução de um determinado sistema linear, argumenta-se que a disponibilização simultânea de representações em diferentes registros semióticos pelo *software* GeoGebra nos celulares dos estudantes, no que se refere aos efeitos cognitivos positivos, potencializa conversões conscientes e consistente dessas diferentes representações e, consequentemente, a apreensão conceptual mais significativa do objeto matemático em pauta; e, no que se refere aos custos de processamento, minimiza os esforços cognitivos necessários para a consecução dessas mesmas conversões quando comparados, por exemplo, com conversões manuais.

A relevância é uma propriedade potencial dos *inputs* direcionados à cognição, sejam externos (visões, sons, enunciados, ações) ou internos (pensamentos, memórias). Em síntese, um estímulo é relevante quando os efeitos cognitivos de seu processamento recompensam o esforço necessário para os obter.

De acordo com os autores, em um extremo, contextos podem fornecer ou manifestar informações antigas, ou seja, que já se encontram presentes na representação do mundo que o indivíduo possui e que constitui seu ambiente cognitivo prévio, de tal modo que elas não demandam por esforço de processamento. Em outro, contextos podem fornecer ou manifestar informações tão novas para as representações de mundo de um indivíduo, que seriam impossíveis de serem processadas. Informações relevantes, desse modo, são aquelas suficientemente desconhecidas para merecerem processamento e suficientemente conhecidas para serem conectadas com o conhecimento prévio de um indivíduo.

Sperber e Wilson (2001, p. 92) argumentam que:

---

[13] Segundo Sperber e Wilson (2001, p. 241), o princípio cognitivo de relevância se constitui por meio de dois fatores: “o esforço necessário para o processar otimamente e os efeitos cognitivos que são alcançados por esse processamento ótimo”. Segundo os autores: “É nossa opinião que a presunção de relevância é diferente pelo lado do efeito e pelo lado do esforço. Do lado do efeito, a presunção é a que de que o nível dos efeitos alcançáveis nunca é menor do que o necessário para tornar o estímulo digno do esforço de processamento; do lado do esforço, é a de que o nível do esforço requerido nunca é maior do que aquilo que é necessário para conseguir esses efeitos”.

> Quando esses itens interligados de informações novas e antigas são utilizados em conjunto como premissas num processo inferencial, podem ser derivadas mais informações novas: informações que não podiam ter sido inferidas sem essa combinação das premissas antigas com as novas. Quando o processamento de informações novas dá origem a um tal efeito de multiplicação, chamamos-lhe relevante. Quanto maior for o efeito da multiplicação, maior é a relevância.

Assumindo que os estímulos são processados num contexto de suposições cognitivas que estão à disposição ao indivíduo, sua contextualização nesse conjunto prévio de suposições pode gerar efeitos cognitivos por meio da modificação ou da reorganização dessas suposições. Há três modos com os quais uma informação pode alterar o ambiente cognitivo de um indivíduo: fortalecendo uma suposição contextual, contradizendo e eliminando uma suposição contextual ou combinando-se com uma suposição contextual para gerar uma implicação contextual. Neste último caso, implicações contextuais consistem nas suposições resultantes da combinação de informações antigas ou já existentes com informações novas, ampliando o ambiente cognitivo do indivíduo. Em outras palavras, enquanto o fortalecimento e a contradição afetam o grau de força com que um indivíduo confia na veracidade de determinada suposição, numa implicação, conforme Silveira e Feltes (2002, p. 40), "uma informação nova P inscreve-se no contexto de suposições C (informações velhas), o que implica a contextualização de P em C"[14].

Dado que os seres humanos possuem à sua disposição um conjunto expressivo de informações que compõe o seu ambiente cognitivo, dado que os recursos de processamento cognitivo são escassos e devem ser alocados da maneira mais eficiente possível e dado que a cognição humana é engrenada para maximizar a relevância de tudo aquilo que processa, a cognição humana tende a selecionar os *inputs* disponíveis mais relevantes para maximizá-los, pois "quanto maiores forem os efeitos cognitivos obtidos de uma informação, maior será a relevância dessa informação" (CARDOSO, 2015, p. 66).

Todavia, como já se antecipou, relevância não consiste apenas em maximizar efeitos cognitivos, mas em minimizar esforços de processamento, isto é, a obtenção de efeitos cognitivos é necessária, mas não suficiente para avaliar a relevância de um estímulo. Para Sperber e Wilson (2001, p. 199), "a avaliação da relevância, assim como a avaliação da produtividade, é uma questão de equilíbrio entre o rendimento (*output*) e o investimento (*input):* nesse caso o equilíbrio entre efeitos contextuais e o esforço de processamento".

[14] Para ilustrar um desses efeitos, tome-se o caso de um docente ensinando a resolução de sistemas lineares. A utilização de distintas representações semióticas é um exemplo de fortalecimento de determinada suposição (compreensão do conceito de sistemas lineares) para os estudantes e uma das razões pela qual vale apena o esforço de processamento exigido na atividade cognitiva de conversão. Logo, o uso dessas representações pela docente , quando combinados, pode facilitar a construção ou ainda fortalecer os conceitos matemáticos, visto que, cada um dos registros de representação possibilita o emprego e a visualização de determinadas informações conceituais do objeto de estudo, ainda que exigindo diferentes custos de processamento, o que permite ao estudante o aumento do efeito cognitivo e, consequentemente, da relevância do objeto de estudo.

Sperber e Wilson (2001), mais adiante, extrapolam o princípio cognitivo de relevância para instâncias comunicacionais. Em casos de comunicação aberta ou ostensiva o ouvinte pode ter expectativas de relevância a partir de fragmentos de comportamento comunicativo do falante. Quando um falante atrai a atenção do ouvinte, ele está justificado a presumir que alguma informação relevante será fornecida, de modo que, se o ouvinte encontrar uma interpretação que satisfaça sua expectativa de relevância, essa será a única interpretação que ele está justificado a aceitar.

Segundo Sperber e Wilson (2001, p. 50), um estímulo ostensivo deve revelar as intenções do comunicador. Se isso está correto,

> esse estímulo deve vir com uma garantia de relevância. Em outras palavras, o indivíduo, ao produzir um enunciado, requisita a atenção do ouvinte e, ao fazer isso, está sugerindo que o enunciado é relevante o suficiente para merecer atenção. Os estímulos ostensivos provocam expectativas definidas de relevância, e está é alcançada se a intenção informativa do comunicador é reconhecida.

Neste contexto, admitindo que o sistema cognitivo humano se orienta para a relevância, é possível assumir que o falante pode manipular em alguma medida o ambiente cognitivo do ouvinte. Isso é possível pela oferta ostensiva de informações. Partindo-se do princípio que essas ofertas criam presunções ou expectativas, Sperber e Wilson (2001, p. 242) definiram um princípio comunicativo de relevância segundo o qual todos os estímulos comunicais ostensivos devem ser presumidos como otimamente relevantes.

> **Princípio Comunicativo de Relevância**
> Cada enunciado (ou outro estímulo ostensivo) cria a presunção de sua própria relevância ótima.
> (WILSON, 2004, lição 5, p. 1, negrito no original, tradução de Fábio José Rauen).

Para os autores, uma pessoa que se engaja numa comunicação ostensiva, o faz de modo que seu ouvinte receba e compreenda da melhor forma possível a informação comunicada. Admitindo a correção desse pressuposto, é de interesse do comunicador que ele torne manifesto à audiência que ele pretende tornar manifesto o estímulo ostensivo o mais relevante possível que satisfaça essas intenções”[15]. Desse modo, em todo ato de comunicação ostensiva, presume-se haver um nível de relevância que leva em conta os interesses de falantes e ouvintes, que Sperber e Wilson denominaram como nível de relevância ótima.

---

[15] Sobre a noção de manifestabilidade, confiram-se Sperber e Wilson (1995, p. 38-46).

> **Presunção de relevância ótima**
> O enunciado (ou outro estímulo ostensivo) será:
> 1a. Ao menos relevante suficiente para merecer o esforço de processamento do ouvinte;
> 1b. O mais relevante compatível com as habilidades de preferências do falante.
> (WILSON, 2004, lição 5, p. 1, negrito no original, tradução de Fábio José Rauen).

Conforme os autores, o princípio da relevância ótima não afirma que todas as pessoas que produzem certo estímulo ostensivo, necessariamente produzem estímulos ótimos, mas que têm a intenção de fazê-lo. “Por mais cheia de dúvidas que ela possa ter sobre si própria, uma pessoa que comunica tem de ter a intenção de tornar manifesto ao destinatário que seu estímulo é suficientemente relevante” (SPERBER; WILSON, 2001, p. 244).

Além disso, a presunção de relevância ótima contém duas cláusulas, assumindo que o enunciado deve ser (a) relevante o suficiente, pelo menos, para merecer esforço de processamento da audiência e (b) o mais relevante compatível com as habilidades e as preferências do falante. A cláusula (a) opera selecionando interpretações, e a cláusula (b) faz presumir que o que o falante produziu o seu melhor para valer a pena o processamento, pois é interesse do falante, no contexto de suas preferências ou habilidades, que seu estímulo seja tão rico quanto possível em efeitos cognitivos e tão econômico quanto possível em custo de processamento (WILSON, 2004, lição 4, p. 8).

Além disso, a cláusula (b) evita que o ouvinte continue considerando interpretações rivais quando já encontrou uma interpretação supostamente relevante (WILSON, 2004, lição 4, p. 8). Segue-se disso o que os autores chamam de procedimento, mecanismo ou heurística de compreensão guiada pela noção teórica de relevância que a audiência pode utilizar para depreender o significado do falante.

> **Procedimento de compreensão guiado pela relevância**
> Siga um caminho de menor esforço ao computar efeitos cognitivos:
> a) Considere interpretações (por exemplo, atribuições de referência, contextos, etc.) na ordem de acessibilidade;
> b) Pare quando sua expectativa de relevância é satisfeita (ou abandonada).
> (WILSON, 2004, lição 4, p. 8, negrito no original, tradução de Fábio José Rauen).

Em síntese, argumenta-se nesta tese que a presunção de relevância antecipa que a forma como um enunciado foi elaborado em qualquer registro de representação semiótica para tornar mutuamente manifesto um conjunto de suposições {I} foi a melhor escolha entre tantas possibilidades de ostensão. Admitindo essa presunção, cabe ao destinatário construir um conjunto de hipóteses interpretativas sobre essas suposições {I} e escolher a hipótese supostamente relevante, (a) considerando interpretações em ordem de acessibilidade e (b) parando quando sua expectativa de relevância é satisfeita (ou abandonada).

> O princípio de relevância torna mesmo possível utilizar uma estratégia de verificação de item a item na compreensão. Garante a seleção da primeira interpretação acessível que é compatível com o princípio, se na verdade houver alguma e pelo contrário se não houver interpretação absolutamente nenhuma. Por outras palavras, a teoria da relevância explica como é possível a comunicação ostensiva e como ela pode falhar. (SPERBER; WILSON, 2001, p. 258).

Conhecida em linhas gerais a abordagem guiada pela noção teórica de relevância, cabe exemplificar o modo de funcionamento do procedimento de compreensão. Antes, contudo, é preciso lidar com dois obstáculos para os quais, argumenta-se, a teoria de conciliação de metas fornece uma solução pertinente.

3.2 CONCILIAÇÃO DE METAS

Para fazer confluir as teses de Duval com a noção de relevância defendida na seção anterior, é preciso lidar com dois obstáculos. Em primeiro lugar, a tese substantiva de Duval de que a mobilização de representações em diferentes registros potencializa a apreensão dos objetos matemáticos aumenta custos de processamento, especialmente em casos de não congruência, o que, por decorrência, minimiza a relevância. Em outras palavras, quanto mais *inputs* estão envolvidos em um processo de ensino, maior será o custo de processamento para se atingir um determinado objetivo de aprendizagem.

Em extremo, se há somente um resultado possível para a solução de determinado problema, ou seja, o efeito cognitivo é fixo, e um determinado registro dá conta de obtê-lo, não faz sentido submeter os alunos a outros registros de representação, aumentando o custo do processamento e, por definição, diminuindo a relevância.

Objetivamente, essa situação pode ser constatada no ensino e aprendizagem de sistemas lineares, que exige a mobilização de unidades significativas, tratamentos e conversões de representação de registros como (RLN), (RRA), (RRG) dentre outros cuja conversão pode não ser congruente. Lidar com sistemas lineares exclusivamente no domínio do registro algébrico, portanto, tenderia a diminuir custos, pois seria o caso de apenas lidar com tratamentos em um único registro.

Isso, contudo, não pode ser o caso, se estamos comprometidos com um ensino verdadeiramente significativo. A questão que se impõe não é a de evitar conversões, mas a de potencializar a compreensão matemática para além desse obstáculo inicial. Para Silveira e Feltes (1999, p. 40), é fato que a relevância é maior quando há maiores efeitos com esforços menores e vice-versa; todavia, "um maior esforço de processamento compensado por mais efeitos contextuais, aumenta a relevância". Assumindo a correção dessa reflexão, a forma de fazer confluir essas demandas com a noção de relevância passa pela emergência de um conceito que as superordene. Como se verá adiante assume-se que a noção teórica de conciliação de metas cumpre esse papel.

Em segundo lugar, ao propor um *software* no ensino e aprendizagem de sistemas lineares, está-se diante de problemas próprios do domínio da tecnologia e das condições objetivas que o docente tem para utilizá-la. Mais uma vez, o argumento que se defende aqui é o de que esse obstáculo deve ser também transposto, entre outros motivos porque tenderá a potencializar as conversões. Os recursos informatizados oferecem diferentes *inputs* que, associados ao uso de lápis e papel, podem contribuir para uma nova visualização desses objetos matemáticos e contribuir para a sua resolução.

Por exemplo, ao se utilizar um *software* gráfico para o estudo de um sistema linear, é possível variar os parâmetros para analisar o comportamento gráfico e confrontá-lo com a representação algébrica. Assim, o uso de *softwares* abre novas perspectivas para a compreensão dos sistemas lineares, oferecendo um ambiente dinâmico no qual o estudante manipula os parâmetros e visualiza simultaneamente sua influência no registro gráfico. Tal situação possibilita observar e interpretar o comportamento de uma equação linear, associando suas possíveis soluções quando constituintes de um sistema com as posições relativas das retas no plano. O *software*, em síntese, cria condições para que o estudante perceba de forma simultânea no registro gráfico e algébrico, a solução de um sistema linear, bem como a classificação desse sistema quanto ao número de soluções: o sistema "tem uma solução" (SPD), "não tem solução" (SI) ou "tem várias soluções" (SPI).

Borba e Villarreal (2005, p. 96) destacam algumas particularidades das tecnologias computacionais por meio do aspecto visual na educação matemática:

> Visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático.
> A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles.
> Visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas.
> Tecnologias com poderosas interfaces visuais estão presentes nas escolas, e a sua utilização para o ensino e aprendizagem da matemática exige a compreensão dos processos visuais.

Apesar disso, ao incluir recursos informatizados em sua metodologia de ensino, o docente necessita refletir sobre formas de propor atividades que atendam os objetivos educacionais. Segundo Borba (2010, p. 6), “utilizar tecnologias informáticas, em um ambiente de ensino e aprendizagem, requer a sensibilidade do docente ou pesquisadora para optar por estratégias pedagógicas que permitam explorar as potencialidades desses recursos, tornando-os didáticos”.

Em síntese, a matemática recorre à mobilização de distintos registros de representações dos seus objetos, tais como as representações gráficas, algébricas, tabulares ou geométricas, e o acesso a esses conhecimentos se dá pela língua natural. No entanto, o domínio de distintos registros apresenta um custo adicional de processamento, cuja relevância somente decorre da crença de que, diante de uma nova situação-problema ou da necessidade de consecução de uma meta, o estudante terá a possibilidade de optar pelo registro que lhe propiciará o menor custo de processamento ou maior ganho cognitivo durante o processo.

Conforme Rauen (2015), a teoria da conciliação de metas visa a descrever e explicar a formulação da proatividade humana. O autor argumenta que a ampliação cognitiva é abdutiva, de modo que a cognição é estimulada antes por uma conclusão antecipada do que pela emergência de premissas. Consequentemente, é a emergência de uma meta o que move os indivíduos a agirem em busca de satisfazer suas expectativas de relevância ótima mediante o procedimento de compreensão guiado pela relevância, e a modelagem dedutiva da teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986/1995) dá conta apenas do processo de avaliação ou checagem de hipóteses abdutivas de consecução.

Posto isso, defende-se neste estudo que a relevância de *inputs* está diretamente associada a uma meta, e essa meta superordena a atribuição de relevância para a identificação de unidades significativas, tratamentos e conversões de representações. Assim, ao resolver um problema envolvendo sistemas lineares, o estudante tem por meta executar ações na expectativa de chegar à solução. A solução mais relevante será aquela que lhe oferece a melhor resposta com menor custo de processamento[16].

Em teoria de conciliação de metas (RAUEN, 2014), um plano de ação intencional pode ser descrito e explicado em quatro estágios: projeção de uma meta [1] e formulação [2], execução [3] e checagem [4] de uma hipótese abdutiva antefactual. Nessa modelação, os três primeiros estágios são abdutivos e os três últimos são dedutivos.

---

[16] Rauen segue Lindsay e Gorayska (2004, p. 69), para quem relevância é um predicado dependente de meta. Assim, os indivíduos atribuem relevância a *inputs* que se conectam com um propósito.

Em *abduções explicativas*, observa-se um fato, por exemplo, que a luz de um quarto está acesa (*x é Q*) e, em seguida, abduz-se uma explicação *ex-post-facto*, ou seja, que uma causa antecedente *P* explica o fato consequente *Q*: alguém acendeu a luz. Segue disso que *P* é a causa mais provável ou plausível para *Q* (*x é P*).

Rauen (2014) argumenta que essa modelação pode abrigar casos *a priori*. Assim, uma descrição do tipo *x* é *Q* pode corresponder a certo estado *x* no futuro que satisfaz uma expectativa de alcançar um estado de meta *Q* [estágio 1]. Em seguida, o indivíduo *i* abduz *ex-ante-facto* que há uma ação antecedente *P* provavelmente suficiente para atingir esse estado de consecução de meta *Q* [estágio 2]. Decorre dessa formulação que *x* é *P*, e o indivíduo *i* executa a ação *P* com base nessa expectativa [estágio 3].

Os três últimos estágios do modelo, por sua vez, são dedutivos. Isso ocorre porque a hipótese abdutiva antefactual (*P é Q*) passa a ser tomada como uma premissa maior no plano de ação intencional [estágio 2], a ação antecedente *x é P* passa a ser tomada como premissa menor [estágio 3], e a conclusão *x é Q* deduz-se dessas premissas [estágio 4].

Essa arquitetura descritivo-explanatória pode ser vista na figura a seguir.

Figura 8 – Arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas

Abdução		[1]		Q
	Dedução	[2]	P	Q
		[3]	P	
		[4]		Q’[17]

Fonte: Elaboração nossa.

Conforme Rauen (2014, p. 3), o primeiro desses estágios define a *projeção da meta (interna)*, como segue:

> [1] O indivíduo *i* projeta uma meta *Q* em t_1,
>
> tal que:
>
> a) t_1 representa o tempo da projeção da meta *Q*; e
> b) a meta *Q* é um estado futuro ainda não existente em t_1.
> (RAUEN, 2014, p. 559, tradução do autor).

Com base nessa arquitetura, analisa-se a resolução do seguinte problema matemático envolvendo sistemas lineares:

---

[17] *Q’* representa a consecução da meta *Q*. Ver também nota 18, mais adiante.

> Em uma praça há 18 crianças andando de bicicleta ou de skate. No total, há 50 rodas girando pela praça. Quantas crianças andam de bicicleta e quantas andam de skate?

Observe-se que há inúmeras possibilidades de resolução desse problema. Nesta ilustração, o olhar será restrito a uma resolução que assume *a priori* a pertinência do conceito de sistemas lineares e do método da substituição[18].

Assumindo que a meta final para este problema consiste em responder quantas crianças andam de bicicleta e quantas crianças andam de *skate*, a resolução envolve uma cadeia de submetas desencadeadas no ambiente cognitivo do estudante, mobilizando distintas representações e respectivos algoritmos. Em síntese, o estudante deve interpretar o problema em língua natural, identificar as grandezas envolvidas, organizá-las em duas equações lineares distintas e converter as informações para o registro algébrico[19].

Neste caso, ao identificar as grandezas envolvidas no problema, bicicleta e *skate*, o estudante deve arbitrar os símbolos que as representam. Assim, 'x' pode representar cada bicicleta e 'y' pode representar cada *skate*, entendendo que ao total são 18 brinquedos. Em seguida, o estudante deve observar que o problema faz menção ao número total de 50 rodas que estão circulando na praça. A diferença significativa entre os dois brinquedos é que uma bicicleta possui duas rodas enquanto um skate possui quatro rodas. A partir disso, é possível construir o sistema que representa a interpretação matemática e sua respectiva representação algébrica do problema proposto a partir do registro em língua natural.

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 4y = 50 \end{cases}$$

tal que:
x representa cada bicicleta;
y representa cada skate;
18 representa o total de brinquedos que circulam na praça;
$2x$ representa as duas rodas de cada bicicleta;
$4y$ representa as quatro rodas de cada *skate*; e
50 representa o número total de rodas.

No caso da resolução do sistema, a formulação da meta final consiste em algum grau de emergência cognitiva de sua resolução.

---

[18] A rigor, a decisão por modelar o problema com duas equações e a decisão de resolvê-lo pelo método da substituição são duas hipóteses abdutivas antefactuais ótimas em direção à consecução da meta de resolver o problema. Arbitrou-se aqui por ilustrar o caso num ponto posterior a essas tomadas de decisão.

[19] A propósito, quando se analisam metas gerais explica-se por que alguém tem uma meta particular; quando se observam planos particulares especifica-se como uma meta é alcançada em termos de ações intencionais.

> [1] O estudante i projeta a meta Q de o estudante i resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 4y = 50 \end{cases}$ em t_1.

A formulação assume que o processo inicia em t_1, que representa o instante da projeção da meta Q de resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 4y = 50 \end{cases}$, e a meta Q de resolvê-la é uma possibilidade futura, ou seja, ela inexiste no tempo t_1, o que significa dizer que o sistema ainda não foi resolvido.

O *output* desse estágio pode ser representado conforme o esquema a seguir:

[1] Q resolver sistema, estudante

O segundo estágio, de acordo com Rauen, consiste na *formulação de pelo menos uma hipótese abdutiva antefactual* para atingir a meta Q. Veja-se:

> [2] O indivíduo i abduz uma hipótese antefactual H_a para atingir a meta Q em t_2,
>
> tal que:
>
> a) t_2 representa o tempo da formulação da hipótese abdutiva antefactual H_a;
> b) t_2 sucede t_1;
> c) a hipótese abdutiva antefactual H_a corresponde a uma formulação do tipo "Se P, então Q", de modo que P é uma ação antecedente e Q é um estado consequente;
> d) no escopo da hipótese abdutiva antefactual H_a, a meta Q é admitida pelo indivíduo i como um estado consequente;
> e) no escopo da hipótese abdutiva antefactual H_a, uma ação antecedente P é admitida pelo indivíduo i como minimamente suficiente para atingir o estado consequente Q;
> f) a hipótese abdutiva antefactual H_a é a primeira formulação consistente com o princípio de relevância, pois é aquela de menor custo de processamento diante do efeito fixo futuro projetado pelo estado consequente Q;
> g) simultaneamente, a hipótese H_a é tomada pelo indivíduo i como a inferência à melhor solução plausível para atingir o estado consequente Q.
> (RAUEN, 2014, p. 599-600, tradução do autor).

Com base nessas instruções pode-se antecipar que:

> [2a] o estudante i abduz a melhor[20] hipótese antefactual H_a para atingir a meta Q de resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 4y = 50 \end{cases}$ no tempo t_2.

[20] Numa franca analogia à *inferência à melhor explicação*, os trabalhos iniciais em teoria de conciliação de metas usavam os termos *inferência à melhor consecução* e *melhor hipótese*. Mais recentemente, de forma coerente com a teoria da relevância, têm-se usado a expressão *inferência à consecução ótima* e *hipótese ótima*.

Pelas etapas formuladas por Rauen, a descrição [2a] está incompleta porque não determina a ação antecedente *P* admitida pelo estudante como minimamente suficiente para atingir o estado consequente *Q* de resolver o sistema. A fim de solucionar esta incompletude, considere-se arbitrariamente que o ambiente cognitivo do estudante contenha somente o conjunto de suposições $S_{1\text{-}8}$ para efeitos de exposição.

S_1 – Aplicar o método da substituição resolve o sistema;
S_2 – Aplicar o método da adição resolve o sistema;
S_3 – Utilizar a representação gráfica resolve o sistema;
S_4 – Utilizar a representação pictórica resolve o sistema;
S_5 – Permutar as equações do sistema resolve o sistema;
S_6 – Digitar o sistema no editor de equações;
S_7 – O sistema de equações é um sistema de equações;
S_8 – O sistema de equações não é um sistema de equações.

Posto isso, a hipótese ótima H_a nesse conjunto arbitrariamente restrito de suposições factuais $S_{1\text{-}8}$, conforme defende Rauen, decorre de quatro critérios que, sucessivamente, vão descartando as hipóteses menos exequíveis.

Para o autor, o primeiro critério (exposto na letra c) considera que a hipótese H_a pode ser mapeada por uma formulação hipotética "Se *P*, então *Q*". Essa formulação define que se uma ação antecedente *P* for executada, então um estado consequente *Q* pode ser atingido. Logo, ao se analisar o conjunto de suposições no exemplo acima, observamos que as suposições factuais $S_{1\text{-}5}$ respeitam esse critério, enquanto as suposições factuais $S_{6\text{-}8}$ não permitem ser mapeáveis, sendo inclusive irrelevantes no sentido defendido por Sperber e Wilson (1986/1995), pois não resolvem o sistema.

A suposição S_8 de que "O sistema de equações não é um sistema de equações" contradiz o *input* perceptivo de que há um sistema (a unidade significativa do registro algébrico "{" que representa a chaves). A suposição S_7 de que "O sistema de equações é um sistema de equações" é uma tautologia com o estímulo perceptivo, não havendo qualquer ganho cognitivo em processá-la. Também a suposição S_6 que determina "Digitar o sistema no editor de equações" trata-se de uma informação que está desconectada com a meta de resolver o sistema de equações, pois apenas digitar a equação não garante que o sistema será resolvido, isto é, que a solução será encontrada, o estudante precisa dominar e interpretar o processo do editor de equações.

O segundo critério proposto por Rauen (expresso na letra e) considera que a hipótese H_a associa à formulação "Se *P*, então *Q*" uma ação antecedente *P* minimamente suficiente para atingir o estado consequente *Q*, que neste caso seria a resolução do sistema de equações. As suposições factuais S_{1-4} são ações executáveis. Todavia, a suposição S_5 de que "Permutar as equações do sistema resolve o sistema", é uma ação insuficiente e, portanto, inútil para resolver o sistema.

O terceiro e quarto critérios (evidenciados nas letras f e g, respectivamente) operam em conjunto, sugerindo que o estudante formulará a hipótese abdutiva H_a que melhor concorre para atingir *Q* e for à primeira suposição consistente com o princípio de relevância. Postos estes critérios, as suposições S_{1-4} são exequíveis; contudo, requerem custos de processamento diferentes, de modo que a hipótese abdutiva H_a que se comporta como solução ótima neste contexto *ad hoc* é a suposição factual S_1 de que "aplicar o método da substituição resolve o sistema".

Decorre desse processamento a seguinte formulação:

> [2b] O estudante *i* abduz que se o estudante aplicar o método da substituição, então o estudante resolverá o sistema $\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 4y = 50 \end{cases}$.

De modo esquemático, essa consecução pode ser assim representada:

[1]		Q		resolver sistema, estudante
[2]	P	Q	aplicar o método da substituição, estudante	resolver sistema, estudante

O terceiro estágio refere-se à ação intencional ou, de acordo com Rauen, da provável *execução da ação antecedente P*.

> [3a] O indivíduo *i* executa *P* para atingir *Q* em t_3, ou
> [3b] O indivíduo *i* não executa *P* para atingir *Q* em t_3,
>
> tal que:
>
> a) t_3 representa o tempo da execução da ação antecedente *P* no contexto da formulação hipotética "Se *P*, então *Q*";
> b) t_3 sucede t_2;
> c) [3b] é o modelo de inação pressuposto por [3a];
> d) A inação pode ser voluntária ou involuntária.
> (RAUEN, 2014, p. 601-602, tradução do autor).

No exemplo em questão, a execução é o momento no qual o estudante decide por utilizar/não utilizar o método da substituição para resolver o sistema de equações. Rauen argumenta o esquema em primeiro plano (que ele considera em geral exclusivo) trata-se do modelo *agentivo* ou *ativo*[21]. Para o esquema da execução da ação P no contexto da hipótese H_a o estudante escolhe o método da substituição para resolver o sistema de equações.

O *output* ativo do terceiro estágio (ação intencional) pode ser visto a seguir:

> [3a] O estudante i aplica o método da substituição para o estudante i resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 4y = 50 \end{cases}$ em t_3.

Esquematicamente:

[1]		Q		resolver sistema, estudante
[2]	P	Q	aplicar o método da substituição, estudante	resolver sistema, estudante
[3]	P		o estudante aplica o método da substituição	

O quarto estágio diz respeito à *checagem dedutiva da formulação hipotética*:

> (4a) Considerando-se [2] "Se P, então Q" e [3a] P, o indivíduo i checa a consecução Q' em t_4, ou
> (4b) Considerando-se [2] "Se P, então Q" e [3b] $\neg P$, o indivíduo i checa a consecução $\neg Q'$ em t_4,
>
> tal que:
>
> a) t_4 representa o tempo da consecução da meta Q;
> b) t_4 sucede t_3.
> c) (4a) é o modelo de consecução da ação P de [3a] e (4b) é o modelo de consecução da inação $\neg P$ de [3b];
> d) Q' representa o resultado da ação P de [3a] e $\neg Q'$ representa o resultado da inação $\neg P$ de [3b];
> e) Q' ou $\neg Q'$ é uma realidade em t_4[22].
> (RAUEN, 2014, p. 602-603, tradução do autor).

---

[21] Conforme o autor, o modelo *não agentivo* ou *passivo* pode ocorrer pelo menos em duas situações: Quando o estudante i não tem condições de executar a ação P, como é o caso de a hipótese H_a ser abduzida, e o estudante perceber em seguida que não sabe resolver um sistema de equações utilizando o método da substituição. Ou, por exemplo, quando há algum conflito ou problema psicológico como medo, hesitações, obstáculos epistemológicos em relação ao processo de resolução de sistemas pelo método da substituição entre outros, que põe em dúvida metas e/ou planos. Nesse caso, o estudante embora formule a meta de resolver o sistema linear e a hipótese abdutiva antefactual pertinente de utilizar o método da substituição, hesita em executar o algoritmo.

[22] Conforme Rauen, a expressão Q' destaca que a consecução da meta é sempre em alguma medida diferente de sua projeção. Em descrições mais completas ou em descrições de situações mais complexas as várias instâncias de Q poderiam ser indexadas por números Q_1, Q_2, Q_3,..., Q_n, de tal modo que Q_1 representa a emergência da meta inicial.

Para o autor, esse estágio refere-se à avaliação ou monitoramento da (in)ação antecedente *P* no escopo dedutivo da formulação hipotética “Se *P*, então *Q*”, o que conflui com o módulo dedutivo de Sperber e Wilson (1986, 1995). Assim, no cenário ativo (1a) (Q; Se P, então Q; P), O estudante avalia se o sistema de equação é resolvido com a aplicação do método da substituição; e no cenário passivo (1b) (¬Q; Se ¬P, então ¬Q; ¬P), O estudante avalia se o sistema de equação não se resolve quando ele não aplica o método da substituição.

Nesse sentido o *output* do quarto estágio em (4a) pode ser verificado a seguir:

> (4a) O estudante *i* checa a consecução da resolução do sistema de equações $\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 4y = 50 \end{cases}$ em t_4.

Tal ação pode ser assim esquematizada:

[1]		Q		resolver sistema, estudante
[2]	P	Q	aplicar o método da substituição, estudante	resolver sistema, estudante
[3]	P		o estudante aplica o método da substituição	
[4]		Q’		o estudante resolve o sistema

No quarto estágio, é possível que seja avaliada tanto a consecução da meta *Q* como a hipótese abdutiva antefactual H_a. Para tanto, devem-se considerar dois conceitos: o de conciliação de metas e o de confirmação de hipóteses.

Por *conciliação de metas,* Rauen (2014, p. 603) define “o estado *Q’* do ambiente em t_4 que satisfaz, coincide ou corresponde com a meta *Q* em t_1, isto é, o resultado da ação *P* (meta externa) é semelhante ou congruente com o resultado projetado pelo indivíduo *i* (meta interna)” (tradução do autor).

Decorre dessa definição as seguintes quatro possibilidades de consecução:

Tabela 2 – Possibilidades de consecução de metas

Estágios	(1a) Conciliação Ativa	(1b) Inconciliação Ativa	(1c) Conciliação Passiva	(1d) Inconciliação Passiva
[1]	Q	Q	Q	Q
[2]	P Q	P Q	P Q	P Q
[3]	P	P	¬P	¬P
[4]	Q’	¬Q’	Q’	¬Q’

Fonte: (RAUEN, 2014, p. 604, tradução do autor).

A primeira possibilidade de consecução de uma meta é denominada de *conciliação ativa* (1a). Nesta situação, o indivíduo *i* executa a ação *P* no contexto da hipótese H_a, e a realidade *Q’* em t_4 concilia-se com a meta *Q* em t_1. Neste cenário, o estudante aplica o método da substituição e resolve o sistema.

A segunda possibilidade é denominada de *inconciliação ativa* (1b). Nesta situação, o indivíduo *i* executa a ação *P* no contexto da hipótese H_a, e a realidade $\neg Q'$ em t_4 não se concilia com a meta *Q* em t_1. Ou seja, (1b), o estudante aplica o método da substituição, mas não consegue resolver o sistema.

A terceira possibilidade é denominada de *conciliação passiva* (1c). Nesta situação, o indivíduo *i* não executa a ação *P* no contexto da hipótese H_a, e a realidade Q' em t_4, mesmo assim, concilia-se com a meta *Q* em t_1. Em (1c), o estudante, embora não aplique o método da substituição, obtém o resultado do sistema (adivinhando-o, obtendo acidentalmente a resposta de um gabarito ou de alguém, colando a resposta etc.).

A quarta e última possibilidade é denominada de *inconciliação passiva* (1d). Nesta situação, o indivíduo *i* não executa a ação *P* no contexto da hipótese H_a, e a realidade $\neg Q'$ em t_4 não se concilia com a meta *Q* em t_1. Em tal situação (1d), o estudante não aplica o método da substituição e, coerentemente, não soluciona o sistema.

Por *confirmação de uma hipótese abdutiva antefactual* H_a, Rauen (2014, p. 604) define "o estado da realidade Q' em t_4 que satisfaz, coincide ou corresponde com a hipótese H_a em t_2. Trata-se do resultado da ação *P* que reforça a hipótese abdutiva antefactual H_a de que a ação antecedente *P* causa o estado consequente *Q*" (tradução do autor).

Com base neste conceito, Rauen (2014), formula uma gradação de força para a conexão entre ações antecedentes e estados consequentes de uma hipótese abdutiva antefactual que oscila desde o grau categórico, passando pelos graus bicondicional, condicional e habilitador, até o grau tautológico.

Como *hipótese abdutiva antefactual categórica*, Rauen (2014) define uma formulação $P \Leftrightarrow Q$, cuja tabela de consecuções[23] retorna "plausível" somente quando P e Q são verdadeiros. Nesse caso, P e Q são suficientes, necessários e certos, e a única consecução admitida pelo indivíduo é a de uma conciliação ativa (1a).

Como *hipótese abdutiva antefactual bicondicional* $P \leftrightarrow Q$, definem-se casos nos quais a ação antecedente P e o estado consequente Q são simultaneamente verdadeiros ou falsos. Hipóteses abdutivas categóricas tornam-se bicondicionais nas inexecuções de P. Para tal contextos se admite inconciliações passivas (1d), e a mera consideração da possibilidade $\neg P \longrightarrow \neg Q$, enfraquece a formulação hipotética categórica inicial, pois P e Q passam agora a ser suficientes e necessários, mas não certos.

[23] Em textos seminais da teoria, Rauen (2013, 2014) tratava hipóteses e consecuções em termos de uma tabela de verdade. Mais recentemente, vem tratando o tema em termos de plausibilidade prática, reforçando o compromisso com uma racionalidade prática e evitando o compromisso com aspectos epistemológicos.

Como *hipótese abdutiva antefactual condicional* $P \longrightarrow Q$, temos os casos em que a ação antecedente P é suficiente, mas não necessária para o estado consequente Q. Para esses casos condicionais, nos quais a implicação material se aplica, há um novo enfraquecimento da força da hipótese abdutiva, inviabilizando inconciliações ativas (1b), embora admitindo conciliações passivas (1c).

Numa *hipótese abdutiva antefactual habilitadora* $P \longleftarrow Q$, definem-se os casos em que a ação antecedente P é necessária, mas não suficiente para atingir o estado consequente Q. Portanto trata-se de uma ação P que habilita, mas não garante a consecução Q, modelando também inconciliações ativas (1b), mas não conciliações passivas (1c).

Numa *hipótese abdutiva antefactual tautológica* $P – Q$, definem-se, por fim, os casos em que ambos, a ação antecedente P e o estado consequente Q, não são nem certos, nem necessários e nem suficientes, modelando todos os tipos de consecução.

A tabela a seguir resume essas possibilidades.

Tabela 3 – Possibilidades de sucesso na consecução de planos de ação intencional

Tipos de Conciliação	Ação Antecedente P	Estado Consequente Q	Hipótese Categórica $P \Leftrightarrow Q$	Hipótese Bicondicional $P \leftrightarrow Q$	Hipótese Condicional $P \longrightarrow Q$	Hipótese Habilitadora $P \longleftarrow Q$	Hipótese Tautológica $P - Q$
Conciliação Ativa	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Inconciliação Ativa	Sim	Não	Não	Não	Não	Sim	Sim
Conciliação Passiva	Não	Sim	Não	Não	Sim	Não	Sim
Inconciliação Passiva	Não	Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim

Fonte: Cardoso, Cataneo e Rauen (2019, p. 4).

A partir dessas definições, podemos resumir o comportamento das hipóteses categóricas, bicondicionais, condicionais, habilitadoras e tautológicas, de acordo com as situações apresentadas na tabela a seguir:

Tabela 4 – Resumo das propriedades de uma *hipótese abdutiva antefactual* H_a

Tipo de Hipótese	Formulação	Certeza	Necessidade	Suficiência
Categórica	$P \Leftrightarrow Q$	Certo	Necessário	Suficiente
Bicondicional	$P \leftrightarrow Q$		Necessário	Suficiente
Condicional	$P \rightarrow Q$			Suficiente
Habilitadora	$P \leftarrow Q$		Necessário	
Tautológica	$P – Q$			

Fonte: Grupo de estudos em Pragmática Cognitiva (2017).

Rauen argumenta que hipóteses abdutivas antefactuais emergem categóricas por *default* no estágio [2] do modelo, $P \Leftrightarrow Q$[24]. Somente quando são cogitados cenários rivais é que ocorrem enfraquecimentos. Segue-se disso que, a despeito de a aplicação do método da substituição, a rigor, habilitar, mas não garantir a solução do sistema, a hipótese é tomada como categórica *a priori*, sob pena de não demover o agente da inércia. Sucessivos sucessos de aplicação do método para a resolução de problemas promovem efeitos cognitivos positivos de fortalecimento da hipótese, sugerindo sua retomada em situações vindouras similares. Neste sentido, quanto mais conciliações ativas houver, menor será o custo de processamento dessa hipótese e maior a probabilidade de ela ser a primeira hipótese abdutiva a ser aplicada como categórica em contextos similares.

Apresentados os conceitos centrais de ambas as teorias, as próximas seções serão dedicadas a pô-las em movimento, considerando primeiramente um caso de autoconciliação, quando, por exemplo, um estudante projeta a meta de resolver um sistema linear e, ele próprio checa se o método da substituição viabiliza essa consecução; e, em seguida, um caso de heteroconciliação de metas, quando a consecução de uma meta decorre de ações colaborativas que demandam necessariamente por processos comunicacionais complexos.

3.3 AUTO E HETEROCONCILIAÇÃO

Para ilustrar o que Rauen (2014) denomina de autoconciliação, destaca-se a seguir o caso de um estudante que se propõe a resolver o exercício publicado em Silveira (2015, p. 162) como o qual o autor exemplifica a noção de equação[25].

Conforme o exercício, em dado momento de um campeonato de basquete, Cássio diz a Leonardo: "Seu time não é melhor que o meu!" e propõe: "Se apenas uma de suas vitórias fosse nossa, estaríamos iguais no campeonato".

[24] Para Rauen (2014, p. 12), isso ocorre em instâncias conscientes e inconscientes: a abdução é categórica "tanto em situações automáticas inatas ou aprendidas, quando o indivíduo não tem acesso consciente ao mecanismo, quanto em situações de deliberação, quando a própria hipótese emerge como relevante".

[25] Análise adaptada de Cataneo e Rauen (2018).

Para efeitos de exposição, arbitra-se que a meta Q do estudante é a de “elaborar a equação” e que o plano de ação intencional comporta a hipóteses abdutivas antefactuais segundo a qual a ação antecedente P de “aplicar o mecanismo de interpretação orientado pela relevância” viabiliza a consecução da meta Q.

Esse plano de ação intencional pode ser assim representado.

Q – Elaborar a equação, estudante.
P – Aplicar o mecanismo de interpretação orientado pela relevância, estudante. Q – Elaborar a equação, estudante.
P – O estudante aplica o mecanismo de interpretação orientado pela relevância.

Para aplicar o mecanismo de interpretação orientado pela noção de relevância, o estudante encaixa os enunciados do problema em formas lógicas[26], cujos conceitos constituintes podem ser acessados por três entradas: lógica, enciclopédica e lexical[27]. Interpretar enunciados consiste em atribuir uma entrada enciclopédica para cada entrada lógica. Enunciados são mais explícitos quando há uma entrada lexical para cada entrada lógica e menos explícitos quando não há uma entrada lexical ou ela precisa ser complementada. Em geral, enunciados são menos que explícitos, e o ouvinte precisa torná-los plenamente proposicionais para atribuir valor de verdade. Sperber e Wilson (1986, 1995) chamam explicatura o desenvolvimento de formas lógicas nestes termos.

Para dar conta dessa tarefa conforme a teoria da relevância e processar a proposta de Cássio, o estudante a encaixa numa forma lógica segundo a qual se uma condição é aceita – uma das vitórias de seu time fosse atribuída ao time de Cássio – então uma consequência é assumida – os times estariam empatados no campeonato (‘$Se\ P, então\ Q$’ou ‘$P \rightarrow Q$’).

Veja-se na figura a seguir o pareamento de entradas lexicais e enciclopédicas coordenadas pela forma lógica do enunciado de Cássio:

---

[26] Por forma lógica, Sperber e Wilson (2001, p. 125) definem “uma fórmula bem formada, um conjunto estruturado de constituintes que passa pelas operações lógicas formais determinadas pela sua estrutura”.

[27] Um conceito é um endereço com o qual os indivíduos armazenam e recuperam informações e constroem formas lógicas. Os conceitos são acessados por entradas lógicas, enciclopédicas e lexicais. Entradas lógicas computacionais são um conjunto finito de regras dedutivas aplicadas às formas lógicas das quais são constituintes. Entradas enciclopédicas representacionais configuram a memória do indivíduo e variam com o tempo. Entradas lexicais representacionais se referem a informações linguísticas dos conceitos. Conforme Sperber e Wilson (2001, p. 1444), “um endereço conceitual é um ponto de acesso para as informações lógicas, enciclopédicas e linguísticas que poderão ser necessárias para o processamento das formas lógicas que contêm esse endereço” (SPERBER; WILSON, 2001, p. 144).

Figura 9 – Elaboração da explicatura do enunciado de Cássio

Forma Linguística Entradas Lexicais[28]	Forma Lógica Entradas lógicas[29]	Explicatura Entradas Enciclopédicas
‘Se’	se (condição)	SE
‘apenas’	de algum modo exclusivo	APENAS
‘uma de suas vitórias’	alguma coisa	UMA DAS VITÓRIAS DO TIME DE LEONARDO
‘fosse’	fosse	FOSSE
‘nossa’	alguma coisa	UMA VITÓRIA DO TIME DE CÁSSIO
∅	então (consequência)	ENTÃO
∅	alguém	OS TIMES DE CÁSSIO E DE LEONARDO
‘estaríamos’	estaria	ESTARIAM
‘iguais’	de algum modo	IGUAIS EM PONTUAÇÃO
‘no campeonato’	em algum lugar	NO CAMPEONATO DE BASQUETE

Fonte: Elaboração nossa.

Além disso, cabe a Leonardo encaixar essa explicatura numa descrição de nível mais alto que leva em consideração o respectivo ato de fala. Veja-se:

> (1a) *CÁSSIO PROPÕE QUE* ______.
> (1b) *CÁSSIO PROPÕE QUE* $P \rightarrow Q$.
> (1c) *CÁSSIO PROPÕE QUE* SE APENAS UMA DAS VITÓRIAS DO TIME DE LEONARDO FOSSE UMA VITÓRIA DO TIME DE CÁSSIO, ENTÃO OS TIMES DE CÁSSIO E DE LEONARDO ESTARIAM IGUAIS EM PONTUAÇÃO NO CAMPEONATO DE BASQUETE.

Obtida a explicatura (1c), o estudante pode combiná-la com seu conhecimento enciclopédico para convertê-la numa formulação algébrica. Para isso, ele elabora uma cadeia de inferências com as quais algumas suposições $S_1 - S_n$ são tomadas como premissas implicadas para a geração de conclusões implicadas ou implicaturas.

Vejamos, a seguir, uma possível cadeias de inferências:

> S_1 – Cássio propõe que se apenas uma das vitórias do time de Leonardo fosse uma vitória do time de Cássio, então os times de Cássio e de Leonardo estariam iguais em pontuação no campeonato de basquete (premissa implicada da explicatura do enunciado de Cássio);
> S_2 – A proposta de Cássio deve ser convertida numa formulação algébrica (premissa implicada das condições da tarefa[30]);
> S_3 – A proposta de Cássio é uma equação (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* – $S_1 \wedge S_2 \rightarrow S_3$[31]);

[28] Conforme Silveira e Feltes (2002, p. 18), apresentam-se expressões linguísticas entre aspas simples, entradas enciclopédicas em versalete minúsculo (CÁSSIO) e referências no mundo sem qualquer indicativo (Cássio).

[29] Tecnicamente: ‘$P \rightarrow Q$’ ou ‘$P(ser\ nossa\ vitória\ x, \alpha_{exclusão}) \rightarrow Q(estar\ x, \alpha_{modo}, \beta_{lugar})$’.

[30] Silveira (2015, p. 162) propõe que o enunciado seja convertido numa equação algébrica, que x represente o número de vitórias do time de Cássio e que y represente o número de vitórias do time de Leonardo.

[31] Em teoria da relevância, argumenta-se haver um módulo interpretativo dedutivo que tem livre acesso a suposições provenientes da memória ou do ambiente e opera por regras como *eliminação-e* e *modus ponens*. Numa regra de *eliminação-e*, consideradas duas suposições verdadeiras em conjunto P e Q, cada uma delas é verdadeira separadamente, P ou Q. Formalmente: ‘$P \wedge Q, P$’ ou ‘$P \wedge Q, Q$’ (o símbolo $\wedge$ equivale à operação lógica de conjunção). Numa regra de *modus ponens*, se há uma relação de implicação entre duas suposições P e Q, quando a primeira é afirmada P, segue-se necessariamente a segunda Q. Formalmente: ‘$P \rightarrow Q, P, Q$’

S_4 – y representa o número de vitórias do time de Leonardo (premissa implicada das condições da tarefa);
S_5 – O número de vitórias do time Leonardo é igual a $y - 1$ (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* – $S_1 \wedge S_4 \rightarrow S_5$)
S_6 – x representa o número de vitórias do time de Cássio (premissa implicada das condições da tarefa);
S_7 – O número de vitórias do time Cássio é igual a $x + 1$ (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* – $S_1 \wedge S_6 \rightarrow S_7$).
S_8 – A equação que representa a proposta de Cássio é $y - 1 = x + 1$ (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* – $S_1 \wedge S_2 \wedge S_5 \wedge S_7 \rightarrow S_8$).

O resultado dessas inferências é a elaboração da equação "$y - 1 = x + 1$", e a elaboração da equação implica a consecução ou autoconciliação ativa da meta Q.

O resultado do plano de ação intencional poderia ser assim representado.

Q – Elaborar a equação, estudante.
P – Aplicar o mecanismo de interpretação orientado pela relevância, estudante.
Q – Elaborar a equação, estudante.
P – O estudante aplica o mecanismo de interpretação orientado pela relevância.
Q' – O estudante elabora a equação

O exemplo ilustra uma autoconciliação de metas, porque o estudante, ele próprio, projeta a meta de elaborar a equação e, ele próprio, checa se a interpretação da proposta de Cássio permite atingi-la. Todavia, há casos de heteroconciliação, quando processos de conciliação decorrem da colaboração de mais de um indivíduo. Para que isso seja possível, é necessário que os indivíduos coordenem metas e submetas em comum por meio de estímulos comunicacionais.

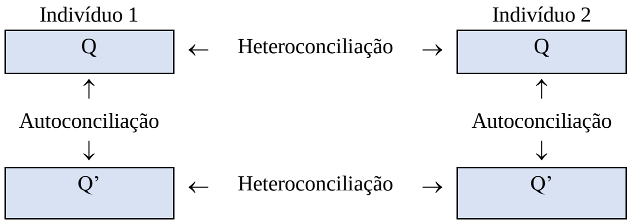
Nesses casos, o sucesso deste processo está atrelado a uma cadeia complexa de auto e heteroconciliações, de modo que, estudante e docente devem heteroconciliar metas Q e consecuções Q' coordenando ao menos uma submeta a fim de, atingir a meta de nível mais alto. Para isso é necessário que cada um seja capaz de monitorar, cada qual a sua maneira e conhecimento, se as consecuções Q' estão conciliadas com as metas Q[32].

A figura a seguir resume essas questões.

(o símbolo → equivale à operação lógica de implicação, '*se* P *então* Q'). Por vezes, as duas regras são combinadas no *modus ponens conjuntivo*: '$(P \wedge Q) \rightarrow R, P \rightarrow R, R$' ou então '$(P \wedge Q) \rightarrow R, Q \rightarrow R, R$'.

[32] Para Rauen (2014, p. 613) esta modelação alinha-se com o argumento de Tomasello e colaboradores (2005, p. 680-681) de que a diferença crucial entre a cognição humana e a de outras espécies é a capacidade humana de participar com os outros em atividades colaborativas com metas e intenções comuns.

Figura 10 – Relação para auto e heteroconciliação de metas



Fonte: Rauen (2014, p. 613, tradução do autor).

Cataneo e Rauen (2018), por exemplo, analisaram os estímulos ostensivos comunicacionais que compõem o capítulo sobre sistemas lineares do livro de Silveira (2015) de um ponto de vista centrado no autor da obra, de modo que cada atividade do texto foi concebida como integrando um plano de ação intencional em direção à consecução de meta Q de nível mais alto de “habilitar o estudante a representar e resolver situações-problema que envolvem sistemas de equação do 1º grau com duas incógnitas”. Essa formulação sugere que a conciliação dessa meta só pode ocorrer mediante a colaboração de cada um dos estudantes, de modo que cada estímulo do livro habilita, mas não garante a aprendizagem.

Rauen propõe três camadas de intenções para analisar processos comunicacionais no contexto de planos de ação intencional em direção à heteroconciliação colaborativa de metas. Para ele, uma intenção prática superordena uma intenção informativa, que superordena uma intenção comunicativa. No capítulo em pauta, por exemplo, a *intenção prática* Q de nível mais restrito de “habilitar o estudante a compreender que retas representam equações do 1º grau no plano cartesiano” superordena uma *intenção informativa* P de tornar essa proposição manifesta ou mais manifesta no ambiente cognitivo dos leitores[33]; e esta intenção informativa P superordena uma *intenção comunicativa* O de tornar mutuamente manifesto, para autor e leitores, que o autor pretende tornar essa proposição manifesta ou mais manifesta por meio de estímulos ostensivos do capítulo.

Para atingir essa intenção comunicativa de nível mais baixo, Silveira (2015, p. 168) produz o seguinte enunciado: “O conjunto de soluções de qualquer equação do 1º grau com duas incógnitas, sendo estas, números reais, é representado no plano cartesiano por uma reta”. Com esse estímulo ostensivo, de seu ponto de vista, ele “informa ao estudante que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano” e “habilita o estudante a compreender que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano”, configurando-se um processo de autoconciliação[34].

[33] Sobre a noção de manifestabilidade, confiram-se Sperber e Wilson (1995, p. 38-46).
[34] Por decorrência, um docente utilizando esse material pode gerar um plano similar.

Essas camadas de autoconciliação podem ser assim apresentadas:

	Intenção comunicativa	*Intenção informativa*	*Intenção prática*
[1]			Q – Habilitar o estudante a compreender que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano, autor.
[2]		P – Informar ao estudante que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano, autor.	Q – Habilitar o estudante a compreender que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano, autor.
[3]	O – Afirmar que o conjunto de soluções de qualquer equação do 1º grau com duas incógnitas, sendo estas, números reais, é representado no plano cartesiano por uma reta, autor.	P – Informar ao estudante que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano, autor.	
[4]	O – O autor afirma que o conjunto de soluções de qualquer equação do 1º grau com duas incógnitas, sendo estas, números reais, é representado no plano cartesiano por uma reta.		
[5]		P' – O autor informa ao estudante que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano.	
[6]			Q' – O autor habilita o estudante a compreender que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano.

Todavia, de um ponto de vista que insere o estudante, o plano de ação intencional somente é atingido se o estudante fornecer pistas ostensivas com as quais ele comunica que ele está informado e compreende que uma reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano, configurando-se um processo de heteroconciliação. Por exemplo, ele poderia dizer algo como: "Professor, as soluções das equações [do 1º grau] que a gente está fazendo viram retas [no plano cartesiano]", sugerindo essas consecuções.

[4]	O – O estudante afirma que as soluções das equações [do 1º grau] que a gente está fazendo viram retas [no plano cartesiano].		
[5]		P' – O estudante informa que o estudante supostamente sabe que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano.	
[6]			Q' – O estudante supostamente compreende que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano.

Uma vez apresentados os conceitos teórico-metodológicos que orientam essa pesquisa, é possível apresentar no capítulo seguinte a metodologia da investigação, concebida enquanto um plano de ação intencional em direção à heteroconciliação colaborativa de metas.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentam-se questões relacionadas à metodologia adotada para a execução da pesquisa em três seções. Na primeira seção, destacam-se as quatro hipóteses que foram propostas para a análise dos resultados da pesquisa. Na segunda seção, destacam-se os procedimentos realizados durante a pesquisa. Na terceira seção, apresenta-se a estrutura da sequência didática enquanto um plano de ação intencional para a coleta de dados da pesquisa.

4.1 HIPÓTESES

Esta tese verifica se a proposição de atividades que demandam a conversão de representação entre registros semióticos com apoio do *software* GeoGebra em celulares, quando analisada do ponto de vista da teoria de conciliação de metas, da teoria da relevância e da teoria de registros de representação semiótica, potencializa a compreensão conceptual de sistemas lineares por estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental.

Para dar conta dessa demanda, quatro hipóteses foram assumidas. A primeira hipótese, de caráter epistemológico, é a de que a demanda por conversões diretas e inversas de representações em diferentes registros semióticos, tal como propostas pela teoria de registros de representação semiótica, é pertinente na medida em que amplifica efeitos cognitivos positivos a despeito de um acréscimo inicial de esforço de processamento para realizá-las. Em especial, como antecipa a teoria, é a coordenação de representações viabilizadas nas atividades de conversão que permite uma apreensão significativa do conceito e da classificação de sistemas lineares.

Admitindo a correção da primeira hipótese e respondendo a questão central desta investigação, a segunda hipótese, de caráter epistemológico, assevera que a utilização do *software* GeoGebra em celulares, dado que viabiliza a conversão de representações do registro algébrico para o registro gráfico e vice-versa em sala de aula, de forma individual e praticamente instantânea, potencializa a apreensão significativa do conceito e a classificação de sistemas lineares. Isso ocorreria porque o aplicativo viabiliza visualizar, experimentar, interpretar e representar as resoluções.

Admitindo a correção das duas hipóteses anteriores, a terceira hipótese, de caráter metodológico, é a de que a teoria da relevância e a teoria de conciliação de metas permitem descrever e explicar como os estudantes procedem às conversões de representações de sistemas lineares em diferentes registros semióticos usando o *software* GeoGebra em celulares e como eles apreendem de forma significativa o conceito e a classificação desses sistemas. Isso ocorreria porque as hipóteses antefactuais otimamente relevantes abduzidas na resolução de cada situação-problema são uma função das preferências ou habilidades epistêmicas e práticas que os estudantes possuem.

Admitindo a correção metodológica da terceira hipótese, a quarta hipótese, de caráter metodológico, assevera que a arquitetura abdutivo-dedutiva proposta pela teoria de conciliação de metas viabiliza a elaboração de uma intervenção didática enquanto um plano de ação intencional em direção à heteroconciliação colaborativa de consecução da meta de promover a compreensão conceptual de sistemas lineares de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental mediante a proposição de atividades que demandam a conversão de representação entre registros semióticos com apoio do *software* GeoGebra em celulares.

4.2 PROCEDIMENTOS

No que se refere aos procedimentos, a primeira fase desta investigação se caracterizou como bibliográfica. Essa fase visou a aprofundar leituras na interface entre o ensino e a aprendizagem de matemática e as ciências da linguagem. De um lado, foram aprofundados conceitos da teoria de registros de representação semiótica de Duval (2009, 2011) e formas de utilização de recursos informatizados no ensino de Matemática (GRAVINA; SANTAROSA, 1998; BORBA, 2010); de outro, foram aprofundados conceitos da teoria de conciliação de metas (RAUEN, 2014, 2016) e da teoria da relevância (SPERBER; WILSON, 2001; SILVEIRA, FELTES, 2002).

A segunda etapa da pesquisa consistiu de organizar uma sequência didática, conforme descrita na quarta hipótese, (a) considerando os objetivos propostos na BNCC (2018) para o ensino dos sistemas lineares nas séries finais do Ensino Fundamental, em especial no que se refere à proposição de situações-problema próximas do contexto do estudante, (b) priorizando as três atividades cognitivas defendidas por Duval e (c) utilizando o método da substituição para a resolução algébrica dos sistemas (ver terceira seção).

Vale enfatizar aqui que, a rigor, o recurso ao *software* GeoGebra em celulares nesta pesquisa não constitui metodologia de ensino de matemática em si mesma, mas visa a potencializar a conversão de representações de sistemas lineares em distintos registros na expectativa de proporcionar ambiente favorável à compreensão conceptual. Trata-se, fundamentalmente, de uma ferramenta mediadora para a visualização, a experimentação, a interpretação e a classificação desses sistemas.

Além disso, cabe reforçar que ensinar matemática implica ensinar a lógica demonstrativa que lhe dá sustentação. Entretanto, a pesquisa assume que não se pode ensinar matemática exclusivamente com a linguagem matemática, mas é preciso explicá-la com os recursos da língua natural, cuja lógica diverge muitas das vezes daquela que dá sustentação à matemática como ciência formal. É por isso que tanto a sequência didática como a análise dos dados não podem prescindir de um olhar interdisciplinar que aproxime teorias próprias de ensino e aprendizagem de matemática e teorias próprias das ciências da linguagem. A confluência entre teoria de conciliação de metas, teoria da relevância e teoria de registros de representação semiótica é uma tentativa de promover um olhar interdisciplinar dessa espécie.

Organizados os procedimentos para a coleta e a análise dos dados, a terceira etapa da pesquisa consistiu na aplicação da pesquisa. Esta etapa aconteceu nos meses de setembro e outubro de 2018 na Escola de Educação Básica Samuel Sandrini, de Orleans (SC), vinculada a 20º Gerência Regional de Educação (GERED) do Estado de Santa Catarina, caracterizando a investigação como um estudo de caso.

Segundo Meksenas (2002, p. 119), um estudo de caso é um método no qual

> a pesquisa incide sobre uma unidade social significativa, significa[ndo] concentrar a pesquisa em um objeto circunscrito: estudar determinada escola e não o sistema escolar; estudar determinado grupo de jovens, não a juventude em geral; estudar certas práticas religiosas mais do que as religiões como um todo; analisar um partido político e não a totalidade dos partidos em um sistema político. (colchetes acrescidos pela autora da tese).

Conforme Rauen (2015, p. 99), em estudos de caso “o pesquisador não está interessado em generalizar os dados obtidos, mas em aprofundar as nuances, buscando descrever mais profundamente a constituição intrínseca daquilo que está pesquisando”. Consequentemente, este estudo não tem pretensões intrínsecas de generalização.

Nesta perspectiva, a coleta de dados ocorreu na Escola de Educação Básica Samuel Sandrini. A escola foi fundada em 1965 e se localiza na zona urbana do município de Orleans, na rua João Rogério Remor, nº 22, Bairro Conde D’Eu. A denominação desta Unidade Escolar é uma homenagem a Samuel Sandrini, orleanense que prestou relevantes serviços socioculturais a este município.

Desde sua criação, a escola oferece o Ensino Fundamental, mas a partir de 2010, passou a oferecer também o Ensino Médio, recebendo, nos turnos matutino e vespertino, alunos do centro da cidade, dos bairros próximos e de algumas comunidades da zona rural. Em 2020 por decisão estadual a escola retornou a atender apenas estudantes do ensino fundamental. Os resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB, do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais – INEP e Ministério de Educação e Cultura – MEC, nos anos de 2007, 2009, 2011, 2013, 2015 e 2017, constam na tabela a seguir:

Tabela 5 – Resultado do IDEB da EEB Samuel Sandrini

IDEB Observado	2007	2009	2011	2013	2015	2017
4º e 5º ano	5.1	5.2	6.4	6.4	6.2	6.5
8º e 9º ano	4.7	4.1	5.1	4.1	5.0	5.2

Fonte: PPP da EEB Samuel Sandrini, 2019.

Em 2018, o número de matrículas na Escola Samuel Sandrini conforme Censo Escolar/INEP foi de seiscentos e quarenta e nove estudantes, dentre os quais noventa e oito estudantes encontravam-se matriculados no 8º ano do Ensino Fundamental.

Conhecida a escola, em primeiro lugar a pesquisadora fez contato com a direção, solicitando autorização para realizar a pesquisa com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental do período matutino. A primeira providência formal da pesquisa foi à obtenção de “Declaração de ciência e concordância das instituições envolvidas” em 27 de abril de 2018 (ver apêndice A).

Uma vez obtida à autorização da direção da Escola de Educação Básica Samuel Sandrini, a segunda providência formal foi à obtenção da aprovação do projeto no Comitê de Ética e Pesquisa – CEP da Universidade do Sul de Santa Catarina nos termos da Plataforma Brasil. O Processo foi aprovado em 29 de agosto de 2018, conforme Parecer: 2.851.754.

Após a aprovação do projeto junto ao CEP a terceira providência formal foi a obtenção do “Termo de Consentimento Livre e Esclarecido” – TCLE dos responsáveis pelos estudantes em 11 de setembro de 2018 (ver apêndice B).

Em suma, os responsáveis foram informados de que a pesquisa ofereceria risco mínimo ao responsabilizando, decorrente de alguma frustração caso ele(a) não conseguisse resolver alguma das atividades propostas, e cansaço durante a aplicação da pesquisa. A pesquisadora comprometeu-se a estar atenta a estes possíveis casos para prestar toda a assistência necessária ao participante da pesquisa, como a reiteração de explicações ou a destinação de tempo adicional para a resolução das atividades.

Os responsáveis foram também informados de que, com a participação na pesquisa, era de se esperar como benefício para o participante que ele(a) pudesse compreender e aprender como resolver problemas matemáticos que envolvessem sistemas lineares e também como utilizar o *software* GeoGebra para representar o registro gráfico de um sistema linear. A pesquisadora ressalvou aos responsáveis que ela não poderia garantir que o participante iria aprender a resolver atividades que envolvessem sistemas lineares e construir a representação gráfica utilizando o ambiente informatizado.

Por fim, os responsáveis foram informados de que a privacidade de seu responsabilizando seria sempre mantida, que qualquer prejuízo em participar da pesquisa seria indenizado conforme determina a lei e que o responsabilizando poderia desistir a qualquer momento, bastando para isso informar à pesquisadora.

Após o contato com os responsáveis, a fim de informar os estudantes autorizados a participar da pesquisa sobre objetivos, riscos e benefícios da pesquisa, a quarta providência formal foi a de obter o "Termo de Assentimento Livre e Esclarecido" – TALE em 19 de setembro de 2018 (ver apêndice C)[35].

Concluídas as etapas formais, aplicou-se uma sequência didática, a ser apresentada na seção seguinte (ver também apêndice D), consistindo de seis encontros pré-agendados com a direção da escola e com a docente de matemática nos respectivos horários das aulas da disciplina de matemática.

Antes, contudo, vale a pena abrir parênteses para explicitar o papel duplo de pesquisadora e docente assumido simultaneamente neste estudo de caso, notadamente porque essas funções elegem objetivos diferentes. Se, de um lado, a pesquisadora-enquanto-docente está comprometida com os objetivos de ensino e aprendizagem; a pesquisadora-enquanto-pesquisadora está, além disso, comprometida com a descrição e a explicação dos processos ostensivo-inferenciais de caráter pragmático-cognitivo envolvidos na suposta potencialização promovida pelo concurso do *software* na identificação de unidades significativas dos diferentes registros de representação semiótica, no tratamento dessas unidades no interior de um mesmo registro e na conversão dessas unidades em diferentes registros.

Por esta razão, a despeito de certo estranhamento que isso possa causar, a descrição da sequência didática e a análise subsequente põem em cena três atores: estudantes, pesquisadora-enquanto-docente e pesquisadora-enquanto-pesquisadora. A análise nesta tese parte da concepção de que a consecução dos objetivos de ensino e de aprendizagem decorrem de uma cadeia complexa e dinâmica de auto e heteroconciliações, com as quais todos os atores devem heteroconciliar metas Q e consecuções Q' coordenando ao menos uma submeta

[35] Como é possível conferir no apêndice C, o termo de assentimento, no que cabe, replica o conteúdo do termo de consentimento livre e esclarecido apresentado aos pais e/ou responsáveis.

a fim de atingir a meta de nível mais alto. Segue-se disso que é necessário que cada um seja capaz de monitorar, cada qual a sua maneira e conhecimento, se as consecuções *Q'* estão conciliadas com as metas *Q*. Dado que a meta da pesquisadora superordena a meta da docente, e a meta da docente superordena a meta dos estudantes, como se pode ver na figura a seguir, cadeias complexas de heteroconciliação e, por decorrência, cadeias complexas de estímulos ostensivo-inferenciais, podem ser deslanchadas entre estudantes, entre estudantes e pesquisadora-enquanto-docente, ou entre ambos e pesquisadora-enquanto-pesquisadora.

Figura 11 – Heteroconciliação complexa de metas entre os atores da pesquisa

Fonte: Elaboração da autora.

4.3 PLANO DE AÇÃO INTENCIONAL

Para estruturar a sequência didática enquanto um plano de ação intencional em direção à conciliação colaborativa de uma meta de ensino recorreu-se à teoria de conciliação de metas (RAUEN, 2014), assumindo nas trocas comunicativas que intenções práticas superordenam intenções informativas, que superordenam intenções comunicativas.

Por exemplo, a *intenção prática Q* de a docente promover a compreensão conceptual de sistemas lineares de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental mediante a proposição de atividades que demandam a conversão de representação entre registros semióticos com apoio do *software* GeoGebra em celulares superordena uma *intenção informativa P* de tornar essa proposição manifesta ou mais manifesta no ambiente cognitivo dos estudantes participantes da pesquisa; e esta intenção informativa *P* superordena uma *intenção comunicativa O* de tornar mutuamente manifesto, para a docente e estudantes participantes da pesquisa, que a docente pretende tornar essa proposição manifesta ou mais manifesta por meio de estímulos ostensivos da sequência didática[36].

---

[36] Trabalhamos nesta pesquisa exclusivamente com sistemas lineares contendo números inteiros.

Para efeitos de exposição, antecipam-se as principais etapas do plano de ação intencional na sequência didática, assumindo que a meta Q da docente é, de fato, a de promover a compreensão conceptual de sistemas lineares com apoio do *software*[37]. Para atingir essa meta, cabe à docente atingir as submetas P_{1-6} à direita; e, para atingir cada uma dessas submetas, cabe à docente atingir as ações antecedentes O_{1-16} à esquerda.

Essa arquitetura pode ser vista a seguir:

[1] ... Q – Promover a compreensão conceptual de sistemas lineares de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental mediante a proposição de atividades que demandam a conversão de representação entre registros semióticos com apoio do *software* GeoGebra em celulares, docente.

[2] P_1 – Habilitar o estudante a encontrar solução de situações-problema registrados em língua natural que envolvam sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.

[3] O_1 – Habilitar o estudante a reconhecer unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.

[4] O_2 – Habilitar o estudante a converter representações de situações-problema propostos em língua natural para a representação algébrica, docente.

[5] O_3 – Habilitar o estudante a organizar a representação de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.

[6] O_4 – Habilitar o estudante a resolver o sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pelo método da substituição, docente.

[7] P_2 – Habilitar o estudante a reconhecer e utilizar o *software* GeoGebra para representar o registro gráfico de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.

[8] O_5 – Habilitar o estudante a reconhecer o funcionamento de cada ícone da janela do *software* GeoGebra para representar o registro gráfico de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.

[9] O_6 – Habilitar o estudante a reconhecer as unidades significativas que constituem a representação gráfica, por exemplo, variáveis, par ordenado (x, y), eixo das abcissas e eixo das ordenadas, docente.

[10] O_7 – Habilitar o estudante a representar a solução do sistema na representação gráfica, utilizando o *software* GeoGebra, docente.

[11] O_8 – Habilitar o estudante a reconhecer que a solução de um sistema de equações do 1º grau é única em qualquer representação ou método, docente.

[12] P_3 – Habilitar o estudante a encontrar a solução para situações-problema que envolva a representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.

[13] O_9 – Habilitar, mediante duas situações-problema em língua natural para trabalhar junto ao estudante, a converter um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas para a representação no registro algébrico e

[37] Por constrição de espaço, optamos por uma exposição simplificada do plano de ação intencional que omite a descrição das respectivas hipóteses abdutivas antefactuais habilitadoras: $P_1 \leftarrow Q_1$, $O_1 \leftarrow P_1$, por exemplo. As reticências representam metas ou submetas de nível mais alto: ... Q, por exemplo.

	determinar a solução pelo método da substituição, docente.	
[14]	O_{10} – Habilitar o estudante a reconhecer retas no plano cartesiano como representação gráfica de equações do 1º grau com duas incógnitas fazendo o uso do *software* GeoGebra, docente.	
[15]		P_4 – Habilitar o estudante a solucionar graficamente sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.
[16]	O_{11} – Habilitar o estudante a solucionar graficamente sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, partindo da conversão da representação do registro em língua natural para a representação do registro algébrico, ou já a partir da representação do registro algébrico, fazendo uso do *software* GeoGebra, docente.	
[17]	O_{12} – Habilitar o estudante a reconhecer sistemas de equações do 1º grau possíveis e determinados, impossíveis e possíveis e indeterminados a partir da representação gráfica fazendo uso do *software* GeoGebra, docente.	
[18]	O_{13} – Habilitar o estudante a reconhecer no *software* que a solução de um sistema SPD no registro gráfico de um sistema de equações do 1º grau é um ponto, docente.	
[19]		P_5 – Propor ao estudante a resolução de atividades que envolva a conversão da representação no registro em língua natural para a representação no registro algébrico e para a representação do registo gráfico, docente.
[20]	O_{14} – Sugerir ao estudante situações-problema nas quais ele deve fazer o uso da conversão e tratamento das unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas adotando o método da substituição para solucionar os problemas, docente.	
[21]	O_{15} – Propor ao estudante a resolução de atividades que envolva a conversão da representação no registro em língua natural para a representação do registro algébrico e para a representação do registro gráfico fazendo uso do *software* GeoGebra, docente.	
[22]		P_6 – Propor ao estudante duas situações-problema que envolva a representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas como desafios para serem solucionados, docente.
[23]	O_{16} – Possibilitar o estudante o uso do método da substituição e/ou uso do *software* GeoGebra para resolver as duas situações-problema que envolvem sistemas de equações do 1ºgrau com duas incógnitas, docente.	

Conforme o plano de ação intencional anterior, a submeta P_1 de habilitar o estudante a encontrar a solução para situações-problema que envolva a representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas proposto em língua natural envolve quatro ações antecedentes. A ação O_1 consiste em habilitar o estudante a reconhecer unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Para isso a docente lançou três problemas como desafios para o estudante buscar a solução. A intenção prática destes desafios é que o estudante perceba a importância e a necessidade das unidades significativas, que devem ser consideradas para solucionar o problema.

Os três problemas sugeridos como desafios aos estudantes foram os seguintes:

> Problema 1 – Dados dois números distintos em que um número somado com outro número é igual a três e que o dobro deste mesmo número somado com outro é igual a quatro. Calcule qual é o valor desses números.
> Problema 2 – O dobro de um número somado com o dobro de outro número é igual a quatro. A diferença entre esses números é zero. Calcule qual é o valor desses números.
> Problema 3 – Em uma livraria ao comprar um lápis e um caderno paga-se R$ 18,00. Ao comprar quatro lápis e dois cadernos paga-se R$ 40,00. Se o preço do lápis na primeira e na segunda compra é igual e o caderno também possui o mesmo preço na primeira e na segunda compra. Calcule quanto custa cada lápis e quanto custa cada caderno.

A proposta é a de que os problemas sirvam como estímulos comunicacionais por meio dos quais a docente torna mutuamente manifesto sua intenção informacional de tornar manifesta a necessidade de identificar as unidades significativas para solucionar o problema. Essa intenção comunicativa L_1 e informacional M_1 está a serviço da intenção prática N_1 de solicitar que o estudante encontre a solução para cada problema que, por sua vez, está a serviço da meta prática O_1 de nível mais alto de habilitar o estudante a reconhecer unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Por exemplo, para viabilizar os três desafios, a docente precisa comunicar aos estudantes as etapas da tarefa. Uma solução é a de elaborar um cartaz com o nome dos estudantes em uma coluna e três colunas reservadas para a resposta de cada estudante. A proposta é a de que a docente entregue a cada estudante uma ficha com o problema desafio. Nesse caso, a docente solicita ao estudante que ele encontre a solução, registre essa solução na ficha e a entregue à docente em até 5 minutos. O estudante tem 5 minutos para resolver o problema da primeira ficha e devolver à docente. Em seguida, recebe as duas fichas restantes, cada qual com 5 minutos para resolução e devolução.

Para viabilizar a tarefa, a docente precisa informar essas regras (intenção informativa) e, para isso, precisa comunicar essas regras (intenção comunicativa). Algo como:

> Docente: "Para resolver cada problema, vocês irão buscar encontrar a solução por tentativa. Depois de encontrar a solução vocês devem registrar a resposta na ficha que a docente entregou. Vocês têm cinco minutos para resolver cada desafio e devolver a ficha".

Esse plano de ação intencional pode ser modelado da seguinte forma:

Intenção comunicativa	*Intenção informativa*	*Intenções práticas*
		... O_1 – Habilitar o estudante a reconhecer unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.
		N_1 – Solicitar que o estudante encontre a solução para cada problema que envolve sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.
	M_1 – Informar ao estudante que ele deve encontrar a solução de cada problema, registrar a solução na ficha e entregar à docente em até 5 minutos, docente.	
L_1 – Comunicar ao estudante que ele deve encontrar a solução de cada problema, registrar a solução na ficha e entregar à docente em até 5 minutos, docente.		

Na ação O_2, a docente visa a habilitar o estudante a converter representações de situações-problema propostos em língua natural para a representação algébrica. Para isso, procede à conversão da representação do registro em língua natural para a representação em registro algébrico, identificando as unidades significativas para apresentar o modelo matemático da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Em seguida à ação O_2, é possível atingir a ação O_3 de habilitar o estudante a organizar a representação de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Para atingir esta ação, o estudante precisa compreender a necessidade da representação semiótica dos símbolos para indicar as variáveis desconhecidas de um problema, onde tais símbolos puderam ser representados, por exemplo, pelas letras 'x' e 'y'.

Para que o estudante compreenda como um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pode ser solucionado, a proposta é a de que a docente utilize método da substituição para resolver cada um dos sistemas, como mostra a figura a seguir.

Figura 12 – Conversão de representações em língua natural para representações algébricas

Representação no registro em língua natural	Representação no registro algébrico
Problema 1 – Dados dois números distintos em que um número somado com outro número é igual a três e que o dobro deste mesmo número somado com outro é igual a quatro. Calcule qual é o valor desses números.	$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$
Problema 2 – O dobro de um número somado com o dobro de outro número é igual a quatro. A diferença entre esses números é zero. Calcule qual é o valor desses números.	$\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$
Problema 3 – Em uma livraria ao comprar um lápis e um caderno paga-se R$ 18,00. Ao comprar quatro lápis e dois cadernos paga-se R$ 40,00. Se o preço do lápis na primeira e na segunda compra é igual e o caderno também possui o mesmo preço na primeira e na segunda compra. Calcule quanto custa cada lápis e quanto custa cada caderno.	$\begin{cases} x+y=18 \\ 4x+2y=40 \end{cases}$

Fonte: Autora (2018).

Conforme o plano de ação intencional, a representação algébrica de cada problema deve ser identificada a partir do cumprimento das ações O_2 e O_3. Assim, na ação O_4, desenvolvida nos termos apresentados a seguir, busca-se habilitar o estudante a resolver o sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pelo método da substituição.

... O_4 – Habilitar o estudante a resolver o sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pelo método da substituição, docente.
N_1 – Habilitar o estudante a buscar a solução para um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, representado no registro algébrico, docente.

M_1 – Habilitar o estudante a isolar a incógnita de uma das equações, docente.
M_2 – Habilitar o estudante a fazer a substituição do valor da incógnita isolada na segunda equação, a fim de determinar o valor da incógnita resultante, docente.
M_3 – Habilitar o estudante a substituir o valor da incógnita calculada em uma das equações do sistema, a fim de determinar o valor da outra incógnita, docente.

A submeta P_2 de “habilitar o estudante a reconhecer e utilizar o *software* GeoGebra para representar o registro gráfico de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas”, por sua vez, deve mobilizar as ações O_{5-8} nos termos do subplanos de ações intencionais apresentados a seguir.

... O_5 – Habilitar o estudante a reconhecer o funcionamento de cada ícone da janela do *software* GeoGebra para representar o registro gráfico de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.
N_1 – Habilitar o estudante a ter o acesso ao *software* GeoGebra, para isso permitir a ele utilizar um ambiente informatizado, docente.

M_1 – Habilitar o estudante a identificar unidades significativas no *software* GeoGebra, como inserir pontos, retas, equações dentre outras funções, docente.

... O_6 – Habilitar o estudante a reconhecer as unidades significativas que constituem a representação gráfica, por exemplo, variáveis, par ordenado (x, y), eixo das abcissas e eixo das ordenadas, docente.
N_1 – Habilitar o estudante a identificar as unidades significativas que compõem o plano cartesiano na imagem projetada no *software* GeoGebra, docente.

M_1 – Habilitar o estudante a identificar o eixo das abscissas (x) e o eixo das ordenadas (y), docente.
M_2 – Habilitar o estudante a encontrar um par ordenado no plano, dado o valor de um ponto, docente.

... O_7 – Habilitar o estudante a representar a solução do sistema na representação gráfica, utilizando o *software* GeoGebra, docente.
N_1– Habilitar o estudante a inserir na caixa de entrada do *software* GeoGebra as equações que compõem um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.

M_1 – Habilitar o estudante a identificar a reta que se origina no registro gráfico a sua respectiva equação, docente.

M_2 – Habilitar o estudante a visualizar que o ponto de encontro entre as duas retas que se originam no plano é a solução do sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.

M_1 – Habilitar o estudante a identificar que o valor do ponto de encontro entre as retas é formado por um par ordenado (x, y), docente.

M_2 – Habilitar o estudante a identificar que o valor de (x) está relacionado ao eixo das abscissas e o valor de (y) está relacionado ao eixo das ordenadas, docente.

M_3 – Habilitar o estudante a perceber que a solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas resolvido pelo método da substituição terá a mesma solução quando resolvido no registro gráfico com o auxílio do *software* GeoGebra, docente.

$\ldots O_8$ – Habilitar o estudante a reconhecer que a solução de um sistema de equações do 1º grau é única em qualquer representação ou método, docente.

Mais adiante, a docente deve "habilitar o estudante a encontrar a solução para situações-problema que envolvessem a representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas", submeta *P₃*. Para atingir essa submeta, a sequência didática sugere as seguintes atividades.

1- Um número x qualquer somado com outro número y qualquer é igual a oito unidades. Esse mesmo número x qualquer subtraído do mesmo número y qualquer é igual a seis unidades. Que números são esses?
2- Para realizar o pagamento de uma dívida no valor de R$ 140,00, Paulo usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$ 5,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram utilizadas 10 notas?
3- Utilizando o *software* GeoGebra construa um sistema linear e identifique o ponto de intersecção entre as retas e escreva as equações que constituem o sistema representado.
4- Resolver os seguintes sistemas de equações do 1º grau, com o auxílio do *software* GeoGebra, e classificar os sistemas de acordo com o comportamento no registro gráfico em: Sistema impossível (SI); Sistema possível determinado (SDD) e Sistema possível indeterminado (SPI).

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 2x - 10y = 20 \end{cases}$

Conforme o plano de ação intencional, cabe à docente resolver na lousa as atividades 1 e 2, a fim de demonstrar o processo de conversão da representação do registro em língua natural para a representação do registro algébrico, explicando, dessa maneira, as etapas necessárias no tratamento das unidades significativas do registro algébrico para a resolução pelo método da substituição.

Na sequência, usando o *software* GeoGebra, cabe à docente reforçar a submeta P_3 pela ação O_{10} de "habilitar o estudante a reconhecer retas no plano cartesiano como representação gráfica de equações do 1º grau com duas incógnitas". A partir dessa ação, a docente visa a atingir a submeta P_4 de habilitar o estudante a solucionar graficamente sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas e, para dar conta disso, deve propor as ações O_{11-13} vinculadas a submeta P_4.

Para tanto, propõe-se que o professor demonstre com o *software* GeoGebra a resolução das quatro atividades na representação do registro gráfico. Nesse momento, a ideia é a de que a docente use *Datashow* para projetar a interface do *software*. Desse modo, simultaneamente, os estudantes acompanham os procedimentos no *software*, que já deve ter sido instalado em seus celulares por meio do aplicativo *Graphing Calc*[38]. A proposta é a de que isso permitiria aos estudantes acompanhar a explicação da docente e, ao mesmo tempo, executar os processos individualmente no *software*, de modo a verificar a representação da solução das atividades no registro gráfico. Na submeta P_5 da sequência didática, a docente deve propor aos estudantes a resolução de atividades que envolvem a conversão da representação no registro em língua natural para a representação nos registros algébrico e gráfico. Para isso, sugere-se apresentar três novas atividades, para os quais a ações O_{14-15} vinculadas a submeta P_5 orientam a resolução.

> 1 – Resolva o sistema de equação linear fazendo o uso do método da substituição:
> $$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$
> 2 – A soma de dois números é doze unidades e a diferença entre esses dois números é quatro unidades. Calcule quais são esses números.
> 3 – Em uma praça há 18 crianças andando de bicicleta ou de skate. No total, há 50 rodas girando pela praça. Quantas crianças andam de bicicleta e quantas andam de skate?

A docente parte da ação O_{14} segundo a qual o estudante deve fazer o uso da conversão e tratamento das unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, adotando o método da substituição para solucionar as atividades 1-3. Para a representação no registro gráfico das três atividades propostas, a docente deve adotar a ação O_{15}, de modo a propor ao estudante a resolução de atividades que envolvem a conversão da representação no registro em língua natural para a representação do registro algébrico e gráfico no *software* GeoGebra.

---

[38] Denominação como o *software* GeoGebra é baixado e como seu ícone é apresentado na interface do celular.

Nesta submeta P_5, mediante um diário de registros, a pesquisadora deve observar como os estudantes convertem as representações nos registros em língua natural, algébrico e gráfico para resolver as três atividades. Para tanto, precisa observar e registrar os passos seguidos na resolução de cada uma das atividades; as dúvidas e as observações durante o processo de resolução; e as dificuldades e as facilidades no uso do *software*. Este momento é essencial para a coleta de dados, pois permite observar como os estudantes mobilizam os distintos registros de representação e os recursos informatizados. Além disso, ao final da execução da submeta P_5, a pesquisadora deve ter acesso às soluções algébricas e gráficas dos participantes, a fim de analisá-las com base na literatura que sustenta esta tese.

Na submeta P_6 da sequência didática, a docente deve propor ao estudante duas atividades que envolvam a representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas como desafios para serem solucionados.

Atividade 1- Determine o conjunto solução para o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=5} \\ \boldsymbol{3x+y=7} \end{cases}$

Agora que você já resolveu o problema acima responda as perguntas a seguir:

1- O que você precisa descobrir para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$?

2- Qual o método que você utilizou para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$?

3- No sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$, que valores você encontrou para x e y?

4- Utilize um método diferente para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$:

5- Complete a frase a seguir: A solução de um sistema linear é ____.

Atividade 2 – Ricardo foi ao mercadinho do seu bairro para comprar maças e laranjas. Observou na tabela de preços que ao comprar um quilo de maçã e um quilo de laranja paga-se R$ 6,00. Ao comprar dois quilos de maçã e quatro quilos de laranja paga-se R$ 16,00. Quanto custa cada quilo de maçã e cada quilo de laranja?[39]

Agora que você já resolveu o problema de Ricardo responda as perguntas a seguir:

1- O que está sendo perguntado a você na situação-problema do mercadinho?

2- No problema quais são as variáveis principais, assinale a resposta correta.

a) Banana e laranja
b) Banana e maçã
c) Maçã e laranja

3- Como você identificou cada uma das variáveis da situação-problema de Ricardo?

[39] Para a resolução dessa atividade considerou-se que, o quilo da maça é representado pela variável x e o quilo da laranja é representado pela variável y. Isso não provocou estranheza aos estudantes durante o processo de resolução, visto que é comum, o uso da representação da letra x e da letra y para representar valores desconhecidos. Logo, se confere a variável x ao primeiro dado do problema (nesse caso maça) e a variável y ao segundo dado do problema (nesse caso laranja).

> 4- Como você organizou a situação-problema de Ricardo para determinar o valor para cada quilo de maçã e de laranja? Assinale a resposta correta.
>
> a) Um sistema linear com duas equações
> b) Um sistema linear com uma equação
> c) Um sistema linear com uma função
>
> 5- Ao utilizar o método da substituição para resolver a situação-problema qual o valor do quilo da maçã e qual o valor do quilo da laranja?
>
> 6- Observando o ponto de intersecção entre as retas no *software* GeoGebra, como você identifica a solução para a situação-problema de Ricardo? Assinale a resposta correta.
>
> a) O valor do quilo da maçã está no eixo x e o valor do quilo da laranja está no eixo y.
> b) O valor do quilo da maçã está no eixo y e o valor do quilo da laranja está no eixo x.
> c) O valor do quilo da maçã e o valor do quilo da laranja estão no ponto de origem.
>
> 7- A solução do problema no *software* GeoGebra é a mesma solução que você encontrou utilizando o método da substituição?
> ( ) Sim
> ( ) Não
> Justifique sua resposta.
>
> 8- A solução para a situação-problema de Ricardo na representação gráfica no *software* GeoGebra é identificada como:
>
> a) Duas retas
> b) Um ponto onde duas retas se cruzam
> c) Ponto de origem
>
> 9- Considerando os estudos realizados sobre sistemas lineares qual a sua opinião em relação aos diferentes métodos de resolução.

Para tanto, a ação O_{16} vinculada a submeta P_6 foi planejada para reforçar a possibilidade do uso do método da substituição e/ou o uso do *software* GeoGebra para resolver as duas atividades, uma vez que o estudante pode optar pelo método de resolução. Determinada a resposta para cada atividade cabe ao estudante responder às 14 questões relacionadas ao raciocínio que ele utilizou durante a aplicação do método da substituição e/ou uso do *software.*

Neste momento da pesquisa, vinculado à submeta P_6, o propósito da pesquisadora é o de coletar dados que a auxiliem a analisar a questão central da pesquisa. Assim, a pesquisadora irá analisar as respostas de cada uma das atividades e as anotações feitas pela própria pesquisadora no diário de registros no decorrer do processo de coleta.

Conhecida a sequência didática em termos de um plano de ação intencional em direção à conciliação colaborativa da meta Q de nível mais alto de “promover a compreensão conceptual de sistemas lineares de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental mediante a proposição de atividades que demandam a conversão de representação entre registros semióticos com apoio do *software* GeoGebra em celulares”, cabe ao capítulo seguinte apresentar sua execução, bem como os resultado dessas ações.

5 ANÁLISE DOS ENCONTROS

Neste capítulo, aplicam-se os conceitos desenvolvidos nesta tese na análise da aplicação da sequência didática proposta no capítulo precedente[40]. Tal como programado, o plano de ação intencional foi desenvolvido em seis encontros com trinta estudantes[41] do oitavo ano do Ensino Fundamental da Escola de Educação Básica Samuel Sandrini, do município de Orleans (SC) nos meses de setembro e outubro de 2018. Em função disso, descrição e explicação das ações estão cronologicamente dispostas no texto em seis seções.

5.1 PRIMEIRO ENCONTRO

Como antecipamos no capítulo anterior, a meta Q_1 de nível mais alto que superordena o plano de ação intencional foi a de "promover a compreensão conceptual de sistemas lineares de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental mediante a proposição de atividades que demandam a conversão de representação entre registros semióticos com apoio do *software* GeoGebra em celulares". A primeira submeta P_1 em direção à consecução dessa meta mais alta foi a de "habilitar o estudante a encontrar solução de situações-problema registrados em língua natural que envolvam sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas", e o primeiro encontro visava a atender a ação O_1 de "habilitar o estudante a reconhecer unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas" mediante a aplicação de três situações-problema representados em língua natural para desafiar os estudantes a resolvê-los individualmente.

No primeiro encontro, a docente colocou na lousa um cartaz contendo uma tabela com o nome dos trinta estudantes e três colunas para registrar as respostas. Em seguida, cada estudante recebeu uma ficha de papel com o primeiro desafio, sendo reservados cinco minutos para ele propor uma resposta e devolver a ficha à docente. Uma vez entregues as respostas, a docente as registrou na tabela. Na sequência, repetiu os mesmos procedimentos para os dois desafios restantes.

[40] Eventuais adaptações do plano são destacadas na descrição das atividades.

[41] Os estudantes serão denominados de E_1 a E_{30} de modo a preservar as suas identidades.

Conforme o primeiro problema,

> Problema 1 – Dados dois números distintos em que um número somado com outro número é igual a três e que o dobro deste mesmo número somado com outro é igual a quatro. Calcule qual é o valor desses números.

cabia ao estudante interpretar que a sequência lexical "dados dois números distintos", deveria ser convertida em duas variáveis, convencionalmente, mas não necessariamente 'x' e 'y'; elaborar uma primeira equação segundo a qual "um número somado com outro número é igual a três", por exemplo, '$x + y = 3$'; elaborar uma segunda equação, segundo a qual "o dobro deste mesmo número somado com outro é igual a quatro", algo como '$2x + y = 4$'; e calcular de alguma forma "o valor desses números", ou seja o valor de 'x' e o valor de 'y'.

A suposta interpretação dos enunciados em termos de conversão das unidades significativa do registro em língua natural para o registro algébrico, portanto, já impunha um conjunto extenso de desafios. O primeiro deles, a despeito de obviedade, é a de que é necessário converter as informações do registro em língua natural para uma formulação matemática. Algo como:

> S_1 – Esta situação-problema é de matemática (premissa implicada do contexto);
> S_2 – Esta situação-problema está desenvolvida em texto (premissa implicada do contexto);
> S_3 – É preciso converter a situação-problema para uma formulação matemática (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \wedge S_2 \longrightarrow S_3$).

O segundo, o de converter numa formulação "algébrica" a sequência lexical "dados dois números distintos", como a própria história da matemática revela, não é óbvio[42].

> S_1 – São dados dois números na situação-problema (premissa implicada da explicatura do enunciado do problema em língua natural);
> S_2 – Um número deve ser representado por 'x' (conclusão implicada por *modus ponens* $S_1 \longrightarrow S_2$);
> S_3 – Um número deve ser representado por 'y' (conclusão implicada por *modus ponens* $S_1 \longrightarrow S_3$).

Assumindo as conversões acima (ou similares), é necessário converter as duas proposições em língua natural da situação-problema "um número somado com outro número é igual a três" e "o dobro deste mesmo número somado com outro é igual a quatro" em formulações algébricas e, mais uma vez, isso não é óbvio. Por exemplo, mesmo numa

---

[42] A conversão das entradas enciclopédicas 'UM NÚMERO' por 'x' e 'OUTRO NÚMERO' por 'y' sequer é necessária, uma vez que em casos mais simples é possível proceder às inferências a despeito disso.

conversão que se revela congruente, o conceito S_2 de equação deve fazer parte do conjunto de suposições internalizado pelo estudante e, com ele, alguma compreensão das propriedades dessa formulação.

> S_1 – É preciso converter a situação-problema para uma formulação matemática (premissa implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \wedge S_2 \longrightarrow S_3$).
> S_2 – A formulação matemática da situação problema é uma equação (premissa implicada da memória enciclopédica);
> S_3 – Um número somado com outro número é igual a três equivale a '$x + y = 3$' (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \wedge S_2 \longrightarrow S_3$);
> S_4 – O dobro de um número somado com outro número é igual a quatro equivale a '$2x + y = 4$' (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \wedge S_2 \longrightarrow S_4$).

Segue-se, então a proposição do problema:

> (1a) Forma linguística: "Calcule qual é o valor desses números".
> (1b) Forma lógica: calcular alguém, algo.
> (1c) Explicatura$_1$: calcule ∅ [ESTUDANTE] qual [-QU] o valor desses números [DO PRIMEIRO NÚMERO E DO OUTRO NÚMERO].
> (1d) Explicatura: *A DOCENTE DESEJA QUE* O ESTUDANTE CALCULE QUAL É O VALOR DO PRIMEIRO NÚMERO E DO OUTRO NÚMERO.

Admitindo que o estudante tenha chegado a alguma formulação matemática intuitivamente parecida nas inferências anteriores, é razoável que ele inferiria a forma lógica plenamente proposicional S_1 desse comando. Algo como:

> S_1 – A docente deseja que o estudante calcule qual é o valor do primeiro número e do outro número (premissa implicada da explicatura do comando da atividade).
> S_2 – Um [primeiro] número deve ser representado por 'x' (premissa implicada);
> S_3 – Um [outro] número deve ser representado por 'y' (premissa implicada);
> S_4 – A docente deseja que o estudante calcule qual é o valor de 'x' e de 'y' (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \longrightarrow S_4$).

Nesse contexto, é razoável supor que ele abduziria valores para as duas variáveis incógnitas e tentaria ver quais valores redundariam em duas equações. Uma primeira hipótese abdutiva é arbitrar que o primeiro número é '1' e pronto se veria que o segundo número é '2'.

> S_1 – '$x + y = 3$' (premissa implicada);
> S_2 – '$2x + y = 4$' (premissa implicada);
> S_3 – '$x = 1$' (premissa implicada por abdução/tentativa);
> S_4 – '$1 + 2 = 3$' (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \wedge S_3 \longrightarrow S_4$);
> S_5 – '$y = 2$' (conclusão por *modus ponens* $S_4 \longrightarrow S_5$);
> S_6 – '$2 + 2 = 4$' (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_2 \wedge S_3 \wedge S_5 \longrightarrow S_6$).

Tendo encontrado os valores, caberia ao aluno registrá-los na folha.

A resolução do segundo problema,

> Problema 2 – O dobro de um número somado com o dobro de outro número é igual a quatro. A diferença entre esses números é zero. Calcule qual é o valor desses números.

por hipótese, deveria seguir em linhas paralelas ao primeiro problema, com o acréscimo da subtração que é necessária para converter em equação a segunda proposição. Novamente, assumindo arbitrariamente que o estudante abduziria como primeira hipótese a substituição do primeiro valor por ‘1’, ele chegaria a ‘1’ como segundo valor[43].

$$2x + 2y = 4$$
$$(2.1) + (2.1) = 4$$
$$2 + 2 = 4$$
$$4 = 4$$

$$x - y = 0$$
$$1 - 1 = 0$$
$$0 = 0$$

A resolução do terceiro problema,

> Problema 3 – Em uma livraria ao comprar um lápis e um caderno paga-se R$ 18,00. Ao comprar quatro lápis e dois cadernos paga-se R$ 40,00. Se o preço do lápis na primeira e na segunda compra é igual e o caderno também possui o mesmo preço na primeira e na segunda compra, calcule quanto custa cada lápis e quanto custa cada caderno.

requer conversões mais complexas. O primeiro enunciado:

> (1a) Forma Linguística: “Em uma livraria ao comprar um lápis e um caderno paga-se R$ 18,00”.
> (1b) Forma lógica: alguém paga algo (quando alguém compra algo em algum lugar).
> (1c) Explicatura$_1$: em uma livraria ao [ALGUÉM] comprar um lápis e um caderno paga-se [ALGUÉM] R$ 18,00.
> (1d) Explicatura: *O DESAFIO PROPÕE QUE* EM UMA LIVRARIA, QUANDO ALGUÉM COMPRA UM LÁPIS E UM CADERNO, ALGUÉM PAGA R$ 18,00.

foi assim elaborado para fornecer os dados da primeira equação o mais congruente com a formulação algébrica, conforme a seguinte inferência arbitrariamente simplificada[44].

[43] Ou, $(2.\mathit{primeiro\ número}) + (2.\mathit{outro\ número}) = 4$ e $\mathit{primeiro\ número} - \mathit{outro\ número} = 0$.
[44] Ou, $1\ \mathit{lápis} + 1\ \mathit{caderno} =\ R\$\ 18{,}00$.

> S_1 – O desafio propõe que em uma livraria, quando alguém compra um lápis e um caderno, alguém paga R$ 18,00 (premissa implicada da explicatura do primeiro enunciado da atividade);
> S_2 – $x + y = 18$ (conclusão implicada por modus ponens $S_1 \longrightarrow S_2$).

O segundo enunciado dá conta das condições da segunda equação.

> (2a) Forma Linguística: “Ao comprar quatro lápis e dois cadernos paga-se R$ 40,00”.
> (2b) Forma lógica: alguém paga algo (quando alguém compra algo em algum lugar).
> (2c) Explicatura$_1$: [EM UMA LIVRARIA] ao [ALGUÉM] comprar quatro lápis e dois cadernos paga-se [ALGUÉM] R$ 40,00.
> (2d) Explicatura: *O DESAFIO PROPÕE QUE* EM UMA LIVRARIA, QUANDO ALGUÉM COMPRA QUATRO LÁPIS E DOIS CADERNOS, ALGUÉM PAGA R$ 40,00.

Segue-se a inferência ideal arbitrariamente simplificada[45].

> S_1 – O desafio propõe que em uma livraria, quando alguém compra quatro lápis e dois cadernos, alguém paga R$ 40,00 (premissa implicada da explicatura do primeiro enunciado da atividade);
> S_2 – $4x + 2y = 40$ (conclusão implicada por modus ponens $S_1 \longrightarrow S_2$).

Admitindo preços iguais, o desafio solicita que se calcule o preço de cada lápis e de cada caderno e, na hipótese que os estudantes se abduzam sucessivas hipóteses, é possível chegar a R$ 2,00 e R$ 16,00 respectivamente.

$$x + y = 18$$
$$2 + 16 = 18$$
$$18 = 18$$

$$4x + 2y = 40$$
$$(4.2) + (2.16) = 40$$
$$8 + 32 = 40$$
$$40 = 40$$

Concluída a aplicação dos três desafios, a docente analisou junto as respostas registradas no cartaz, e apresentou as soluções corretas $(1,2)$, $(1,1)$ e $(2,16)$. Nesse momento, cada estudante pôde verificar acertos e erros. Nessa atividade, apenas dois dos vinte e três estudantes presentes na aula acertaram os três desafios.

Ao serem questionados pela docente sobre os obstáculos para solucionar os desafios, os estudantes relataram como principal dificuldade a capacidade de interpretar o problema em língua natural e convertê-lo para a representação matemática. Por exemplo:

---

[45] Ou, $4\ lápis + 2\ cadernos = \ R\$\ 40{,}00$.

> E_4 – Professora, o desafio parece fácil, mas não consigo associar a informação do texto a um cálculo de matemática, é difícil chegar à resposta.

Fechando essa primeira etapa, a docente entregou aos estudantes uma folha com os mesmos três problemas-desafio que já haviam sido resolvidos pelo método da tentativa, e os instruiu a colá-la no caderno.

Como planejado, a segunda etapa do primeiro encontro visou a atingir a ação 2 de "habilitar o estudante a converter representações de situações-problema propostos em língua natural para a representação algébrica"; a ação 3 de "habilitar o estudante a organizar a representação de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas"; e a ação 4 de "habilitar o estudante a resolver o sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pelo método da substituição".

Na segunda etapa, a docente expôs que a matemática representa problemas desta natureza por meio de sistemas de duas equações denominados de sistemas lineares; que há três métodos de resolução de sistemas lineares: o método da comparação, o método da adição e o método da substituição; e que o método a ser desenvolvido nas aulas para estudar os sistemas lineares será o método da substituição.

Em seguida, a docente resolveu o primeiro desafio pelo método da substituição. No processo, a docente destacou a necessidade de converter o problema representado em língua natural para sua respectiva representação algébrica, a fim de estruturar adequadamente as unidades significativas das duas equações de primeiro grau que compõem o sistema linear.

> Problema 1 – Dados dois números distintos em que um número somado com outro número é igual a três e que o dobro deste mesmo número somado com outro é igual a quatro. Calcule qual é o valor desses números.

Para construir a representação algébrica o docente leu o problema e chamou a atenção dos estudantes para a descrição "dados dois números distintos", destacando que se tratava de dois números com valores diferentes, que deveriam ser representados por símbolos distintos. Para tanto, foram adotadas as letras x e y.

Na sequência, a docente leu novamente o problema para que os estudantes pudessem reconhecer as unidades significativas e compreender a conversão da representação em língua natural para sua respectiva representação algébrica. Veja-se:

> "Dados dois números distintos em que um número somado com outro número é igual a três" → $x + y = 3$.
> "o dobro deste mesmo número somado com outro é igual a quatro" → $2x + y = 4$.

Por fim, apresentou a representação matemática algébrica de um sistema linear formado por duas equações:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}.$$

Representado o sistema, a docente apresentou os passos necessários para sua resolução. Para demonstrar o método de substituição, informou aos estudantes que inicialmente é necessário escolher uma das equações do sistema linear e isolar a incógnita x. No caso, a docente escolheu a primeira equação:

$$\begin{gathered} x + y = 3 \\ x = 3 - y \end{gathered}$$

Na sequência, a docente destacou a necessidade de substituir na segunda equação a incógnita x por $3 - y$ para então se obter o valor da incógnita y.

$$\begin{gathered} 2x + y = 4 \\ 2(3 - y) + y = 4 \\ 6 - 2y + y = 4 \\ -2y + y = 4 - 6 \\ -y = -2\ (-1) \\ y = 2 \end{gathered}$$

Por fim, a docente informou que seria possível determinar o valor da incógnita x realizando a substituição do valor encontrado para y em uma das duas equações do sistema. Assim, foi escolhida a primeira equação na qual a incógnita x já se encontrava isolada.

$$\begin{gathered} x = 3 - y \\ x = 3 - 2 \\ x = 1 \end{gathered}$$

Reconhecidos os valores para as incógnitas x e y, a docente informou aos estudantes como representar por meio do par ordenado (x, y) a solução do problema, logo a representação da solução é $(1,2)$.

$$S = (1,2)$$

Neste momento, a maioria dos estudantes considerou que os tratamentos pelo método da substituição eram muito complexos e que seria mais fácil resolver o problema por tentativas. A docente argumentou que eles estavam apreendendo um método de resolução de sistemas lineares que é capaz de resolver desde sistemas mais simples até sistemas mais complexos.

Ao final da resolução do primeiro desafio, a docente solicitou aos estudantes que anotassem a resolução no caderno. Em seguida, resolveu o segundo e o terceiro problema.

> Problema 2 – O dobro de um número somado com o dobro de outro número é igual a quatro. A diferença entre esses números é zero. Calcule qual é o valor desses números.

Para representar o sistema linear, a docente instigou os estudantes a reconhecer as unidades significativas e a realizar a conversão, logo fez a leitura "O dobro de um número somado com o dobro de outro número é igual a quatro" e representou $2x + 2y = 4$, na sequência mencionou "A diferença entre esses números é zero", diante a isso, instigou os estudantes a perceberem que os números já haviam sido representados pelas incógnitas x e y, logo então, se tem: $x - y = 0$. Por fim, apresentou a representação algébrica do sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Em seguida, a docente realizou a resolução do sistema linear na lousa, adotando o método da substituição. Para tanto, a segunda equação foi escolhida para isolar a incógnita x. A docente explicou aos estudantes que, quando possível, é razoável optar pela equação que possui menor coeficiente, pois isso diminui os processos de tratamentos necessários para se isolar a incógnita.

A resolução foi assim apresentada. Primeiro, a docente isolou a incógnita x na segunda equação:

$$x - y = 0$$
$$x = y$$

Em seguida, substituiu a incógnita x por y para então se obter o valor da incógnita y na primeira equação:

$$2x + 2y = 4$$
$$2y + 2y = 4$$
$$4y = 4$$
$$y = \frac{4}{4}$$
$$y = 1$$

Por fim, substituiu o valor encontrado para y em uma das duas equações do sistema para encontrar o valor da incógnita x.

$$x = y$$
$$x = 1$$

Dado que a solução para o problema os números devem possuir o mesmo valor, a solução é representada pelo par ordenado $(1,1)$.

Na resolução do terceiro problema,

> Problema 3 – Em uma livraria ao comprar um lápis e um caderno paga-se R$ 18,00. Ao comprar quatro lápis e dois cadernos paga-se R$ 40,00. Se o preço do lápis na primeira e na segunda compra é igual e o caderno também possui o mesmo preço na primeira e na segunda compra, calcule quanto custa cada lápis e quanto custa cada caderno.

a docente chamou a atenção dos estudantes para que eles percebessem que o problema destacava dois objetos diferentes, lápis e caderno. Em seguida, utilizou a incógnita x para representar lápis e a incógnita y para representar cadernos. A partir disso, a docente leu o enunciado “Em uma livraria ao comprar um lápis e um caderno paga-se R$ 18,00”, e instigou os estudantes a representarem algebricamente essa informação pela equação $x + y = 18$.

Na sequência, a docente completou a leitura do problema “Ao comprar quatro lápis e dois cadernos paga-se R$ 40,00. Se o preço do lápis na primeira e na segunda compra é igual e o caderno também possui o mesmo preço na primeira e na segunda compra, calcule quanto custa cada lápis e quanto custa cada caderno”. Para representar essa informação a docente explicou que por se tratar do mesmo tipo e preço de lápis, assim como o mesmo tipo e preço de caderno, a segunda equação deveria ser escrita por meio da equação $4x + 2y = 40$. Logo, o sistema linear que representava o problema era:

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 4x + 2y = 40 \end{cases}$$

Mais adiante, a resolução do sistema linear foi apresentada aos estudantes na lousa e, para isso, a docente seguiu novamente o método da substituição.

Em primeiro lugar, ela isolou a incógnita x na primeira equação:

$$x + y = 18$$
$$x = 18 - \mathrm{y}$$

Depois, substituiu a incógnita x por $18 - y$ para então se obter o valor da incógnita y na segunda equação:

$$4x + 2y = 40$$
$$4\ (18 - y) + 2y = 40$$
$$72 - 4y + 2y = 40$$
$$-4y + 2y = 40 - 72$$
$$-2y = -32\ (-1)$$
$$2y = 32$$
$$y = \frac{32}{2}$$
$$y = 16$$

Mais adiante, substituiu o valor encontrado para y em uma das duas equações do sistema para encontrar o valor da incógnita x.

$$x = 18 - \mathrm{y}$$
$$x = 18 - 16$$
$$x = 2$$

Concluído o processo algébrico de resolução, a docente interpretou os resultados:

> Docente - Como a incógnita x representava os lápis e a incógnita y representava os cadernos, tem-se que o custo de um lápis é de R$ 2,00 e o custo de um caderno é de R$ 16,00. A solução pode ser apresentada pelo par ordenado $(2{,}16)$.

Além de se familiarizarem com o método, aos poucos, os estudantes foram constatando também que a representação da informação do registro em língua natural era sistematicamente convertida para o registro algébrico utilizando letras como ‘x’ e ‘y’ representando os valores desconhecidos e que a solução do sistema linear poderia ser representada pelo par ordenado (x, y).

5.2 SEGUNDO ENCONTRO

Como planejado, o segundo encontro visou a “habilitar o estudante a reconhecer e utilizar o *software* GeoGebra para representar o registro gráfico de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas”. Para tanto, quatro ações foram executadas: a ação 5 de “habilitar o estudante a reconhecer o funcionamento de cada ícone da janela do *software* GeoGebra para representar o registro gráfico de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas”; a ação 6 de “habilitar o estudante a reconhecer as unidades significativas que constituem a representação gráfica, por exemplo, variáveis, par ordenado (x, y), eixo das abcissas e eixo das ordenadas”; a ação 7 de “habilitar o estudante a representar a solução do sistema na representação gráfica, utilizando o *software* GeoGebra”; e a ação 8 de “habilitar o estudante a reconhecer que a solução de um sistema de equações do 1º grau é única em qualquer representação ou método”.

Para esse encontro, a docente instruiu os estudantes a baixar o aplicativo GeoGebra nos celulares[46]. Para tanto, usou aparelho exclusivo para a aplicação e acompanhamento da pesquisa. Nesse aparelho, adicionou o contato de cada estudante, a fim de que eles pudessem compartilhar por *WhatsApp* as respostas produzidas no *software*. No segundo encontro, portanto, os estudantes já dispunham do aplicativo *GeoGebra* instalado nos aparelhos. Para otimizar a utilização do aplicativo, a docente projetou sua interface na lousa e instruiu os estudantes a reconhecer o plano cartesiano, destacando o eixo das abscissas (eixo x) e o eixo das ordenadas (eixo y); a reconhecer a posição de cada um de seus quadrantes; e a localizar pares ordenados (x, y)[47].

Após esta etapa de reconhecimento, a docente retomou cada um dos três problemas-desafio, e instruiu os estudantes a resolvê-los no aplicativo. Para isso, destacou a necessidade de converter a representação do problema em língua natural para uma representação algébrica adequada que dá origem a um sistema linear com duas equações do primeiro grau. Em seguida, demonstrou como inserir as duas equações que compõem o sistema linear na caixa de entrada do *software* que gera a representação gráfica do sistema.

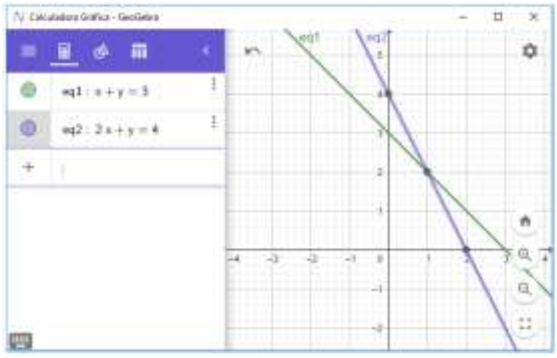
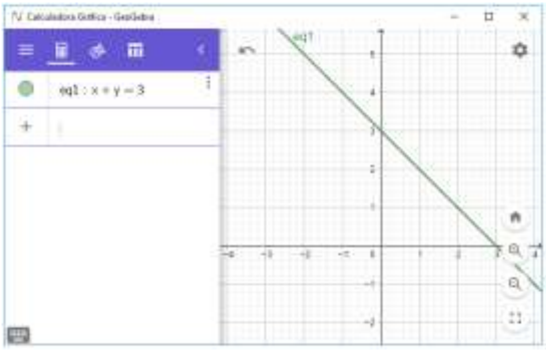
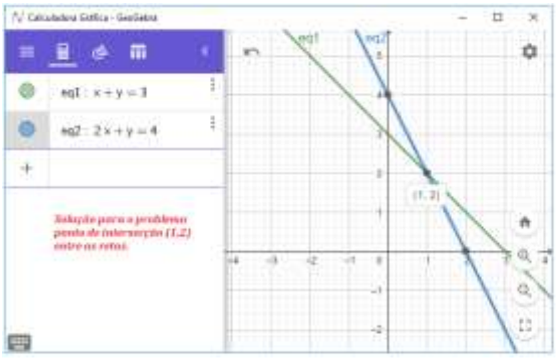
[46] Optou-se pela utilização do laboratório móvel via celular, em razão do acesso rápido ao *software* GeoGebra no próprio ambiente da sala de aula, além do que, cada estudante dispunha do seu próprio aparelho de celular, o que facilitou o acesso individual ao *software* durante a realização das atividades aplicadas na pesquisa. Direção e pais ou responsáveis estavam cientes do uso de celulares para fins de pesquisa em sala de aula.

[47] Outra etapa do processo de instrução foi a de como eles deveriam proceder para compartilhar a resposta da representação gráfica localizada no *software* com a docente pelo aplicativo *WhatsApp*.

Os estudantes foram orientados a interpretar a representação gráfica do sistema linear no *software* e a perceber que uma equação de primeiro grau é representada no plano cartesiano por uma reta. Assim, chamou a atenção dos estudantes para o fato de que, por se tratar de um sistema linear formado por duas equações do primeiro grau, a representação gráfica apresentaria duas retas no plano, e o ponto de intersecção dessas retas, o par ordenado (x, y), representaria a solução do sistema.

Na figura a seguir, é apresentada a sequência de etapas para solucionar um sistema linear por meio do *software* GeoGebra.

Figura 13 – Resolução do primeiro problema-desafio no *software* GeoGebra

1° Abrir o aplicativo do *Software* GeoGebra instalado no celular.	3° Digitar na entrada de comandos a segunda equação do sistema linear.
	
2° Digitar na entrada de comandos a primeira equação do sistema linear.	4° Solução do sistema linear representado no registro gráfico.
	

Fonte: Elaboração da autora.

Após a docente explicar a resolução gráfica do primeiro problema-desafio com o aplicativo, os estudantes resolveram o segundo e o terceiro problema utilizando o *software*. Nesse momento, pôde-se perceber o interesse de todos os estudantes, bem como a facilidade com a qual eles manipulavam o *software* em seus próprios celulares.

5.3 TERCEIRO ENCONTRO

Conforme o planejamento, o terceiro encontro visou a “habilitar o estudante a encontrar a solução para situações-problema que envolvesse a representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas”. Para esse objetivo, foram traçadas duas ações: a ação 9 de “habilitar, mediante duas situações-problema em língua natural para trabalhar junto ao estudante, a converter um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas para a representação no registro algébrico e determinar a solução pelo método da substituição”; e a ação 10 de “habilitar o estudante a reconhecer retas no plano cartesiano como representação gráfica de equações do 1º grau com duas incógnitas fazendo o uso do *software* GeoGebra”.

No terceiro encontro, a docente entregou a cada estudante uma folha com quatro atividades e propôs-se a resolver as duas primeiras na lousa para reforçar os procedimentos de conversão da representação dos problemas do registro em língua natural de partida para uma representação de chegada no registro algébrico; e as etapas necessárias no tratamento das unidades significativas do registro algébrico para a resolução pelo método da substituição.

Nesse momento, um dos estudantes solicitou que fosse registrada a sequência das etapas necessárias para a resolução de um sistema linear pelo método da substituição[48]. No caso, a docente modelou as etapas necessárias para se atingir a resolução do sistema pelo método da substituição, etapas que foram esquematizadas e registradas na lousa para que os estudantes pudessem anotar.

Assumindo o plano de ação intencional subjacente:

[1]		Q		resolver sistema, estudante
[2]	P	Q	aplicar o método da substituição, estudante	resolver sistema, estudante
[3]	P		o estudante aplica o método da substituição	
[4]		Q’		o estudante resolve o sistema

Assim registrou-se:

O_1 – Escolher uma equação do sistema, preferindo aquela com menor coeficiente;
O_2 – Isolar a incógnita x na equação escolhida;
O_3 – Substituir a incógnita x, ficando apenas com a incógnita y na outra equação;
O_4 – Obter o valor da incógnita y na segunda equação;

[48] Conforme a teoria de conciliação de metas, o que o estudante comunicou a docente foi à necessidade de esquematizar as etapas a serem seguidas, ou seja, determinar a ação antecedente P a ser admitida como minimamente necessária para atingir o estado consequente Q da meta final que é resolver o sistema.

O_5 – Substituir o valor da incógnita y em uma das duas equações do sistema;
O_6 – Obter o valor da incógnita x;
O_7 – Apresentar o par ordenado (x, y) solução do sistema.

Segue a formulação da primeira atividade:

1. Um número x qualquer somado com outro número y qualquer é igual a oito unidades. Esse mesmo número x qualquer subtraído do mesmo número y qualquer é igual a seis unidades. Que números são esses?

Seguindo as etapas do esquema modelado com os estudantes, a docente resolveu a atividade número 1 na lousa usando o método da substituição.

Representação algébrica do sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases};$$

Solução algébrica:

O_1 – Escolher uma equação do sistema, preferindo aquela com menor coeficiente;
$x + y = 8$

O_2 – Isolar a incógnita x na equação escolhida;

$$x + y = 8$$
$$x = 8 - y$$

O_3 – Substituir a incógnita x, ficando apenas com a incógnita y na outra equação;

$$x - y = 6$$
$$8 - y - y = 6$$

O_4 – Obter o valor da incógnita y na segunda equação;

$$8 - y - y = 6$$
$$-2y = 6 - 8$$
$$-2y = -2\ (-1)$$
$$2y = 2$$
$$y = \frac{2}{2}$$
$$y = 1$$

O_5 – Substituir o valor da incógnita y em uma das duas equações do sistema;

$$x = 8 - y$$
$$x = 8 - 1$$

O_6 – Obter o valor da incógnita x;

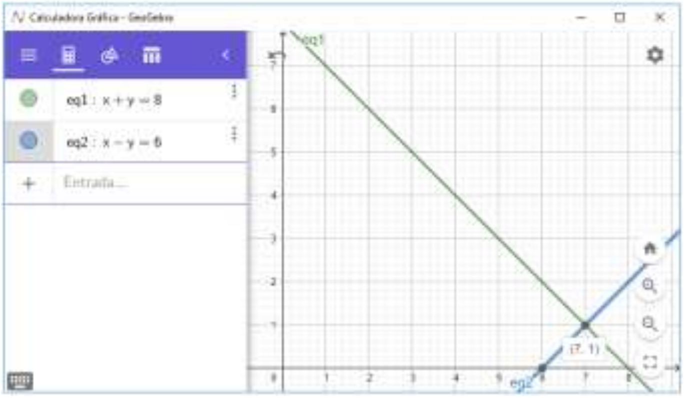
$$x = 7$$

O_7 – Apresentar o par ordenado (x, y) solução do sistema.

Solução (7,1).

Em seguida, instruiu os estudantes a resolver esse sistema linear com o *software*. Com o apoio do *Datashow*, a docente projetou a representação gráfica da atividade número 1 e foi chamando a atenção dos estudantes sobre o comportamento das retas no plano cartesiano, destacando que o par ordenado $(7,1)$ onde as retas estavam se cruzando, denominado de ponto de intersecção era o mesmo par ordenado encontrado na resolução algébrica do problema. A intenção da docente era a de tornar mutuamente manifesto à docente e aos estudantes que a solução algébrica e gráfica era a mesma. Como representa a figura.

Figura 14 – Resolução da atividade número 1 no *software* GeoGebra



Fonte: Elaboração da autora.

Na atividade 2,

> 2. Para realizar o pagamento de uma dívida no valor de R$ 140,00, Paulo usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$ 5,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram utilizadas 10 notas?

a docente, com apoio dos estudantes, identificou as unidades significativas da representação do problema em língua natural, realizou a conversão para a representação algébrica, representando o sistema linear.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$$

Em seguida, solicitou aos estudantes que encontrassem a solução, utilizando o método da substituição e o *software* GeoGebra. Nesta atividade, constatou-se que alguns estudantes optaram por utilizar o *software* primeiro e aplicar o método da substituição depois, de modo a comparar as respostas. Quando os estudantes encontravam respostas diferentes das fornecidas pelo *software*, retornavam ao cálculo a fim de encontrar equívocos e conciliar as respostas. Quando os estudantes não identificavam o erro, solicitavam auxílio à docente ou então a outro estudante que havia conseguido atingir a mesma resposta em ambos os métodos de resolução. Observou-se, portanto, que a resposta fornecida pelo *software* funcionou como gabarito para a revisão dos cálculos. Após os estudantes terem finalizado sua resolução no caderno, a docente também resolveu a atividade na lousa, reforçando cada uma das etapas do método da substituição.

Figura 15 – Resolução da atividade número 2

<table>
<tr><th>Representação no registro algébrico</th><th>Representação no registro gráfico</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$$

Isolamento da incógnita x em uma das equações:

$$x + y = 10$$
$$x = 10 - y$$

Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $10 - y$:

$$20x + 5y = 140$$
$$20\,(10 - y) + 5y = 140$$
$$200 - 20y + 5y = 140$$
$$-20y + 5y = 140 - 200$$
$$-15y = -60\ (-1)$$
$$15y = 60$$
$$y = \frac{60}{15}$$
$$y = 4$$

Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y:

$$x = 10 - y$$
$$x = 10 - 4$$
$$x = 6$$

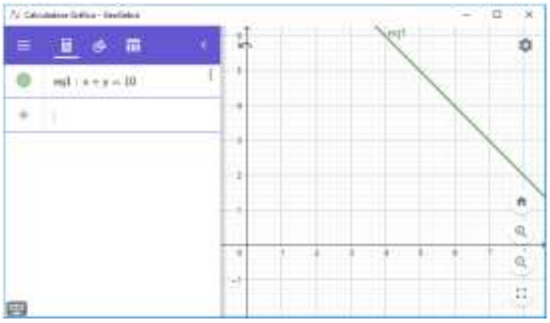
$$S\ (6{,}4)$$

Solução:
Paulo usou seis notas de R$ 20,00 e quatro notas de R$ 5,00.

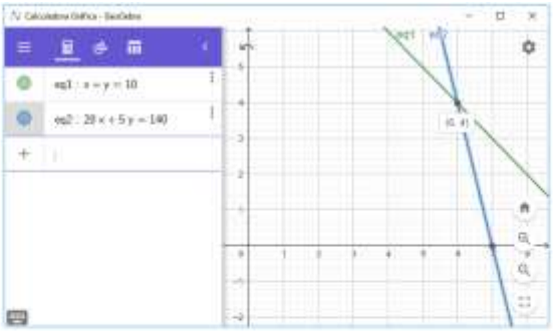
</td><td>

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$$

Digitar na entrada de comandos a primeira equação do sistema.



Digitar na entrada de comandos a segunda equação do sistema.



Solução:
Paulo usou seis notas de R$ 20,00 e quatro notas de R$ 5,00.

</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração da autora.

Neste momento da aplicação da pesquisa, percebeu-se maior expertise nos passos de resolução pelo método de substituição nas manifestações dos estudantes. O estudante E_1, por exemplo, disse: “Docente! Então a resposta que eu encontrar na resolução pelo método da substituição vai ser sempre a mesma que eu vou encontrar quando usar o *software* GeoGebra e vice-versa?”. Esse questionamento sugere que ele conseguiu perceber relações entre as respostas para o problema em diferentes representações de registros semióticos.

As atividades 3 e 4 foram abordadas pela docente no quarto encontro.

5.4 QUARTO ENCONTRO

Seguindo o plano de ação intencional, o quarto encontro visou a “habilitar o estudante a solucionar graficamente sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas”. Para dar conta dessa meta, três ações foram concebidas: a ação 11 de “habilitar o estudante a solucionar graficamente sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, partindo da conversão da representação do registro em língua natural para a representação do registro algébrico, ou já a partir da representação do registro algébrico, fazendo uso do *software* GeoGebra”; a ação 12 de “habilitar o estudante a reconhecer sistemas de equações do 1º grau possíveis e determinados, impossíveis e possíveis e indeterminados a partir da representação gráfica fazendo uso do *software* GeoGebra”; e a ação 13 de “habilitar o estudante a reconhecer no *software* que a solução no registro gráfico de um sistema de equações do 1º grau é um ponto”.

No quarto encontro, a docente usou somente o *software* GeoGebra para resolver a atividade 3, exemplificando como é possível identificar o sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas a partir da representação gráfica.

> 3. Utilizando o *software* GeoGebra construa um sistema linear e identifique o ponto de intersecção entre as retas e escreva as equações que constituem o sistema representado.

Nessa atividade, foi possível explorar a conversão da representação gráfica para a representação algébrica. Com o apoio do *software,* a docente instruiu os estudantes a construir duas retas que se cruzassem em um determinado ponto no plano. Em seguida, solicitou que eles identificassem a reta com sua respectiva equação, a fim de construir o sistema linear. Como a resolução da atividade foi realizada com o *software*, isso permitiu aos estudantes construírem diferentes sistemas de modo rápido e interativo. Os estudantes visualizaram a mudança dos coeficientes de cada equação conforme a posição adotada pelas retas no plano ou a alteração da posição das retas quando alterado o valor dos coeficientes. Na resolução da atividade 3, ficou explícito como o *software* pode potencializar o ensino e a aprendizagem desses sistemas, pois a realização de tarefas similares sem o concurso do *software* seria impeditiva e demandaria alto custo de processamento.

Na aplicação da atividade 4, a docente explicou aos estudantes que, conforme Kolman e Hill (2014, p. 29), “todo sistema de equações lineares tem ou nenhuma solução, ou exatamente uma, ou então uma infinidade de soluções”. Ela destacou, então, que decorre do tipo de solução a classificação dos sistemas em três tipos: a) sistema impossível (SI); b) sistema possível e determinado (SPD) e c) sistema possível e indeterminado (SPI).

Para tratar desses três tipos de classificação, a docente solicitou que os estudantes resolvessem os três sistemas lineares da atividade 4 com o *software* GeoGebra e observassem o comportamento das retas no plano cartesiano.

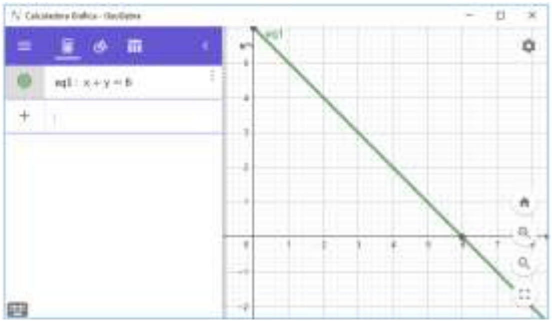
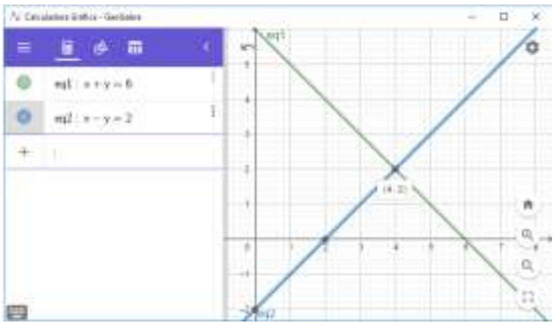
4. Resolver os seguintes sistemas de equações do 1º grau, com o auxilio do *software* GeoGebra, e classificar os sistemas de acordo com o comportamento no registro gráfico em: Sistema impossível (SI); Sistema possível determinado (SPD) e Sistema possível indeterminado (SPI).
   $a)\ \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$
   $b)\ \begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$
   $c)\ \begin{cases} x - 5y = 10 \\ 2x - 10y = 20 \end{cases}$

Fazendo o uso do *software* GeoGebra para solucionar o sistema linear

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

os estudantes puderam visualizar a representação gráfica de cada uma das equações e observar visivelmente que o único ponto comum às duas retas é o de coordenadas $(4{,}2)$. As coordenadas desse ponto representam a única solução do sistema linear, ou seja, $x = 4$ e $y = 2$ são os únicos valores que satisfazem simultaneamente ambas as equações. Em razão disso, a docente informou aos estudantes que o sistema linear é classificado como sistema possível e determinado (SPD). Como se pode observar na figura a seguir.

Figura 16 – Resolução algébrica e gráfica de um Sistema Possível Determinado

Representação no registro algébrico	Representação no registro gráfico
$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ Isolamento da incógnita x em uma das equações: $x + y = 6$ $x = 6 - y$ Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $6 - y$: $x - y = 2$ $6 - y - y = 2$ $-2y = 2 - 6$ $-2y = \ -4\ (-1)$ $2y = 4$ $y = \frac{4}{2}$ $y = 2$ Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y: $x = 6 - y$ $x = 6 - 2$ $x = 4$ $S\ (4{,}2)$ Classificação (SPD)	$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ Digitar na entrada de comandos a primeira equação do sistema.  Digitar na entrada de comandos a segunda equação do sistema.  Graficamente fica nítido que existe um único ponto em comum às duas retas, determinado pelas coordenadas (4,2). Logo o sistema é classificado como sistema possível determinado (SPD).

Fonte: Elaboração da autora.

Na resolução do segundo sistema linear, os alunos demonstraram estranheza ao visualizar a representação gráfica, pois as retas não se cruzavam. Nesse momento E_{11} comentou: “Docente, deu errado no *software*, as retas não estão se cruzando!”. Outros estudantes refizeram o cálculo pelo *software* inserindo novamente as equações, supostamente por conjecturar que haviam digitado algo errado e gerado uma representação gráfica incorreta. A docente destacou que a representação gráfica estava correta. Projetando a representação gráfica, explicou que em casos nos quais o sistema linear gera retas paralelas, isto é, retas que não se cruzam em nenhum ponto, isso significa que é impossível resolver o sistema, pois não há um par ordenado (x, y) que satisfaça as duas equações do sistema, ou seja, nenhum ponto de uma das retas pertence à outra reta. Logo, trata-se de um sistema impossível (SI), como podemos visualizar na figura a seguir.

Figura 17 – Resolução algébrica e gráfica de um Sistema Impossível

<table>
<tr><th>Representação no registro algébrico</th><th>Representação no registro gráfico</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Isolamento da incógnita x em uma das equações:

$$x + y = 6$$
$$x = 6 - y$$

Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $6 - y$:

$$x + y = 4$$
$$6 - y + y = 4$$
$$0y = 4 - 6$$
$$0y = -2$$

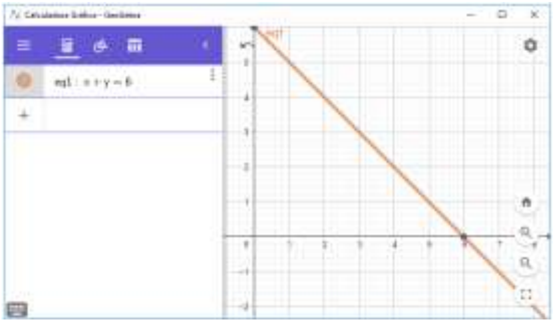
Classificação: (SI)

Sistema impossível, devido à incógnita y não admitir nenhum valor como solução, ou seja, não existe nenhum valor numérico que multiplicado a zero seja igual a -2.

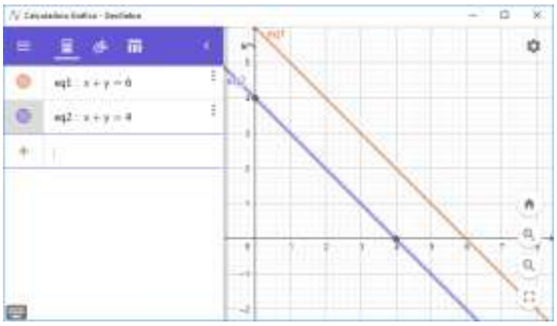
</td><td>

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Digitar na entrada de comandos a primeira equação do sistema.



Digitar na entrada de comandos a segunda equação do sistema.



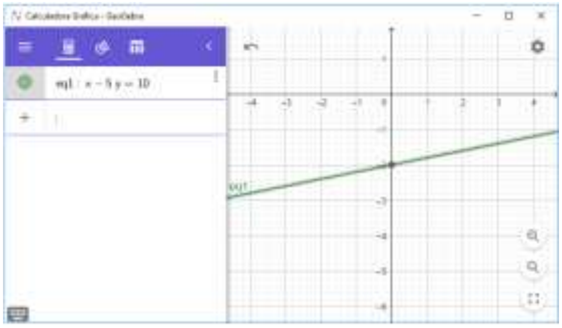
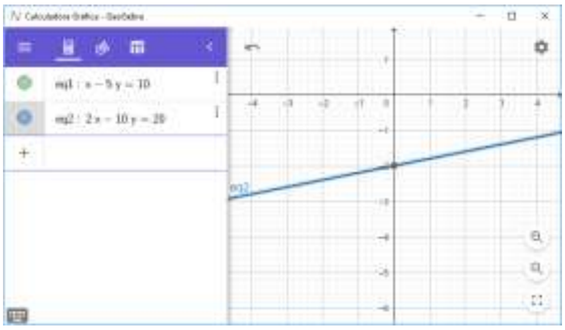
Graficamente fica nítido que não existe nenhum ponto em comum às duas retas, logo o sistema linear é classificado como sistema impossível (SI).

</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração da autora.

Dando sequência à aplicação da atividade, a docente solicitou aos estudantes que verificassem o comportamento das retas no terceiro sistema. Os estudantes inseriram as duas equações que compunham o sistema na caixa de entrada do *software* e, com o resultado da representação gráfica na tela, identificaram que “as retas estão uma sob a outra”, “As retas não se cruzam e nem estão uma do lado da outra”. E_{10}, por exemplo, questionou: “Essas retas têm ponto em comum docente?”. Nesse momento a docente projetou na lousa a resposta e explicou aos estudantes que as retas, estando uma sob/sobre a outra, eram coincidentes. Isso implica que elas apresentam infinitos pontos em comum, isto é, todos os pontos de uma reta pertencem a outra, de modo que não é possível determinar um único ponto como solução para o sistema, mas infinitos pontos de solução. Logo, tratava-se de um sistema possível indeterminado (SPI).

Figura 18 – Resolução algébrica e gráfica de um Sistema Possível Indeterminado

Representação no registro algébrico	Representação no registro gráfico
$\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 2x - 10y = 20 \end{cases}$ Isolamento da incógnita x em uma das equações: $x - 5y = 10$ $x = 10 + 5y$ Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $10 + 5y$ $2x - 10y = 20$ $2(10 + 5y) - 10y = 20$ $20 + 10y - 10y = 20$ $10y - 10y = 20 - 20$ $0y = 0$ $y = \alpha$ Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y: $x = 10 + 5y$ $x = 10 + 5\alpha$ $S\ (10 + 5\alpha, \alpha)$ Classificação (SPI) Sistema possível indeterminado, devido à incógnita y admitir infinitos valores como solução, ou seja, existe infinitos valores numéricos que multiplicados pelo valor zero apresentam como resultado o valor igual a $zero$.	$\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 2x - 10y = 20 \end{cases}$ Digitar na entrada de comandos a primeira equação do sistema.  Digitar na entrada de comandos a segunda equação do sistema.  Geometricamente, as duas equações do sistema representam retas coincidentes no plano cartesiano, isto é, retas que compartilham de todos os mesmos pontos do plano. Logo o sistema linear é classificado como sistema possível indeterminado (SPI).

Fonte: Elaboração da autora.

Ao final desta atividade, os estudantes solicitaram exercícios similares para que pudessem analisar a representação gráfica e classificar os sistemas. Assim, a docente acrescentou as seguintes três atividades[49].

> 1. Resolva os seguintes sistemas de equações do 1º grau, com o auxílio do *software* GeoGebra, e classifique os sistemas de acordo com o comportamento no registro gráfico em: Sistema impossível (SI); Sistema possível determinado (SPD) e Sistema possível indeterminado (SPI).
>
> a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$
>
> b) $\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 5y = 44 \end{cases}$

[49] As três atividades não constavam na sequência didática elaborada previamente pela pesquisadora.

2. Resolva o sistema de equações $\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - y = 26 \end{cases}$ pelo método da substituição e com o apoio do *software* GeoGebra.
3. A soma das idades de duas pessoas é de quinze anos. A diferença entre as idades é de três anos. Calcule a idade de cada pessoa.

Na primeira atividade, os estudantes classificaram os sistemas, de acordo com a representação gráfica das retas e, para isso, utilizaram o *software* GeoGebra. Ao visualizar a representação gráfica do primeiro sistema linear a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$, os estudantes constataram que as retas do sistema não se cruzaram, isto é, nenhum ponto de uma das retas pertence à outra reta, logo as retas não possuem ponto de intersecção. Os estudantes concluíram com facilidade que se tratava de um (SI).

Figura 19 – Resolução algébrica e gráfica da atividade número 1a

Representação no registro algébrico	Representação no registro gráfico
$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ Isolamento da incógnita y em uma das equações: $3x + y = 5$ $y = 5 - 3x$ Obtenção do valor da incógnita x na segunda equação pela substituição da incógnita y por $5 - 3x$ $3x + y = 2$ $3x + (5 - 3x) = 2$ $3x + 5 - 3x = 2$ $0x = 2 - 5$ $0x = -3$ Classificação: (SI) Sistema impossível, devido à incógnita x não admitir nenhum valor como solução, ou seja, não existe nenhum valor numérico que multiplicado a zero seja igual a -3.	$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ Digitar na entrada de comandos a primeira equação do sistema.  Digitar na entrada de comandos a segunda equação do sistema.  Graficamente fica nítido que não existe nenhum ponto em comum às duas retas, logo o sistema linear é classificado como sistema impossível (SI).

Fonte: Elaboração da autora.

Quanto a resolução do segundo sistema linear $\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 5y = 44 \end{cases}$, os estudantes também adotaram o *software* para resolver e classificá-lo a partir da representação gráfica. Nesse último sistema, os estudantes visualizaram que as equações geraram retas que se cruzaram em um único ponto do plano cartesiano, determinado pelas coordenadas (8,4). Assim, os estudantes concluíram se tratar de um (SPD).

Na figura a seguir, podemos observar a resolução do sistema b) na representação algébrica e na representação gráfica.

Figura 20 – Resolução algébrica e gráfica da atividade número 1b

<table>
<tr><th>Representação no registro algébrico</th><th>Representação no registro gráfico</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 5y = 44 \end{cases}$$

Isolamento da incógnita x em uma das equações:

$$x + y = 12$$
$$x = 12 - y$$

Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $12 - y$:

$$3x + 5y = 44$$
$$3(12 - y) + 5y = 44$$
$$36 - 3y + 5y = 44$$
$$-3y + 5y = 44 - 36$$
$$2y = 8$$
$$y = \frac{8}{2}$$
$$y = 4$$

Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y:

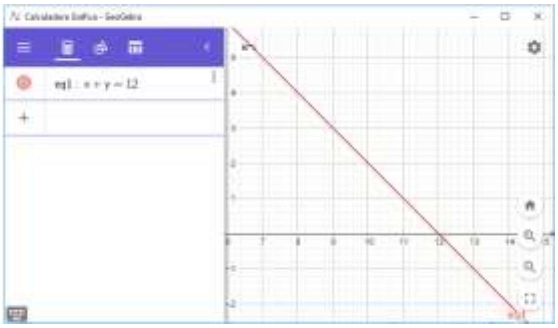
$$x = 12 - y$$
$$x = 12 - 4$$
$$x = 8$$

S (8,4)
Classificação (SPD)

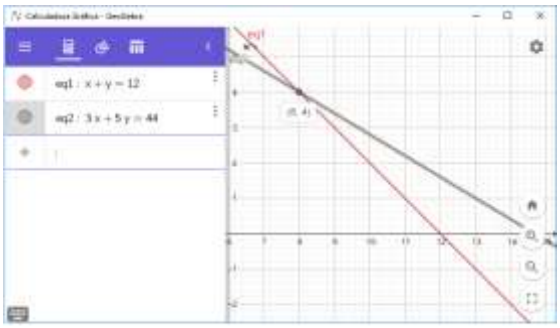
</td><td>

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 5y = 44 \end{cases}$$

Digitar na entrada de comandos a primeira equação do sistema.



Digitar na entrada de comandos a segunda equação do sistema.



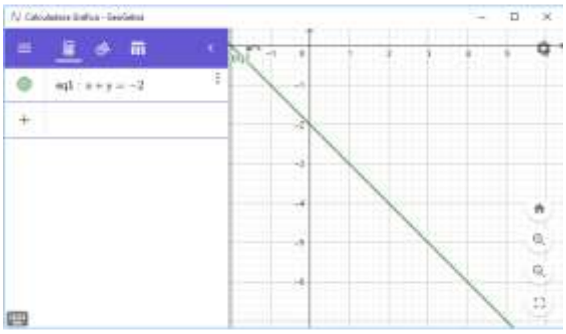
Graficamente fica nítido que existe um único ponto em comum às duas retas, determinado pelas coordenadas (8,4). Logo o sistema é classificado como sistema possível determinado (SPD)

</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração da autora.

Na segunda atividade, os estudantes precisaram resolver o sistema linear algebricamente (*método da substituição*) e graficamente (*software*). Neste momento, observou-se que os estudantes resolveram primeiramente a questão no *software* para depois aplicar o método da substituição e comparar as respostas, a fim de verificar se o par ordenado (x, y) solução do sistema era igual em ambos os métodos. Foi possível constatar que os estudantes que não encontraram a mesma resposta voltavam a analisar a resolução pelo método de substituição anotada no caderno e, na medida em que não identificavam no cálculo algébrico o erro que eles acreditavam ter cometido, solicitavam imediatamente o auxílio da docente ou a ajuda de um colega que já havia resolvido a atividade.

Figura 21– Resolução algébrica e gráfica da atividade número 2

Representação no registro algébrico	Representação no registro gráfico
$\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - y = 26 \end{cases}$ Isolamento da incógnita x em uma das equações: $x + y = -2$ $x = -2 - y$ Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $-2 - y$ $2x - y = 26$ $2(-2 - y) - y = 26$ $-4 - 2y - y = 26$ $-2y - y = 26 + 4$ $-3y = 30\ (-1)$ $3y = -30$ $y = \frac{-30}{3}$ $y = -10$ Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y: $x = -2 - y$ $x = -2 - (-10)$ $x = -2 + 10$ $x = 8$ $S\ (8, -10)$ Classificação (SPD)	$\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - y = 26 \end{cases}$ Digitar na entrada de comandos a primeira equação do sistema.  Digitar na entrada de comandos a segunda equação do sistema.  Graficamente fica nítido que existe um único ponto em comum às duas retas, determinado pelas coordenadas $(8, -10)$. Logo o sistema é classificado como sistema possível determinado (SPD).

Fonte: Elaboração da autora.

Na terceira atividade foi fornecido um problema em língua natural, cuja resolução exigiu dos estudantes a capacidade de identificar as unidades significativas para construir o sistema linear. Na sequência, os estudantes resolveram o sistema com o apoio do *software* e pelo método da substituição.

Para dar conta dessa atividade, cabia ao estudante primeiramente interpretar cada uma das três proposições do enunciado.

> (1a) Forma Linguística: “A soma das idades de duas pessoas é de quinze anos”.
> (1b) Forma lógica: algo é algo.
> (1c) Explicatura$_1$: A soma das idades de duas pessoas é de quinze anos.
> (1d) Explicatura: *A ATIVIDADE PROPÕE QUE* A SOMA DAS IDADES DE DUAS PESSOAS É DE QUINZE ANOS.

A despeito da incongruência[50], a conversão do primeiro enunciado decorre da seguinte implicatura:

> S_1 – A atividade propõe que a soma das idades de duas pessoas é de quinze anos (premissa implicada da explicatura do primeiro enunciado do problema;
> S_2 – ‘$x + y = 15$’ (conclusão implicada por *modus ponens* $S_1 \longrightarrow S_2$).

Segue respectivas explicatura e implicatura do segundo e do terceiro enunciado:

> (2a) Forma Linguística: “A diferença entre as idades é de três anos”.
> (2b) Forma lógica: algo é algo.
> (2c) Explicatura$_1$: A diferença entre as idades [DAS DUAS PESSOAS] é de três anos.
> (2d) Explicatura: *A ATIVIDADE PROPÕE QUE* A DIFERENÇA ENTRE AS IDADES DAS DUAS PESSOAS É DE TRÊS ANOS.
>
> S_1 – A atividade propõe que a diferença entre as idades das duas pessoas é de três anos (premissa implicada da explicatura do primeiro enunciado do problema;
> S_2 – ‘$x - y = 3$’ (conclusão implicada por *modus ponens* $S_1 \longrightarrow S_2$).
>
> (3a) Forma Linguística: “Calcule a idade de cada pessoa”.
> (3b) Forma lógica: calcular alguém algo.
> (3c) Explicatura$_1$: Calcule $\varnothing$ [O ESTUDANTE] a idade de cada pessoa [CUJA SOMA DAS IDADES É QUINZE ANOS E A DIFERENÇA DAS IDADES É TRÊS ANOS].
> (3d) Explicatura: *A ATIVIDADE PROPÕE QUE* O ESTUDANTE CALCULE A IDADE DE CADA PESSOA CUJA SOMA DAS IDADES É QUINZE ANOS E A DIFERENÇA DAS IDADES É TRÊS ANOS.

Conhecido o sistema, o estudante tem condições de aplicar os passos $O_{1\text{-}7}$ do método da substituição, assim como fornecer os dados corretos no aplicativo para conferir a solução gráfica do sistema. O resultado de ambas as opções pode ser visto a seguir.

---

[50] Uma versão mais congruente desse enunciado, entre outras possibilidades, poderia ser: “A idade da primeira pessoa mais a idade da segunda pessoa é quinze anos”.

Figura 22 – Resolução algébrica e gráfica da atividade número 3

<table>
<tr><th colspan="2">Representação em língua natural</th></tr>
<tr><td colspan="2">A soma das idades de duas pessoas é de quinze anos. A diferença entre as idades é de três anos. Calcule a idade de cada pessoa.</td></tr>
<tr><th>Representação no registro algébrico</th><th>Representação no registro gráfico</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Isolamento da incógnita x em uma das equações:

$$x + y = 15$$
$$x = 15 - y$$

Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $15 - y$

$$x - y = 3$$
$$15 - y - y = 3$$
$$-y - y = 3 - 15$$
$$-2y = -12\ (-1)$$
$$2y = 12$$
$$y = \frac{12}{2}$$
$$y = 6$$

Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y:

$$x = 15 - y$$
$$x = 15 - 6$$
$$x = 9$$

$$S\ (9, 6)$$

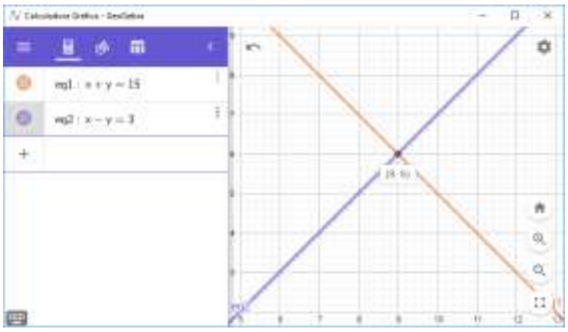
Uma das pessoas possui 9 anos e da outra possui 6 anos.

</td><td>

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Digitar na entrada de comandos a primeira equação do sistema.

Digitar na entrada de comandos a segunda equação do sistema.



Graficamente fica nítido que existe um único ponto em comum às duas retas, determinado pelas coordenadas (9,6). Logo a solução é que uma das pessoas possui 9 anos e da outra possui 6 anos de idade.

</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração da autora.

Nesta atividade, os estudantes E_6 e E_{12} produziram respostas rápidas e corretas nos dois métodos de resolução, auxiliando em seguida os colegas com dificuldades.

5.5 QUINTO ENCONTRO

Seguindo o plano de ação intencional, o quinto encontro visou a "propor ao estudante a resolução de atividades que envolva a conversão da representação no registro em língua natural para a representação no registro algébrico e para a representação do registo gráfico”. Para dar conta dessa meta, duas ações foram executadas: a ação 14 de “sugerir ao estudante situações-problema nas quais ele deve fazer o uso da conversão e tratamento das unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas adotando o método da substituição para solucionar os problemas”; e a ação 15 de “propor ao estudante a resolução de atividades que envolva a conversão da representação no registro em língua natural para a representação do registro algébrico e para a representação do registro gráfico fazendo uso do *software* GeoGebra”.

No quinto encontro, os estudantes trabalharam três atividades em dois momentos:

> 1 – Resolva o sistema de equação linear fazendo o uso do método da substituição:
> $$\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=1 \end{cases}$$
> 2 – A soma de dois números é doze unidades e a diferença entre esses dois números é quatro unidades. Calcule quais são esses números.
> 3 – Em uma praça há 18 crianças andando de bicicleta ou de skate. No total, há 50 rodas girando pela praça. Quantas crianças andam de bicicleta e quantas andam de skate?

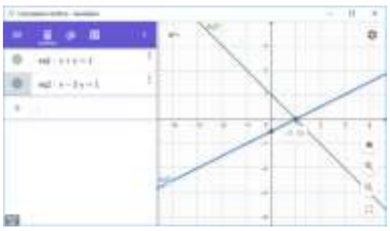
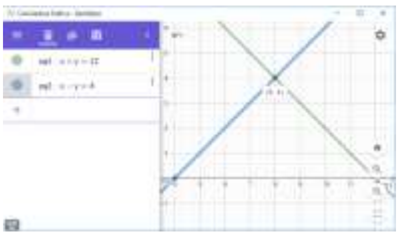
No primeiro momento, os estudantes foram instruídos a resolvê-las individualmente em vinte minutos, utilizando somente lápis e papel e sem consulta ao material estudado ou à docente.

Em comum, as atividades número dois e número três exigiram que os estudantes identificassem as unidades significativas necessárias para aplicar a conversão da representação do registro em língua natural para a representação do registro algébrico, a fim de solucionar o problema pela aplicação do método da substituição. Ao aplicar a atividade, a docente percebeu dificuldades de tratamento tais como erros de sinais e de operações básicas de soma, subtração, multiplicação e divisão. Alguns estudantes tiveram dificuldade de interpretar o enunciado e, por consequência, de organizar a representação do sistema linear.

No segundo momento, a docente entregou uma folha contendo as mesmas três atividades do primeiro momento, e os instruiu a usar o *software* GeoGebra em celular próprio para resolvê-las em vinte minutos, individualmente e sem consulta ao material estudado ou à docente. Ao final da resolução de cada uma das atividades, o estudante registrou numa folha a solução encontrada e compartilhou com a docente a representação gráfica por *WhatsApp*.

As respostas-alvo dessas três atividades podem ser vistas a seguir:

Figura 23 – Resolução algébrica e gráfica de atividades propostas

Atividade 1	**Atividade 2**	**Atividade 3**
Resolva o sistema de equação linear fazendo o uso do método da substituição: $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=1 \end{cases}$	A soma de dois números é doze unidades e a diferença entre esses dois números é quatro unidades. Calcule quais são esses números.	Em uma praça há 18 crianças andando de bicicleta ou de skate. No total, há 50 rodas girando pela praça. Quantas crianças andam de bicicleta e quantas andam de skate?
Representação no registro algébrico	Representação no registro algébrico	Representação no registro algébrico
$\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=1 \end{cases}$ Isolamento da incógnita x em uma das equações: $x+y=1$ $x=1-y$ Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $1-y$. $x-2y=1$ $1-y-2y=1$ $-y-2y=1-1$ $-3y=0\ (-1)$ $3y=0$ $y=\frac{0}{3}$ $y=0$ Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y: $x=1-y$ $x=1-0$ $x=1$ $S\ (1{,}0)$	$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=4 \end{cases}$ Isolamento da incógnita x em uma das equações: $x+y=12$ $x=12-y$ Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $12-y$. $x-y=4$ $12-y-y=4$ $-y-y=4-12$ $-2y=-8\ (-1)$ $2y=8$ $y=\frac{8}{2}$ $y=4$ Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y: $x=12-y$ $x=12-4$ $x=8$ $S\ (8{,}4)$	$\begin{cases} x+y=18 \\ 2x+4y=50 \end{cases}$ Isolamento da incógnita x em uma das equações: $x+y=18$ $x=18-y$ Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $18-y$. $2x+4y=50$ $2(18-y)+4y=50$ $36-2y+4y=50$ $2y=50-36$ $2y=14$ $y=\frac{14}{2}$ $y=7$ Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y: $x=18-y$ $x=18-7$ $x=11$ $S\ (11{,}7)$
Representação no registro gráfico	Representação no registro gráfico	Representação no registro gráfico
 $S\ (1{,}0)$	 $S\ (8{,}4)$	 $S\ (11{,}7)$

Fonte: Elaboração da autora.

Ao recolher as folhas com as atividades, observou-se que seis dos trinta estudantes, além de resolver os sistemas pelo *software* também optaram por apresentar a resolução pelo método da substituição. Destaca-se que mesmo com o apoio do *software* o estudante precisou identificar em duas das três atividades as unidades significativas que estavam representadas em língua natural para, então, fazer a conversão para a representação algébrica, organizando as duas equações que formavam o sistema linear, para então inseri-las no *software.* A propósito, vale destacar que o *software* é inócuo, se o estudante não consegue converter as representações e construir corretamente o sistema linear.

Ao analisar as respostas – salvo o estudante E_{16}, que não conseguiu construir a representação correta do sistema linear para a atividade número três, levando-o a fornecer dados incorretos ao *software* – todos os estudantes conseguiram construir corretamente a representação do sistema linear. E_4, além de resolver as atividades pelo *software*, desenhou corretamente os planos cartesianos das três atividades, e classificou corretamente os sistemas a despeito de isso não ter sido solicitado.

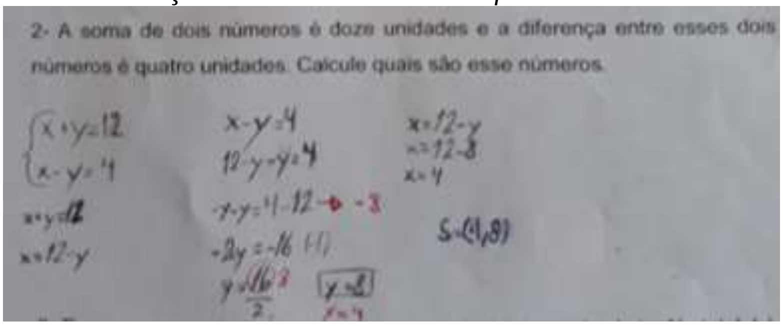
Ao comparar os resultados de ambas as atividades, foi possível observar mais acertos quando os estudantes tiveram o apoio do recurso tecnológico, visto que a conversão da representação do problema em língua natural para a representação algébrica não foi a principal dificuldade dos estudantes, mas o tratamento pelo método da substituição.

E_{24}, por exemplo, ao resolver a atividade 2 sem o apoio do *software*, converteu corretamente as informações, aplicou corretamente o método da substituição, mas cometeu um erro de sinal no resultado. Ao resolver a mesma questão com o *software*, E_{24} conseguiu determinar o sistema linear e a sua solução correta; porém, ao elaborar a representação gráfica da solução encontrada no *software* para o papel, localizou equivocadamente o valor de y no eixo das ordenadas.

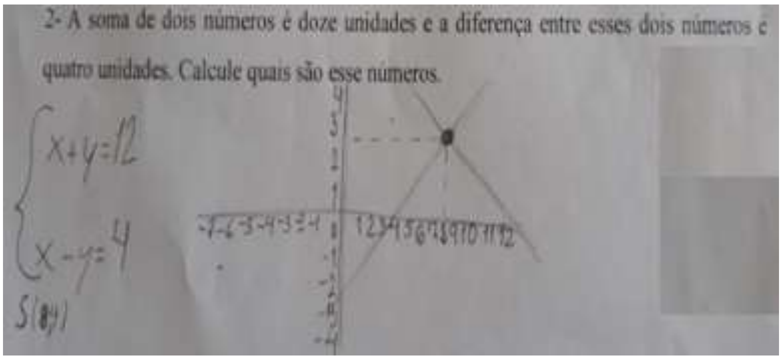
Ao analisarmos a resposta de E_{24} quando dispunha apenas do método da substituição, é possível verificar que o estudante procedeu a todas as etapas O_{1-7} necessárias do método para atingir a meta final de determinar os valores das duas incógnitas representadas por x e y. E ao chegar aos valores para $y = 8$ e $x = 4$, deu-se por satisfeito, como prediz o mecanismo de interpretação guiado pela noção de relevância. Cognitivamente, E_{24} aplicou os passos do método da substituição. Todavia isso não é suficiente para o sucesso da resolução. Aplicar o método habilita o estudante a encontrar o resultado do problema, mas não garante a correção desse resultado.

Figura 24 – Resolução de uma atividade em dois momentos diferentes

Resolução do E24 sem o uso do *software* GeoGebra



Representação da resolução do E24 ao usar o *software* GeoGebra



Fonte: Autora (2018).

Por sua vez, quando E_{24} usa o *software*, ele obtém o resultado correto do problema desenhando o plano cartesiano e representando o par ordenado solução do sistema linear. Destaque-se que isso somente ocorre porque E_{24} havia feito uma conversão correta da representação do registro em língua natural para a representação do registro algébrico. Essa correção, portanto, habilita que ele use o aplicativo como gabarito e corrija seu equívoco de tratamento (ou, pelo menos, tome consciência de que há um equívoco de tratamento).

5.6 SEXTO ENCONTRO

Conforme planejado, o sexto encontro visou a “propor ao estudante duas situações-problema que envolva a representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas como desafios para serem solucionados” e, para atingir essa meta, foi concebida a ação 16 de “possibilitar o estudante o uso do método da substituição e/ou uso do *software* GeoGebra para resolver as duas situações-problema”.

No sexto e último encontro, a docente propôs aos estudantes duas atividades que envolviam a representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Os problemas foram resolvidos individualmente, sendo que o estudante tinha a possibilidade de fazer o uso do método da substituição e/ou uso do *software* GeoGebra.

A primeira atividade apresentou um sistema linear representado no registro algébrico e solicitava ao estudante que, determina-se o conjunto solução para o sistema.

Atividade 1- Determine o conjunto solução para o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=5} \\ \boldsymbol{3x+y=7} \end{cases}$

Agora que você já resolveu o problema acima responda as perguntas a seguir:

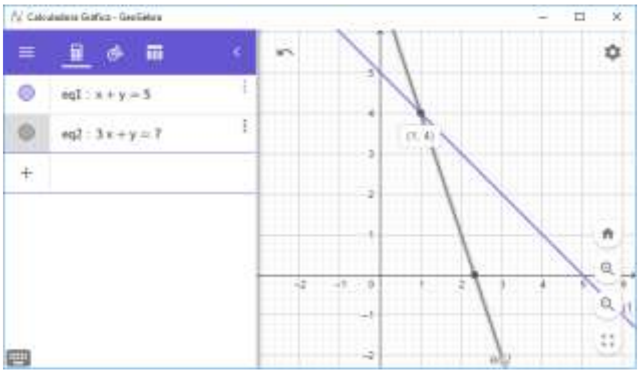
1. O que você precisa descobrir para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$?
2. Qual o método que você utilizou para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$?
3. No sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$, que valores você encontrou para x e y?
4. Utilize um método diferente para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$.
5. Complete a frase a seguir: A solução de um sistema linear é ____.

Coube a cada estudante fazer a opção pelo método da substituição ou pelo *software* para solucionar a questão. Independentemente do método, demandou-se que o estudante descrevesse na folha da atividade as etapas que ele seguiu para solucionar a primeira questão. Após calcular o conjunto solução do sistema linear, cada estudante respondeu cinco itens referentes à atividade.

A resposta-alvo para essa atividade pode ser vista na página seguinte:

Ao analisar as respostas dos trinta estudantes, observou-se que vinte e nove aplicaram primeiro o método da substituição e descreveram a seu modo às etapas seguidas para a obtenção do conjunto solução do sistema. O estudante E_{16} utilizou primeiramente o *software* para determinar o conjunto solução e emitiu a resposta correta, entretanto, quando analisamos as respostas dos cinco itens relacionados ao sistema constatamos, E_{16} não conseguiu compreender e interpretar o processo de resolução do sistema linear.

Figura 25 – Resolução de uma atividade proposta

Representação no registro algébrico	$\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$	Isolamento da incógnita x em uma das equações: $x+y=5$ $x=5-y$	Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $5-y$ $3x+y=7$ $3(5-y)+y=7$ $15-3y+y=7$ $-3y+y=7-15$ $-2y=-8\ (-1)$ $2y=8$ $y=\frac{8}{2}$ $y=4$	Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y: $x=5-y$ $x=5-4$ $x=1$ $S\ (1{,}4)$
Representação no registro gráfico	$\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$	 $S\ (1{,}4)$		

Fonte: Elaboração da autora.

A seguir, apresentamos os cinco itens e as respostas deste estudante.

Atividade 1- Determine o conjunto solução para o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=5} \\ \boldsymbol{3x+y=7} \end{cases}$

Resposta de E16 – utilizou o software GeoGebra e a apresentou a solução S(1,4).

Agora que você já resolveu o problema acima responda as perguntas a seguir:

1. O que você precisa descobrir para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$?

   Resposta de E_{16} – deixou a pergunta em branco.

2. Qual o método que você utilizou para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$?

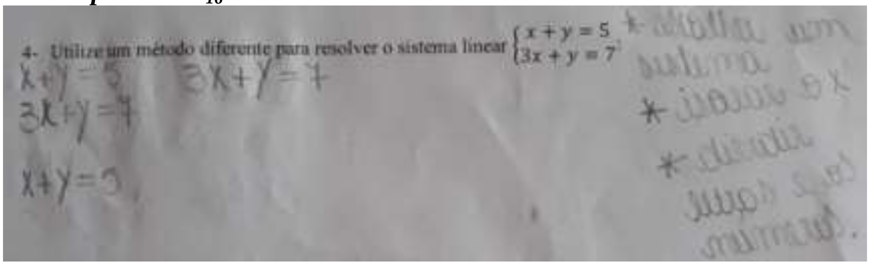
   Resposta de E_{16} – Usei o método do software.

3. No sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$, que valores você encontrou para x e y?

   Resposta de E_{16} – O valor de x foi 4 e o valor de y foi 1.

4. Utilize um método diferente para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$:

Resposta de E_{16} –



5. Complete a frase a seguir: A solução de um sistema linear é
Resposta de E16 - não completou a frase.

Ao analisar as respostas de E_{16}, constata-se que há casos nos quais os estudantes podem encontrar a resposta correta para o sistema linear no *software*, mas isso não garante sua compreensão. E_{16} não conseguiu responder corretamente o item 3, invertendo as respostas para o valor de x em relação ao valor de y, assim como não conseguiu responder os itens 1, 4 e 5. No item 4, identifica-se que E_{16} faz a tentativa do uso do método da substituição para resolver o sistema. No entanto, sua resposta é evasiva, não sendo possível identificar quaisquer aspectos relevantes da representação.

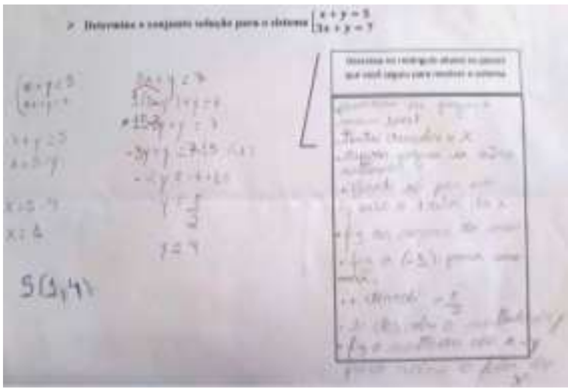
Isso sugere que os recursos tecnológicos podem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem, criando conforme afirmam Gravina e Santarosa (1998) um ambiente dinâmico para o processo de apropriação de conhecimento, mas é fundamental o alinhamento das atividades com o estudo conceitual do conteúdo matemático, para prover condições para o estudante interpretar o objeto representado e torná-lo significativo para si.

Quanto aos demais vinte e nove estudantes, vinte e dois resolveram corretamente o sistema, quatro estudantes erraram completamente o cálculo e três estudantes apresentaram a solução correta, mas com erros de sinal, adição ou divisão no desenvolvimento do cálculo. Os resultados sugerem que os três estudantes que apresentaram a solução correta para o sistema, mas cometeram erros de tratamento, provavelmente cotejaram os resultados e, ao constatar o resultado do *software*, buscaram ajustar sua resolução manual.

A figura a seguir, apresenta a resposta de um desses três estudantes onde o conjunto solução seria diferente daquele informado caso o tratamento dentro do registro algébrico estivesse correto.

Figura 26 – Resolução do sistema linear pelo método da substituição

Resolução do E_{22}



Fonte: Autora (2018).

A resposta de E_{22} sugere que ele procedeu corretamente às etapas necessárias para a resolução do sistema pelo método da substituição, descrevendo a seu modo às ações executadas (registro no retângulo ao lado do cálculo). Entretanto, verifica-se que o E_{22} não executou a multiplicação correta para $3(5-y)+y=7$, apresentando o resultado $15+y+y=7$, e gerando a resposta $y+y=-2y$ e não $-3y+y=-2y$, que seria o resultado correto diante ao cálculo apresentado pelo estudante.

Apreciada a resposta de E_{22}, constata-se que ele infere corretamente as etapas para solucionar o sistema linear adotando o método de substituição, porém no processo de tratamento do registro algébrico apresenta erros de cálculo, que consegue 'mascarar' e atingir ao final a solução correta para o sistema linear.

Essa situação poderia ser explicada de dois modos. E_{22}, ao encontrar valor igual fornecido pelo *software*, poderia ter-se dado por satisfeito, pois as respostas conciliaram e, portanto, não seria mais necessário rever o cálculo algébrico. Alternativamente, E_{22} poderia ter resolvido o sistema no *software* antes e, em seguida, buscar a mesma resposta como solução, não se preocupando com o tratamento correto.

Essas hipóteses reforçam a percepção de que o *software* funciona como gabarito de respostas. Em casos de conciliação, os estudantes se davam por satisfeitos; em casos contrários, os estudantes reviam o cálculo algébrico buscando identificar o erro de tratamento, ou então "forçavam" o cálculo a fim de atingir a mesma resposta apresentada pelo *software.*

A segunda atividade, apresentada aos estudantes em língua natural, diz respeito à compra de maçãs e laranjas que Ricardo fez no mercadinho do seu bairro, exigindo competências de conversão e coordenação entre distintas representações.

A atividade foi assim apresentada:

Atividade 2 – Ricardo foi ao mercadinho do seu bairro para comprar maças e laranjas. Observou na tabela de preços que ao comprar um quilo de maçã e um quilo de laranja paga-se R$ 6,00. Ao comprar dois quilos de maçã e quatro quilos de laranja paga-se R$ 16,00. Quanto custa cada quilo de maçã e cada quilo de laranja?[51]

Agora que você já resolveu o problema de Ricardo responda as perguntas a seguir:

1 – O que está sendo perguntado a você na situação-problema do mercadinho?

2 – No problema quais são as variáveis principais, assinale a resposta correta.

a) Banana e laranja
b) Banana e maçã
c) Maçã e laranja

3 – Como você identificou cada uma das variáveis da situação-problema de Ricardo?

4 – Como você organizou a situação-problema de Ricardo para determinar o valor para cada quilo de maçã e de laranja? Assinale a resposta correta.

a) Um sistema linear com duas equações
b) Um sistema linear com uma equação
c) Um sistema linear com uma função

5 – Ao utilizar o método da substituição para resolver a situação-problema qual o valor do quilo da maçã e qual o valor do quilo da laranja?

6 – Observando o ponto de intersecção entre as retas no *software* GeoGebra, como você identifica a solução para a situação-problema de Ricardo? Assinale a resposta correta.

a) O valor do quilo da maçã está no eixo x e o valor do quilo da laranja está no eixo y.
b) O valor do quilo da maçã está no eixo y e o valor do quilo da laranja está no eixo x.
c) O valor do quilo da maçã e o valor do quilo da laranja estão no ponto de origem.

7 – A solução do problema no *software* GeoGebra é a mesma solução que você encontrou utilizando o método da substituição?

( ) Sim
( ) Não

Justifique sua resposta.

8 – A solução para a situação-problema de Ricardo na representação gráfica no *software* GeoGebra é identificada como:

a) Duas retas
b) Um ponto onde duas retas se cruzam
c) Ponto de origem

9 – Considerando os estudos realizados sobre sistemas lineares qual a sua opinião em relação aos diferentes métodos de resolução.

A resposta-alvo para essa atividade é a seguinte:

[51] Conforme justificado na nota “37” a representação da variável (x) refere-se ao valor do quilo de maça e a representação da variável (y) refere-se ao valor do quilo de laranja, o que permite compreender o porquê da alternativa a) é correta para o item seis.

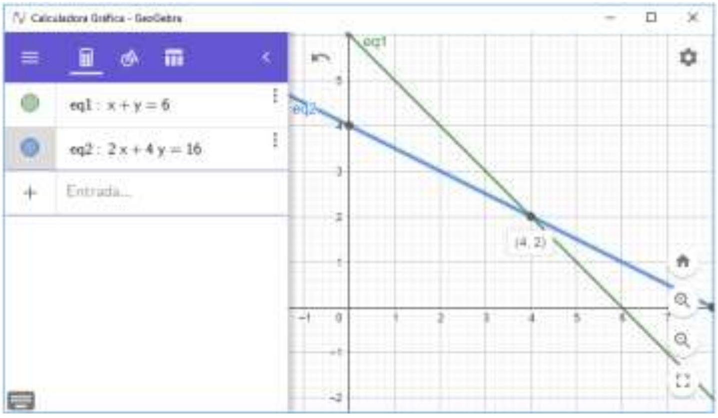
Figura 27 – Resolução algébrica e gráfica para a situação-problema de Ricardo:

<table>
<tr>
<td>Representação no registro algébrico</td>
<td>$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$</td>
<td>Isolamento da incógnita x em uma das equações:
$x + y = 6$
$x = 6 - y$</td>
<td>Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $6 - y$

$2x + 4y = 16$
$2(6 - y) + 4y = 16$
$12 - 2y + 4y = 16$
$-2y + 4y = 16 - 12$
$2y = 4$
$y = \frac{4}{2}$
$y = 2$</td>
<td>Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y:

$x = 6 - y$
$x = 6 - 2$
$x = 4$

$S\ (4,2)$

O Custo de cada quilo de maça é de R$ 4,00 e o custo de cada quilo de laranja é de R$ 2,00.</td>
</tr>
<tr>
<td>Representação no registro gráfico</td>
<td>$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$</td>
<td colspan="3">

$S\ (4,2)$</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaboração da autora.

Para resolver a atividade, os estudantes precisaram inicialmente reconhecer as unidades significativas para então converter a representação do registro em língua natural para a representação em registro algébrico, determinando a representação do sistema linear. A partir daí os estudantes puderam calcular o custo de cada quilo de maçã e de cada quilo de laranja pelo método da substituição e pelo *software* GeoGebra. Após a resolução, os estudantes responderam a nove questões relacionadas à interpretação da atividade.

Nesta tarefa, vinte e um estudantes da turma realizaram corretamente a conversão da representação $(RLN \rightarrow RRA)$; empregaram corretamente o método da substituição; identificaram o custo do quilo de maçã e o custo do quilo de laranja em reais apresentando a solução corretamente; e, por fim, responderam com facilidade às nove questões que complementavam a atividade.

Questionados se a solução do problema no *software* GeoGebra era a mesma encontrada pelo método da substituição, questão 7, E_6, E_{13} e E_{20} assim se justificaram:

> E_6 – Sim, pois se fizer a mesma equação que foi feita pelo método da substituição será a mesma resposta do *software*, mas sempre o *software* estará mais correto que o método da substituição.
> E_{13} – Sim, independente se tu usar o método da substituição ou do *software* vai dar o mesmo resultado, pois os dois estão de acordo com o mesmo sistema linear.
> E_{20} – Sim, porque eu coloquei a mesma equação no papel e no *software* então deu a mesma solução.

Essas respostas sugerem que os estudantes compreenderam que a solução de um sistema linear será sempre a mesma independentemente do método de resolução. Para garantir isso, é fundamental que a representação do registro algébrico do sistema linear seja a mesma quando for empregado o método da substituição ou quando se utiliza o *software* GeoGebra.

Outros três estudantes da turma resolveram corretamente o sistema linear determinando o valor para x e y. No entanto, ao finalizar o cálculo, não identificaram qual seria o valor em reais do quilo de maçã e do quilo de laranja. Enquanto E_{11} inverte as respostas, respondendo que a “maçã custa R$ 2,00 o quilo e a laranja custa R$4,00 o quilo”, os estudantes E_2 e o E_{17} sequer conseguiram elaborar uma resposta para essa questão.

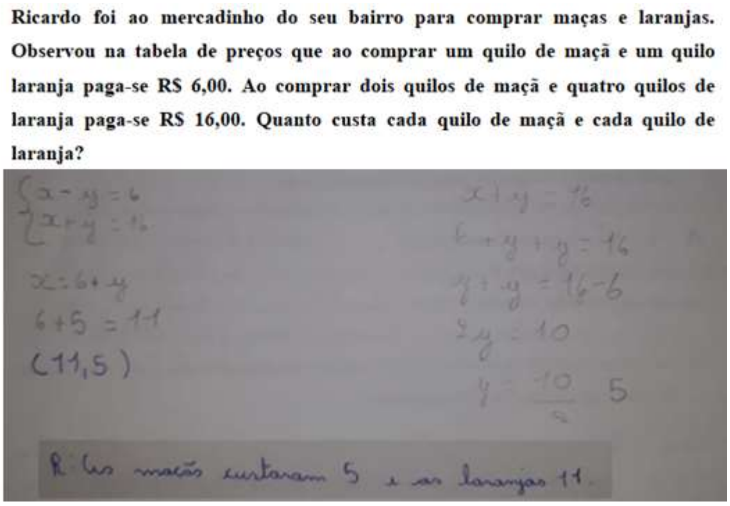
Entretanto, os mesmos três estudantes apresentaram o par ordenado (x, y) correto à questão sobre o objeto da situação-problema do mercadinho, ou seja, “quanto custa cada quilo de maça e cada quilo de laranja”. Isso sugere que os três estudantes compreenderam o que devia ser calculado, tanto que, ao aplicar o método da substituição e utilizar o *software* GeoGebra, eles encontraram a resposta correta $(4,2)$, falhando em identificar que o valor do quilo de maçã era representado por x e o valor do quilo de laranja era representado por y.

Isso se confirma quando se analisam as respostas dos três estudantes para a questão número seis: “Observando o ponto de intersecção entre as retas no *software* GeoGebra, como você identifica a solução para a situação-problema de Ricardo? Assinale a resposta correta”. Somente E_2 assinalou a resposta correta associando o valor do quilo de maçã ao eixo x e o valor do quilo de laranja ao eixo y. Isso sugere que, mesmo com o apoio tecnológico, não é garantido que o estudante responderá de maneira correta a questão, ou seja, o *software* habilita o estudante a visualizar a representação gráfica, mas não garante a interpretação correta do gráfico.

E_{25} e o E_{30}, por sua vez, apresentaram a solução correta para o problema com erros de tratamento que levariam a um resultado diferente daquele informado por eles mesmos. Isso sugere que os estudantes buscaram encontrar pelo método da substituição o mesmo resultado apresentado pelo *software*. Para a questão 7, ambos os estudantes concordam que os dois métodos geram respostas iguais. Para E_{25}, isso ocorre “porque o resultado deu o mesmo às linhas ficaram no lugar certo”; para E_{30}, porque “o programa é como se fosse uma prova real da solução pelo método da substituição onde utiliza as duas retas para achar o resultado exato com base nos eixos x e y". Isso sugere que os estudantes buscaram conciliar a resposta do *software* com a resposta calculada pelo método da substituição, admitindo erros no tratamento algébrico desde que as respostas fossem idênticas.

E3, figura a seguir, comete um erro de conversão que prejudica todos os passos de tratamento que sucedem a essa etapa.

Figura 27 – Resolução de E_3 para a situação-problema de Ricardo:



Fonte: Autora (2018).

Segue-se conforme a teoria da relevância, a interpretação-alvo do problema. O primeiro enunciado funciona como contextualização das variáveis relevantes do problema.

> (1a) Forma Linguística: "Ricardo foi ao mercadinho do seu bairro para comprar maças e laranjas".
> (1b) Forma lógica: alguém vai a algum lugar para alguém comprar alguma coisa.
> (1c) Explicatura$_1$: Ricardo foi ao mercadinho do seu bairro para $\varnothing$ [RICARDO] comprar maças e laranjas.
> (1d) Explicatura: *A ATIVIDADE PROPÕE QUE* RICARDO FOI AO MERCADINHO DO BAIRRO DE RICARDO PARA RICARDO COMPRAR MAÇAS E LARANJAS.

O segundo e o terceiro enunciados servem para compor as duas equações que compõem o sistema linear em pauta, sobre o preço unitário das maças e das laranjas e sobre a compra específica de Ricardo.

> (2a) Forma Linguística: "Observou na tabela de preços que ao comprar um quilo de maçã e um quilo laranja paga-se R$ 6,00".
> (2b) Forma lógica: alguém observou em algum lugar algo (quando alguém compra algo, esse alguém paga algo).

(2c) Explicatura$_1$: ∅ [RICARDO] observou na tabela de preços [DO MERCADINHO DO BAIRRO DE RICARDO] que ao ∅ [RICARDO] comprar um quilo de maçã e um quilo laranja paga-se [RICARDO] R$ 6,00.
(2d) Explicatura: *A ATIVIDADE PROPÕE QUE* RICARDO OBSERVOU NA TABELA DE PREÇOS DO MERCADINHO DO BAIRRO DE RICARDO QUE AO RICARDO COMPRAR UM QUILO DE MAÇÃ E UM QUILO DE LARANJA RICARDO PAGA R$ 6,00.

A conversão desse segundo enunciado sugere a seguinte equação:

S_1 – A atividade propõe que Ricardo observou na tabela de preços do mercadinho do bairro de Ricardo que ao Ricardo comprar um quilo de maçã e um quilo de laranja Ricardo paga R$ 6,00 (premissa implicada da explicatura do terceiro enunciado do problema);
S_2 – '$x + y = 6$' (conclusão implicada por *modus ponens* $S_1 \longrightarrow S_2$)[52].

Segue a análise do terceiro enunciado:

(3a) Forma Linguística: "Ao comprar dois quilos de maçã e quatro quilos de laranja paga-se R$ 16,00".
(3b) Forma lógica: quando alguém compra algo, esse alguém paga algo.
(3c) Explicatura$_1$: ao ∅ [ricardo] comprar dois quilos de maçã e quatro quilos de laranja paga-se [ricardo] R$ 16,00.
(3d) Explicatura: *A ATIVIDADE PROPÕE QUE* AO RICARDO COMPRAR DOIS QUILOS DE MAÇÃ E QUATRO QUILOS DE LARANJA RICARDO PAGA R$ 16,00.

A conversão desse terceiro enunciado sugere a seguinte equação:

S_1 – A atividade propõe que ao ricardo comprar dois quilos de maçã e quatro quilos de laranja ricardo paga R$ 16,00 (premissa implicada da explicatura do terceiro enunciado do problema);
S_2 – '$2x + 4y = 16$' (conclusão implicada por *modus ponens* $S_1 \longrightarrow S_2$)[53].

O quarto enunciado contém o comando da questão:

(4a) Forma Linguística: "Quanto custa cada quilo de maçã e cada quilo de laranja?".
(4b) Forma lógica: -QU custa algo$_1$ e algo$_2$.
(4c) Explicatura$_1$: Quanto custa cada quilo de maçã e cada quilo de laranja.
(4d) Explicatura: *A ATIVIDADE PROPÕE QUE O ESTUDANTE AFIRME* QUANTO CUSTA CADA QUILO DE MAÇÃ E CADA QUILO DE LARANJA.

Segue dessas conversões que o sistema adequado para essa questão é:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

[52] Ou, $1\ quilo\ de\ maçã + 1\ quilo\ de\ laranja = R\$\ 6{,}00$.
[53] Ou, $2\ quilos\ de\ maçã + 4\ quilos\ de\ laranja = R\$\ 16{,}00$.

E_3, entretanto, arma o sistema[54]

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

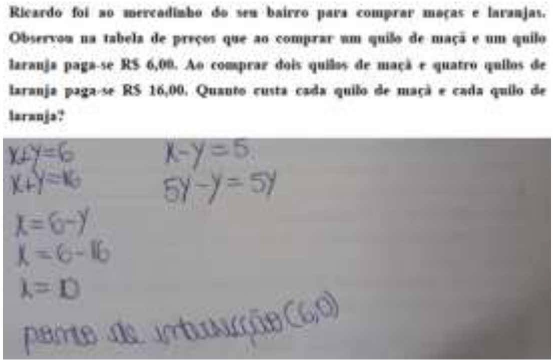
Exceto pelo erro de conversão entre a representação do $RLN \rightarrow RRA$, E_3 realizou todas as etapas do tratamento algébrico de modo correto, o que resultou na solução correta para o sistema linear representado. Na sequência, E_3 também respondeu as questões de 1-9 relacionadas à atividade, de acordo com a solução por ele encontrada. Quanto à resposta à questão 7, E_3 informou ter encontrado a mesma solução para o problema quando fez o uso *software*, assim se justificando: "Nos dois métodos eu encontrei a resposta $(11{,}5)$", sugerindo que, ao conciliar a resposta gráfica (*software* GeoGebra*)* com a resposta algébrica (método da substituição), obteve o mesmo resultado, tornando-o cego ao erro de interpretação inicial.

Essas consecuções sugerem que E_3 compreende o processo de tratamento pelo método da substituição, visto que o desenvolveu corretamente em todas as suas etapas, assim como interpreta corretamente a representação gráfica do sistema linear no *software*. Todavia isso não é suficiente para o sucesso da resolução. Conforme afirma Duval (2009), é fundamental que o estudante consiga reconhecer as unidades significativas e coordenar a conversão entre a representação de registros distintos de um mesmo objeto.

Ainda no que se refere à segunda atividade, constatamos que três estudantes não conseguiram resolvê-lo. Dois deles, E_7 e E_{27}, conseguiram converter a representação do registro em língua natural para a representação algébrica, mas apresentaram erros de tratamento que os levaram a encontrar valores errados para o custo do quilo de maçãs e laranjas. O terceiro estudante, E_{16}, além disso, comete equívocos de conversão e de tratamento, sugerindo que ele não conseguiu coordenar os diferentes registros e, por consequência, utilizar corretamente o *software* GeoGebra.

[54] A hipótese aqui, é que E_3 ao ler o enunciado da atividade, não deu a devida atenção para a descrição "ao comprar dois quilos de maçã e quatro quilos de laranja paga-se R$ 16,00", o que exigia a conversão de "dois quilos de maçã" para a representação $2x$. Assim como, a conversão de "quatro quilos de laranja" para a representação 4y. Mas sim, infere-se que E_3 por ter representado a primeira equação por $x + y = 6$, condicionou então, que a segunda equação por tratar das mesmas variáveis (maçã; laranja) seria representada por $x + y = 16$.

Figura 28 – Resolução de E_{16} para a situação-problema de Ricardo:



Fonte: Autora (2018).

Ao analisar a resolução apresentada pelo E_{16}, constata-se que ele buscou representar o sistema linear para a situação-problema de Ricardo, mas apenas a primeira equação foi organizada corretamente $x + y = 6$. Quanto à segunda equação, o estudante representou $x + y = 16$, ao invés de $2x + 4y = 16$. O erro de conversão pode decorrer da falha ao interpretar a informação “ao comprar dois quilos de maçã e quatro quilos de laranja paga-se R$ 16,00”, para a qual a incógnita x deveria ser precedida pelo coeficiente 2 e a incógnita y precedida pelo coeficiente 4. Mesmo com o equívoco, E_{16}, investe na aplicação do método da substituição para resolver a situação-problema. Para isso, escolhe a primeira equação $x + y = 16$, para isolar a incógnita x. Entretanto, o estudante não consegue resolver as próximas etapas do método, muito provavelmente, por não ter compreendido o processo. Este caso sugere que de nada adianta o estudante ter acesso a recursos tecnológicos se não for capaz de mobilizar as diferentes representações de um objeto matemático.

Para concluir a atividade, os estudantes deviam responder a seguinte questão “Considerando os estudos realizados sobre sistemas lineares qual a sua opinião em relação aos diferentes métodos de resolução”. Conhecidas as respostas, é possível verificar que a maioria dos estudantes citou que a resolução pelo método da substituição era mais difícil, demorada e complicada, visto que eram necessários muitos cálculos que demandavam constante atenção. Quanto ao uso do *software* GeoGebra, os estudantes o consideraram fácil, rápido e prático.

Além disso, foi possível constatar nas respostas de alguns estudantes, que o *software* foi visto como ferramenta para conferir a solução encontrada no método da substituição, em alguns casos auxiliando o estudante a encontrar erros de tratamento no registro algébrico.

> E_{22} – Eu tinha dificuldade no método da substituição, mas agora está fácil, o *software* ajuda muito, pois, a gente tira a prova real se está certa a resolução.
> E_{13} – Os dois métodos vão dar a mesma resposta e tu vai conseguir achar a solução, mas, o método do *software* nunca erra, pois vai de acordo com a reta numérica, já no método da substituição tu vai ter que prestar bastante atenção e revisar, além de ser mais devagar para resolver.

E_{15} e E_{20}, quando indagados sobre a opinião em relação aos diferentes métodos de resolução de sistemas lineares, assim responderam:

> E_{15} – O *software* é mais prático e rápido, mas não tem como você aprender como fazer a conta. Já o método da substituição é mais lento, porém você aprende como funciona a equação.
> E_{20} – Em minha opinião o método da substituição é melhor para resolver os sistemas e depois o *software* para ter certeza da solução.

Isso sugere que E_{15} e E_{20} compreenderam a importância de dominar o método da substituição para solucionar um sistema linear. Para eles, ao mesmo tempo em que o método exige maior custo de processamento cognitivo, ele oferece condições ao estudante de resolver o problema na ausência do *software* GeoGebra. Em contrapartida, eles também perceberam que o *software* viabiliza chegar ao resultado com menor custo de processamento, visualizar a representação gráfica do sistema em relação ao eixo das abscissas e o eixo das ordenadas, e visualizar a classificação dos sistemas.

Para alguns estudantes, como E_{20}, o uso do *software* passou também a auxiliar a conferência da solução do sistema linear, o que levou alguns deles a rever o tratamento algébrico caso as respostas não fossem idênticas, e a solicitar ajuda à docente ou aos colegas quando, por si sós, não localizavam o erro.

Isso sugere que um método de resolução não anula o outro, mas complementa a aprendizagem do objeto matemático em questão. O que por sua vez oferece ao estudante condições cognitivas conscientes de resolver uma mesma situação-problema, operando tratamentos em representações de distintos registros.

Conforme Duval (2009, p. 52):

> O conjunto de tratamentos dos quais um sujeito dispõe determina o nível e o horizonte epistêmicos para a aplicação de tratamentos intencionais. Quanto mais um sujeito possui possibilidades de tratamentos quase instantâneos num domínio, mais o número de elementos imediatamente integrados e fusionados em uma unidade informacional é grande e mais o nível epistêmico de objetos que ele pode ver é elevado.

Diante desse contexto, orientados pelas noções de meta e de relevância que fundamentam esta tese, foi possível pelos resultados da sequência didática aplicada, demonstrar a importância de identificar as unidades significativas de cada representação dos distintos registros envolvidos, bem como aplicar o tratamento e coordenar a conversão entre as representações. O estudo nos permitiu descrever e explicar como essas operações cognitivas estão sendo guiadas por uma relação relevante de custos e benefícios cognitivos que estão a serviço de um plano em direção a uma meta conciliável, o que, em alguns momentos nesta pesquisa, foi demonstrada na busca pelos estudantes em encontrar a solução para o sistema linear, ora pelo método da substituição, ora com o uso do *software* GeoGebra, ou então, quando o estudante fez uso de ambos e buscou verificar se as respostas conciliavam.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme a Base Nacional Comum Curricular, estudantes do ensino Fundamental devem demonstrar habilidades para “resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso” (BNCC, 2018, p. 313, habilidade EF08MA08). Para desenvolver essas habilidades é necessário minimizar a distância entre abstração e aplicação, proporcionando aos estudantes condições para eles se apropriarem semanticamente dos objetos matemáticos e aplicar as formulações sintáticas próprias do campo a situações reais do seu contexto. Posto isso, verificou-se neste estudo – a partir das noções teóricas de conciliação de metas, relevância e registros de representação semiótica, e mediante atividades que demandam a conversão de representações mediadas pelo *software* GeoGebra em celulares – a viabilização da compreensão conceptual de sistemas lineares de 1º grau.

Em específico, elaborou-se uma sequência didática com situações-problema que demandavam soluções por sistemas lineares, aplicou-se essa sequência com estudantes da Escola de Educação Básica Samuel Sandrini de Orleans (SC), e procedeu-se à avaliação dessa sequência no que se refere à pertinência da associação das teorias de conciliação de metas, de relevância e de registros de representação semiótica, e da mediação do *software* GeoGebra como potencializador de uma apreensão significativa do conceito de sistemas lineares.

Conforme a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009), a distinção entre objeto e representação é estratégica na compreensão matemática. Se, de um lado, interessa à aprendizagem o objeto matemático; de outro, é essencial reconhecer que eles não são espontaneamente acessíveis, a não ser por suas representações. Posto isso, o domínio e a coordenação progressiva de distintos registros de representação pertinentes podem fornecer uma apreensão cada vez mais robusta desses objetos, e isso somente é possível se os estudantes desenvolverem competências em três atividades cognitivas semióticas essenciais: a *formação de representações identificáveis* e o *tratamento* dentro de um registro semiótico, e a *conversão* de representações em distintos registros semióticos.

Assumindo a correção dessas ideias, defendeu-se que a mediação do *software* Geogebra, na medida em que potencializa a coordenação de representações em diferentes registros de representação, é fundamental para desenvolver as habilidades previstas na BNCC. Em síntese, o que se buscou nesta pesquisa foi potencializar conversões de representações, tais como defendidas por Duval, empregando em sala de aula o *software* GeoGebra instalado em celulares dos próprios estudantes e assumindo que esse recurso é importante especialmente por viabilizar a conversão online dessas representações.

Dado que na mobilização de diferentes registros, o estudante tende a selecionar o registro pragmaticamente eficiente para a solução de situações-problema, é correto pensar essa questão de um ponto de vista pragmático-cognitivo orientado pela noção de relevância, tal como defendida pela teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995). Nesta teoria, insumos comunicacionais ostensivos são relevantes na medida em que seu processamento por um sistema cognitivo limitado vale a pena, ou seja, quando os efeitos cognitivos do processamento desse *input* superam os esforços cognitivos para obtê-los.

Rauen, por sua vez, assume que relevância é um predicado dependente de meta, pois são as metas que justificam e superordenam ações intencionais, de modo que os indivíduos atribuem relevância aos insumos que se conectam com um propósito. Segue-se dessa ideia uma arquitetura descritivo-explanatória em quatro estágios da proatividade humana: formulação de meta *Q*, e formulação, execução e checagem de uma hipótese abdutiva antefactual *PQ*. Com base nessa arquitetura, na expectativa de resolver corretamente uma situação-problema, o estudante abduz quantas submetas forem necessárias para obter um resultado relevante que satisfaça essa expectativa inicial. Neste contexto, o domínio e a coordenação dos registros de representação semiótica pertinentes são essenciais, uma vez que, a despeito de incrementos incidentais iniciais de custos de processamento em direção a esse domínio e coordenação, viabiliza a escolha de rotas mais eficientes ou relevantes.

Posto isso, em sentido amplo, assumiu-se neste estudo que a arquitetura descritivo-explanatória da *teoria de conciliação de metas* (e, por extensão, da *teoria da relevância*) é pertinente para planejar as atividades de ensino e para analisar as ações cognitivas desempenhadas pelos estudantes para identificar representações, tratá-las e/ou convertê-las, sejam essas ações mediadas ou não pela tecnologia. Em sentido estrito, por sua vez, assumiu-se que a mobilização online e individual de representações pertinentes dos registros semióticos algébrico e gráfico no *software* GeoGebra instalado nos celulares dos estudantes potencializa a compreensão conceptual de sistemas lineares.

Em outras palavras, a ideia que foi perseguida neste estudo é a de que se o docente elaborar uma sequência didática enquanto plano de ação intencional em direção à heteroconciliação colaborativa de metas que privilegia processos de conversão, utilizando um aplicativo pertinente em celulares, então esse plano de ação intencional potencializará conversões conscientes e consistentes de representações semióticas algébricas e gráficas e, por consequência, a compreensão do conceito e da classificação de sistemas lineares.

A partir dessas considerações, pretendeu-se responder neste estudo se a proposição de atividades que demandam a conversão de representação entre registros semióticos com apoio do *softwar*e GeoGebra em celulares, quando analisada do ponto de vista da teoria de conciliação de metas, da teoria da relevância e da teoria de registros de representação semiótica, viabiliza a compreensão conceptual de sistemas lineares por estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental assumindo quatro hipóteses de trabalho.

A primeira hipótese de trabalho, de caráter epistemológico, considerou que o ensino de sistemas lineares por meio da teoria de registros de representação semiótica representa ganhos cognitivos ao estudante, na proporção em que o desafia a realizar conversões de representações em diferentes registros semióticos. A segunda hipótese, de caráter epistemológico, considerou que a mediação do *software* GeoGebra em celulares contribui para a conversão de representação, bem como para a visualização, experimentação, interpretação e representação dos três tipos de sistemas lineares. A terceira hipótese, também de caráter metodológico, considerou que as teorias da relevância e de conciliação de metas permitem descrever e explicar como os estudantes convertem representações de sistemas lineares em diferentes registros semióticos e apreendem de forma significativa o conceito e a classificação desses sistemas. A quarta hipótese, de caráter metodológico, considerou que a arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas viabiliza a elaboração de uma intervenção didática enquanto plano de ação intencional em direção à heteroconciliação colaborativa da consecução da meta de promover a compreensão conceptual de sistemas lineares de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental mediante a proposição de atividades que, mediadas pelo *software*, demandam conversão de representações.

O estudo de caso foi aplicado com trinta estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental da Escola de Educação Básica Samuel Sandrini de Orleans (SC) em seis encontros realizados entre setembro e outubro de 2018[55]. A partir da análise das anotações em diário de pesquisa e da análise das atividades realizadas pelos estudantes e fornecidas à docente durante cada um dos seis encontros, pôde-se concluir o que segue.

Em primeiro lugar, as arquiteturas descritivo-explanatórias combinadas da teoria de conciliação de metas e da teoria da relevância permitiram aferir a quantidade de ações cognitivas que o estudante necessita mobilizar para solucionar sistemas lineares pelo método da substituição. No início da intervenção didática, os alunos queixaram-se dos tratamentos longos e abstratos que o método da substituição demanda, o que, por consequência, exigia deles elevado custo de processamento.

[55] A descrição e a análise detalhada das atividades podem ser recuperadas nos capítulos 5 e 6 desta tese. A sequência didática propriamente dita pode ser recuperada no apêndice D desta tese.

Essa situação exigiu que a docente explicitasse em língua natural os passos de tratamento algébrico em vários exercícios, a fim de que eles conseguissem (a) internalizar a sequência de ações necessárias para aplicação do método de substituição, ação essa associada à capacidade de identificar as unidades significativas em cada situação-problema, e (b) coordenar a conversão das representações em registro em língua natural para a representações em registro algébrico quando fosse o caso. Nessas ações, a docente tornou explícito aos estudantes reiteradamente que os custos de processamento iniciais exigidos para dominar o pelo método da substituição seriam compensados por ganhos cognitivos futuros, quando, em função da complexidade das situações-problema o método de tentativa e erro era inviável.

Para a pesquisadora, essa situação reforça a importância de o planejamento levar em conta a formação de representações identificáveis, os tratamentos dentro de determinados registros e a conversão de representações entre distintos registros, criando condições para que o estudante conheça diferentes rotas para a resolução de uma situação-problema, a despeito dos acréscimos iniciais de custos de processamento e diminuição de relevância, conforme sugerem Sperber e Wilson (1986/1995, 2005). Todavia, para que isso aconteça é necessário respeitar a cognição do estudante, criando condições para que ele consiga “maturar” cada etapa do processo de ensino aprendizagem.

Em segundo lugar, foi relevante a demanda dos estudantes pela explicitação em língua natural de cada passo de tratamento do método da substituição. Isso sugere que, para eles, era essencial demarcar o caminho das ações a ser seguido para resolver um sistema e, de um ponto de vista orientado pela noção de conciliação de metas de Rauen (2014), que os estudantes reconhecem o valor de estabelecer planos de ação intencional epistemologicamente seguros para resolver situações-problema em matemática.

Em terceiro lugar, a visualização gráfica dos sistemas no *software* GeoGebra baixado nos celulares, cujo domínio operacional foi quase imediato, representou ganhos cognitivos positivos evidentes ao reforçar conceitos como a posição das variáveis nos eixos das abscissas e das ordenadas, a localização de quadrantes e de pares ordenados, e a classificação de sistemas lineares em relação ao posicionamento das retas. Neste particular, vale destacar que os estudantes deviam reconhecer as unidades significativas das situações-problema para representar os sistemas e aí então, fazer o uso do *software*. Segue-se disso que o *software* habilita, mas não é suficiente por si só para o estudante compreender sistemas lineares, auxiliando a interpretação gráfica e a classificação dos sistemas.

Em quarto lugar, constatou-se que o *software* auxiliou alguns estudantes a encontrar erros de tratamento na resolução do sistema quando utilizado o método da substituição. Quando os estudantes compreenderam que a solução de um sistema linear seria sempre a mesma independentemente do método de resolução, passaram a conferir as respostas e, em casos de inconciliações, a conferir o tratamento algébrico, em geral encontrando erros de operações básicas e de atribuição de sinais. Em geral, os estudantes buscaram descobrir o erro sozinho, configurando o que Rauen (2014) chama de checagem individual de conciliações ou autoconciliação. Em casos nos quais os estudantes falhavam em descobrir o erro por si sós, eles solicitavam auxílio à docente ou a um colega mais próximo, desencadeando processos caracterizados por Rauen como coordenação colaborativa de metas e submetas ou heteroconciliação.

Em quinto lugar, observou-se que o uso consciente e planejado do ambiente informatizado contribuiu para o interesse e produtividade dos estudantes durante as aulas. Observe-se que o uso do aplicativo em celulares viabilizou acesso individualizado a todos os estudantes no de ambiente físico da própria sala de aula. Além disso, os estudantes compartilhavam as respostas pelo aplicativo *WhatsApp*, permitindo à docente acompanhar de as resoluções gráficas de cada estudante. Isso sugere ser possível integrar tecnologias móveis aos propósitos de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Em sexto lugar, vale destacar o próprio desempenho dos estudantes. Em geral, todos os estudantes foram capazes de converter representações, mobilizando pelo menos dois registros de representação. Em certas atividades, o estudante realizou a conversão da representação do registro em língua natural para uma representação em registro algébrico e desta para uma representação em registro gráfico mediante o concurso do *software* GeoGebra. Em outras, partiu da representação gráfica em direção à representação algébrica, em uma tentativa de realizar o processo de volta entre as representações, o que Duval defende ser importante para o processo de objetivação. Neste momento da aplicação do estudo, a pesquisadora proporcionou aos estudantes condições para realizar a conversão da representação do registro gráfico para o registro algébrico com o auxílio do *software*, conversão que apresenta um nível alto de não congruência e que, por sua vez, despende alto custo de processamento, especialmente quando não se tem o apoio do *software*. Ao final da pesquisa, a maioria dos estudantes conseguiu coordenar os distintos registros e optar cognitivamente por um método de resolução, sugerindo pistas de objetivação.

Em sétimo lugar, por fim, este estudo permitiu confirmar como operações cognitivas de identificação de unidades significativas, de tratamento e de conversão são orientadas por uma relação relevante de custos e benefícios cognitivos que, por sua vez, estão a serviço de planos de ação intencional em direção à auto ou heteroconciliações de metas. A partir dessa arquitetura descritivo-explanatória foi não apenas eficiente para o planejamento, mas e, sobretudo para a análise dessas atividades desenvolvidas na sequência didática, sugerindo um caminho produtivo por onde elaborar e avaliar intervenções educacionais.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 8. ed. São Paulo: Moderna: 2015.

BORBA, Marcelo de Carvalho. **Softwares e internet na sala de aula de matemática**. X Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador – BA, 2010. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF. Acesso em: 8 fev. 2016.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e educação matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, New York: Springer, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (versão final)**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Orientações curriculares para o ensino médio: **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. V. 2. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

CAMPOS, Jorge. **Sentido e referência**: a teoria do nome próprio de Frege. Disponível em: http://www.jcamposc.com.br/textos_disciplinas/sentido_e_referencia-a_teoria_do_nome_proprio_de_frege.pdf. Acesso em: 23 jul. 2017.

CARDOSO, Marleide Coan. **Língua natural e processos de tratamentos e conversões de registros de representação semiótica em matemática**. 2011, 41 f. Projeto de tese (Doutorado em Ciências da Linguagem)-Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2011.

CARDOSO, Marleide Coan. **Conciliação de metas, relevância e registros de representação semiótica em matemática**. 2015. 173 f. Tese (Doutorado em Ciências da Linguagem)-Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.

CARDOSO, M. C.: CATANEO, V. I.; RAUEN, F. J. **Proposição de atividades contextualizadas para o ensino de potenciação na educação básica**: uma abordagem pragmático-cognitiva. Artigo submetido à Revista Ciências & Ideias, 2019. Inédito.

CATANEO, Vanessa Isabel; RAUEN, Fábio José. Registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas: uma análise do capítulo Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas do livro Matemática compreensão e prática de Ênio Silveira. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, p. 140-170, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/36693/pdf. Acesso em 4 abr. 2019.

Censo Escolar/INEP 2018. Disponível em: https://www.qedu.org.br/escola/217808-eeb-samuel-sandrini/censo-escolar. Acesso em: 26 abr. 2019.

CORRÊA, Roseli de Alvarenga. Linguagem matemática, meios de comunicação e educação matemática. In: LOPES, Celi Aparecida Espasandin (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: Machado, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002. p. 135-153.

DUVAL, Raymound. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização Tânia M. M. Campos. Trad. de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymound. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. de Lênio Fernandes Levy e Marisa Roâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

FERREIRA, Roberto Claudino. **Ensinando Matemática com o GeoGebra**. 10. ed. Goiânia: Centro Científico Conhecer, 2010. Disponível em: <http://www.conhecer.org.br/enciclop/2010b/ensinando.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2019.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. IV Congresso RIBIE, Brasília 1998.

HOHENWARTER, Markus. GeoGebra Quickstart: **Guía Rápida de Referência sobre GeoGebra**. Portugal, 2007. Disponível em: <http://www.essl.edu.pt/Dep/Mat/ano%2011/geometria/manual_GeoGebra.pdf > Acesso em: 26 abr. 2019.

HOWARD, Anton; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. Trad. De Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookmann, 2001.

KOLMANN, Bernard; HILL, David R. **Introdução à álgebra linear**: com aplicações. Trad. de Alessandra Bosquilha. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

LINDSAY, R; GORAYSKA, B. Relevance, Goal Management and Cognitive Technology. In: GORAYSKA, B; MEY, J. **Cognition and technology**: co-existence, convergence, and co-evolution. Amsterdam: J. Benjamins, 2004.

MEKSENAS, Paulo. **Pesquisa social e ação pedagógica**: conceitos, métodos e práticas. São Paulo: Loyola, 2002.

OLIVEIRA, S. B. **As equações diofantinas lineares e o livro didático para o ensino médio**. (Dissertação de Mestrado)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

PSILLOS, S. Simple the best: A Case for Abduction. In: KAKAS, A. C.; SADRI, F. (eds.). **Computational Logic**: Logic Programming and Beyond. Berlin: Springer-Verlag, 2002. p. 605-626. Disponível em: http://www.phs.uoa.gr/~psillos/. Acesso em: 2 set. 2013.

RAUEN, Fábio José. Hipóteses abdutivas antefactuais e modelação proativa de metas. **Signo**, Santa Cruz do Sul, v. 38, n. 65, p. 188-204, jul./dez. 2013.

RAUEN, F. J. For a goal conciliation theory: ante-factual abductive hypotheses and pro-active modelling. Linguagem em (Dis)curso, v. 14, n. 3, p. 595-615, set./dez. 2014.

RAUEN, Fábio José. **Hipóteses antedutivas e conciliação de metas**. In: GODOY, E.; BRUNET, C. D.; ALMEIDA, A. L. de O; DIAS, L. S. (Orgs.). Coletânea do II Workshop Internacional de Pragmática. Curitiba: UFPR, 2016. p. 53-79.

RAUEN, Fábio José. **Roteiros de iniciação científica**: os primeiros passos da pesquisa científica, desde a concepção, até a produção e a apresentação. Palhoça: Ed. da Unisul, 2015.

SANTOS, Vinício de Macedo. Linguagens e comunicação na aula de matemática. In: LOPES, Celi Aparecida Espasandin (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática compreensão e prática**. 3. ed. São Paulo: Moderna: 2015.

SILVEIRA, Jane Rita Caetano da; FELTES, Heloísa Pedroso de Moraes. **Pragmática e cognição**: a textualidade pela relevância e outros projetos. 3. ed. Porto Alegre: Edipucrs, 2002.

SOUZA, Maria José Araújo. **Informática educativa na educação matemática**: estudo de geometria no ambiente do software cabri-géomètre. Fortaleza: UFC, 2001. Dissertação de Mestrado.

SPERBER, Dan; WILSON, Deirdre. **Relevância**: comunicação e cognição. Lisboa: Fundação Galouste Gulbenkian, 2001.

SPERBER, Dan; WILSON, Deirdre. **Relevance**: communication & cognition. 2nd. ed. Oxford: Blackwell, 1995. [1st. ed. 1986].

TOMASELLO, M.; CARPENTER, M.; CALLS, J.; BEHNE, T.; MOLL, H. Understanding and sharing intentions: The origins of cultural cognition. **Behavioral and Brain Sciences**, v. 28, 2005, p. 675–735.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CIÊNCIA E CONCORDÂNCIA DAS INSTITUIÇÕES

Tubarão, 27 de abril de 2018.

Com o objetivo de atender às exigências para a obtenção de parecer do Comitê de Ética em Pesquisa - CEP-UNISUL, os representantes legais das instituições envolvidas no projeto de pesquisa intitulado "Conversão de registros de representação semiótica e compreensão conceptual de sistemas lineares" que tem como objetivo analisar, do ponto de vista da teoria de conciliação de metas, teoria da relevância e teoria de registros de representação semiótica, a viabilização da compreensão conceptual de sistemas lineares por estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental mediante a proposição de atividades que demandam a conversão de registros de representação com apoio de recursos informatizados DECLARAM estarem cientes e de acordo com seu desenvolvimento nos termos propostos desde que os pesquisadores executem o referido projeto de pesquisa com observância do que dispõe a Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde.

____

Vanessa Isabel Cataneo
Assinatura da pesquisadora responsável com nome legível (UNISUL)

____

Dr. Fábio José Rauen
Assinatura do responsável pela instituição proponente (UNISUL)
(Coordenador de Curso)

____

Teresa Cristina dos Santos Borges
Assinatura do responsável da instituição coparticipante

Nome do responsável: Teresa Cristina dos Santos Borges

Cargo do responsável: Diretora

Instituição: Escola de Educação Básica Samuel Sandrini

CNPJ da Escola: APP 83.730.408/0001-46 ou CPF do responsável: 807.533.299-72

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhores pais seu filho(a) está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa: ***Conversão de registros de representação semiótica e compreensão conceptual de sistemas lineares*** e que tem como objetivo "*analisar, do ponto de vista da teoria de conciliação de metas, teoria da relevância e teoria de registros de representação semiótica, a viabilização da compreensão conceptual de sistemas lineares por estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental mediante a proposição de atividades que demandam a conversão de registros de representação com apoio de recursos informatizados"* Acreditamos que ela seja importante "para auxiliar os estudantes na compreensão e aprendizagem de sistemas lineares".

Participação do estudo – A participação do seu filho(a) no referido estudo será em responder atividades que envolvem o conteúdo de matemática: sistemas lineares. Essas atividades serão respondidas na escola no período em que seu filho(a) estiver estudando, a aplicação da pesquisa será na sala de aula fazendo o uso de lápis e papel e recursos informatizados, para isso seu filho(a) irá na sala de informática da escola. Em todos esses momentos seu filho(a) será acompanhado e orientado pelo pesquisadora.

Riscos e Benefícios – A participação na pesquisa oferece risco minímo ao seu filho(a), porém é possível que durante o processo da pesquisa ocorra frustração caso ele(a) não consiga resolver alguma das atividades propostas e cansaço durante a aplicação da pesquisa. Sendo assim, a pesquisadora estará atento a estes possíveis casos e prestará toda a assistência necessária ao seu filho(a) como re-explicações e mais tempo para a resolução das atividades. Com a participação na pesquisa é de se esperar como benefício para o seu filho(a) que ele(a) possa compreender e aprender como resolver problemas matemáticos que envolvam sistemas lineares e também como utilizar o computador para representar o gráfico de um sistema linear. Entretanto a pesquisadora não pode garantir que seu filho(a) ao participar da pesquisa irá aprender a resolver atividades que envolvam sistemas lineares e construir a representação gráfica utilizando o computador.

Sigilo e Privacidade – A privacidade de seu filho(a) será respeitada, ou seja, o nome ou qualquer dado ou elemento que possa, de qualquer forma, identificá-lo será mantido em sigilo. A pesquisadora se responsabiliza pela guarda e confidencialidade dos dados, bem como a não exposição dos dados da pesquisa.

Autonomia – É assegurada a assistência durante toda a pesquisa, bem como me garantido o livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, enfim, tudo que eu queira saber antes, durante e depois da participação do meu filho(a). Declaro que fui informado de que posso me recusar a permitir a participação do meu filho(a) no estudo, ou retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar, e de, por desejar sair da pesquisa, não sofrerei qualquer prejuízo à assistência que venho recebendo.

Uso de imagem – Autorizo que os pesquisadoraes obtenham (X) fotografia de meu filho para fins de pesquisa educacional. Eu concordo que o material e informações obtidas relacionadas a meu filho (a) possam ser publicados em aulas, congressos, eventos científicos, palestras ou periódicos científicos. Porém, a meu filho (a) não deve ser identificado (a), tanto quanto possível, por nome ou qualquer outra forma. As fotografias ficarão sob a propriedade do grupo de pesquisadores pertinentes ao estudo e sob sua guarda.

A participação na pesquisa não irá gerar a você nenhum tipo de custo financeiro.

Ressarcimento e Indenização – No entando, caso eu tenha qualquer despesa decorrente da participação do meu filho(a) na pesquisa, tais como transporte, alimentação entre outros, haverá ressarcimento dos valores gastos da seguinte forma com o reenbolso do valor gasto pelo participante e apresentado ao pesquisadora. De igual maneira, caso ocorra algum dano decorrente a participação do meu filho(a) no estudo, o mesmo será devidamente indenizado, conforme determina a lei.

Devolutiva dos resultados – Os daddos da pesquisa serão apresentados no ano de 2020 na Universidade de Santa Catarina, sendo assim você e seu filho(a) poderão assistir, caso haja interesse, na apresentação.

Contatos - Pesquisadora Responsável: Vanessa Isabel Cataneo
Telefone para contato: (48) 999549551
E-mail para contato: vanessaisacataneo@hotmail.com
Orientador da pesquisa: Fábio José Rauen
Telefone para contato: (48) 99660061
E-mail para contato: fabio.rauen@unisul.br

Comitê de Ética – O Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP) é composto por um grupo de pessoas que estão trabalhando para garantir seus direitos como participante sejam respeitados, sempre se pautando da Resolução 466/12 do CNS. Ele tem a obrigação de avaliar se a pesquisa foi planejada e se está sendo executada de forma ética. Caso você achar que a pesquisa não está sendo realizada da forma como você imaginou ou que está sendo prejudicado de alguma forma, você pode entrar em contato com o Comitê de Ética da UNISUL pelo telefone (48) 3279-1036 entre segunda e sexta-feira das 9 às 17horas ou pelo e-mail cep.contato@unisul.br.

Declaração – Declaro que li e entendi todas as informações presentes neste Termo e tive a oportunidade de discutir as informações do mesmo. Todas as minhas perguntas foram respondidas e estou satisfeito com as respostas. Entendo que receberei uma via assinada e datada deste documento e que outra via será arquivada por 5 anos pelo pesquisadora. Enfim, tendo sido orientado quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, eu manifesto meu livre consentimento em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou pagar, por minha participação.

Nome e Assinatura da pesquisadora responsável: ______________________________

Nome e Assinatura da pesquisadora que coletou os dados: ______________________________

Eu, ________________________________, abaixo assinado, concordo com a participação do meu filho(a) nesse estudo como participante da pesquisa. Fui informado(a) e esclarecido(a) pela pesquisadora ______________________________ sobre o tema e o objetivo da pesquisa, assim como a maneira como ela será feita e os benefícios e os possíveis riscos decorrentes da participação do meu filho(a). Recebi a garantia de que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto me traga qualquer prejuízo.

Nome por extenso:

RG:

Local e Data: Orleans, 11 de setembro de 2018.

Assinatura:

APÊNDICE C – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado para participar da pesquisa **Conversão de registros de representação semiótica e compreensão conceptual de sistemas lineares**. Queremos saber como você raciocina para resolver atividades que envolvem o conteúdo de matemática: sistemas lineares. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir. A pesquisa será feita na sua escola no período em você estuda, você receberá explicações sobre o que são sistemas lineares e depois irá responder atividades que envolvem o conteúdo de matemática: sistemas lineares. Essas atividades serão respondidas na sua sala de aula fazendo o uso de lápis e papel e depois no laboratório de informática da sua escola, onde você irá utilizar o computador, em todos esses momentos você será acompanhado e orientado pela pesquisadora. A pesquisa oferece risco minímo a você, porém é possível que durante a pesquisa você fique frustrado caso não consiga resolver alguma das atividades propostas e cansado durante a aplicação da pesquisa. Entretanto, a pesquisadora estará atento a estes possíveis casos e prestará toda a assistência necessária a você como re-explicações e mais tempo para a resolução das atividades. Espera-se que a sua participação na pesquisa possa lhe oferecer como benefícios condições de você compreender e aprender como resolver problemas matemáticos que envolvam sistemas lineares e também como utilizar o computador para representar o gráfico de um sistema linear. Entretanto não podemos garantir que ao participar da pesquisa você irá aprender a resolver atividades que envolvam sistemas lineares e construir a representação gráfica utilizando o computador. A sua privacidade será respeitada ou seja, o se nome ou qualquer forma de identificá-lo será mantido em sigilo. Você poderá desistir a qualquer momento de participar da pesquisa, bastando para isso informar sua decisão aos seus responsáveis e ao pesquisadora. A sua participação na pesquisa é voluntária e sem interesse financeiro, assim você não terá direito à remuneração. Você não terá qualquer despesa para participar da pesquisa, mas caso ocorra algum custo ou dano decorrente da sua participação você será devidamente indenizado, conforme determina a lei. Quando terminarmos a pesquisa os dados coletados serão analisados e apresentados no ano de 2020 na Universidade de Santa Catarina, sendo assim você poderá assistir, caso haja interesse, da apresentação. Se você tiver alguma dúvida, você pode perguntar à pesquisadora.

TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu ____ aceito participar da pesquisa “Conversão de registros de representação semiótica e compreensão conceptual de sistemas lineares”. Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir. A pesquisadora tirou minhas dúvidas e conversou com os meus responsáveis. Recebi uma cópia deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

Orleans, 19 de setembro de 2018.

______________________________	______________________________
Assinatura do menor	Assinatura da pesquisadora

APÊNDICE D – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Identificação
Escola: Escola de Educação Básica Samuel Sandrini
Disciplina: Matemática
Professora: Vanessa Isabel Cataneo
Nível de Ensino: Ensino Fundamental
Ano: 8º
Período: Matutino
Cronologia: Seis Encontros

Tema
SISTEMAS LINEARES

Objetivo Geral
Promover a compreensão conceptual de sistemas lineares de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental mediante a proposição de atividades que demandam a conversão de representação entre registros semióticos com apoio do *software* GeoGebra em celulares.

PRIMEIRO ENCONTRO

Objetivo
Habilitar o estudante a encontrar solução de situações-problema registrados em língua natural que envolvam sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Estratégias
Técnicas. Aula expositiva e dialogada
Recursos. Lousa. Três fichas de papel para cada estudante, contendo cada ficha um problema desafio. Cartaz contendo uma tabela com o nome de cada estudante e três colunas para registrar a resposta de cada estudante para cada um dos três desafios propostos.

Ação 1. Habilitar o estudante a reconhecer unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, docente.

Para atingir a ação 1, propõe-se três situações-problema representados em língua natural para desafiar os estudantes a resolvê-los individualmente e, supostamente, por tentativas. As atividades destacam a necessidade de o estudante observar as unidades significativas a serem consideradas para solucionar as situações-problema.

> Problema 1 – Dados dois números distintos em que um número somado com outro número é igual a três e que o dobro deste mesmo número somado com outro é igual a quatro. Calcule qual é o valor desses números.
> Problema 2 – O dobro de um número somado com o dobro de outro número é igual a quatro. A diferença entre esses números é zero. Calcule qual é o valor desses números.
> Problema 3 – Em uma livraria ao comprar um lápis e um caderno paga-se R$ 18,00. Ao comprar quatro lápis e dois cadernos paga-se R$ 40,00. Se o preço do lápis na

> primeira e na segunda compra é igual e o caderno também possui o mesmo preço na primeira e na segunda compra. Calcule quanto custa cada lápis e quanto custa cada caderno.

Ação 2. Habilitar o estudante a converter representações de situações-problema propostos em língua natural para a representação algébrica.
Ação 3. Habilitar o estudante a organizar a representação de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.
Ação 4. Habilitar o estudante a resolver o sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pelo método da substituição.

Para atingir as ações 2-4, a docente deve proceder à conversão da representação do registro em língua natural para a representação em registro algébrico dos três problemas matemáticos citados anteriormente, identificando as unidades significativas para apresentar o modelo matemático da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, na sequência a docente utiliza método da substituição para resolver cada um dos sistemas.

SEGUNDO ENCONTRO

Objetivo. Habilitar o estudante a reconhecer e utilizar o *software* GeoGebra para representar o registro gráfico de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Estratégias
Recursos. Lousa, celular, *Datashow*, notebook, s*oftware* GeoGebra.
Técnicas. Aula expositiva e dialogada e utilização do *software* GeoGebra em celulares.

Ação 5. Habilitar o estudante a reconhecer o funcionamento de cada ícone da janela do *software* GeoGebra para representar o registro gráfico de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.
Ação 6. Habilitar o estudante a reconhecer as unidades significativas que constituem a representação gráfica, por exemplo, variáveis, par ordenado (x, y), eixo das abcissas e eixo das ordenadas.
Ação 7. Habilitar o estudante a representar a solução do sistema na representação gráfica, utilizando o *software* GeoGebra.
Ação 8. Habilitar o estudante a reconhecer que a solução de um sistema de equações do 1º grau é única em qualquer representação ou método.

Para atingir as ações 5-8, a docente deve usar o Datashow para projetar a interface do software. Desse modo, simultaneamente, os estudantes acompanham os procedimentos no software, que já deve ter sido instalado em seus celulares por meio do aplicativo Graphing Calc. A proposta é a de que isso permita que os estudantes acompanhem a explicação e, ao mesmo tempo, executem os processos individualmente no software, de modo a verificar a representação da solução dos problemas no registro gráfico.

A docente deve partir do software GeoGebra habilitar o estudante a:

a) *manipular a interface do software, bem como, reconhecer o plano cartesiano, o eixo das abscissas (eixo x) o eixo das ordenadas (eixo y);*
b) *localizar no plano cartesiano um par ordenado (x, y);*

c) *reconhecer a posição dos quadrantes;*
d) *resolver cada um dos três problemas-desafio pelo software;*
e) *interpretar a representação gráfica do sistema linear no software e perceber que uma equação de primeiro grau é representada no plano cartesiano por uma reta;*
f) *interpretar que a representação gráfica de um sistema linear formado por duas equações do primeiro grau, apresenta duas retas no plano, e o ponto de intersecção dessas retas, o par ordenado (x, y), representa a solução do sistema.*

TERCEIRO ENCONTRO

Objetivo. Habilitar o estudante a encontrar a solução para situações-problema que envolva a representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Estratégias
Recursos. Lousa, celular, *Datashow*, notebook, s*oftware* GeoGebra.
Técnicas. Aula expositiva e dialogada e utilização do *software* GeoGebra em celulares.

Ação 9. Habilitar, mediante duas situações-problema em língua natural para trabalhar junto ao estudante, a converter um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas para a representação no registro algébrico e determinar a solução pelo método da substituição.
Ação 10. Habilitar o estudante a reconhecer retas no plano cartesiano como representação gráfica de equações do 1º grau com duas incógnitas fazendo o uso do *software* GeoGebra.

Para atingir as ações 9-10, propõem-se as atividades 1-2, a seguir:

5- Um número x qualquer somado com outro número y qualquer é igual a oito unidades. Esse mesmo número x qualquer subtraído do mesmo número y qualquer é igual a seis unidades. Que números são esses?
6- Para realizar o pagamento de uma dívida no valor de R$ 140,00, Paulo usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$ 5,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram utilizadas 10 notas?

QUARTO ENCONTRO

Objetivo. Habilitar o estudante a solucionar graficamente sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Estratégias
Recursos. Lousa, celular, *Datashow*, notebook, s*oftware* GeoGebra.
Técnicas. Aula expositiva e dialogada e utilização do *software* GeoGebra em celulares.

Ação 11. Habilitar o estudante a solucionar graficamente sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, partindo da conversão da representação do registro em língua natural para a representação do registro algébrico, ou já a partir da representação do registro algébrico, fazendo uso do *software* GeoGebra.
Ação 12. Habilitar o estudante a reconhecer sistemas de equações do 1º grau possíveis e determinados, impossíveis e possíveis e indeterminados a partir da representação gráfica fazendo uso do *software* GeoGebra.

Ação 13. Habilitar o estudante a reconhecer no *software* que a solução no registro gráfico de um sistema de equações do 1º grau é um ponto.

Para atingir as ações 11-13, propõem-se as atividades 3-4:

7- Utilizando o *software* GeoGebra construa um sistema linear e identifique o ponto de intersecção entre as retas e escreva as equações que constituem o sistema representado.

8- Resolver os seguintes sistemas de equações do 1º grau, com o auxílio do *software* GeoGebra, e classificar os sistemas de acordo com o comportamento no registro gráfico em: Sistema impossível (SI); Sistema possível determinado (SDD) e Sistema possível indeterminado (SPI).

d) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 2x - 10y = 20 \end{cases}$

QUINTO ENCONTRO

Objetivo. Propor ao estudante a resolução de atividades que envolva a conversão da representação no registro em língua natural para a representação no registro algébrico e para a representação do registo gráfico.

Estratégias
Recursos. Aparelho celular, *software* GeoGebra.
Técnicas. Aula expositiva e dialogada e utilização do *software* GeoGebra em celulares.

Ação 14. Sugerir ao estudante situações-problema nas quais ele deve fazer o uso da conversão e tratamento das unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas adotando o método da substituição para solucionar os problemas.
Ação 15. Propor ao estudante a resolução de atividades que envolva a conversão da representação no registro em língua natural para a representação do registro algébrico e para a representação do registro gráfico fazendo uso do *software* GeoGebra.

Para atingir as ações 14-15, propõe-se três atividades. A aplicação das atividades deve ser dividida em dois momentos. No primeiro momento a docente solicitará aos estudantes que resolvam as três atividades individualmente e sem consulta ao material estudado ou à docente, somente com lápis e papel, adotando o método da substituição. No segundo momento aplicam-se as mesmas três atividades, mas agora o estudante deverá ter acesso individualizado ao software GeoGebra para a resolução.

1 – Resolva o sistema de equação linear fazendo o uso do método da substituição:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

2 – A soma de dois números é doze unidades e a diferença entre esses dois números é quatro unidades. Calcule quais são esses números.

3 – Em uma praça há 18 crianças andando de bicicleta ou de skate. No total, há 50 rodas girando pela praça. Quantas crianças andam de bicicleta e quantas andam de skate?

SEXTO ENCONTRO

Objetivo. Propor ao estudante duas situações-problema que envolva a representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas como desafios para serem solucionados.

Estratégias
Recursos. Aparelho celular, *software* GeoGebra.
Técnicas. Aula expositiva e dialogada e utilização do *software* GeoGebra em celulares.

Ação 16. Possibilitar o estudante o uso do método da substituição e/ou uso do *software* GeoGebra para resolver as duas situações-problema.

Para atingir a ação 16, são propostas duas atividades a serem resolvidas pelo estudante, por meio do método da substituição e/ou pelo software GeoGebra de modo individual e sem consulta ao material estudado ou à docente.

Atividade 1- Determine o conjunto solução para o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=5} \\ \boldsymbol{3x+y=7} \end{cases}$

Agora que você já resolveu o problema acima responda as perguntas a seguir:

6- O que você precisa descobrir para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$?

7- Qual o método que você utilizou para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$?

8- No sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$, que valores você encontrou para x e y?

9- Utilize um método diferente para resolver o sistema linear $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$:

10- Complete a frase a seguir: A solução de um sistema linear é ____.

Atividade 2 – Ricardo foi ao mercadinho do seu bairro para comprar maças e laranjas. Observou na tabela de preços que ao comprar um quilo de maçã e um quilo de laranja paga-se R\$ 6,00. Ao comprar dois quilos de maçã e quatro quilos de laranja paga-se R\$ 16,00. Quanto custa cada quilo de maçã e cada quilo de laranja?

Agora que você já resolveu o problema de Ricardo responda as perguntas a seguir:

3- O que está sendo perguntado a você na situação-problema do mercadinho?

4- No problema quais são as variáveis principais, assinale a resposta correta.

a) Banana e laranja
b) Banana e maçã
c) Maçã e laranja

3- Como você identificou cada uma das variáveis da situação-problema de Ricardo?

4- Como você organizou a situação-problema de Ricardo para determinar o valor para cada quilo de maçã e de laranja? Assinale a resposta correta.

a) Um sistema linear com duas equações
b) Um sistema linear com uma equação
c) Um sistema linear com uma função

5- Ao utilizar o método da substituição para resolver a situação-problema qual o valor do quilo da maçã e qual o valor do quilo da laranja?

6- Observando o ponto de intersecção entre as retas no *software* GeoGebra, como você identifica a solução para a situação-problema de Ricardo? Assinale a resposta correta.

a) O valor do quilo da maçã está no eixo x e o valor do quilo da laranja está no eixo y.
b) O valor do quilo da maçã está no eixo y e o valor do quilo da laranja está no eixo x.
c) O valor do quilo da maçã e o valor do quilo da laranja estão no ponto de origem.

7- A solução do problema no *software* GeoGebra é a mesma solução que você encontrou utilizando o método da substituição?

( ) Sim
( ) Não

Justifique sua resposta.

8- A solução para a situação-problema de Ricardo na representação gráfica no *software* GeoGebra é identificada como:

a) Duas retas
b) Um ponto onde duas retas se cruzam
c) Ponto de origem

9- Considerando os estudos realizados sobre sistemas lineares qual a sua opinião em relação aos diferentes métodos de resolução.