UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

EDISÉIA SUETHE FAUST HOBOLD

PROPOSIÇÕES PARA O ENSINO DA TABUADA COM BASE NAS LÓGICAS FORMAL E DIALÉTICA

Tubarão

2014

EDISÉIA SUETHE FAUST HOBOLD

PROPOSIÇÕES PARA O ENSINO DA TABUADA COM BASE NAS LÓGICAS FORMAL E DIALÉTICA

Esta dissertação foi julgada adequada à obtenção do título de Mestre em Educação e aprovada em sua forma final pelo Curso de Mestrado em Educação da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 05 de junho de 2014.

Professora e Presidenta da Banca Examinadora Josélia Euzébio da Rosa, Dra.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Professor Doutor Guillermo Árias Beatón, Dr.
Examinador Externo – Universidad de la Habana – Cuba

Professor Doutor Ademir Damázio, Dr.
Examinador Externo – Universidade do Extremo Sul Catarinense

Professor Gilvan Luiz Machado Costa, Dr.
Examinador Interno – Universidade do Sul de Santa Catarina

Hobold, Ediséia Suethe Faust, 1975-
H59 Proposições para o ensino da tabuada com base nas lógicas formal e dialética / Ediséia Suethe Faust Hobold; -- 2014.
199 f.; il. color ; 30 cm

Orientadora: Josélia Euzébio da Rosa.
Dissertação (mestrado)–Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2014.
Inclui bibliografias.

1. Ensino Fundamental. 2. Tabuada. 3. Lógica. I. Rosa, Josélia Euzébio da. II. Universidade do Sul de Santa Catarina - Mestrado em Ciências da Educação. III. Título.

CDD (21. ed.) 375.51

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária da Unisul

A meu esposo Ademar. Aos meus filhos Igor e Guilherme. A minha orientadora Josélia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de algum modo participaram deste momento em minha vida de pesquisa, em especial:

A minha orientadora, professora Dr.ª Josélia Euzébio da Rosa, por quem me orgulho, tenho profunda admiração e respeito, que com toda a sua sabedoria, exemplo, orientação e presença constante contribuiu, significativamente, para a conclusão desta dissertação. É um privilégio tê-la como AMIGA.

A banca do exame de qualificação por suas preciosas contribuições.

Aos professores doutores Ademir Damazio, Gilvan Luiz Machado Costa, Guillermo Árias Beatón e Maria da Graça Nóbrega Bollmann por terem aceito participar da banca de defesa.

Ao meu esposo Ademar, pelo companheirismo, apoio afetivo e compreensão dos momentos ausentes e de estudo.

Aos meus filhos maravilhosos, Igor e Guilherme, pela compreensão de minha ausência nos momentos de estudo.

Aos meus pais pela educação concedida.

Aos meus irmãos pelo apoio e companheirismo.

A Gisele, Sandra, Ketlin, Cléder, Beatriz, Ana Paula e Mônica pela leitura da versão final e suas valiosas contribuições.

A todos os integrantes do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural – GPEMAHC pelos momentos de estudos, reflexões durante a investigação e materiais bibliográficos disponibilizados (Prof. Dr. Ademir, Prof.ª Dr.ª Josélia, Gisele, Cristina, Sandra, Josiane, Julian, Lucas Sid, Cléder, Lucas Lemos, Alexander, Eloir, Juliana, Willian, Iuri, Osvaldo, Felipe, Milaine, Daiane, Valdirene, Beatriz, Suzana, Manoel e Ediséia).

Ao programa de Pós-Graduação Mestrado em Educação da UNISUL, aos colegas e os professores do curso por terem contribuído em diversos momentos de minha formação.

Ao professor Gilvan por compreender meus anseios de pesquisa.

A Daniela, secretária do mestrado em educação da UNISUL, por sua eficiência no desempenho de sua profissão.

Ao Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior - FUMDES pelo apoio financeiro concedido.

A Secretaria de Estado da Educação - SED pela licença concedida

A todos,

OS MEUS SINCEROS AGRADECIMENTOS!

RESUMO

Qual o movimento conceitual impresso nas proposições brasileiras para o ensino da tabuada? Existem outros movimentos possíveis? Ou existe apenas um movimento conceitual a ser perseguido no ensino? Com o intuito de buscar respostas para essas questões analisamos duas proposições de ensino, uma publicada por autores brasileiros e outra elaborada por autores russos. Para tanto, consideramos a Coleção mais utilizada pelos professores das escolas estaduais dos municípios constituintes da 36ª Gerência Regional de Educação, com sede em Braço do Norte, Santa Catarina. Trata-se da coleção *Porta Aberta*, dos autores Centurión, Scala e Rodrigues. Quanto à proposição russa, buscamos, no interior do sistema de ensino Elkonin-Davýdov, a referência de análise. Davýdov (ДАВЫДОВ) e colaboradores, tais como Gorbov (ГОРБОВ), Mikulina (МИКУЛИНА) e Savieliev (САВЕЛЬЕВА) elaboraram uma proposta para o Ensino de Matemática e publicaram em livros didáticos, manuais de orientação ao professor, entre outros. A referência de análise, na presente investigação, consiste nos exercícios apresentados na proposição brasileira e nas tarefas apresentadas na proposição davydoviana, para o ensino da tabuada, nos primeiros três anos escolares do Ensino Fundamental. Partimos da hipótese de que Davýdov e colaboradores contemplam, em sua proposição de ensino, abstrações, generalizações e conceitos qualitativamente diferentes do que se propõe atualmente no Brasil. Nosso objetivo consistiu em investigar o movimento conceitual apresentado em ambas as proposições, tanto a brasileira quanto davydoviana para o ensino da tabuada. Desenvolvemos as seguintes ações de pesquisa em relação às duas proposições de ensino: 1) Identificamos a relação que permite determinar a essência da tabuada; 2) Selecionamos e reproduzimos o sistema conceitual no qual a tabuada se insere; 3) Estudamos a base teórico-metodológica; 4) Revelamos os tipos de abstração, generalização e conceito. Em concernência com o método adotado, o Materialismo Histórico-Dialético, orientamo-nos pelo movimento que segue do concreto real ao abstrato, e deste novamente ao concreto. Os resultados da investigação demonstraram que o movimento conceitual proposto pelas duas proposições de ensino seguem direções opostas do ponto de vista da lógica que as fundamenta. Ou seja, enquanto a proposição brasileira se aproxima dos fundamentos oriundos da lógica formal tradicional, a proposição davydoviana é expressão da lógica dialética.

Palavras-chave: Educação Matemática. Proposições de Ensino. Movimento Conceitual. Tabuada.

RESUMEN

¿Cuál es el movimiento conceptual imprimido en las proposiciones brasileñas para la enseñanza de la tabla de multiplicación? ¿Hay otros movimientos posibles? ¿Hay sólo un movimiento conceptual a ser perseguido en la enseñanza? Con el objetivo de obtener respuestas para esas cuestiones, analizamos dos proposiciones de enseñanza, una de ellas publicada por autores brasileños y otra elaborada por autores rusos. Para eso consideramos la colección libros más utilizada por profesores de escuelas estaduales de los municipios que constituyen la 36ª Gerencia Regional de Educación, que tiene sede en Braço do Norte, Santa Catarina. Es llamada colección *Porta Aberta*, de los autores Centurión, Scala y Rodrigues. Acerca de la proposición rusa, hemos buscado la referencia de análisis en interior del sistema de enseñanza de Elkonin-Davýdov. Davýdov (ДАВЫДОВ) y sus colaboradores, como Gorbov (ГОРБОВ), Mikulina (МИКУЛИНА) y Savieliev (САВЕЛЬЕВА) han elaborado una propuesta de Enseñanza de Matemática publicada en libros didácticos, manuales de orientación al profesor, entre otros. La referencia de análisis en esa investigación consiste en los ejercicios presentados en la proposición brasileña y en tareas presentadas por la proposición de Davýdov para enseñanza de la tabla de multiplicación en los primeros tres años escolares de la Educación Elemental. Partimos de la hipótesis que Davýdov y colaboradores contemplan, en su proposición de enseñanza, abstracciones, generalizaciones y conceptos cualitativamente diferentes de aquellos que se proponen actualmente en Brasil. Nuestro objetivo he consistido en investigar el movimiento conceptual presentado en las dos proposiciones brasileña y de Davýdov para la enseñanza de la tabla de multiplicación. Desarrollamos las siguientes acciones de investigación con relación a las dos proposiciones de enseñanza: 1) Identificar la relación que permite determinar la esencia de la tabla de multiplicación; 2) Seleccionar y reproducir el sistema conceptual en que la tabla de multiplicación se ensere; 3) Estudiar el basamento teórico-metodológico; 4) Revelar tipos de abstracción, generalización y concepto. En pertinencia con el método adoptado, el Materialismo Histórico-Dialéctico, hemos sido orientados por el movimiento que sigue del concreto real para el abstracto, y de este de nuevo al concreto. Los resultados de la investigación apuntan para una posible distinción entre las dos proposiciones, desde el punto de vista de la lógica que las fundamenta. O sea, mientras la proposición brasileña se aproxima de los fundamentos oriundos de la lógica formal tradicional, la proposición de Davýdov es expresión de la lógica dialéctica.

Palabras-clave: Educación Matemática. Proposiciones de Enseñanza. Movimiento Conceptual. Tabla de multiplicación.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1 - Introdução à multiplicação no livro didático brasileiro 37
Ilustração 2 - Adição de quantidades iguais no livro didático brasileiro 38
Ilustração 3 - Apresentação do conceito de multiplicação no livro didático brasileiro 40
Ilustração 4 - Atividades similares para estudar o conceito que promove a generalização empírica 42
Ilustração 5 - Multiplicação: A ideia de organização retangular 44
Ilustração 6 - Percepção e representação 46
Ilustração 7 - Aplicação do conceito de multiplicação 48
Ilustração 8 - Representação da operação de multiplicação 50
Ilustração 9 - Imagens claras e exatas 51
Ilustração 10 - Comparação com outros objetos 53
Ilustração 11 - Generalização da tabuada na proposição brasileira 55
Ilustração 12 - Tabuada do *dois* (2) e do *três* (3) 62
Ilustração 13 - Parlendas que envolvem a multiplicação 64
Ilustração 14 - Multiplicação por *quatro* (4) 65
Ilustração 15 - Tabela de multiplicação por *cinco* (5) 66
Ilustração 16 - Para além do estágio da representação 68
Ilustração 17 - Livro didático referente ao 1º ano do Ensino Fundamental 80
Ilustração 18 - Manual de orientação ao professor referente ao livro didático do 1º ano do Ensino Fundamental 80
Ilustração 19 - Tarefa 1, medidas compostas 81
Ilustração 20 - Tarefa 1, resultado do processo de resolução da tarefa 81
Ilustração 21 - Tarefa 2, o aspecto quantitativo do número 82
Ilustração 22 - Tarefa 2, nova forma de registro. 83
Ilustração 23 - Tarefa 3, movimento do registro para a relação entre grandezas 83
Ilustração 24 - Tarefa 3, composição das áreas com medidas E e C 84
Ilustração 25 - Tarefa 4, síntese das diferentes formas de registro 84
Ilustração 26 - Tarefa 4, resultado do processo de medição 85
Ilustração 27 - Tarefa 5, construção de segmentos 86
Ilustração 28 - Tarefa 5, construção dos segmentos 86

Ilustração 29 - Tarefa 5, comparação das medidas N e C 87
Ilustração 30 - Livro didático russo do 2º ano do Ensino Fundamental 90
Ilustração 31 - Manual de orientação ao professor referente ao livro didático do 2º ano do Ensino Fundamental 90
Ilustração 32 - Tarefa 6, kit para recorte 91
Ilustração 33 - Tarefa 6, figura modelo (3 cm x 4,5cm) que somente o professor tem em mãos 92
Ilustração 34 - Tarefa 6, registro da medida C 92
Ilustração 35 - Tarefa 6, construção da superfície de área C 93
Ilustração 36 - Tarefa 7, superfície de área A, unidade de medida E e o registro com seta 93
Ilustração 37- Tarefa 7, processo de medição 94
Ilustração 38 - Tarefa 7, apresentação de uma nova unidade de medida 95
Ilustração 39 - Tarefa 7, comparação da área da superfície da unidade de medida P com os recortes do kit 95
Ilustração 40 - Tarefa 7, construção da unidade de medida intermediária P 96
Ilustração 41 - Tarefa 7, construção da área da superfície A 96
Ilustração 42 - Tarefa 7, construção do esquema 97
Ilustração 43 - Tarefa 7, construção do esquema 97
Ilustração 44 - Tarefa 7, esquema é o início da modelação gráfica 98
Ilustração 45 - Tarefa 8, dados para a construção da tarefa 100
Ilustração 46 - Tarefa 8, construção da unidade de medida intermediária L 100
Ilustração 47 - Tarefa 8, primeira e segunda medição 101
Ilustração 48 - Tarefa 8, terceira medição 101
Ilustração 49 - Tarefa 9, estudo do esquema 103
Ilustração 50 - Tarefa 9, registro no esquema 103
Ilustração 51 - Tarefa 10, volumes de líquido e seus respectivos registros 104
Ilustração 52 - Tarefa 10, comparação dos volumes 105
Ilustração 53 - Tarefa 10, total de unidades de medidas básicas no esquema 106
Ilustração 54 - Tarefa 11, construção das imagens a partir das sentenças dadas 107
Ilustração 55 - Tarefa 11, construção do esquema e do objeto a partir da sentença dada 107
Ilustração 56 - Tarefa 11, construção do esquema e do objeto a partir da sentença dada 108
Ilustração 57 - Tarefa 11, cálculo do total de unidades básicas e registro no esquema 108
Ilustração 58 - Tarefa 11, construção da imagem a partir da sentença e registro no esquema 109

Ilustração 59 - Tarefa 12, registro no esquema a partir da grandeza área 110
Ilustração 60 - Tarefa 12, determinação da unidade de medida intermediária 111
Ilustração 61 - Tarefa 12, o esquema é completado pela reta superior 112
Ilustração 62 - Tarefa 12, construção da reta e determinação do total de unidades básicas ... 113
Ilustração 63 - Tarefa 13, tabela de multiplicação pelo número *dois* (2) 114
Ilustração 64 - Tarefa 13, representação na reta numérica de 2 x 2 = 4 115
Ilustração 65 - Tarefa 13, representação na reta numérica de 2 x 3 = 6 115
Ilustração 66 - Tarefa 13, continuidade da representação, na reta numérica, da tabuada do número dois 116
Ilustração 67 - Tarefa 13, síntese da tabuada do número *dois* (2) na reta numérica 116
Ilustração 68 - Tarefa 14, determinação do produto com o auxílio da reta numérica 118
Ilustração 69 - Tarefa 15, tabuada do número *três* (3) 118
Ilustração 70 - Tarefa 15, registro dos resultados já conhecidos 119
Ilustração 71 - Tarefa 15, determinação dos produtos com o auxílio da reta numérica 119
Ilustração 72 - Tarefa 16, registro dos resultados da multiplicação por *três* (3) 121
Ilustração 73 - Tarefa 16, registro dos resultados da multiplicação por *três* (3) 122
Ilustração 74 - Livro didático em língua russa 3º ano do Ensino Fundamental 123
Ilustração 75 - Manual de orientação ao professor referente ao livro didático do 3º ano do Ensino Fundamental 123
Ilustração 76 - Tarefa 17, registro dos valores no esquema 124
Ilustração 77 - Tarefa 17, registro dos valores no esquema 125
Ilustração 78 - Tarefa 17, determinação do número de unidades básicas por meio da reta numérica 125
Ilustração 79 - Tarefa 18, esquemas 126
Ilustração 80 - Tarefa 18, operação da divisão na régua 127
Ilustração 81 - Tarefa 18, registro do resultado da operação de divisão no esquema de setas 128
Ilustração 82 - Tarefa 18, operação da multiplicação com o auxílio da régua 128
Ilustração 83 - Tarefa 18, registro do resultado da operação no esquema 129
Ilustração 84 - Tarefa 19, determinação do produto 2 x 5 130
Ilustração 85 - Tarefa 19, determinação dos produtos com o auxílio da régua 130
Ilustração 86 - Tarefa 19, operação de divisão na régua 131
Ilustração 87 - Tarefa 19, operação de divisão na régua 131
Ilustração 88 - Tarefa 20, propriedade comutativa da multiplicação 132

Ilustração 89 - Tarefa 20 a) construção da unidade de medida intermediária 133
Ilustração 90 - Tarefa 20 a) registro dos valores nos esquemas 134
Ilustração 91 - Tarefa 20 b) propriedade comutativa da multiplicação 134
Ilustração 92 - Tarefa 20 b) construção da unidade de medida intermediária – linha 135
Ilustração 93 - Tarefa 20 b) construção da unidade de medida intermediária – coluna 135
Ilustração 94 - Tarefa 22 a) estrelas de quatro pontas 138
Ilustração 95 - Tarefa 22 a) registro do esquema e da operação 138
Ilustração 96 - Tarefa 22 b) estrelas de cinco pontas 139
Ilustração 97 - Tarefa 22 b) construção do segundo esquema 139
Ilustração 98 - Tarefa 22 c) determinação do total de estrelas de quatro e cinco pontas 140
Ilustração 99 - Tarefa 22 c) determinação do total de estrelas de quatro e cinco pontas 140
Ilustração 100 - Tarefa 22c) esquema que representa a soma das partes 141
Ilustração 101 - Tarefa 22 d) esquema com setas para o cálculo do total de estrelas 141
Ilustração 102 - Tarefa 22 d) métodos de cálculo 142
Ilustração 103 - Tarefa 22 d) cálculo do total de estrelas por meio do primeiro método 142
Ilustração 104 - Tarefa 22 d) cálculo do total de estrelas por meio do segundo método 143
Ilustração 105 - Tarefa 22 d) relação de equivalência entre os dois métodos de resolução ... 143
Ilustração 106 - Tarefa 23, construção da tabuada do número *quatro* 145
Ilustração 107 - Tarefa 23, construção da tabuada do número *quatro* 145
Ilustração 108 - Tarefa 23, sistematização da tabuada do número *quatro* (4) 146
Ilustração 109 - Tarefa 23, generalização da tabuada do número *quatro* (4) 146
Ilustração 110 - Tarefa 24, apresentação da tabuada de *cinco* (5) 151
Ilustração 111 - Tarefa 24, apresentação da Tabuada de *cinco* (5) 152
Ilustração 112 - Tarefa 24, determinação de alguns produtos da tabuada de *cinco* (5) 152
Ilustração 113 - Tarefa 24, determinação de alguns produtos da tabuada de *cinco* (5) 152
Ilustração 114 - Tarefa 24, resultados da tabuada do número *cinco* (5). 153
Ilustração 115 - Tarefa 25, superfícies A e B da equipe a 155
Ilustração 116 - Tarefa 25a) registro do processo de medição das superfícies A e B 156
Ilustração 117 - Tarefa 25, registro dos esquemas no quadro 157
Ilustração 118 - Tarefa 25 a) esquema genérico e expressão literal 158
Ilustração 119 - Tarefa 25 b) representação gráfica da relação entre as grandezas 158
Ilustração 120 - Tarefa 25 b) comparação entre as medidas A e B 158
Ilustração 121 - Tarefa 25 b) comparação das medidas A e B da primeira equipe 159
Ilustração 122 - Tarefa 25 c) sobreposição das superfícies A e B 159

Ilustração 123 - Tarefa 25 c) outro modo de determinar a diferença 160
Ilustração 124 - Tarefa 25 c) outro modo de determinar a diferença 160
Ilustração 125 - Tarefa 25 c) genericamente 161
Ilustração 126 - Tarefa 25 c) regra da multiplicação de um número pela diferença 161
Ilustração 127 - Tarefa 26, tabuada de *nove* (9) 164
Ilustração 128 - Tarefa 26, resultados já conhecidos da tabuada do número *nove* 164
Ilustração 129 - Tarefa 26, determinação dos produtos por meio da regra multiplicação de um número pela diferença 165
Ilustração 130 - Tarefa 26, sistematização da Tabuada de *nove* (9) 165
Ilustração 131 - Tarefa 27, produto do número *seis* (6) pelas regras da soma e diferença 166
Ilustração 132 - Tarefa 27, aplicação da propriedade distributiva na tabuada de *seis* (6) 167
Ilustração 133 - Tarefa 28, tabuada do número *seis* (6) 169
Ilustração 134 - Tarefa 29, produto do número *sete* (7) pela soma e pela diferença 169
Ilustração 135 - Tarefa 29, aplicação da propriedade distributiva na tabuada de *sete* (7) 170
Ilustração 136 - Tarefa 30, sistematização da tabuada de *sete* (7) 171
Ilustração 137 - Tarefa 31, tabuada do número *oito* (8) 172
Ilustração 138 - Tarefa 31, aplicação da propriedade distributiva na tabuada de *oito* (8) 173
Ilustração 139 - Tarefa 32, tabuada do número *oito* 174
Ilustração 140 - Tarefa 32, aplicação da propriedade distributiva na tabuada de *oito* (8) 174
Ilustração 141 - Tarefa 33, informações nos esquemas de segmentos para elaboração de situações problemas 175
Ilustração 142 - Tarefa 33, item 1, registro dos dados nos esquemas 176
Ilustração 143 - Tarefa 33, item 2, resolução do segundo problema 177
Ilustração 144 - Tarefa 33, item 3, registro dos dados nos esquemas 178
Ilustração 145 - Esquema da relação essencial da tabuada 188

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Utilização das coleções de livros didáticos nas escolas da 36ª GERED.....32

LISTA DE SIGLAS

CNPq	- Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
FUMDES	- Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior
GERED	- Gerência Regional de Educação
GPEMAHC	- Grupo de Pesquisa Educação Matemática: uma abordagem Histórico-Cultural
SED	- Secretaria de Estado da Educação
UEPI	- Universidade Estadual do Piauí
UFSC	- Universidade Federal de Santa Catariana
UNESC	- Universidade do Extremo Sul Catarinense
UNIBAVE	- Centro Universitário Barriga Verde
UNISUL	- Universidade do Sul de Santa Catarina
SIMFOP	- Simpósio Sobre Formação de Professores

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 15
1 PROPOSIÇÃO PARA O ENSINO DA TABUADA COM BASE NA LÓGICA FORMAL 32
1.1 EXERCÍCIOS EXTRAÍDOS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO PRIMEIRO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL 33
1.2 EXERCÍCIOS EXTRAÍDOS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO SEGUNDO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL 40
1.3 EXERCÍCIOS EXTRAÍDOS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO TERCEIRO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL 62
2 PROPOSIÇÃO PARA O ENSINO DA TABUADA COM BASE NA LÓGICA DIALÉTICA 73
2.1 TAREFAS EXTRAÍDAS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO PRIMEIRO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL 78
2.2 TAREFAS EXTRAÍDAS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO SEGUNDO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL 88
2.3 TAREFAS EXTRAÍDAS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO TERCEIRO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL 122
3 SÍNTESE E CONSIDERAÇÕES FINAIS 183
ANEXOS 198
ANEXO A: DECLARAÇÃO 199

INTRODUÇÃO

Em nossa formação inicial (graduação e especialização) e na formação continuada nos era transmitida a ideia de que ensino com qualidade seria aquele relacionado com a prática cotidiana. Nesse sentido, o papel do professor consistia em ensinar aos estudantes apenas o necessário para aplicar na realidade vivenciada diariamente por eles.

Essa premissa direcionou, muitas vezes, nossa prática docente, pois levou-nos a buscar procedimentos didáticos para que os estudantes aprendessem Matemáticas em vez do necessário à sua vida particular. Por isso, durante nossa experiência docente, focamos na elaboração e execução de jogos didáticos. Acreditávamos que os jogos auxiliavam de modo significativo no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Tal crença legitimava-se nas orientações metodológicas contidas nos livros didáticos, nossa principal fonte de referência.

Nosso objetivo, com a elaboração dos jogos didáticos[1], era "facilitar" a apropriação dos conceitos matemáticos por parte dos estudantes e tornar as aulas "mais agradáveis". Além disso, no planejamento semanal, incluíamos situações que contemplavam os conceitos de geometria, geralmente apresentados ao final do livro didático. Mas, como desejávamos que os estudantes da escola pública tivessem acesso não só aos conhecimentos de aritmética, mas também, de álgebra e geometria, tentávamos, na medida do possível, adiantá-los, pois nem sempre conseguíamos desenvolver todos os conteúdos do livro didático.

Presumíamos que havia uma metodologia eficaz para se ensinar, a partir da qual todos os estudantes pudessem se apropriar da Matemática. Tais conceitos não poderiam ser somente para aqueles considerados com o "dom" para o cálculo.

Com a introdução dos jogos, nossas aulas de Matemática já não eram mais as mesmas. Tratava-se de uma metodologia diferenciada! Os estudantes ficavam radiantes, pois não haviam vivenciado algo tão extraordinário, anteriormente, na referida disciplina. Ouvíamos expressões do tipo: "Agora eu adoro estudar Matemática!"; "A aula com essa professora é legal!"; "Agora eu entendi, sei resolver!". Os trabalhos em equipe propiciavam as

[1] Alguns exemplos de jogos e atividades por nós elaborados: jogo da memória com as operações de números racionais; dominó com as operações de números inteiros; utilização de tabelas de jogos de Campeonatos de Futebol para o ensino de adição e subtração de números inteiros, entre outros.

discussões dos conceitos em estudo. As aulas eram “agitadas”. Os diretores e orientadores pedagógicos entravam na sala para emitir os recados e não eram percebidos pelos estudantes, pois estavam realmente envolvidos nas atividades propostas.

Porém, nas avaliações, muitos estudantes não atingiam os objetivos almejados no que se referia à apropriação dos conceitos. Questionávamo-nos: como não aprenderam se ao realizarem os jogos e as atividades discutiam, “brigavam” entre si, para defender a ideia de que sabiam o que haviam estudado? Como um estudante pode esquecer o que aprendeu tão rapidamente? Será que os jogos e as atividades não estavam bem elaborados? Por que não foram suficientes para garantir a apropriação dos conceitos? Como poderiam ser reelaborados?

Essas e outras questões suscitaram a necessidade de aprofundarmos os conhecimentos específicos em relação à Matemática, assim como também sobre o processo de ensino e aprendizagem. A fim de satisfazer tal necessidade, no ano de 2012 ingressamos no Mestrado em Educação da Unisul. O intuito era de aperfeiçoarmos, por meio de estudos e pesquisas, a realidade educacional por nós vivenciada. E, consequentemente, desenvolver metodologias de ensino que assegurassem a apropriação dos conceitos matemáticos.

Durante as disciplinas, realizamos leituras e reflexões sobre o movimento histórico da educação brasileira e seu estágio atual, ancoradas nos fundamentos filosóficos, psicológicos, didáticos, políticos, entre outros. O contexto foi profícuo para refletirmos sobre nossa prática pedagógica e as questões dela decorrentes, apresentadas anteriormente.

Além disso, novas questões surgiram, tais como: O que é conceito? Como ocorre o processo de formação de conceitos no ser humano? Qual movimento conceitual era contemplado nos jogos e outros procedimentos didáticos que desenvolvíamos com os estudantes? Durante o desenvolvimento dos jogos, como ocorria o processo de generalização e abstração nos estudantes? Que tipos de pensamento esses jogos possibilitavam desenvolver? A elaboração de novos jogos, diferentes dos já elaborados, resolveria o problema do processo de ensino e aprendizagem?

Conforme aprofundávamos as reflexões sobre a nossa própria prática e a prática de nossos colegas, ancoradas na literatura, percebíamos que nossas ações refletiam o senso comum da atual Educação Matemática escolar brasileira, na qual o movimento conceitual impresso é, predominantemente, empírico. Tratava-se de uma fiel objetivação dos fundamentos da lógica formal tradicional. Nesta, o conhecimento é permeado por abstrações,

generalizações e conceitos empíricos, e o processo de elaboração do conceito segue o esquema percepção - representação - conceito.

Os resultados proporcionados pelo ensino fundamentado nesse esquema estão distantes daqueles por nós almejados. Nossa preocupação inicial, sobre como ensinar, a partir da elaboração de novos jogos, não supria as perspectivas que emergiam, durante o mestrado, no que tange à transformação do estudante em um ser contemporâneo de sua época. Fazia-se necessário repensar, dentre outras questões, não somente como ensinar, mas o que e para que ensinar, assim, como os métodos e os conteúdos de ensino (DAVÝDOV, 1982).

Durante as aulas da disciplina *Fundamentos da Teoria Histórico-Cultural* estudamos, dentre outras, a obra de Davýdov[2]. Este autor, juntamente com seus colaboradores, elaborou uma proposição para o ensino de Matemática fundamentada na lógica dialética. Naquele momento vislumbramos que tal proposição poderia ser considerada como uma das possibilidades de superação da realidade educacional por nós vivenciada, no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Vasily Vasilyevich Davýdov nasceu em Moscou, Rússia, no ano de 1930 e faleceu em 1998, aos 68 anos. Dedicou 25 anos de sua vida às pesquisas com o objetivo de formular uma teoria de ensino voltada para o desenvolvimento do pensamento das crianças e jovens (LIBÂNEO e FREITAS, 2013).

Em 1953, Davýdov formou-se em psicologia e em 1958 concluiu a pós-graduação em Filosofia na Universidade de Filosofia em Moscou. Em 1972, Davýdov defendeu sua tese de doutorado: *Tipos de generalização no ensino*, principal obra apresentada em nossa dissertação. O objetivo fundamental de sua investigação consistiu nas peculiaridades psicológicas formadas no pensamento dos estudantes, mais especificamente na abstração, generalização e conceito desenvolvidos nas disciplinas escolares (LIBÂNEO e FREITAS, 2013).

Com um projeto de formação de um novo homem, na sociedade socialista soviética, Davýdov almejava que a escola "ensinasse os alunos a orientarem-se com autonomia na informação científica e em qualquer outra esfera do conhecimento." (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 315). Este foi seu objetivo de pesquisa no decorrer de sua

[2] No decorrer do texto utilizaremos a grafia Davýdov. Porém, quando se tratar de referência a alguma obra, utilizaremos a grafia apresentada na mesma: Davýdov, Davídov e Давыдов.

vida acadêmica na Rússia. Suas investigações foram "fundamentadas na teoria histórico-cultural fundada por Vygostky e desenvolvida por Luria, Leontiev, Galperin, Elkonin, Zaporojets, entre outros colaboradores." (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 315). No entanto, Davýdov foi o pesquisador da terceira geração dessa escola científica que mais se destacou em psicologia pedagógica (LIBÂNEO e FREITAS, 2013; ROSA, 2012).

O referido pesquisador desenvolveu uma proposição de ensino fundamentado nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, na qual apresenta uma base teórico-metodológica que reúne princípios psicológicos em função de objetivos pedagógicos e didáticos que promovem o desenvolvimento do pensamento teórico-científico dos estudantes.

Durante sua vida acadêmica, Davýdov "teve como professores Leontiev, Luria, Rubinstein, Galperin, Zaporozhets, Sokolov, Talizina, Elkonin entre outros." (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 318). Tornou-se colaborador de seus professores em estudos e pesquisas. Dentre eles destacam-se: Galperin, o primeiro orientador de suas pesquisas, Elkonin, companheiro de pesquisas nas escolas de Moscou e Ilienkov amigo e parceiro de discussões filosóficas (LIBÂNEO e FREITAS, 2013). Esses três pesquisadores integram a nossa referência na investigação apresentada.

Davýdov dedicou seus estudos científicos nas questões referentes às ações mentais, fundamentadas na Teoria criada por Galperin nos anos de 1950 (SHUARE, 1990) e nos fundamentos da Teoria Histórico-Cultural. De 1959 a 1983 trabalhou, juntamente com Elkonin, no Instituto de Psicologia Geral e Pedagogia da Academia de Ciências Pedagógicas da União Soviética. Inicialmente, como colaborador científico, em seguida como chefe de laboratório de psicologia e, finalmente, como diretor. Neste período (1959 a 1983) constituiu sua própria equipe de pesquisadores (SHUARE, 1990). "Em 1989, foi designado diretor do Instituto e, alguns anos depois, vice-presidente da Academia de Ciências Pedagógicas." (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 320).

No Instituto de Psicologia eram realizadas investigações experimentais sobre as relações entre educação e desenvolvimento por dois grupos de pesquisadores: o de Zankov, na Escola Experimental N. 17 em Kharkov, Ucrânia; e, o de Elkonin e Davýdov, na Rússia. No entanto, foram as pesquisas do segundo grupo, desenvolvidas na Escola Experimental N. 91,

que propiciaram a formulação do ensino desenvolvimental (LIBÂNEO e FREITAS, 2013; LAZARETTI, 2013; SHEPEL[3], 2014).

Por mais de 20 anos (1970-1980) foram realizadas pesquisas sobre formação do pensamento teórico dos estudantes, de nacionalidade russa. Essas investigações ocorreram, principalmente, no Ensino Fundamental, nas disciplinas de Matemática, Língua Russa, Literatura, Ciências, Artes Plásticas e Música (LIBÂNEO e FREITAS, 2013; SHEPEL, 2014; LAZARETTI, 2013; DUSAVITSKII, 2014). Na década de 1980, as pesquisas, sobre o ensino desenvolvimental, se estenderam para o ensino de 5ª a 8ª série.

Além disso, esse sistema é objeto de investigações "desenvolvidas em países como Ucrânia, Cazaquistão, Noruega, França, Alemanha, Holanda, Canadá, Japão [...] Estados Unidos" e Brasil (ROSA, 2012, p. 26). O ensino desenvolvimental, também, é adotado em uma escola particular de Educação Básica, em Puebla no México. Todas as disciplinas dessa escola têm o processo de ensino aprendizagem fundamentado na teoria da atividade (RIVERA, SOLOVIERA e ROJAS, 2014).

Davýdov e Elkonin em sua época, na Rússia, detectaram que a atividade de estudo não estava presente nas escolas. Foi este fato que os levou a proporem, em 1960, a elaboração de novos programas para o Ensino Fundamental, a principal mudança consistia no conteúdo. Foi no trabalho realizado nesse laboratório que surgiu a hipótese de investigação davydoviana na qual: "as crianças pequenas podem desenvolver o pensamento teórico por meio da assimilação de conhecimento teórico." (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 320).

Essa investigação vinha de encontro com o ensino desenvolvido nas escolas russas da época, no qual, o que vigorava era o tradicional. Vale esclarecer que o ensino tradicional, para Davýdov, é diferente do que habitualmente se compreende no Brasil. No Brasil, entende-se por ensino tradicional aquele em que o professor é o detentor do conhecimento e o aluno é sujeito passivo, que recebe esse conhecimento (ROSA, 2012; DAMAZIO, ROSA e EUZÉBIO, 2012).

No ensino tradicional, interpretado por Davýdov (1982) os objetos são apreendidos, primeiro pela aparência. Em seguida, são comparados com outros objetos a fim de identificar as características comuns para classificá-los e, por fim, nomeá-los. Este tipo de

[3] Foi aluna, quando criança, na escola Kharkov N. 17. Atualmente é diretora do "Teacher Residency Masters Program", Professora Associada no "Touro College" – USA.

ensino contempla apenas os conhecimentos empíricos e se aproxima da maioria das práticas educacionais do atual ensino brasileiro (ROSA, 2012; DAMAZIO, ROSA e EUZÉBIO, 2012)

Davýdov queria propor um ensino novo em relação àquele vigente em seu país. Para tanto, formulou teórica e metodologicamente uma tese inversa:

> Primeiro os alunos devem aprender o aspecto genético e essencial dos objetos, ligado ao modo próprio de operar da ciência, como um método geral para análise e solução de problemas envolvendo tais objetos compreendendo a articulação. Depois, utilizando o método geral, os alunos resolvem tarefas concretas, compreendendo a articulação entre o todo e as partes e vice-versa. (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 320).

A esse processo mental, Davýdov denominou de pensamento teórico, o qual se constituiu no principal objeto de nossas reflexões durante todo o mestrado (realização das disciplinas, reuniões de pesquisa e reuniões de orientação).

No segundo semestre do mestrado, fomos convidados, pela orientadora da presente pesquisa, para integrar o GPEMAHC (Grupo de Pesquisa Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural). O GPEMAHC é coordenado pelo pesquisador Prof. Dr. Ademir Damazio (Universidade do Extremo Sul Catarinense - UNESC). O referido grupo é constituído, desde o momento em que foi cadastrado na plataforma Lattes do CNPq, por pesquisadores da UNESC e UNISUL. Atualmente, também participam estudantes de outras universidades brasileiras, tais como Universidade Federal de Santa Catariana – UFSC, Universidade Estadual do Piauí - UEPI e Centro Universitário Barriga Verde - UNIBAVE. Os integrantes se encontram quinzenalmente para discussões sobre os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural. As reuniões ocorrem na UNESC. Nossa participação nas reuniões é via *Skype*.

Alguns integrantes do GPEMAHC são responsáveis pela formação continuada de professores que ensinam Matemática em municípios da região sul do Estado de Santa Catarina, Brasil. No ano de 2012, participamos na qualidade de ouvinte, de uma dessas formações, no município de Criciúma. As ministrantes desenvolveram com os professores, durante a formação continuada, algumas tarefas[4] davydovianas para o ensino de Matemática.

[4] O termo tarefa, aqui adotado, refere-se a uma proposição apresentada pelo professor, no processo de ensino e aprendizagem, cujo objetivo consiste em desenvolver, por parte do estudante, a ação investigativa, a apropriação dos conceitos em nível científico e o desenvolvimento do pensamento teórico. Adotamos a terminologia tarefa porque essa é a nomenclatura utilizada por Davýdov e colaboradores. Tarefa se aproxima ao que no contexto educacional brasileiro denomina-se por atividades ou exercícios. Assim, ao nos referirmos à

Mais especificamente aquelas referentes à proposição de Davýdov e colaboradores para o ensino de adição, subtração, multiplicação, divisão, sistema de numeração, resolução de problemas e equação. Esses conceitos eram objetos de pesquisa das ministrantes. Os respectivos resultados foram apresentados em forma de monografias (ALVES, 2013; MATOS, 2013; DORIGON, 2013; SILVEIRA, 2012 e CRESTANI, 2013).

Uma, em especial, nos chamou atenção, a pesquisa de Sandra Crestani (CRESTANI, 2013). A autora pesquisou os conceitos de multiplicação e divisão com adoção do material didático davydoviano referente ao segundo ano do Ensino Fundamental. Durante a exposição, nos impressionamos pelo modo da qual Davýdov e colaboradores abordam esses conceitos. No que se refere à multiplicação, por exemplo, o movimento operacional consistia no inverso daquele apresentado nos livros didáticos brasileiros. Durante nossa experiência docente, percebíamos que um dos entraves do processo de aprendizagem da Matemática decorria da falta de compreensão da multiplicação e, consequentemente, da tabuada.

Vale ressaltar que essa dificuldade não é peculiaridade específica dos nossos alunos, mas trata-se de uma ocorrência geral no sistema educacional brasileiro. A literatura indica que os estudantes brasileiros não se apropriam da tabuada, apenas memorizam seus resultados para facilitar o processo de resolução de algoritmos de forma mecânica (MADEIRA, 2012; LACERDA, 2010; NÜRNBERG, 2008; EWBANK, 2002; MICOTTI, 2001; NEHRING, 2001; DUARTE, 1987, entre outros).

Atualmente, no Brasil, o ensino da multiplicação "tem se convertido em outro conceito: tabuada. Nessa transformação conceitual ela passa a constituir um aspecto polêmico em educação matemática." (NÜRNBERG, 2008, p. 8). É comum entre os professores que ensinam Matemática o seguinte discurso: "aluno que não decora a tabuada não aprende multiplicação." (NÜRNBERG, 2008, p. 9).

Segundo Damazio (2000), pais e professores se sentem orgulhosos quando as crianças, do Ensino Fundamental, memorizam as tabuadas. Além disso, para o autor em referência, há a crença de que ao memorizar as tabuadas as crianças atingem um nível mais elaborado de conhecimento. Como diz Nürnberg (2008), decorar a tabuada virou lema no ambiente escolar. Para facilitar a memorização das tabuadas, muitos professores utilizam

---

proposição davydoviana empregaremos o termo tarefa, e quando se tratar da proposição brasileira utilizaremos o termo exercício.

recursos didáticos, tais como: CDs de músicas na forma de paródias, dominós, quebra-cabeças, jogos de memória, entre outros (NÜRNBERG, 2008).

Por outro lado, a primeira impressão, enquanto assistíamos à apresentação de Crestani na formação de professores, foi que a proposição davydoviana era consideravelmente diferente das proposições brasileiras. Ficamos curiosos por compreender como seria o ensino da tabuada a partir do movimento conceitual proposto para o conceito de multiplicação. Após o término da formação, examinamos o material original referente à proposição davydoviana para o ensino de Matemática, mais especificamente os livros didáticos e os manuais de orientação ao professor.

Nesse primeiro contato com a referida obra, detectamos algumas tarefas que indicavam a existência de sistematização da tabuada nos livros do segundo e terceiro ano do Ensino Fundamental. Porém, era difícil identificar quais tarefas eram referentes à tabuada, uma vez que a proposição davydoviana não é apresentada de forma fragmentada, numa sequência linearmente organizada: primeiro um conceito, depois outro e assim por diante. Ao contrário, os conceitos são apresentados de modo interconectado, no contexto de um sistema conceitual. Neste, um conceito contribui para o desenvolvimento do outro e conforma um sistema integral. Pois, o "conceito científico pressupõe necessariamente outra relação com objetos, só possível no conceito, e esta outra relação com o objeto, contida no conceito científico, por sua vez pressupõe necessariamente a existência de relações entre os conceitos." (VYGOTSKY, 2000, p. 294).

Enfim, no emaranhado conceitual era difícil identificar quais tarefas eram referentes, especificamente, ao ensino de tabuada. Além disso, nos questionávamos: se Davýdov e colaboradores contemplam o sistema conceitual (ROSA, 2012), então, podemos considerar que tabuada é um conceito? O que é conceito? Se tabuada é um conceito, qual o conteúdo desse conceito? Como Davýdov e colaboradores propõem o processo de generalização, abstração e memorização da tabuada? Quais os distanciamentos e aproximações entre a proposição brasileira e a davydoviana para o ensino da tabuada?

As reflexões anteriormente apresentadas contribuíram com o processo de delimitação do objeto de estudo na presente investigação: o movimento conceitual impresso em duas proposições para o ensino de tabuada, uma brasileira (uma coleção de livros didáticos) e outra russa (a davydoviana). Mais especificamente, os exercícios apresentados na

proposição brasileira e as tarefas apresentadas na davydoviana, para o ensino da tabuada, nos três primeiros anos escolares do Ensino Fundamental.

No que se refere à proposição brasileira, consideramos a Coleção *Porta Aberta*, dos autores Centurión, Scala e Rodrigues (2011). Tal obra é a mais utilizada pelos professores das escolas estaduais dos municípios constituintes da 36ª Gerência Regional de Educação, com sede em Braço do Norte, Santa Catarina. Mais especificamente, a referência foi os livros didáticos do primeiro, segundo e terceiro ano do Ensino Fundamental.

Quanto à proposição russa, buscamos, no interior do sistema de ensino Elkonin-Davýdov, a referência de análise. Conforme adiantamos, Davýdov (ДАВЫДОВ) e colaboradores Gorbov (ГОРБОВ), Mikulina (МИКУЛИНА) e Savieliev (САВЕЛЬЕВА) elaboraram uma proposta para o Ensino de Matemática que foi publicada em livros didáticos (ДАВЫДОВ et al, 2012a; ДАВЫДОВ et al, 2012b e ДАВЫДОВ et al, 2008)[5], manuais de orientação ao professor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008; ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2009; ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003), entre outros. Esse material foi publicado no idioma russo. As obras referentes aos manuais de orientação ao professor estão em processo de tradução do idioma russo[6] para o português pela tradutora de nacionalidade russa Elvira Kim[7], por solicitação do GPEMAHC.

A hipótese é que o movimento conceitual proposto pelas duas proposições segue direções distintas. Nosso objetivo de pesquisa consistiu em investigar o movimento conceitual apresentado na proposição brasileira e na davydoviana, para o ensino da tabuada. Para concretizá-lo, nos propomos às seguintes ações de pesquisa, em relação às duas proposições de ensino:

1) Estudar todo o material didático referente aos três primeiros anos do Ensino Fundamental.

2) Extrair os exercícios e as tarefas particulares que expressam o movimento conceitual da tabuada.

3) Revelar a relação que permite determinar a essência da tabuada;

4) Reproduzir o sistema conceitual no qual a tabuada se insere;

5) Estudar as respectivas bases teórico-metodológicas;

---

[5] Esse material também é utilizado em países como Belarus, Cazaquistão e Letônia (DUSAVITSKII, 2014).
[6] O material não foi publicado na Língua Portuguesa.
[7] Atualmente leciona a disciplina de Russo no Centro de Idiomas da Universidade Federal do Paraná.

6) Revelar os tipos de abstração, generalização e conceito.

Sustentamos a análise em quatro alicerces básicos: os fundamentos matemáticos (CARAÇA, 1951; BÉZOUT, 1849; COSTA, 1866; EVES, 2007); filosóficos (KOPNIN, 1978; ROSENTAL, 1962; STERNIN, 1965; ILIENKOV, 2006; LEFEBVRE, 1991) psicológicos (VIGOTSKI, 2000; VYGOTSKI 1991;) e didáticos (DAVÝDOV, 1982; DAVÝDOV, 1987; DAVÍDOV, 1988; DAVÍDOV e SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Durante nossa participação nas disciplinas do mestrado (Educação e Epistemologia, Universalização da Educação Básica e Questões Curriculares, Educação Brasileira: História e Contextos, Educação Matemática, Fundamentos da Teoria Histórico-Cultural, Seminários de Dissertação e Tópicos Especiais em Educação III: Implicações da obra de Davýdov para o ensino de Matemática e Física), nas reuniões de orientação, na formação continuada de professores e nas reuniões do GPEMAHC realizamos leituras e reflexões sobre o método concernente ao materialismo histórico-dialético. Método este que adotamos para a realização da presente investigação, de natureza teórica.

Com base filosófica no marxismo, o referido método consiste na busca por "explicações coerentes, lógicas e racionais para os fenômenos da natureza, da sociedade e do pensamento." (TRIVIÑOS, 1987, p. 51). A dialética materialista e suas categorias têm a "função de método do conhecimento científico." (KOPNIN, 1978, p. 109). Para Kosik, como método, a dialética materialista é "o método do desenvolvimento e da explicitação dos fenômenos culturais partindo da atividade prática objetiva do homem histórico." (1995, p. 39).

Em concernência com o método, nos orientamos, no processo de realização da presente investigação, em três pares de categorias que consideramos fundamentais no processo do conhecer: abstrato/concreto, geral/particular, universal/singular. Cada uma dessas categorias "revela uma determinada face das complexas contradições da realidade em seu movimento e somente a análise de todas essas faces, em síntese, pode reproduzir, no pensamento, a representação do objeto." (ROSENTAL, 1962, p. 299).

Os referidos pares de categorias lógicas apresentam contradições que estão em constante movimento. Umas categorias "se transformam em outras em consonância com o desenvolvimento das propriedades e relações dos fenômenos e processos reais, da realidade objetiva, propriedades e fenômenos refletidos nas contradições principais." (ROSENTAL, 1962, p. 277). Isto significa dizer que as contradições existentes entre as categorias, no

processo de desenvolvimento do conhecimento, se transformam em outras. Por exemplo, o concreto em determinado momento do processo de investigação transforma-se em abstrato, e vice-versa. Essa transformação é marcada por um processo de redução-ascensão e se apresenta como estágio de superação em relação ao inicial.

De acordo com Ilienkov (2006, p. 153), dependendo do nível em que o investigador chegou, no processo de análise, "essas categorias, como contrários, passam de uma para a outra no processo de cognição: o abstrato torna-se concreto e o concreto em abstrato." O concreto, de acordo com o autor em referência, é a

> [...] integridade de uma coisa, de um fenômeno, na multiplicidade de suas propriedades e determinações, na interação de todos seus aspectos e partes. Toda coisa possui numerosas facetas e partes e existe somente como integridade na diversidade de suas manifestações, diversidade em que todos os seus elementos são concatenados entre si e se condicionam reciprocamente. (ILIENKOV, 2006, p. 152).

Conforme nos ensina Marx (2003, p. 248), concreto é concreto porque é "a síntese de múltiplas determinações, logo, unidade da diversidade". O concreto é, "para o pensamento, um processo de síntese, um resultado, e não um ponto de partida, apesar de ser o verdadeiro ponto de partida e, portanto, igualmente o ponto de partida da observação imediata e da representação" (MARX, 2003, p. 248). No ponto de partida,

> [...] no estágio da percepção sensorial da realidade, o conhecimento recebe os dados, sem esse material não se pode avançar nenhum passo. No estágio do pensar abstrato, se busca o que constitui a base, a unidade da diversidade. No estágio da reprodução mental do concreto, o círculo em certo modo se encerra no ponto de partida, porém sobre uma nova base: a diversidade se nos apresenta já não como um conjunto caótico de aspectos e relações, mas como uma unidade "organizada", subordinada a determinadas leis. O concreto, mentalmente reproduzido aparece já, não em forma de soma de diversos dados, observações, fatos, proposições separadas, etc., mas como um saber sobre fenômenos iluminados por uma única ideia. (ILIENKOV, 2006, p. 160).

O concreto do momento de partida e o concreto do momento de chegada apresentam significados diferentes. Inicialmente, o real concreto "surge para o homem como o sensorialmente dado. Em suas formas especiais de contemplação e representação, a atividade sensória é capaz de perceber a integridade do objeto e a existência nele das conexões que conduzem para a generalidade." (DAVÝDOV, 1982, p. 331). Nas diferentes etapas do conhecimento, de acordo com Ilienkov (2006, p. 159):

> [...] a realidade concreta se reflete de maneira distinta. Nada sabíamos dela sem que primeiramente não nos seja dada, na contemplação sensorial, em nossas sensações. O concreto se oferece diretamente para a contemplação sensorial; neste sentido o definimos como o perceptível e visível diretamente. A cognição somente pode iniciar-se partindo desse concreto sensorial, deste dado de maneira imediata e visível, tangível.

O concreto e o abstrato, de acordo com Rosental (1960, p. 324), são de grande importância para a compreensão da "essência do conhecimento". A essência é constituída na elevação do singular para o geral, do fenômeno para a lei. Um dos aspectos desse movimento "é a relação entre o abstrato e o concreto [...]", o caminho que leva do mundo objetivo para a abstração (ILIENKOV, 2006, p. 151).

O abstrato "é uma parte de um todo, extraída dele e isolada de todo nexo e interação com os demais aspectos e relações do todo. É esta característica principal que faz da abstração o contrário do concreto." (ILIENKOV, 2006, p. 152). A abstração inicial, substancial, expressa a essência do objeto concreto.

> [...], essência é a conexão interna que, como fonte única, como base genética, determina todas as outras especificidades particulares do todo. Trata-se de conexões objetivas, as que em sua dissociação e manifestação asseguram a unidade dos aspectos do todo, isto é, dão ao objeto um caráter concreto. Neste sentido, a essência é a determinação universal do objeto. Por isso a abstração geneticamente inicial, substancial, expressa a essência do objeto concreto. A abstração substancial, pela qual quaisquer objetos se reduzem a sua forma universal. (DAVÍDOV, 1988, p. 147).

O universal, como essência, aparece em forma de lei. Assim, de acordo com V.I. Lenin (apud DAVÍDOV, 1988, p. 147): "... lei e essência são conceitos do mesmo tipo (da mesma ordem), ou melhor, do mesmo grau." Ao abordar o

> caráter dialético do concreto F. Engels formulou a seguinte tese, aparentemente paradoxal: "A lei universal da mudança da forma de movimento é muito mais concreta que cada exemplo 'concreto, 'isolado', desta lei". V. I. Lenin ressaltou especialmente que as abstrações científicas "... refletem a natureza em forma mais profunda, veraz e *completa*" que o concreto sensorialmente dado (DAVÍDOV, 1988, p. 151- grifo do autor).

O conhecimento não passa, imediatamente, "do sensorial-concreto ao concreto pensado. Esse caminho, como todos os outros, é complexo e contraditório. Para atingir a concreticidade autêntica, o conhecimento perde temporariamente a concreticidade em geral e passa ao seu próprio oposto: ao abstrato." (KOPNIN, 1978, p. 158).

O abstrato não é nada mais que uma parte unilateral de um todo. Por outro lado, "o concreto, no conhecimento, é um todo reproduzido no pensar; [...] é a realidade apreendida em carne e osso; o abstrato é no âmbito dos aspectos, propriedades, características, traços, objetos, etc., singulares isolados do todo." (ILIENKOV, 2006, p. 153). O concreto no pensamento

> é o *conhecimento* mais *profundo* e *substancial* dos fenômenos da realidade, pois reflete com o seu conteúdo não as definibilidades exteriores do objeto em sua relação imediata, acessível à contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna necessária. Abstrações isoladas elevam o nosso conhecimento da apreensão geral do empírico ao universal, enquanto o *concreto* no pensamento fundamenta a conexão do *singular* com o *universal*, fornece não uma simples unidade de aspectos diversos, mas a identidade dos contrários. (KOPNIN, 1978, p. 162- grifos do autor).

A contradição entre abstrato e concreto, que se dá no pensamento, "expressa a contradição mais ampla existente entre o geral e o singular, entre a lei e o fenômeno, entre a essência e a forma em que esta se manifesta. A abstração inicial expressa a essência do fenômeno, porém nem sempre o faz por completo." (ILIENKOV, 2006, p. 169). A abstração inicial reflete "a essência, a lei dos fenômenos, de maneira abstrata, em seu aspecto puro." (ILIENKOV, 2006, p. 169).

O investigador só pode revelar a abstração inicial no estudo dos fatos dados e suas dependências. A tarefa fundamental da análise consiste "na redução das diferenças existentes dentro do todo à base única que as gera, isto é, à sua essência." (DAVÍDOV, 1988, p. 147). Assim, por meio da análise, primeiro o investigador separa e depois estuda a forma universal ou a essência do todo apresentado, inicialmente, como concreto real.

Desse modo, na especificidade da investigação ora relatada, o concreto real, o ponto de partida, é o material didático referente a duas proposições para o ensino da tabuada, ou seja, trata-se da materialização do nosso objeto de estudo. Essa foi a realidade objetiva, concreta, na qual iniciamos o processo do conhecer. Como nos ensina Ilienkov (2006, p. 159), "o ponto de partida do conhecimento é a realidade objetiva, concreta. O pensamento realiza todas suas operações com esta realidade, com o material da mesma."

Porém, conforme refletimos anteriormente, o concreto, em nível sensorial, enquanto ponto de partida, não explicita, externamente, as conexões internas. Estas somente são reveladas no processo de conhecer a realidade. A realidade que objetivamos compreender,

na presente investigação, refere-se a duas proposições distintas para o ensino da tabuada, uma brasileira e outra russa. Tais proposições, objetivadas em materiais didáticos (livros didáticos e manuais de orientações), constituíram o concreto ponto de partida.

Para atender ao objetivo proposto, adotamos os seguintes procedimentos metodológicos: inicialmente, estudamos os *três* (3) livros didáticos russos, a partir de então, localizamos a orientação metodológica das respectivas tarefas nos *três* (3) manuais de orientação ao professor. O mesmo ocorreu em relação à proposição brasileira, estudamos os exercícios apresentados nos três livros didáticos e as respectivas orientações ao professor.

Vale esclarecer que na proposição brasileira as orientações ao professor são apresentadas no final do próprio livro didático, ou em forma de pequenos comentários no decorrer dos exercícios. Na proposição davydoviana são duas obras distintas. A primeira ação de pesquisa consistiu no estudo de todo o material didático referente aos três primeiros anos do Ensino Fundamental.

A partir desse estudo inicial detectamos que Davýdov e colaboradores desenvolvem o conceito de multiplicação no contexto de um sistema conceitual. Não há um capítulo específico, no livro didático russo, para a adição, outro para multiplicação, outro para a tabuada e, assim, sucessivamente. A ausência dessa separação gerou a necessidade de um novo estudo direcionado à identificação da essência da tabuada, na proposta de Davýdov, para possibilitar a identificação das tarefas referentes à mesma.

Por outro lado, a proposição brasileira, em análise, apresenta todos os conceitos em capítulos ou tópicos separados. Nesse estágio da pesquisa, nos questionamos se a referida proposição contemplaria uma essência conceitual coerente, nos capítulos referentes aos conceitos que conformam o sistema conceitual no qual a tabuada se insere (número, adição, multiplicação,...).

Nesse segundo momento da investigação, atendemos a segunda ação da pesquisa, que consistiu na analise da relação que permite determinar a essência da tabuada, e adentramos na terceira. Assim, prosseguimos para a seleção e reprodução do sistema conceitual no qual a tabuada se insere, em ambas as proposições.

Selecionamos e reproduzimos as tarefas e exercícios que representam a totalidade das duas proposições de ensino. No referente à proposição davydoviana, para reproduzir o enunciado de cada tarefa, recorremos à ferramenta Google Tradutor. Tal procedimento foi necessário porque os livros didáticos estão escritos em russo. Apenas os manuais de

orientações ao professor foram traduzidos para a Língua Portuguesa. Inicialmente, a tradução era realizada por meio da digitação de letra por letra de cada palavra russa apresentada no enunciado das tarefas. Para tanto, foi necessário converter o sistema do computador para o idioma russo e substituir, no teclado, o alfabeto da Língua Portuguesa pelo alfabeto russo (cirílico).

Esse trabalho exigiu desprendimento de muitas horas de digitação e estudo e, consistiu em um dos momentos críticos da pesquisa. Foi nesse estágio que encontramos um programa que converte imagens digitalizadas em documento do Word, o *ABBYY Fine Reader 11* (Empresa Internacional de Software em Moscou). A partir de então, digitalizávamos as páginas do livro didático (em russo) e as convertíamos em documento Word. Na sequência, copiávamos os enunciados das tarefas do Word, colávamos no tradutor *online* do Google. A partir da tradução eletrônica, tínhamos uma vaga ideia do enunciado da tarefa. Para compreendê-las adequadamente, era necessário um estudo concomitante das orientações referentes ao desenvolvimento de cada tarefa, apresentadas nos manuais de orientação ao professor (já traduzido previamente para a Língua Portuguesa, por Elvira Kim).

Após a seleção e coleta dos dados, organizamos, por meio da reprodução fidedigna das tarefas, suas respectivas imagens e seu processo de resolução no PowerPoint. Reproduzimos, por meio da ferramenta animações, todos os movimentos referentes ao processo de resolução de cada tarefa. E, desenvolvemos as tarefas organizadas nos slides com professores durante o V Simpósio Sobre Formação de Professores (SIMFOP) e na formação continuada de professores, promovida pela Gerência Regional de Educação de Tubarão, SC.

Só após compreendermos o movimento conceitual inerente a cada tarefa, sua conexão com o sistema como um todo e a submissão do mesmo a nossa própria prática, é que iniciamos a reprodução destas no documento do Word. A reprodução dos movimentos no PowerPoint foi profícua para a apreensão do objeto enquanto processo, em desenvolvimento.

Nesse movimento investigativo, constatamos que os conceitos, na proposição davydoviana, são desenvolvidos por meio de tarefas mais amplas, denominadas por tarefas de estudo, tais como: 1) Conceito de número; 2) adição e subtração; 3) multiplicação e divisão entre outras. Cada tarefa é desenvolvida por meio de seis ações de estudo: 1) Transformação dos dados da tarefa de estudo com a finalidade de revelar a relação universal do objeto estudado; 2) Modelação da relação universal na forma objetal, gráfica e literal; 3) Transformação do modelo da relação universal para o estudo de suas propriedades em “forma

pura"; 4) Construção de um sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral; 5) Controle da realização das ações anteriores e 6) Avaliação da apropriação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada. Essas, por sua vez, são concretizadas por meio de um sistema de tarefas particulares correspondentes aos exercícios na proposição brasileira.

Na primeira tarefa de estudo[8], o foco é para o conceito de número. Esta inicia no primeiro ano escolar, com base na relação de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas (DAVÍDOV, 1988). Desse modo, o conceito de multiplicação é apresentado, na proposição davydoviana, como elemento mediador desde a introdução da gênese do conceito de número, por meio da medição (ROSA, 2012). A segunda tarefa envolve os conceitos de adição e subtração, inseridos em um sistema mais amplo que abarca a relação parte-todo, resolução de problemas, equações, entre outros (DAVÝDOV, 1988, ALVES, 2013, DORIGON, 2013, MATOS, 2013).

Os conceitos de multiplicação e divisão, por sua vez, constituem o núcleo do sistema conceitual referente à terceira tarefa de estudo. Conforme mencionamos, Davýdov e colaboradores contemplam as relações de multiplicidade e divisibilidade desde o primeiro ano escolar (DAVÍDOV, 1988; MADEIRA, 2012; CRESTANI, 2013). No livro didático do segundo ano, o conceito de multiplicação é abordado a partir da medição das grandezas, por meio da unidade de medida intermediária. Neste são introduzidas apenas às tabuadas dos números *dois* (2) e *três* (3). A sistematização das demais é proposta no material referente ao terceiro ano e estruturada por meio das propriedades da multiplicação.

Na presente investigação, o foco incidiu nas tarefas particulares correspondentes as seis ações da terceira tarefa de estudo. Primeiro selecionamos as tarefas que refletem o movimento conceitual da multiplicação para depois introduzir a tabuada, tal como procedem Davýdov e colaboradores. Não selecionamos somente as tarefas referentes à tabuada, objeto do presente estudo, porque essas, por si só, não revelam sua gênese que está atrelada à multiplicação. Vale salientar que a proposição davydoviana é composta por várias tarefas de estudo. No decorrer deste, mencionamos apenas as três primeiras.

Adotamos o mesmo procedimento metodológico com a proposição brasileira, com exceção da tradução, uma vez que está publicada na Língua Portuguesa. Nesta, a gênese da

[8] O desenvolvimento das tarefas de estudo requer o trabalho com a modelação desde a educação pré-escolar.

tabuada não ocorre a partir do conceito de número, mas a partir da adição que é a base para a multiplicação e, por extensão, para a tabuada abordadas num único capítulo na referida coleção.

Após a seleção e reprodução do sistema conceitual referente à tabuada, nas duas proposições, prosseguimos para o estudo das respectivas bases teórico-metodológicas para, a partir de então, revelar os tipos de abstração, generalização e conceito presentes em cada uma.

A partir das ações relatadas anteriormente, organizamos a presente dissertação em dois capítulos: o primeiro referente a tabuada na lógica formal e o segundo na lógica dialética. Foi necessária a apresentação das proposições em capítulos separados porque estas imprimem movimentos conceituais distintos. A unificação poderia ofuscar o movimento característico em cada uma. Também não elaboramos um capítulo teórico a parte. Pois,

> Frequentemente se percebe uma justaposição entre o referencial teórico proclamado e o efetivamente aplicado, não há uma íntima conexão entre o referencial e os dados empíricos coletados. Em razão disso, o movimento real da história é descrito de forma independente da materialidade dos aspectos singulares. (NOSELLA e BUFFA, 2005, p. 355-356).

Para garantirmos a interconexão entre o referencial teórico e os dados de pesquisa (exercícios e tarefas), elaboramos o referencial teórico no decorrer da análise. E, por fim, apresentamos as considerações finais.

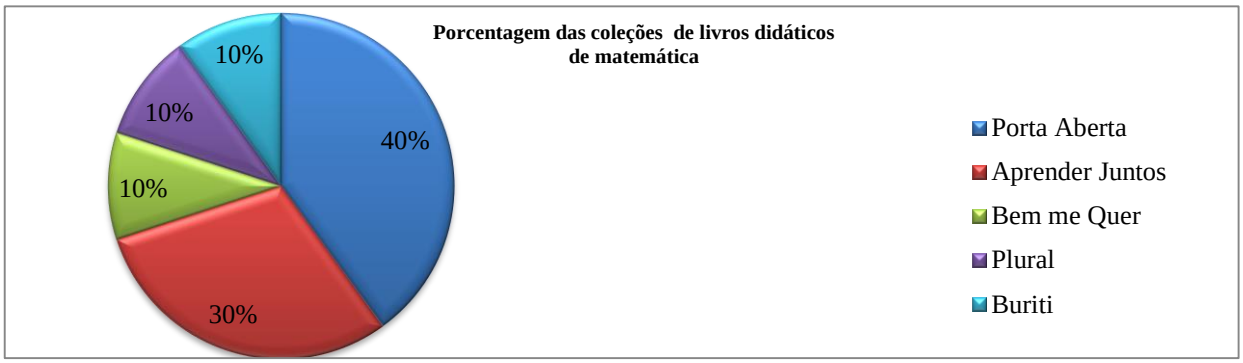
1 PROPOSIÇÃO PARA O ENSINO DA TABUADA COM BASE NA LÓGICA FORMAL

> *A escola deve imitar a vida cotidiana? Não, pois não vale a pena imitar ao custo caro o que já existe grátis. O contrário, a escola deve fazer o que a vida cotidiana não pode fazer - desenvolver o pensamento abstrato das crianças.* (TOOM, 2001*).*

No presente capítulo analisaremos o movimento conceitual, referente à tabuada, apresentado em uma coleção de livros didáticos brasileiro. Tal coleção é mais utilizada pelos professores das escolas estaduais dos municípios constituintes da 36ª Gerência Regional de Educação – GERED, com sede em Braço do Norte – Santa Catarina.

Na referida GERED, 40% das escolas adotam a coleção intitulada *Porta Aberta* (Gráfico 1). Os autores da coleção são Marília Centurión, Arnaldo Rodrigues e Júnia La Scala, da editora FTD (CENTURIÓN, RODRIGUES e SCALA, 2011). A coleção *Porta Aberta* é uma das coleções aprovadas pelo programa do Plano Nacional do Livro Didático para os anos letivos de 2013, 2014 e 2015.

Gráfico 1 - Utilização das coleções de livros didáticos nas escolas da 36ª GERED.



Fonte: Elaboração nossa com base nos dados do Anexo A, 2014.

A questão norteadora do processo de análise, no presente capítulo, foi: Qual o movimento conceitual apresentado pelos autores da coleção Porta Aberta para o ensino da Tabuada? A referência de análise consistiu nos exercícios apresentados nos livros referentes

aos três primeiros anos escolares do Ensino Fundamental[9], pois é nesse período escolar que a tabuada é sistematizada.

Inicialmente, identificamos as orientações metodológicas correspondentes aos exercícios apresentadas no final de cada livro didático ou nos próprios exercícios. Procedemos ao estudo concomitante com os exercícios com as respectivas orientações. Identificamos e reproduzimos o sistema conceitual no qual a tabuada se insere. Posteriormente, analisamos o sistema conceitual, a fim de revelar o tipo de abstração, generalização e conceito. Para tanto, fez-se necessário o estudo da base teórico-metodológica que fundamenta as proposições.

Esclarecemos que, no presente capítulo, quando citarmos Kopnin, (1978); Rosental, (1962); Ilienkov (2006); Lefebvre (1991); Vigotski (2000); Vygotski (1991); Davýdov (1982); Davídov (1988) e Davídov e Slobódchikov (1991) referimo-nos à crítica dos mesmos em relação à lógica formal tradicional, esses autores são adeptos a lógica dialética. Portanto, é importante a ênfase e o alerta: as reflexões que apresentamos no decorrer desse capítulo são sobre a lógica formal, com uma única exceção, quando nos referimos ao pseudoconceito em Vigotski (2000). As ponderações sobre a lógica dialética serão apresentadas no segundo capítulo.

Na sequência, apresentaremos o movimento conceitual da multiplicação apresentado no livro didático do primeiro ano do Ensino Fundamental.

1.1 EXERCÍCIOS EXTRAÍDOS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO PRIMEIRO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Vale adiantar que, durante o processo de análise, do movimento conceitual da tabuada apresentado na coleção *Porta Aberta*, detectamos resultados semelhantes àqueles obtidos por Davýdov (1982) ao analisar as proposições para o ensino em seu país (Rússia) no século XX, por ele denominado de ensino tradicional. Este é denominado por Davýdov por se sustentar nos fundamentos da lógica formal, na teoria empírica.

[9] Em 2006 foi instituída em Brasília a lei n. 11.274/06 que estabelece nove anos de Ensino Fundamental para o grupo de estudantes com idade de 6 a 14 anos, assim como na Rússia. O objetivo da referida lei consiste em

Uma das finalidades principais do ensino tradicional consiste em "inculcar nas crianças generalizações e conceitos [...]" empíricos (DAVÝDOV, 1982, p. 14). Para o autor em referência, os livros didáticos, do ensino tradicional são elaborados de tal forma que objetivam tal finalidade. Nestes, as características da abstração, generalização e do conceito coincidem com a descrição da lógica formal tradicional.

Nos séculos XVIII e XIX, de acordo com Davýdov (1982), a teoria empírica passou a integrar o conteúdo escolar. E a lógica formal exerceu um papel fundamental sobre a psicologia e a didática. Em quase todo século XIX, as ideias psicológicas sobre o pensamento se desenvolveram fundamentadas na lógica formal e persistem até os tempos atuais. Conforme Kopnin (1978), esta apresenta uma teoria original e é adotada como método de conhecimento.

Um ensino que se fundamenta na lógica formal os conceitos são elaborados, pelos estudantes, por meio da observação das características externas de um grupo de objetos, dados sensorialmente aos órgãos dos sentidos. A análise consiste em abstrair algumas características gerais e substanciais imprescindíveis aos objetos. O conceito é elaborado com base na aparência externa, nas características comuns aos vários objetos observados.

Os manuais modernos da lógica formal, de acordo com Chelpanov (1946, apud DAVÝDOV, 1982) indicam que os *objetos* circundantes ao homem possuem diversas propriedades, como por exemplo, qualidades, medidas e estados, que se encontram em diferentes relações (espaciais, temporais, causais). Em meio a uma multiplicidade de propriedades e relações concretas (pela aparência externa), os objetos podem apresentar *semelhanças* entre si, em alguns aspectos, e diferenciar-se em outros. Esta é uma particularidade da lógica formal: "Identificação das características externas dos objetos [...]" (BERNARDES, 2011, p. 14).

Ao formar ideias sobre os aspectos dos objetos, o homem destaca os *indícios* destes. "Todo objeto possui uma série de propriedades que são comuns com as de outros objetos e diversas propriedades pelas quais se distingue dos demais objetos... As ideias concernentes a todas essas propriedades... se denominam *indícios*" (ÁSMUS, 1947, apud DAVÝDOV, 1982, p. 46).

---

ampliar o tempo de convívio escolar e maiores oportunidades de aprendizagem.

Para se estabelecer as diferenças e semelhanças entre os objetos se efetua o procedimento lógico de *comparação* [...] (KONDAKOV, 1954, apud DAVÝDOV, 1982). O processo de conhecimento de qualquer objeto inicia quando o comparamos com outros. Pela comparação é possível diferenciar ou estabelecer semelhanças entre os objetos.

Por meio do processo de comparação de vários objetos, o homem destaca as propriedades *comuns* (indícios) que os tornam semelhantes entre si. Assim, de acordo com tais propriedades similares ou comuns, um objeto pode relacionar-se em uma *classe geral* com outros objetos (DAVÝDOV, 1982). Ou seja, "segundo certos indícios comuns (iguais) os objetos singulares podem associar-se em determinado conjunto ou classe." (DAVÝDOV, 1982, p. 46).

Ao designar os indícios comuns, substanciais, por meio de palavras, atinge-se o conceito. A *definição de conceito*, de acordo com a lógica formal, "é a forma pela qual se refletem as características essenciais dos objetos." (ROSENTAL, 1962, p. 133). Ou seja, a lógica do conceito é a "[...] lógica da essência", dada a partir da aparência externa do objeto. (LEFEBVRE, 1991, p. 142). Em todo conhecimento admite-se ser "possível separar o fenômeno acidental [insubstancial] daquilo que é essencial", isto é, o geral. (LEFEBVRE, 1991, p. 142).

Ao separar os objetos, por meio de indícios substanciais e fixá-los no conceito, o homem pode distinguir com exatidão uns objetos de outros. Os indícios substanciais distinguem o conceito do objeto, não no que este tem de casual, ou seja, naquilo que pode ou não estar presente no objeto, mas no que necessariamente deve existir para que haja correspondência entre o conceito e o objeto (ASMUS, 1947, apud DAVÝDOV, 1982). Mas o conceito é visto como "noção geral, algo morto, abstrato." (KOPNIN, 1978, p. 155). O processo de formação do conceito surge por meio do "descobrimento e separação de qualquer indício comum entre os mais diversos objetos." (KOPNIN, 1978, p. 155).

Desse modo, o conteúdo do conceito surge a partir do conjunto de propriedades comuns que permitem separar e diferenciar certa classe de objetos. Portanto, o conteúdo do conceito é "o conjunto de propriedades que caracterizam o objeto." (ROSENTAL, 1962, p. 255).

O processo de generalização, no ensino tradicional, consiste na descrição das propriedades específicas que um objeto individualizado apresenta em meio a outros objetos similares (DAVÝDOV, 1982). O processo ocorre por meio da comparação das características singulares, que são próprias de um objeto dado; as gerais são comuns a vários objetos

(ROSENTAL, 1962, LEFEBVRE, 1991). Essa descrição é que leva os estudantes, por meio da percepção imediata das características externas, atingirem a essência do objeto.

A essência, no ensino tradicional, consiste nas propriedades, nas regras comuns, extraídas das características similares de um determinado grupo de objetos as quais fundamentam o pensamento empírico (BERNARDES, 2001). Por exemplo, ao somarmos *cinco* (5) crianças com *cinco* (5) crianças concluiremos que são *dez* (10) crianças no total. No mesmo problema, se substituirmos as figuras representativas, por exemplo, por bananas, teremos: *cinco* (5) bananas mais *cinco* (5) bananas. O resultado será o mesmo, ou seja, o número *dez* (10). As figuras ilustrativas no problema podem ser alteradas, no entanto, a *essência* permanece a mesma: juntar *dois* (2) grupos compostos por *cinco* (5) objetos cada. Não importa se são bananas, crianças ou outros objetos quaisquer. A característica comum, em ambas a situações, é a soma de *dois* (2) agrupamentos com a mesma quantidade, *cinco* (5), dadas diretamente aos órgãos dos sentidos por meio do desenho de *cinco* (5) crianças mais *cinco* (5) crianças e *cinco* (5) bananas mais *cinco* (5) bananas. A regra comum consiste em que 5 + 5 é sempre igual a 10.

O problema é que essências como essas, "[...] tomadas em seu melhor sentido (em compreensão), são essências fixas, coaguladas. E cada 'essência' aparece ao exame como uma coleção de qualidades justapostas, exteriores, numa ordem de generalidade crescente." (LEFEBVRE, 1991, p. 142-143).

Orientação semelhante é contemplada na coleção de livros didáticos, em análise (Ilustração 1):

Ilustração 1 - Introdução à multiplicação no livro didático brasileiro

Fonte: Centurión, Rodrigues e Scala (2011, p. 105-primeiro ano).

O exercício apresentado na ilustração 1 consiste na identificação do número total de crianças participantes em um concurso para comemorar o Dia das Crianças. O exercício requer a observação, na situação dada, das características comuns: *três* mesas; cada mesa *duas* crianças. Estas características estão dadas visualmente. Os questionamentos, "*Quantas são as mesas? Quantas são as crianças em cada mesa? No total, são quantas crianças que estão participando do concurso?",* orientam a percepção (CENTURIÓN, RODRIGUES e SCALA, 2011, p. 105-primeiro ano). A característica comum é a quantidade de crianças, *duas* (2) em cada uma das mesas. E a síntese a ser elaborada é que, quando houver *três* (3) agrupamentos compostos por duas unidades cada, o total será *seis* (6). Ou de outro modo, 2 + 2 + 2 = 6.

Como dito anteriormente, nesse tipo de generalização, o ponto de partida é as relações objetais, sensoriais, dadas diretamente aos órgãos dos sentidos. A descrição, geralmente, é realizada pelo manuseio ou observação de objetos reais, figuras, ilustrações, esquemas, entre outros.

As orientações metodológicas contidas no livro didático, conforme ilustração (2) a seguir, apontam que as representações propostas facilitam a percepção no que se refere às quantidades a serem operadas. Enfim, somar quantidades iguais de objetos similares, dados visualmente, facilita o cálculo do total de elementos. Trata-se de uma espécie de preparação para a elaboração do conceito de multiplicação enquanto "soma de parcelas iguais".

Ilustração 2 - Adição de quantidades iguais no livro didático brasileiro

Fonte: Centurión, Rodrigues e Scala (2011, p. 106 - primeiro ano).

O foco do exercício incide na percepção das características similares a todas as situações apresentadas (Ilustração 2). Em cada situação: as quantidades em operação são iguais, isto é, no primeiro caso, *um* (1) urso marrom mais *um* (1) urso verde, resultam em *dois* (2) ursos; no segundo, *dois* (2) carrinhos vermelhos mais *dois* (2) carrinhos azuis, são iguais a *quatro* (4) carrinhos; quanto ao terceiro caso, *três* (3) piões azuis mais *três* (3) piões vermelhos, resultam em *seis* (6) piões, e, finalmente, no quarto caso, *quatro* (4) bolas laranja, mais *quatro* (4) bolas verdes, resultam em *oito* (8) bolas. Além disso, em cada situação apresentada (Ilustração 2), os agrupamentos são constituídos por objetos com as mesmas cores (um urso marrom representa um grupo e um urso verde, outro; dois carrinhos vermelhos constituem um grupo composto por duas unidades e dois carrinhos azuis outro, e assim sucessivamente). Portanto, criados atributos comuns em cada situação: a quantidade de objetos a cor de seus elementos, mas a soma leva em consideração a característica quantidade e despreza a segunda (cor).

O exercício (Ilustração 2) atende o "princípio do caráter visual" (direto ou intuitivo) no ensino, pois contempla o reflexo sensorial das propriedades externas dos objetos. De acordo com Davídov (1987, p. 148), esse princípio "é externamente simples, até banal, se, de fato, a prática de sua aplicação não fosse tão séria (e, para o desenvolvimento mental, tão trágica), como é na realidade". Isso porque projeta, exclusivamente, a formação, nas crianças, do pensamento empírico.

O exercício 3, apresentado na mesma página (Ilustração 2)[10], a proposição é que seja resolvido em duplas. Para tanto, cada integrante confecciona a mesma quantidade de bolas de papel, que serão operadas (5 + 5 e 6 + 6). As operações de adição são continuidade da sequência das operações apresentadas no exercício 2, da mesma página do livro didático. A característica comum, em todas as operações, incide na soma de parcelas iguais. O que varia são as imagens (ou objetos) que representam as quantidades a serem operadas e o valor quantitativo em cada situação.

No livro didático do primeiro ano, é apresentado uma variedade de exercícios similares[11]. Trata-se de uma preparação para a elaboração do conceito de multiplicação, que é

[10] Não cortamos a imagem em duas partes para não perder de vista a sequência apresentada na mesma página.

[11] No livro do primeiro ano também são apresentadas outras ideias relacionadas à multiplicação (combinatória, organização retangular,...), porém, sob o ponto de vista do nosso objeto de estudo, movimento conceitual, o teor é o mesmo, conforme apresentaremos durante a análise referente aos livros do segundo e terceiro anos.

apresentado somente no livro do segundo ano, na unidade *onze* (11), conforme apresentaremos a seguir.

1.2 EXERCÍCIOS EXTRAÍDOS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO SEGUNDO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Como mencionamos, o conceito de multiplicação aparece no livro didático do segundo ano (Ilustração 3). Os exercícios número um e dois consistem na identificação do número total de crianças e de bananas.

Ilustração 3 - Apresentação do conceito de multiplicação no livro didático brasileiro

Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 196 – segundo ano).

No exercício (Ilustração 3), as representações propostas facilitam a percepção das quantidades a serem operadas: cinco grupos compostos pelo mesmo número de unidades (crianças e bananas). Logo, a generalização consiste em: quando houver *cinco* (5) agrupamentos compostos pelo mesmo número de unidades, o total será: 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20, 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15...

Para finalizar a página introdutória, do livro referente ao segundo ano, há um balão com o seguinte enunciado: "Nesse caso, multiplicar é o mesmo que adicionar quantidades iguais." (CENTURIÓN, SCALA e RODRIGUES, 2011, p. 196 – segundo ano – destaque dos autores): eis o resultado do processo de generalização. Assim, generalização e conceito são apresentados como sinônimos.

Portanto, o conceito se expressa por palavras que "se abstrai de regras e atributos individuais, de diversas percepções e representações, é, portanto, o resultado de uma síntese de percepções e representações de fenômenos e objetos homogêneos." (NIKITIN e RYPASOV, 1963 apud DAVÝDOV, 1982, p. 25). Assim sendo, o conceito traz o entendimento da lógica formal "é a forma na qual se refletem as características essenciais do objeto." (ROSENTAL, 1962, p. 233). É "um conjunto de características [...]" que coincidem numa certa classe de objetos (VIGOTSKI, 1991, p. 127). No entanto, o conceito, em qualquer nível de desenvolvimento e em qualquer idade, "é, em termos psicológicos, um ato de generalização. [...] O conceito expresso por uma palavra representa uma generalização." (VIGOTSKI, 2000, p. 246).

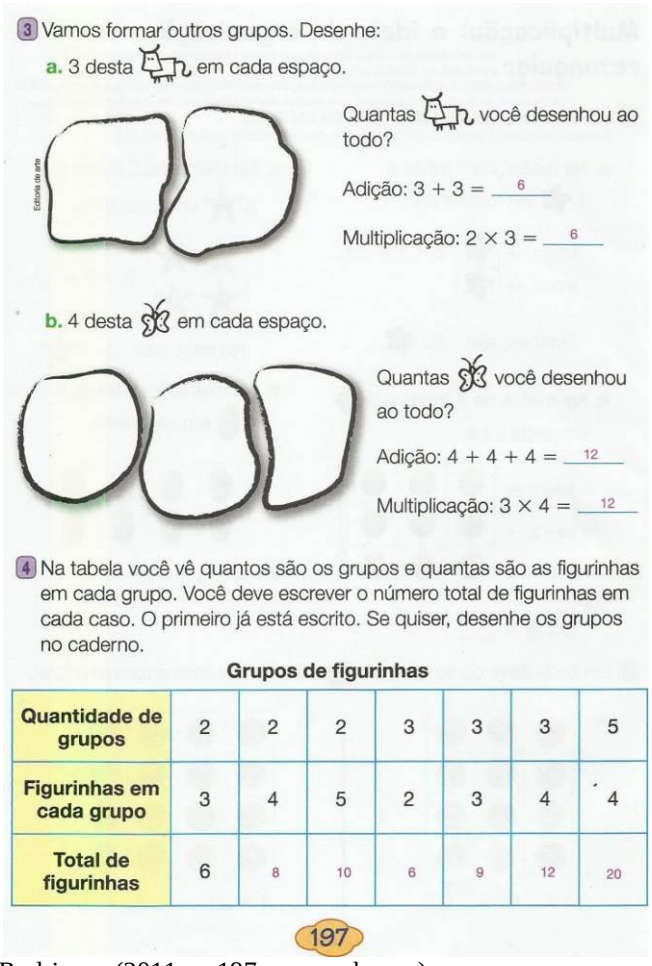
Os procedimentos metodológicos, apresentados no exercício da ilustração anterior (2), reproduzem a generalização empírica do conceito de multiplicação. Que "apoiando-se nas observações, refletem nas representações as propriedades externas dos objetos." (DAVÍDOV, 1988, p. 154). Esse tipo de conceito é denominado por Vigotski (2000), com base nos pressupostos da lógica dialética, de pseudoconceito. Este não chega ser conceito na opinião de Vigotski (2000), pois "[...] permanece num grau inferior do conhecimento, embora se trate de um grau válido, envolvido e implicado nos graus superiores." (LEFEBVRE, 1991, p. 143).

Vigotski (2000) destaca que os pseudoconceitos não são de exclusividade das crianças, mas é uma forma de pensar que ocorre com certa frequência no cotidiano dos adultos também. "Desde a infância o homem assimila a linguagem 'viva', corrente, de quem o rodeiam e os nomes em que figuram [...]. É natural que a assimilação da linguagem viva forme no homem pseudoconceitos a operar intensamente com eles na prática." (DAVÝDOV,

1982, p. 216). Deste modo, o pseudoconceito é uma das formas de adultos e crianças se entenderem.

Por consequência, o processo de estudo dos conceitos, ao ter por base a lógica formal, o livro traz uma intenção de generalização também empírica, marcada, inclusive, pela resolução de exercícios similares, conforme revela a ilustração 4:

Ilustração 4 - Atividades similares para estudar o conceito que promove a generalização empírica



3 Vamos formar outros grupos. Desenhe:

a. 3 desta em cada espaço.

Quantas você desenhou ao todo?

Adição: 3 + 3 = 6

Multiplicação: 2 × 3 = 6

b. 4 desta em cada espaço.

Quantas você desenhou ao todo?

Adição: 4 + 4 + 4 = 12

Multiplicação: 3 × 4 = 12

4 Na tabela você vê quantos são os grupos e quantas são as figurinhas em cada grupo. Você deve escrever o número total de figurinhas em cada caso. O primeiro já está escrito. Se quiser, desenhe os grupos no caderno.

Grupos de figurinhas

Quantidade de grupos	2	2	2	3	3	3	5
Figurinhas em cada grupo	3	4	5	2	3	4	4
Total de figurinhas	6	8	10	6	9	12	20

197

Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 197 – segundo ano).

No exercício número *três* (3), apresentado na ilustração anterior (4), as figuras ilustrativas mudaram, se comparados com os exercícios anteriores, no entanto, a essência continua a mesma: desenhar a mesma quantidade de objetos em cada grupo, adicionar as quantidades iguais e, finalmente, representar as ilustrações por meio da operação de multiplicação. No exercício *quatro* (4), da mesma página em análise, a quantidade de grupos e o número total de figuras a serem desenhadas em cada grupo são definidos previamente. A

questão incide em determinar o número total de objetos em cada agrupamento. Esse movimento consiste na passagem do estágio da percepção para a representação. Trata-se da expressão do número total de figuras em cada situação, por meio da representação mental.

Segundo Davýdov (1982), ao final desse processo de generalização, na didática tradicional, o professor utiliza o método comparativo para descrever as características comuns apresentadas em cada exercício. Nesse sentido, na ilustração (4), em cada situação conclui-se, por meio da comparação, que a adição de parcelas iguais pode ser representada por meio de outra operação: *a multiplicação*. O domínio desses procedimentos é um caso particular do processo de generalização, cujo resultado é o conceito de multiplicação.

Desse modo, para que se formulem generalizações corretas é indispensável "variar (modificar) as características insubstanciais dos conceitos, propriedades e fatos, mantendo constantes as características essenciais." (PCHOLKO, 1965, apud DAVÝDOV, 1982, p. 20). Em outras palavras, as características são classificadas em dois grupos. O primeiro é o grupo dos atributos *essenciais* e o segundo grupo é formado pelos atributos acidentais, insubstanciais. (LEFEBVRE, 1991).

As características insubstanciais experimentam grandes mudanças e características substanciais (essenciais) são as constantes, estáveis e subsistentes. No processo de síntese se destacam as características essenciais, típicas do conceito (PCHOLKO, 1965, apud DAVÝDOV, 1982). "Estabelecer os indícios comuns, característicos e as conexões entre os objetos estudados" é condição essencial no processo de síntese na lógica formal. (GROMOV, 1960, apud DAVÝDOV, 1982, p. 20).

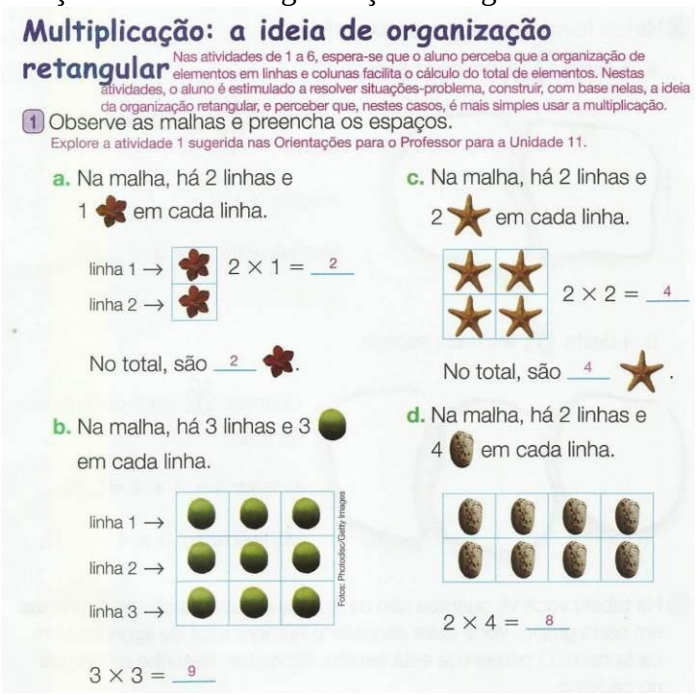
Por exemplo, nas ilustrações anteriores, as cores, as diferentes quantidades e os diferentes objetos que representam os elementos dos agrupamentos variavam, no entanto, a característica substancial para a multiplicação (soma de quantidades iguais) se repetia em todas as situações.

Segundo Davýdov (1982, p. 20), "o geral como algo estável, que se repete, constitui determinado invariante, entre as diversas qualidades dos objetos da ordem dada, ou seja, torna-se substancial. Muitos trabalhos utilizam os termos geral e substancial no mesmo sentido". Ao examinar vários objetos similares é possível descrever as propriedades essenciais e não essenciais de um conceito. A "'essência' do objeto se interpreta, muitas vezes também como algo 'geral'. Ao revelar o geral nos objetos e fenômenos, o homem conhece o que neles

há de **substancial**, sua **essência**.” (SMIRNOV, 1956 apud DAVÝDOV, 1982, p. 21- grifos do autor).

A lógica formal atua sobre categorias fixas, “[...] o importante é que uns conceitos não entrem em contradição com outros e que de uns se desprendam, analiticamente, outros” (ROSENTAL, 1962, p. 63). Tomemos como exemplo dessa orientação a proposta do livro didático em foco para o ensino de multiplicação a partir da ideia de organização retangular (Ilustração 5):

Ilustração 5 - Multiplicação: A ideia de organização retangular



Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 198 – segundo ano).

Na ilustração 5, os objetos estão organizados de forma retangular. Assim, explicita-se a ideia que as quantidades a serem operadas na multiplicação podem ser organizadas em linhas e colunas. De acordo com as orientações metodológicas do referido livro, a organização dos “elementos em linhas e colunas facilita o cálculo do total de elementos” (CENTURIÓN, SCALA e RODRIGUES, 2011, p. 198 – segundo ano). Conforme mencionamos anteriormente, a adição de quantidades iguais é uma característica estável, geral, comum a todas as operações de multiplicação, ou seja, o substancial. No entanto, as características insubstanciais, aquelas que variam, referem-se à quantidade de elementos em cada linha e coluna e os objetos que representam esses elementos.

De acordo com os exercícios contidos na ilustração 5, os elementos a serem operados estão organizados na forma retangular (linhas e colunas). Vejamos: no item ***a*** (Ilustração 5) há duas linhas, em cada linha um elemento ( ). A situação está representada pela operação 2 x 1, apresentada como síntese do trabalho realizado nos exercícios das páginas precedentes, sobre adição de parcelas iguais, isto é, 2 x 1 = 1 + 1 = 2 (duas linhas, cada uma com *um* elemento).

No item ***b***, a malha de formato retangular é composta por *três* (3) linhas, e cada uma com *três* elementos ( ), isto é, 3 x 3 = 3 + 3 + 3 = 9. A quantidade de unidades em cada linha e coluna se difere da anterior, no entanto, a essência permanece a mesma, adicionar quantidades iguais. Os itens ***c*** e ***d*** são estruturados a partir dessa mesma essência (2 x 2 = 2 + 2 e 2 x 4 = 4 + 4), varia o insubstancial: a quantidade de linhas, de elementos em cada uma delas e os objetos que representam tais elementos.

De acordo com Ewbank (2002, p. 49- grifo do autor),

> O ensino da multiplicação como adição reiterada de uma mesma quantidade tem por conseqüência fazer do multiplicando uma medida e do multiplicador um simples operador sem dimensões físicas, o que resultará em uma **dissimetria** entre multiplicador e multiplicando.

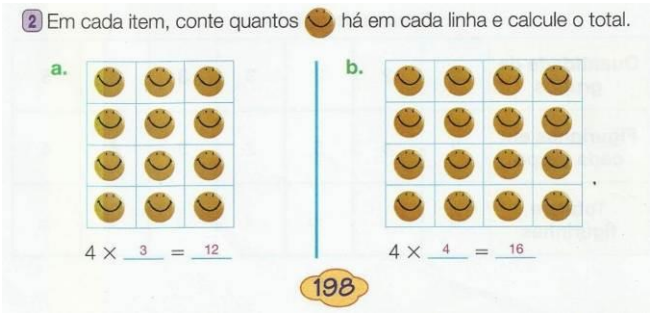
Em outras palavras, ao inverter a ordem do multiplicando e do multiplicador os fatores apresentam papéis diferentes. Tomamos como exemplo a operação 2 x 4. De acordo com a lógica adotada nos livros didáticos em análise, 2 x 4 = 4 + 4. Ao aplicar a propriedade comutativa da multiplicação, 4 x 2, temos 2 + 2 + 2 + 2. Ou seja, os números a serem adicionados não são os mesmos. Na operação 2 x 4 o número a ser adicionado é o *quatro* e na operação 4 x 2 é o *dois*. "Essa dissimetria faz com que o número do multiplicando não seja o mesmo no multiplicador nas diversas etapas do ensino da multiplicação." (EWBANK, 2002, p. 49).

Segundo Ewbank (2002), a propriedade comutativa da multiplicação permite inverter o papel do multiplicando e do multiplicador. Esta inversão facilita o cálculo quando, por exemplo, o multiplicando é um número de várias cifras e o multiplicador de uma cifra. Tomamos a título de exemplificação a operação 143 x 4. De acordo com a lógica adotada nos livros didáticos em análise 143 x 4 = 4 + 4 + 4 + 4+ 4 + 4 + 4 + 4 +... , cento e quarenta e três vezes o quatro, "conforme leitura do algoritmo, é impraticável [...]" (EWBANK, 2002, p. 50), como adição de parcelas iguais. No entanto, é realizável se utilizarmos o algoritmo de

multiplicação, isto é: conceito de número, $\begin{array}{r} 4 \\ \times 143 \\ \hline \end{array}$. Porém, não estamos tratando, neste momento, do algoritmo da multiplicação, isso nos possibilita afirmar que, nesse momento, é impraticável a resolução (143 x 4) como adição de parcelas iguais.

Ewbank (2002) explicita que para empregar a propriedade comutativa da multiplicação nos cálculos, é imprescindível que o estudante seja "capaz de abstrair o que representam os números nas posições em que ocupam na operação multiplicativa." (EWBANK, 2002, p. 51). A apresentação do movimento estático da referida operação se repete nos demais exercícios, conforme ilustração 6:

Ilustração 6 - Percepção e representação



Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 198 – segundo ano).

Os elementos organizados em formato retangular (Ilustração 6) estão dados diretamente à percepção visual, que são elevados para o plano da representação operacional. De acordo com exercícios anteriores, apresentados no livro didático, o número de linhas refere-se ao primeiro número da representação (4). E o segundo número, está relacionado à quantidade de elementos em cada linha, ou seja, o número de colunas. Deste modo, no item *a*, há *quatro* (4) linhas, com *três* (3) elementos ( ), ou, em outras palavras, com *três* (3) colunas. O que resulta no total de *doze* (12) elementos. Tal organização retangular, dada perceptivamente, é representada por meio da operação 4 x 3 = 12. O item *b* é apresentado de modo análogo, há *quatro* (4) linhas, com *quatro* (4) elementos ( ). O que totaliza *dezesseis* (16) elementos, representados pela operação 4 x 4 = 16.

De acordo com Davýdov (1982, p. 22), "o processo de generalização na literatura psicológico-pedagógica tradicional permite, de certo modo, esboçar a correlação existente entre a percepção, representação e o conceito." Portanto, são utilizados, como ponto de

partida, objetos e fenômenos singulares percebidos diretamente por meio dos órgãos dos sentidos. A função do professor, de acordo com o autor, é ensinar às crianças o modo de observar essa diversidade sensorial e descrever os resultados das observações. Essas experiências possibilitam elevar ao plano da representação, como

> uma forma de conhecimento que permite encontrar no grupo de objetos [diversas representações objetais organizadas de forma retangular] as características afins, coincidentes, "importantes" [o primeiro elemento da representação refere-se ao número de linhas e o segundo a quantidade de elementos em cada linha], e separá-los dos atributos individuais e "secundários" [o objeto que representa a quantidade de elementos em cada linha e coluna e a quantidade de linhas e colunas]. (DAVÝDOV, 1982, p. 23).

Porém, as características essenciais podem ser confundidas com as secundárias, assim como ocorre no exemplo em análise. Pois, na multiplicação 4 x 3 = 12 (Ilustração 6), a característica essencial, na lógica adotada pelo livro didático, trata-se da adição de parcelas iguais: *três* (3) se repete por *quatro* (4) vezes, 3 + 3 + 3 + 3. O número de linhas e de colunas, por sua vez, é essencial para a organização retangular, mas é secundário, para o conceito de multiplicação.

A organização objetal, na forma retangular, reflete visualmente o número de linhas e colunas (4 e 3) dados concretamente. Essa visualização não contempla apenas uma organização retangular singular, é válida para todas as operações de multiplicação. Trata-se de uma característica geral, em relação à organização retangular, porém, não é essencial para o conceito de multiplicação como um todo, conforme apresentaremos no decorrer deste capítulo, mesmo nos limites da lógica formal.

Em termos pedagógicos, nesse processo de generalização empírica, o professor pode assumir o papel de condutor, no movimento que segue da percepção para a representação. Sua palavra é fundamental no processo de ensino e aprendizagem. A função consiste em organizar e conduzir a observação dos estudantes para identificarem as características essenciais do objeto e analisarem as diferenças entre os aspectos essenciais e insubstanciais (BOGOYÁBLENSKI, 1937, apud, DAVÝDOV, 1982).

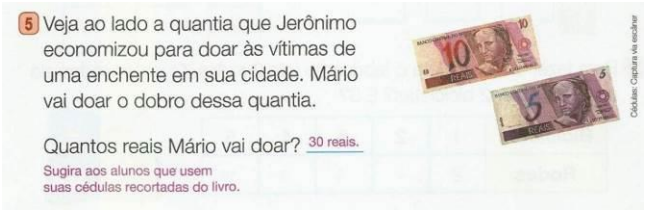
O movimento que segue da percepção para a representação e culmina no conceito "equivale ao trânsito do concreto sensorial ao abstrato e imaginário [...]. O domínio dessa atividade generalizadora permite os estudantes executarem uma operação significativa para

todo seu trabalho de estudo: a de sistematizar (ou classificar).” (DAVÝDOV, 1982, p. 26). O domínio de um conceito não supõe apenas o conhecimento das

> características dos objetos e fenômenos que o mesmo abarca, mas também **saber empregar o conceito na prática**, saber **operar** com ele. E isso quer dizer que a apropriação do conceito envolve não só o **caminho de baixo para cima, desde os casos singulares e parciais até sua generalização, mas também o caminho inverso, de cima para baixo, do geral ao parcial e singular**. Conhecendo o geral há que perceber um caso concreto, separado com que tenhamos relação com o momento dado. (SMIRNOV, 1956, apud DAVÝDOV, 1982, p. 27 – grifos do autor).

Assim, mesmo nos limites da lógica formal, o domínio do conceito de multiplicação requer, além dos conhecimentos referentes às suas características substanciais e insubstanciais, apresentadas no decorrer deste, também a sua aplicação em outras situações singulares, de cima para baixo, tal como procede a proposição em referência (Ilustração 7):

Ilustração 7 - Aplicação do conceito de multiplicação



Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 210 – segundo ano).

O exercício apresentado anteriormente (Ilustração 7) é um exemplo da aplicação prática do conceito de multiplicação[12]. O foco do exercício incide no cálculo do dobro do valor representado pelas duas cédulas. No próprio exercício, os autores sugerem o recorte de algumas cédulas apresentadas ao final do livro. Tal orientação supõe a continuidade do processo de aplicação do conceito e traduz o movimento orientado de cima para baixo, que culmina com a aplicação em situações singulares como a utilização do valor monetário.

Como mencionamos anteriormente, para operar corretamente com o conceito de multiplicação é imprescindível conhecer a função do multiplicando e do multiplicador. Há situações em que a propriedade comutativa deve ser empregada com cautela. Como no

[12]É importante ressaltar apelo ao voluntariado. Há a inculcação, desde os anos iniciais, da desresponsabilização do Estado, na materialização das políticas sociais. Os próprios indivíduos são responsáveis pelo auxílio aos

exemplo anterior (Ilustração 7), embora o resultado da operação 2 x 15 e 15 x 2 seja sempre 30, não se pode substituir a quantidade monetária (15) pelo número de vezes que será operada (2).

Segundo Bézout (1849, p. 29), na operação de multiplicação ao tomar o multiplicando e o multiplicador como números absolutos "sem atender as unidades que eles representam, é indiferente o tomar qualquer deles para o multiplicando, ou para o multiplicador." Porém, ao se tratar de números concretos, o multiplicando e o multiplicador devem ser considerados (BÉZOUT, 1849). O número é denominado de **concreto** "quando se nomeia a espécie da unidade que os compõem [por exemplo: três horas, dois litros, etc.]; **abstratos** pelo contrário, quando não se nomeia a espécie das unidades, que os compõem [exemplos: 2, 3, 4,...]". (COSTA, 1866, p. 10).

Em Centurión, Scala e Rodrigues (2011), não é mencionado o nome dos termos da operação de multiplicação. A nomenclatura é apresentada somente nos livros do quarto e quinto ano. No entanto, os autores apresentam, de forma intuitiva, o papel que exerce cada fator na operação.

Em seus questionamentos sobre a psicologia tradicional, Davýdov (1982) também remete ao ensino e diz que é organizado em consonância com a faixa etária do estudante. Portanto, em cada etapa da Educação Básica há proposições de ensino adequadas para idades específicas. Por exemplo, na Educação Infantil a generalização se realiza com ênfase no plano da **percepção** dos objetos. Nos primeiros anos do Ensino Fundamental, o esquema é o mesmo, percepção-representação-conceito. Mas a generalização se efetua, com maior frequência, no plano das **representações**. Porém, nesse estágio de ensino, ainda são consideradas apenas as características externas dos objetos, percebidas diretamente, por meio dos órgãos dos sentidos (DAVÝDOV, 1982).

Trata-se do "princípio da acessibilidade" (DAVÍDOV, 1987, p. 146) referente à organização do ensino adotado pela pedagogia tradicional. De acordo com esse princípio, em cada etapa do ensino se propõe "às crianças aquilo que são capazes de assimilar na idade dada. Porém, quem e quando se pode definir com precisão a medida desta 'capacidade'? [...] a medida dessa capacidade se formou espontaneamente na prática real do ensino tradicional" (DAVÍDOV, 1987, p. 146). Desse modo, subestima-se a capacidade da criança.

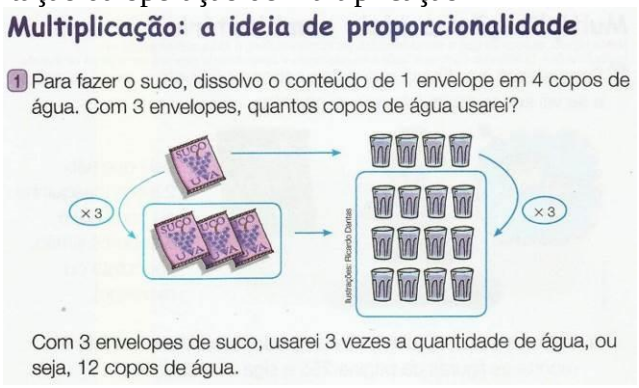
---

menos favorecidos. Retomaremos a essa forma de camuflar as contradições do sistema capitalista contemporâneo nas considerações finais.

> [...] o ensino utiliza unicamente as possibilidades já formadas e presentes na criança, em cada caso se pode, então, limitar tanto o conteúdo do ensino como as exigências apresentadas à criança a este nível real "presente" sem responsabilizar-se por suas premissas. Naturalmente, assim se pode justificar a limitação e a pobreza do ensino primário, apelando a características evolutivas da criança de sete anos, por exemplo, o pensamento por imagens que se apoia em representações elementares. (DAVÍDOV, 1987, p. 147).

O pensamento por imagens, apoiado em representações elementares, é fortemente utilizado nos livros didáticos em análise, como, por exemplo, o exercício que a seguir apresentamos (Ilustração 8) concernente ao que Centurión, Scala e Rodrigues (2011) denominam de ideia de proporcionalidade da multiplicação.

Ilustração 8 - Representação da operação de multiplicação



Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 201 - segundo ano).

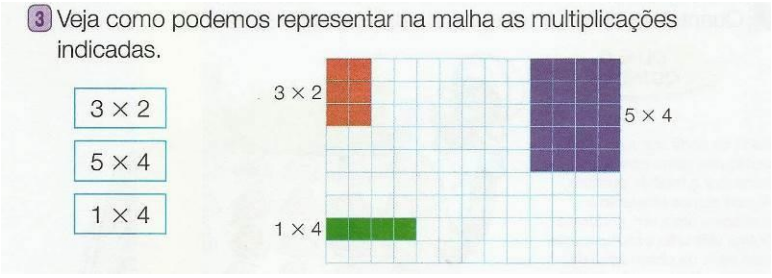
O exercício modelo (Ilustração 8) incide no cálculo do triplo da quantidade inicial. A operação desenvolvida (3 x 4) está **representada** visualmente, por meio de objetos ilustrativos (envelopes de sucos e copos de água). Embora a situação esteja relacionada com a ideia de proporcionalidade, a organização retangular dos objetos, abordada nos exercícios precedentes, permanece.

De acordo com Davýdov,

> a pedagogia e a psicologia tradicional mantém a posição de que o ensino é indispensável às sucessões contínuas para todos os tipos de generalizações e distintos níveis do conceito, desde a idade pré escolar até os cursos superiores. Segundo esse critério, em cada sucessivo estágio de ensino, se faz necessário "acrescentar" e proteger o que foi constituído e acumulado em experiências anteriores da criança. (DAVÝDOV, 1982, p. 35 - grifo do autor).

Com base nesse pressuposto, o ensino de Matemática, por exemplo, deve partir dos conhecimentos obtidos com experiências anteriores, sejam elas no ambiente escolar ou fora dele. Por consequência, o desenvolvimento do pensamento é fortemente fundamentado no método intuitivo, com a premissa de que o ponto de partida é a realidade do estudante. Para tanto, são oferecidos dados sensíveis à observação e à percepção. Conforme mencionamos, cabe ao estudante observar e extrair as características comuns existentes nos objetos para a formulação do conceito. O pressuposto é que a "percepção das imagens [...] facilita o processo de formulação dos conceitos abstratos [...]" (DAVÝDOV, 1982, p. 42). Essa orientação teórica se explicita no exercício a seguir (Ilustração 9):

Ilustração 9 - Imagens claras e exatas



Fonte: Centurión, Rodrigues e Scala (2011, p. 199 - segundo ano).

Observa-se nessa ilustração (9) que todos os objetos representam um determinado número de linhas e de colunas e seguem uma ordem de construção bem como uma forma (retangular). Na operação 3 x 2, o primeiro número, *três* (3), representa a quantidade de unidades de área dispostas na vertical, e o segundo número, *dois* (2), a quantidade de unidades de área dispostas horizontalmente. O mesmo ocorre para a operação 5 x 4. O primeiro número, *cinco* (5), representa a quantidade de unidades de área dispostas na vertical, e o segundo, *quatro* (4), a quantidade de unidades de área dispostas horizontalmente. De modo análogo, a operação 1 x 4 é representada por *uma* (1) linha e *quatro* (4) colunas.

Ao *comparar* esses objetos, é possível perceber os *indícios comuns*. Deste modo, os objetos singulares (3 x 2, 5 x 4 e 1 x 4) são associados a uma *classe*. Em outras palavras, a multiplicação está ligada à ideia da organização retangular, na qual, nos limites desta, o primeiro número da operação representa o comprimento da altura e o segundo o comprimento da largura. Entretanto, o esforço de concretizar visualmente tal representação conceitual tem, como veremos a seguir, por consequência o desenvolvimento do pensamento empírico.

O processo de transição mental dos objetos singulares e isolados para uma classe de objetos que apresentam características semelhantes (na qual se podem observar separadamente cada objeto e ao mesmo tempo todos) também caracteriza como uma "generalização", que ocorre por meio da comparação das características das coisas (DAVÝDOV, 1982, p. 47). As características singulares são próprias de um objeto dado; as gerais são comuns a vários objetos (ROSENTAL, 1962).

Isto significa que, ao observarmos vários objetos isolados, como por exemplo, os apresentados na ilustração anterior (9), elaboramos uma representação mental, uma generalização: a operação de multiplicação está associada à ideia de organização retangular. Ou melhor, pode ser representada por uma figura retangular.

Para Davýdov (1982), o processo de distinção de características comuns, com vistas à formulação de uma classe de objetos, implica que o homem abstrai várias propriedades dos objetos e as transforma em atributos comuns. Esse procedimento cria uma imagem representativa de um objeto em seu pensamento. "Essa separação mental de uns atributos dos objetos e fenômenos, de abstraí-los com relação a quaisquer outros, se chama *processo abstrativo* e seu resultado, abstração." (KONDAKOV, 1954 apud DAVÝDOV, 1982, p. 47). No entanto, os conceitos formados a partir desse movimento de generalização e abstração constituem o conteúdo do "pensamento empírico" (DAVÝDOV, 1982, p. 320).

A abstração tomada como

> separação do indício comum, semelhante, sensorialmente perceptível do objeto é característica do enfoque empírico do pensamento, no qual a abstração é considerada forma original da experiência sensorial como a própria percepção ou noção, apenas com um número menor de indícios. (KOPNIN, 1978, p. 160).

Nesse pensamento, de acordo com Strogovich (1949, apud DAVÝDOV, 1982, p. 47), "abstrair significa prescindir. Depois de separar determinados aspectos ou indícios do objeto para estudar, desvinculamo-los de outros aspectos ou atributos [...]": abstraímos; ignoramos estes; os deixamos fora de nossa atenção. Isto significa dizer que essa abstração é decorrente da separação apenas das características essenciais do objeto. É isso que os autores dos livros em análise abordam na apresentação do conceito de multiplicação. Ignoraram vários aspectos insubstanciais, tais como: objetos representativos em cada situação (estrelas,

frutas, quadrados), as cores dos objetos em cada situação, o comprimento e a altura da forma retangular, a quantidade total de objetos, entre outros.

Por consequência ficou presente somente o essencial do conceito de multiplicação: em *a* x *b*, o primeiro fator (*a*) indica quantas vezes o segundo fator (*b*) deve ser adicionado, ou, em outras palavras, quantas vezes se repete. Por exemplo, se *a* = 3 e *b* = 6, então *a* x *b* = 3 x 6, logo a operação deve ser a seguinte: 6 + 6 + 6 = 18. Portanto, para Centurion, Scala e Rodrigues (2011), a regra essencial, substancial e geral da multiplicação, consiste na função do multiplicando e do multiplicador.

Por mais simples que seja um objeto, ele apresenta uma variedade de aspectos que possibilita a comparação deste com outros. Deste modo, um mesmo objeto pode pertencer a várias classes, no entanto, a "função dessas propriedades na vida prática e no processo de conhecimento está longe de ser equivalente." (DAVÝDOV, 1982, p. 47). Para Luria (1990, p. 65) a classificação por categorias "explora o potencial da linguagem de formular abstrações e generalizações para selecionar atributos e subordinar objetos a uma mesma categoria." O procedimento de comparação e classificação é contemplado no livro didático do segundo ano (Ilustração 10), no qual a relação da multiplicação, com a ideia de organização retangular, permanece:

Ilustração 10 - Comparação com outros objetos

Fonte: Centurión, Rodrigues e Scala (2011, p. 199 – segundo ano).

Vale reafirmar que, a forma retangular é um indício comum na operação de multiplicação. No exercício anterior (Ilustração 10), a cor também é um indício comum, pois cada criança está vestida com roupas azuis. No entanto, essa característica não está

relacionada com a operação de multiplicação. Assim, a propriedade cor pode ser inserida em outra classe, a classe de objetos de cor azul.

Isso significa que a não adoção do geral como base para a seleção das características dos objetos, a comparação ocorre de modo arbitrário (DAVÝDOV, 1982). Qualquer característica que os objetos apresentam pode servir de critério para sua inserção em uma classe ou outra.

Segundo Davýdov (1982), a comparação formal dos objetos só é possível quando os atributos de cada um deles estão individualizados, isolados e sem relações entre si. O autor afirma que os indícios pelos quais os objetos se distinguem entre si são importantes para sua associação em uma determinada classe, em conformidade com uma característica geral. Os atributos de cada objeto se constituem em critérios para classificá-lo em uma classe, portanto, não derivam da sua característica geral. O pensamento por categorias é muito flexível e novas delas são construídas de acordo com os atributos ou indícios (LURIA, 1990).

Na ilustração anterior (10), a cor é um atributo comum, no entanto, não se trata de uma característica geral para a operação de multiplicação. Na especificidade do conceito de multiplicação, a cor é um indício secundário, *insubstancial*, e a forma retangular um indício básico, *substancial*. De acordo com Davýdov (1982, p. 48 – grifo do autor), na lógica formal tradicional, o destaque dos indícios essenciais e designação destes com palavras "conduz a uma forma singular do pensamento: ao *conceito*". Este "é um pensamento no qual se refletem as características comuns e essenciais dos objetos e fenômenos da realidade [...]. Todo conceito se forma em nós só em união com a palavra que lhe corresponde." (STROGOVICH, 1949 apud DAVÝDOV, 1982, p. 48). Assim, a palavra pode conter na "forma abreviada um grupo de objetos sensorialmente-perceptíveis [...]" (DAVÝDOV, 1982, p. 296). A título de exemplificação, em consonância com o nosso objeto de estudo, a palavra multiplicação.

Segundo Davýdov (1982, p. 49 - grifos do autor), "*indícios substanciais* são as propriedades **comuns** de certo grupo de objetos, atributos *necessários* e suficientes para **distinguir** o grupo dado dos demais." A determinação das características essenciais pressupõe destaque das propriedades comuns do grupo de objetos por meio da comparação entre os mesmos e seleção daqueles considerados suficientes para diferenciar o grupo dado dos demais (DAVÝDOV, 1982).

É com essa compreensão de apropriação e formulação do conceito que o livro didático do segundo ano, após a relação da operação de multiplicação com as ideias de organização retangular, proporcionalidade e análise combinatória. E, na sequência, são apresentadas as tabelas de multiplicação (Ilustração 11):

Ilustração 11 - Generalização da tabuada na proposição brasileira

Tabelas de multiplicação

Na página 55 das Orientações para o Professor há sugestão de organizar um *karaoke* com canções que ensinam tabuadas de maneira divertida.

Usando a adição, termine de construir as tabelas de multiplicação. O objetivo desta atividade é levar o aluno a construir as tabelas de multiplicação pela adição de quantidades iguais.

2 × 0 = 0 + 0 = 0	5 × 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0
2 × 1 = 1 + 1 = 2	5 × 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5
2 × 2 = 2 + 2 = 4	5 × 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10
2 × 3 = 3 + 3 = 6	5 × 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15
2 × 4 = 4 + 4 = 8	5 × 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20
2 × 5 = 5 + 5 = 10	5 × 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25
2 × 6 = 6 + 6 = 12	5 × 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30
2 × 7 = 7 + 7 = 14	5 × 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35
2 × 8 = 8 + 8 = 16	5 × 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40
2 × 9 = 9 + 9 = 18	5 × 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45
2 × 10 = 10 + 10 = 20	5 × 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50

3 × 0 = 0 + 0 + 0 = 0	4 × 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0
3 × 1 = 1 + 1 + 1 = 3	4 × 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4
3 × 2 = 2 + 2 + 2 = 6	4 × 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8
3 × 3 = 3 + 3 + 3 = 9	4 × 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12
3 × 4 = 4 + 4 + 4 = 12	4 × 4 = 4 + 4 + 4 + 4 = 16
3 × 5 = 5 + 5 + 5 = 15	4 × 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20
3 × 6 = 6 + 6 + 6 = 18	4 × 6 = 6 + 6 + 6 + 6 = 24
3 × 7 = 7 + 7 + 7 = 21	4 × 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28
3 × 8 = 8 + 8 + 8 = 24	4 × 8 = 8 + 8 + 8 + 8 = 32
3 × 9 = 9 + 9 + 9 = 27	4 × 9 = 9 + 9 + 9 + 9 = 36
3 × 10 = 10 + 10 + 10 = 30	4 × 10 = 10 + 10 + 10 + 10 = 40

Explore a atividade 3 sugerida nas Orientações para o Professor para a Unidade 11.

204

Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 204 – segundo ano).

Há uma variedade de multiplicações, cuja ideia central e resultado da operação fixou na soma de parcelas iguais (Ilustração 11). As quantidades a serem operadas são de *dois* (2) em dois, *três* (3) em três, *quatro* (4) em quatro e de *cinco* (5) em cinco. A análise da ilustração anterior (11) nos possibilita revelar algumas características, tais como: soma de quantidades iguais; o resultado das tabelas de multiplicação por *dois* (2) e por *quatro* (4) são números pares; a tabela de multiplicação por *três* (3) apresenta como resultado número par

intercalado por número ímpar; na de *cinco* (5) todos os resultados são números terminados em *zero* (0) ou *cinco* (5), entre outras.

Porém, vale destacar que dentre as várias características há uma principal, comum a todas as tabelas: *soma de quantidades iguais*, que segue um padrão, como mencionamos anteriormente; pois o multiplicando indica quantas vezes o multiplicador deve ser adicionado. Além disso, em cada tabela o multiplicando é um valor fixo (na tabuada do número dois o multiplicando é o número dois, do três é o número três e assim sucessivamente). Desse modo, cria-se uma representação geral, essencial, de tabela de multiplicar (tabela de multiplicação ou tabuada) que é válida para todas as tabuadas.

Vale reafirmar que, a lógica do conceito "é uma lógica da essência", em todo conhecimento admite-se ser "possível separar o fenômeno acidental [insubstancial] daquilo que é essencial [substancial]." (LEFEBVRE, 1991, p. 142). Um dos indícios substanciais (essenciais) em cada operação de multiplicação apresentada na ilustração anterior (11) consiste na relação com a adição de parcelas iguais. O primeiro número de cada operação indica quantas vezes o segundo número será adicionado. Na primeira tabela de multiplicação, obtêm-se os resultados por meio da soma de *duas* (2) parcelas iguais (0 + 0, 1 + 1, 2 + 2, 3 + 3,..., 10 + 10). No quadro ao lado, ainda na ilustração (11), a essência continua a mesma, no entanto, difere na quantidade de parcelas, *cinco* (5). O resultado de cada operação é obtido por meio da adição de *cinco* (5) parcelas iguais (0 + 0 + 0 + 0 + 0, 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 2 + 2,..., 10 +10 +10 +10 +10). Procedimento análogo ocorre nos demais quadros (Ilustração 11).

Tais indícios substanciais e comuns, a todas as operações (Ilustração 11), constituem o conteúdo do conceito, designados por uma palavra ou conjunto de palavras, como por exemplo, *tabela de multiplicação ou tabuada.*

Os conceitos possuem *conteúdo* e *extensão*. De acordo com Kondakov (1954), citado por Davýdov (1982, p. 49), "conteúdo de um conceito é o conjunto de características substanciais dos diversos objetos homogêneos representados no mesmo." E extensão do conceito consiste na totalidade de objetos, aos quais ele pode ser aplicado. Asmus (1947) postula que "indicar com exatidão os indícios substanciais e imagináveis do mesmo [do conceito], constitui uma operação lógica transcendental chamada *definição*." (apud DAVÝDOV, 1982, p. 49 -50).

> Uma boa definição de um ser — uma definição absoluta — diria tudo o que ele "é", enumeraria todas as suas qualidades, toda sua compreensão, indicando simultaneamente todas as classes de seres nas quais é possível situá-lo, indo hierarquicamente das mais numerosas às menos numerosas. [...] essa enunciação — dando a ordem, a estrutura e a organização da coisa em sua definição — seria um conhecimento completo, absoluto, dessa coisa. (LEFEBVRE, 1991, p. 139 - 140).

Então, as tabelas de multiplicação, possibilitam a seguinte definição com base na adição de parcelas iguais: Dados os números naturais *a* e *b*. O produto *a* x *b*, no contexto da tabela de multiplicar, o primeiro número da sentença (*a*) indica quantas vezes o segundo número (*b*) deve ser adicionado.

Na lógica formal, observa-se que o conteúdo do conceito nem sempre enumera todas as características essenciais do objeto, pois elas podem se apresentar em grande quantidade e variedade. Com isso corre-se o risco de se tornarem imperceptíveis. Para solucionar esse problema há de se empregar métodos adequados na definição, cujo resultado consiste em revelar o conteúdo do conceito por meio do "*gênero* e das *características"* imediatas que distinguem o conceito dado como "tipo de outros tipos do mesmo gênero." (ÁSMUS, 1947 apud DAVÝDOV, 1982, p. 50).

Quando um termo possui "extensão maior que a de outro por ele incluído, forma ***o gênero*** do qual o segundo é a espécie [tipo]." (LEFEBVRE, 1991, p. 139 - grifo do autor). O homem, por exemplo, "é uma espécie do gênero mamífero. Mamífero é gênero com relação a 'homem' e ***espécie*** com relação a 'vertebrado'." (LEFEBVRE, 1991, p. 139 - grifo do autor).

Em outras palavras, "g*ênero* é uma classe de objetos homogêneos. O *tipo* compreende objetos pertencentes ao gênero e que possuem características peculiares que os distinguem de outros objetos do mesmo gênero (diferenças específicas)." (CHELPÁNOV, 1946, apud DAVÝDOV, 1982, p. 50 – grifo do autor).

Nesse sentido, as tabuadas (Ilustração 11) compõem uma classe de objetos homogêneos. O produto *a* x *b*, quando *a* = 2, por exemplo, consiste em um *tipo* de tabela de multiplicar que correspondente à tabuada do número dois. Para *a* = 3 temos outro *tipo*, a tabuada de *três*, e assim sucessivamente até *a* = 5. As demais tabuadas, até *a* = 10 são apresentadas no livro do terceiro ano, que ainda apresentaremos no decorrer do presente capítulo.

Mas o "conceito lógico de 'tipo' é relativo, uma vez que pode analisar-se, simultaneamente, como 'tipo' e como 'gênero'." (DAVÝDOV, 1982, p. 50). Para exemplificar, tomamos como referência, novamente, as tabelas de multiplicação em análise (Ilustração 11). Todas pertencem a um mesmo gênero por apresentarem várias características comuns: cada sentença representa uma adição de mesmas parcelas; o primeiro número de cada sentença indica quantas vezes o segundo número é adicionado, entre outras.

A tabela de multiplicação por *dois* (2), por sua vez, pode ser considerada tipo, se tomada no contexto de todas as tabelas de multiplicação por possuir uma especificidade que lhe é própria: o primeiro número de cada sentença indica a soma de *duas* parcelas iguais. Por outro lado, pode, também, ser considerada como gênero, no momento em que o foco incide nas sentenças que a compõem. Por exemplo, a sentença 2 x 1 é um tipo de sentença pertencente à tabuada de dois. Desse modo, no sistema conceitual, mesmo nos limites da lógica formal tradicional, é possível transitar de um conceito mais amplo para um mais reduzido e vice-versa (DAVÝDOV, 1982).

Transitar de um conceito mais amplo para um mais específico significa inserir características ao conceito. Essa inserção torna o conceito mais específico, isto é, sua extensão mais *limitada*. No processo inverso, de transitar de uma extensão menor para uma maior, se excluem, de um conceito específico, algumas características, o que possibilita a formação de um conceito mais abrangente. Em decorrência, resulta um conceito mais pobre de conteúdo que o específico (DAVÝDOV, 1982). Ou, os conceitos mais gerais refletem uma menor quantidade de características (ROSENTAL, 1962). Neste sentido, Lefebvre (1983, p. 140 – grifos do autor) apresenta a seguinte narrativa: "Subindo de gênero em gênero, chego a ***analisar toda a compreensão*** [conteúdo] do termo em pauta. E descendo às espécies que ele contém (realizando a ***divisão*** do gênero em espécies, de uma maneira completa e exata) descubro sua extensão".

Para Rosental (1962) e Lefebvre (1991), a relação entre extensão e conteúdo do conceito, na lógica formal tradicional, é expressa pela lei da relação inversa: quanto maior a extensão do conceito, mais pobre é seu conteúdo, e quanto mais restrita a extensão, mais rico é o conteúdo. Em outras palavras, conteúdo e extensão variam em razão inversa um do outro, desse modo, o termo mais extenso possui um conteúdo mais probre e vice-versa (LEFEBVRE, 1991).

É importante enfatizar que o processo de ampliar uma extensão e formar conceitos mais gerais é denominado de *generalização* do conceito. Conforme já mencionamos, o processo de generalização ocorre por meio da comparação das características das coisas. As características singulares são próprias de um objeto dado; as gerais são comuns a vários objetos (ROSENTAL, 1962).

Para Davýdov (1982), o transcurso de um conceito mais genérico para um mais específico (limitação) permite realizar a *classificação* dos objetos correspondentes, à qual permite sua distribuição em classes nas quais os objetos apresentam afinidades entre si. Ao se inserir características ao conceito genérico ele se torna mais limitado. Por exemplo, na primeira tabela de multiplicação (Ilustração 11), o primeiro número da sentença é *dois* (2). Portanto, essa tabela de multiplicação constitui uma classe na qual a característica comum a todas as sentenças é a soma em *duas* (2) parcelas iguais. Consequentemente podemos dar um nome a essa classe: *tabuada de dois* (2) ou tabuada do número *dois*. O mesmo é válido para as demais tabuadas.

Em síntese, o movimento conceitual até aqui analisado consiste no seguinte: O início do processo de elaboração do conhecimento (generalização, abstração e conceito) ocorre a partir das sensações e percepções. O sujeito cria uma imagem representativa do objeto em sua mente. Essa imagem não se refere apenas a um objeto isolado. Trata-se, pois, de uma síntese que, conforme Davýdov (1982) contempla a representação de vários objetos de uma mesma classe, a partir da separação do geral nos grupos de objetos.

O geral é interpretado como o igual ou similar no grupo de objetos. Desse modo, o processo de generalização consiste em encontrar as características comuns e formar uma classe para esses objetos (DAVÝDOV, 1982). O mais essencial "é o mais geral. Tão-somente *as características específicas e genéricas são essenciais*." (LEFEBVRE, 1991, p. 140 - grifo do autor).

A elaboração do conhecimento segue o esquema percepção - representação - conceito. A representação consiste nas imagens elaboradas e abstraídas na mente, decorrentes do processo de observação direta dos objetos. Sendo assim, a "imagem do objeto assume caráter concreto-sensorial, o conhecimento é multilateral [várias características], o objeto se apreende no conjunto de suas propriedades." (KOPNIN, 1978, p. 157). Consequentemente, as imagens podem conter os indícios comuns dos objetos.

Os elementos que constituem o conceito são:

> **primeiro**, a existência de características essenciais que permitem *distinguir* univocamente uma classe de objetos das demais; **segundo**, a expressão verbal do significado; e **terceiro**, este significado não está forçosamente relacionado com a presença de imagens diretas, e pode ter um caráter abstrato, inconcreto. O trânsito da percepção para o conceito através da representação equivale ao trânsito do sensorial concreto e singular para o mental, abstrato e geral. (DAVÝDOV, 1982, p. 56 – grifos do autor).

Isso significa que os conceitos, na lógica formal tradicional, não são elaborados de qualquer modo, apresentam uma estrutura de construção. Como vimos, em primeiro lugar, para elaborar um determinado conceito há necessidade de selecionar vários objetos os quais apresentam determinadas características comuns indispensáveis. Estas características permitem agrupá-los, ou formulação de uma classe.

Em segundo lugar, as características comuns que permitiram agrupar os objetos em uma classe possibilitam à referida classe ser denominada por um nome, o conceito. Em terceiro lugar, a denominação ou o significado não está vinculado à presença imediata dos objetos. Assim, o trânsito se inicia pela percepção, passa pela generalização e resulta no conceito. Trata-se de um movimento que parte do sensorial concreto para o abstrato mental e geral.

Muitas peculiaridades dos programas e dos métodos de ensino expressam o enfoque da generalização e do conceito da psicologia tradicional e da didática tradicional. A apropriação, pelos estudantes, do material de estudo formulado de acordo com esse modelo gera as peculiaridades do pensamento empírico. Por isso, a crítica de opiniões tradicionais sobre a generalização e o conceito possui relevância. Ela vem mostrar os limites que a lógica formal tradicional impõe na formação do pensamento humano (DAVÝDOV, 1982).

De acordo com Davýdov (1982), a lógica formal tradicional não considera como critério uma unidade real para a classificação dos objetos. A classificação é realizada com base apenas nas características externas, relativamente independentes e isoladas. Porém,

> o “similar” e “diferente”, o “idêntico” e “misto”, o “igual” e “desigual” está apenas divorciado, e divorciado de maneira formal. Muda conforme a base de comparação (que pode ser realizada de modo arbitrário), a identidade se converte em disparidade e a disparidade em identidade. (DAVÝDOV, 1982, p. 90).

Reafirmamos que a desarticulação entre o geral e o particular, o comum e o diferente conformam o esquema empírico da generalização. Reafirmando, a generalização na lógica formal tradicional ocorre por meio da adoção de determinados atributos comuns a vários objetos. Por meio desses atributos, se ignoram as outras características. Estas servem de critério para a classificação do objeto em um determinado grupo. A classificação é fundamentada apenas na aparência em consonância com a unidade entre as propriedades similares e distintivas. Deste modo, o mesmo objeto pode ser classificado em outros grupos de objetos, pois as várias características, constituintes do mesmo objeto, podem servir de base para classificá-lo em grupos totalmente diferentes (DAVÝDOV, 1982).

O planeta terra e uma bola de gude, por exemplo, apresentam características comuns, pois têm a forma esférica. No entanto, nos ensina Davýdov (1982), não há inter-relação entre ambos. Eles podem associar-se numa mesma classe pela forma, mas a presença dessa classe não influencia de modo algum a existência real de cada objeto integrante do grupo, ou seja, se trata somente de uma comunidade formal. São objetos isolados que existem independentemente do outro. Consequentemente, todos que apresentam a forma esférica podem ser classificados no mesmo grupo (DAVÝDOV, 1982).

A lógica formal tradicional tem uma concepção definida do significado teórico-cognoscitivo da generalização e do conceito, que se explicita na seguinte citação:

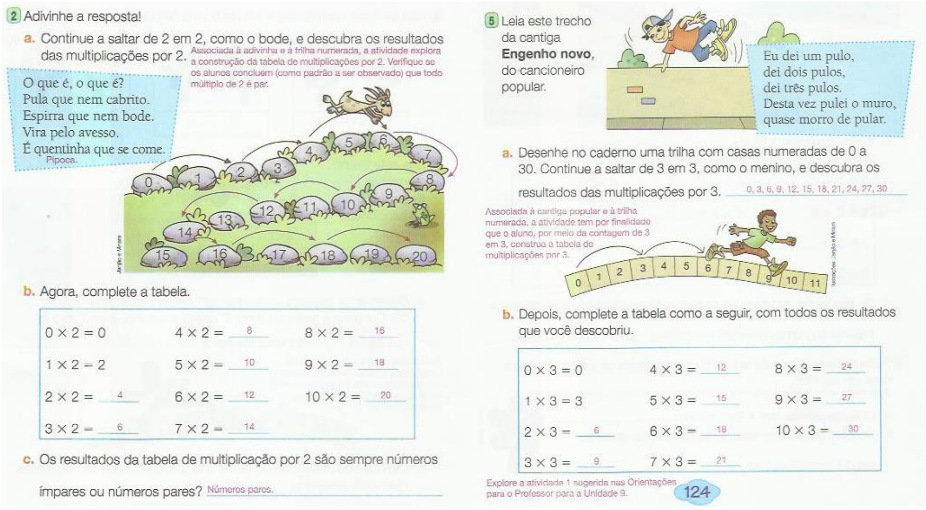
> [...] fora do homem e de seu pensamento existem objetos singulares concretos, e estes se oferecem em toda individualidade e concretização para os órgãos dos sentidos do homem. Todo objeto existe no tempo e no espaço, possui corporeidade, forma e demais atributos. E na infinita pluralidade de suas manifestações individuais, cada objeto dado pode ser **análogo** em algo a outros objetos, mas estas circunstâncias de fato não acrescentam nada para sua existência efetiva nem tão pouco a diminui em nada. Certo, segundo essa propriedade de analogia, objetos soltos – **após comparação** - podem unir-se em classes. (DAVÝDOV, 1982, p. 57- grifos do autor).

Portanto, ao reconhecer algo dos objetos soltos e depois de comparados, agrupam-se em classes de acordo com as características comuns. É o que apresentaremos a seguir, nos exercícios apresentados no material didático do terceiro ano do Ensino Fundamental.

1.3 EXERCÍCIOS EXTRAÍDOS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO TERCEIRO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

A identificação de características comuns entre objetos soltos e o agrupamento dos mesmos em classes, é uma atitude de obtenção de conhecimento se expressa nas tabelas de multiplicação por *dois* (2) e por *três* (3) apresentadas no livro didático do terceiro ano (Ilustração 12):

Ilustração 12 - Tabuada do *dois* (2) e do *três* (3)



2 Adivinhe a resposta!

a. Continue a saltar de 2 em 2, como o bode, e descubra os resultados das multiplicações por 2. Associada à adivinha e à trilha numerada, a atividade explora a construção da tabela de multiplicações por 2. Verifique se os alunos concluem (como padrão a ser observado) que todo múltiplo de 2 é par.

O que é, o que é?
Pula que nem cabrito.
Espirra que nem bode.
Vira pelo avesso.
É quentinha que se come.
Pipoca.

b. Agora, complete a tabela.

0 × 2 = 0	4 × 2 = 8	8 × 2 = 16
1 × 2 = 2	5 × 2 = 10	9 × 2 = 18
2 × 2 = 4	6 × 2 = 12	10 × 2 = 20
3 × 2 = 6	7 × 2 = 14	

c. Os resultados da tabela de multiplicação por 2 são sempre números ímpares ou números pares? Números pares.

5 Leia este trecho da cantiga **Engenho novo**, do cancioneiro popular.

Eu dei um pulo,
dei dois pulos,
dei três pulos.
Desta vez pulei o muro,
quase morro de pular.

a. Desenhe no caderno uma trilha com casas numeradas de 0 a 30. Continue a saltar de 3 em 3, como o menino, e descubra os resultados das multiplicações por 3. 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30

Associada à cantiga popular e à trilha numerada, a atividade tem por finalidade que o aluno, por meio da contagem de 3 em 3, construa a tabela de multiplicações por 3.

b. Depois, complete a tabela como a seguir, com todos os resultados que você descobriu.

0 × 3 = 0	4 × 3 = 12	8 × 3 = 24
1 × 3 = 3	5 × 3 = 15	9 × 3 = 27
2 × 3 = 6	6 × 3 = 18	10 × 3 = 30
3 × 3 = 9	7 × 3 = 21	

Explore a atividade 1 sugerida nas Orientações para o Professor para a Unidade 9.

124

Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 123 - 124 – terceiro ano).

As tabuadas de *dois* (2) e de *três* (3) são abordadas na unidade *nove* (9) intitulada “As ideias de Multiplicação” (CENTURIÓN, SCALA e RODRIGUES, 2011, p. 122). Para tanto, apresenta a seguinte sequência de conteúdos: adição de parcelas iguais (p. 118); organização retangular (p. 120); tabelas de multiplicação por dois e por três (p. 122); dobro e o triplo (p. 125); tabela de multiplicação por *quatro* (p. 127); tabela de multiplicação por *cinco* (p. 128); quádruplo e quíntuplo (p. 130); tabela de multiplicação por *seis* (p. 131); tabela de multiplicação por *sete* (p. 133); tabela de multiplicação por *oito* (p. 134); tabela de multiplicação por *nove* (p. 136) e, tabela de multiplicação por *dez* (p. 137). Nesse item, Centurión, Scala e Rodrigues (2011) abordam em sequência a ideia de multiplicação de parcelas iguais e a multiplicação ligada à ideia de organização retangular.

As tabelas de multiplicação no livro didático do segundo ano associam-se com a classe de objetos cuja característica é adição de parcelas iguais. Porém, no livro do terceiro ano, muda para os "saltos" de animais, crianças..., cujo resultado conforma uma sequência numérica. Estas situações, que parecem ser de interesse da criança, desviam o foco do conceito de multiplicação para os saltos dos personagens. O cenário é privilegia pretensa situações do cotidiano das crianças.

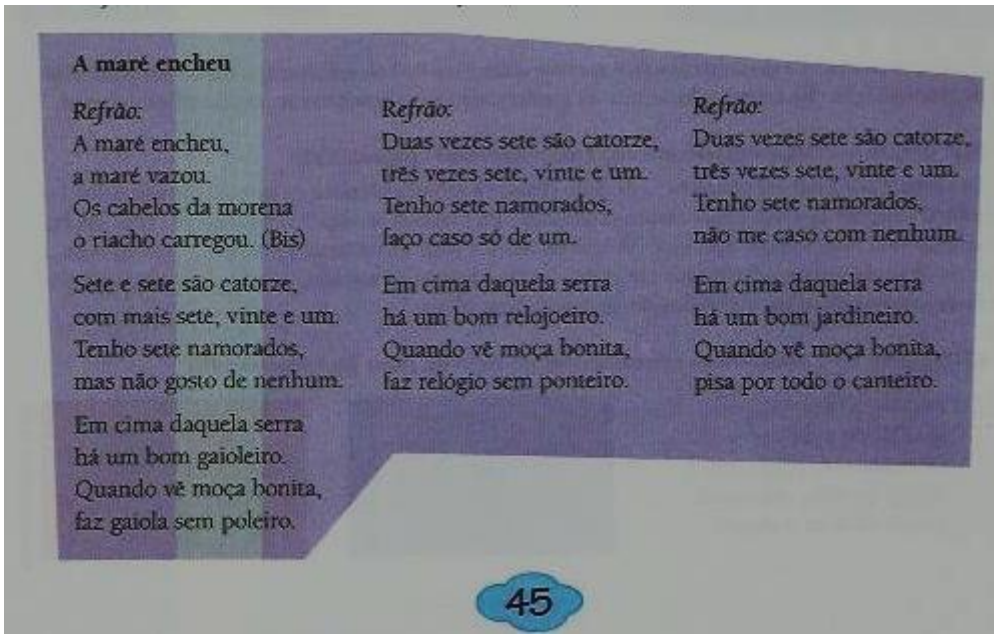
O enunciado do exercício (primeira página da ilustração 12) propõe que o estudante adivinhe a resposta. Para tanto, requer a simulação de continuar os saltos do bode, de *dois* (2) em *dois*, (2). A proposição é a mesma apresentada para a tabuada do número *três* (3), segunda página da ilustração 12. No entanto, as figuras ilustrativas mudaram: o bode, que salta sobre uma sequência de pedras numeradas de *zero* (0) a *vinte* (20), foi substituído pelo menino, que agora salta, numa trilha numerada.

A primeira página da ilustração anterior (12) traz uma adivinhação do tipo: *O que é, o que é?* "Pula como cabrito, espirra que nem bode. Vira pelo avesso. É quentinha que se come?" (CENTURIÓN, SCALA e RODRIGUES, 2011, p. 123). A resposta é *Pipoca*. Trata-se do ensino com base em situações sensoriais, peculiares às crianças. Na especificidade dessa situação, em vez de teor conceitual pode ocorrer muito mais um estímulo à degustação e ao paladar. Sendo assim, o desejo de aprender é substituído pelo despertar da necessidade de comer este cereal. E a tabuada? Em que sentido a pipoca, na situação apresentada, contribui para o ensino da tabuada? Qual é a relação do movimento da pipoca com a tabuada? A relação com a pipoca, do modo como está posto na referida situação, dá margem para o entendimento que a preocupação é atender ao princípio do "caráter sucessivo", característico do ensino tradicional. Este defende a relação dos conceitos a serem aprendidos, em situação escolar, com aqueles que a criança aprendeu fora da escola. Por consequência, pouco promissora, pois "leva a indistinção entre os conceitos científicos e os cotidianos, a aproximação exagerada entre a atitude propriamente científica e a cotidiana diante das coisas." (DAVÍDOV, 1987, p. 146).

A preocupação pedagógica com a memorização das tabuadas se expande para outras alternativas. Nesse sentido, no manual de orientação para o professor, dos livros didáticos do segundo e terceiro anos, menciona que "as músicas do cancioneiro popular fornecem excelente material para trabalhar a memorização dos fatos fundamentais da

multiplicação.” (CENTURIÓN, SACALA e RODRIGUES, 2011, p. 45). Também, propõe para que as crianças criem e apresentem novas estrofes aos colegas (Ilustração 13):

Ilustração 13 - Parlendas que envolvem a multiplicação



A maré encheu

Refrão:
A maré encheu,
a maré vazou.
Os cabelos da morena
o riacho carregou. (Bis)

Sete e sete são catorze,
com mais sete, vinte e um.
Tenho sete namorados,
mas não gosto de nenhum.

Em cima daquela serra
há um bom gaioleiro.
Quando vê moça bonita,
faz gaiola sem poleiro.

Refrão:
Duas vezes sete são catorze,
três vezes sete, vinte e um.
Tenho sete namorados,
faço caso só de um.

Em cima daquela serra
há um bom relojoeiro.
Quando vê moça bonita,
faz relógio sem ponteiro.

Refrão:
Duas vezes sete são catorze,
três vezes sete, vinte e um.
Tenho sete namorados,
não me caso com nenhum.

Em cima daquela serra
há um bom jardineiro.
Quando vê moça bonita,
pisa por todo o canteiro.

45

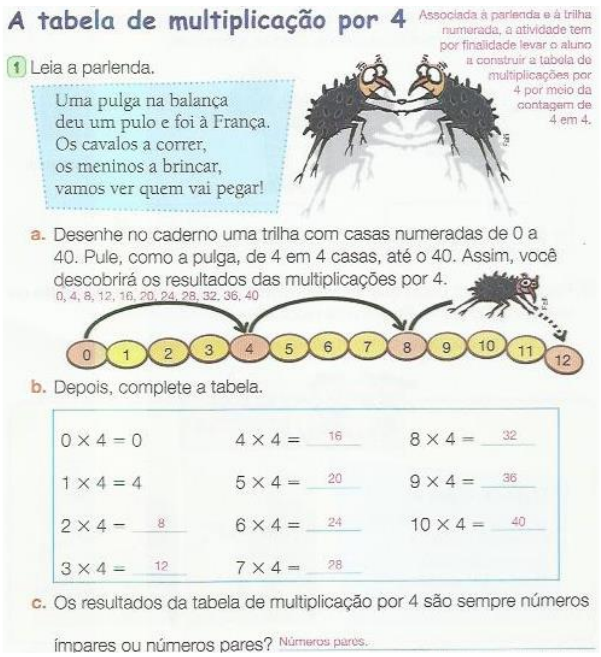
Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 45 – Orientação metodológica - terceiro ano).

Essa supervalorização do ensino edificado na realidade do estudante, fundamentado na lógica formal tradicional que

> pode ser considerada como um dos sistemas de redução do conteúdo, através do qual o entendimento chega a “formas" sem conteúdo, a formas puras e rigorosas, nas quais o pensamento lida apenas consigo mesmo, isto é, com “***nada***” de substancial. No limite extremo, essas formas se desvanecem, tornam-se o vazio, o nada de pensamento e de realidade, o absurdo. É essa a origem desse paradoxo que sempre desencorajou os lógicos: o pensamento exige que sejam postas com precisão as condições de seu acordo consigo mesmo, de sua coerência e, a partir do momento em que se pretende apreender um tal pensamento e um tal acordo sem conteúdo, não há mais pensamento; a própria forma parece desaparecer no momento em que é apreendida como forma. (LEFEBVRE, 1991, p. 132 - grifo do autor).

Qual conteúdo deve ser apropriado na situação anterior (Ilustração 13)? E, na parlenda que constitui o contexto introdutório da tabela de multiplicação por *quatro* (4), a seguir apresentado (Ilustração 14)?

Ilustração 14 - Multiplicação por *quatro* (4)



A tabela de multiplicação por 4

Associada à parlenda e à trilha numerada, a atividade tem por finalidade levar o aluno a construir a tabela de multiplicações por 4 por meio da contagem de 4 em 4.

1 Leia a parlenda.

Uma pulga na balança
deu um pulo e foi à França.
Os cavalos a correr,
os meninos a brincar,
vamos ver quem vai pegar!

a. Desenhe no caderno uma trilha com casas numeradas de 0 a 40. Pule, como a pulga, de 4 em 4 casas, até o 40. Assim, você descobrirá os resultados das multiplicações por 4.

0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

b. Depois, complete a tabela.

0 × 4 = 0	4 × 4 = 16	8 × 4 = 32
1 × 4 = 4	5 × 4 = 20	9 × 4 = 36
2 × 4 = 8	6 × 4 = 24	10 × 4 = 40
3 × 4 = 12	7 × 4 = 28	

c. Os resultados da tabela de multiplicação por 4 são sempre números ímpares ou números pares? Números pares.

Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 129 - terceiro ano).

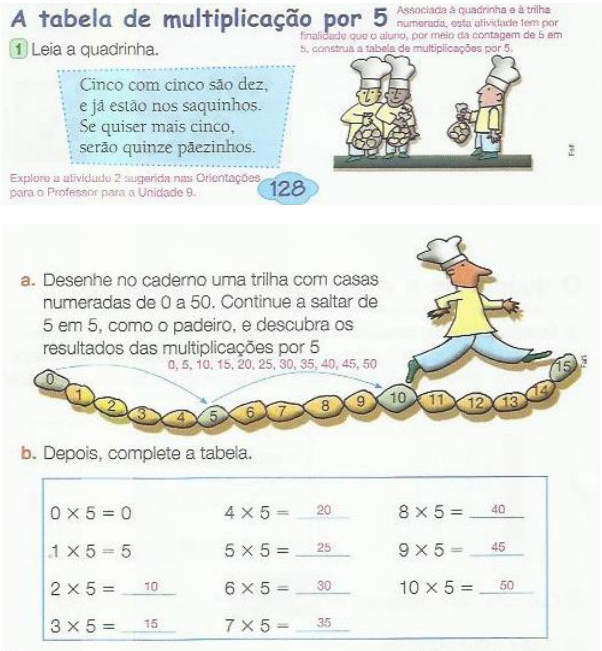
Observa-se que não há nenhuma relação entre a parlenda e a tabuada de número quatro, além da pulga envolvida nas duas situações. Trata-se, pois, de apenas um indício externo, insubstancial e desnecessário. O foco é para os saltos da pulga, em que não se considera o comprimento destes, a grandeza contínua, mas apenas uma grandeza discreta (casas da trilha). A orientação (Ilustração 14) é para que se descubram os resultados da tabela de multiplicação por *quatro* (4). Para tanto, sugere o desenho de uma trilha numerada de *zero* (0) ao *quarenta* (40) e, em seguida, "pular como a pulga" de *quatro* (4) em *quatro* (4) casas até o fim da trilha, no número *quarenta* (40). A sequência numérica obtida apresenta uma característica em comum: cada pulo contém *quatro* (4) unidades. Desse modo, os resultados da tabela de multiplicação formam a seguinte sequência numérica: (0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40), na qual cada termo posterior é *quatro* (4) unidades maior que o anterior.

A característica substancial, *soma de quantidades iguais*, apresentada nas tabelas de multiplicação, no livro didático do segundo ano, torna-se insubstancial, na tabela de multiplicação no livro do terceiro ano. Agora, o atributo substancial refere-se aos saltos dos personagens apresentados em cada tabuada. Esse esquema empírico de generalização e abstração perde seu valor real cognoscitivo e torna-se apenas um método de diferenciação

e classificação de objetos por meio de uma ou outra característica externa (DAVÝDOV, 1982).

Ao adotar a característica “saltos” como geral, nas tabelas de multiplicação, contempla-se o seguinte conteúdo: toda tabela de multiplicação é constituída por uma sucessão de saltos *n*. Neste caso, *n* representa o número de unidades de cada salto ($1 \leq n \leq 10$), isto é, cada salto posterior é *n* unidades maior que o anterior. O resultado dos saltos forma uma sequência numérica que, na especificidade da tabela de multiplicação por *quatro* (4), temos $n = 4$. A formação da sequência numérica altera a ordem dos fatores que compõem as tabuadas, pois, no livro do segundo ano, o multiplicando é o número fixo e no livro do terceiro ano é o multiplicador que assume o papel passivo. Essa inversão se repete nas demais tabuadas, como se pode verificar na introdução referente à tabuada de cinco (Ilustração 15):

Ilustração 15 - Tabela de multiplicação por *cinco* (5)



Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 128-129 - terceiro ano).

A sistematização da tabuada de *cinco* (5) é iniciada por meio da construção de uma trilha numerada de *zero* (0) até *cinquenta* (50), conforme ilustração (15). Para descobrir os resultados, a proposição é que se salte de *cinco* (5) em *cinco* (5), assim como faz o padeiro do exercício proposto. Em seguida, completa-se a tabela com os resultados dos saltos. Nesta etapa de elaboração do conhecimento, o objeto (tabela de multiplicação por cinco) encontra-se

num estágio mais simples, o da representação, que está relacionada com a sequência de "saltos do padeiro".

Os indícios distintivos na representação do objeto são dados de modo direto que tem sua importante na vida diária. Mas, qual a relevância dos saltos da pulga e do padeiro para a vida diária? Esse movimento empírico de formação de conceito, perde seu valor real cognoscitivo e torna-se apenas um método de diferenciação e classificação de objetos, por meio de uma ou outra característica externa. Como alerta Davýdov (1982), neste caso, o geral consiste na abstração dos atributos iguais, apresentadas nos objetos, e a inserção dos mesmos numa classe e, a partir daí, é que se revela a comunidade de atributos.

O atributo pertencente a um objeto isolado não é por si, nem geral nem particular. Este ato (de atribuir característica) só é viável no plano mental, em seu conceito. Neste caso, as tabelas de multiplicação só podem ser associadas à classe de sucessão numérica no plano conceitual, pois carecem de relação interna.

Novamente se explicita a ideia de que o conceito é um representante geral de objetos soltos que fazem parte de certa classe. Eles expressam uma "comunidade de coisas, mas uma comunidade formal." (DAVÝDOV, 1982, p. 61). Isto significa dizer que, nessas circunstâncias, a lógica formal tradicional adota como geral a tese dos nominalistas. Isto é, como um produto mental que serve para conceituar (dar nomes) aos objetos.

Nesse sentido, Rosental (1962, p. 237) alerta:

> Para criar um conceito geral, é necessário separar, abstrair dos atributos [características] próprios dos fenômenos singulares e deixar só os atributos [características] comuns a toda uma classe de fenômenos. Aplicando este procedimento de generalização, o geral se contrapõe ao singular, aos vários fenômenos singulares. No geral e no particular se separam e se estudam cada um por si. Deste modo, semelhante divisão e estudo por separado dos atributos [características] é importante, é indispensável para diferenciar uns objetos de outros, as características particulares do geral, da espécie de gênero, etc. Contudo, por meio dessa generalização, o geral não se apresenta como essência contraditória, como unidade do comum e do particular.

Voishvillo (1967, apud DAVÝDOV, 1982) afirma que a separação do geral formal, por meio do processo de confrontação de objetos concretos singulares, pode ocorrer tanto em operações objetivas ou sensoriais diretas como no plano das imagens, das representações. Contudo, o conceito contém apenas as características substanciais dos objetos. Qualquer propriedade externa, superficial pode tornar-se conteúdo do conceito.

O conceito mais geral, “em comparação com o menos geral, se distingue pela menor quantidade de características nele refletidas”. Na lógica formal tradicional, o conceito desarticula a imagem do objeto “se não somos capazes de fazer isso, nos encontramos no estágio de representação.” (VIETROV, 1959, apud DAVÝDOV, 1982 p. 64). Tal intento é proposto nos livros em análise. Após a situação que envolve o salto do padeiro (Ilustração 15), os autores apresentam o seguinte exercício (Ilustração 16):

Ilustração 16 - Para além do estágio da representação

Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 130 - terceiro ano).

Esse método de formação de conceitos, de acordo com Vietrov (1958, apud, DAVÝDOV, 1982), possibilita que os indivíduos ultrapassem a limitação da experiência sensorial e conheçam vínculos e relações que não são refletidas mediante os órgãos dos sentidos. Assim, há dois aspectos a serem considerados. Primeiro, que a lógica formal reconhece a existência objetiva de ligações e relações que não estão disponíveis para os órgãos dos sentidos. Segundo, elas podem ser captadas por meio da abstração formal de propriedades comuns.

Na especificidade da tabuada de *cinco* (5), por exemplo, cada operação que a compõe é uma singularidade (5 x 7 = 35...). O conjunto de operações que compõe a tabuada do *cinco* (5) é uma particularidade, ou seja, o *particular* se refere a “um conjunto definido ou parte de um conjunto [...]” (LEFEBVRE, 1991, p. 139); finalmente, o “*geral* designa um conjunto indefinido [...]”**,** que serve para todas as tabelas de multiplicação, “[...] uma classe de objetos ou de seres que possuam um caráter comum isolado por abstração.” (LEFEBVRE, 1991, p. 139). Na especificidade das tabelas de multiplicação, no livro do terceiro ano, o geral é resultado dos “saltos” dos personagens de cada tabuada.

A lógica formal não investiga o caráter contraditório do geral e particular, aborda o conceito apenas como um conjunto de atributos. A relação entre o geral e o particular é examinada somente sob o ponto de vista de quais são as características, as propriedades inerentes a um conceito e quais são inerentes a outro. “Para a lógica formal não é importante a

dialética do geral e do particular, do nexo, da passagem de um para o outro, mas sua diferença, sua separação." (ROSENTAL, 1962, p. 238).

Desse modo, a lógica formal atua com conceitos inertes. Não considera os processos de desenvolvimento e mudanças (ROSENTAL, 1962). De acordo com Davýdov (1982), revela sua debilidade de princípios, sua inaplicabilidade para a interpretação nos processos de generalização e formação de conceitos científicos. Carece de critérios para associar os objetos em grupos, nos quais estão interligados por meio das relações internas, pela essência e não apenas pela aparência externa.

Na interpretação lógico-formal, o conceito "é a ligação entre a palavra e o objeto" (VOISHVILLO, 1967, apud DAVÝDOV, 1982, p. 74). É resultado da soma de várias características dos objetos (ROSENTAL, 1962). O concreto é concebido como o objeto mesmo, o singular, passível de observação por meio dos órgãos dos sentidos. O abstrato, por sua vez, é entendido como o geral. O geral "atua na imagem sensorial-concreta sob forma empírica, como semelhante, único para uma série de objetos." (KOPNIN, 1978, p. 158).

O conteúdo vivo do conceito não existe na realidade: a classe é uma formação mental, uma entidade abstrata, é uma propriedade de muitos objetos convertida em matéria do pensamento. O conteúdo abstrato uma vez desarticulado e consolidado verbalmente é isento de evidências. Assim, a "não evidência" e a forma puramente verbal de expressão são as características do próprio *conhecimento abstrato*, ou seja, do conceito (DAVÝDOV, 1982).

Nesse sentido, o pensamento consiste, de um lado, no trânsito do sensorial concreto e singular, entendido como "objeto solto sensorialmente perceptível ou sua imagem gráfica [...]" para o mental abstrato e formalmente geral (DAVÝDOV, 1982, p. 332). Por outro lado, na transição inversa, do abstrato para o sensorial-concreto, ocorre o desprendimento da identificação de certos objetos singulares como pertencentes a uma classe dada, ou seja, o geral. Tanto o "**princípio** como o **final** desse processo envolve *o sensorial-concreto* [...]" (DAVÝDOV, 1982, p. 75 – grifos do autor), sua classificação e sistematização, identificação e diferenciação.

O movimento de formação do conceito empírico, de acordo com Davýdov (1982), segue do particular para o geral. O geral não existe como tal na realidade, mas representado somente no plano mental. É o produto, o resultado da comparação de objetos singulares, o resultado de sua generalização no conceito. Portanto, o geral surge como resultado da ascensão do sensorial concreto ao abstrato mental, expresso na palavra.

Sendo assim, o "objetivo do pensar é alcançar o nível 'teórico' do conhecimento." (DAVÝDOV, 1982, p. 117). O nível de abstração é medido pela quantidade e variedade de objetos que constituem uma determinada classe. Quanto mais alto o nível de generalização, mais abstrato e "teórico" será o pensamento.

Esse movimento conceitual requer que o ensino de matemática seja organizado da aritmética para a álgebra. O foco nos primeiros anos escolares incide em uma particularidade "menos" abstrata: a aritmética. Vale lembrar que os exercícios anteriormente analisados contemplavam apenas as significações aritméticas. Atendiam as necessidades de contagem e operacionalização nos limites dos números naturais a partir de grandezas discretas. No que diz respeito à multiplicação, os autores exploram as várias ideias relacionadas, tais como: adição de parcelas iguais; organização retangular; tabelas de multiplicação; ideia de probabilidade; ideia combinatória e ideia de proporcionalidade, todas relacionadas aos conhecimentos à vivência dos estudantes.

Como diz Davídov e Slobódchikov (1991), a educação tradicional sustenta a ideia de que a escola é uma instituição que tem a função de ensinar e educar. Nesse sentido, o ensino é concebido como transmissão direta de conhecimentos, habilidades e hábitos que serão úteis ao estudante em sua vida futura. Ou seja, a escola ensina às crianças o que elas precisam saber para se inserirem, futuramente, no mercado de trabalho. E educa-os no sentido de adequá-los aos modos de produção vigentes[13].

Nesse sentido, contemplam-se no ensino os conhecimentos, habilidades e hábitos que serão úteis ao estudante para se inserir no mercado de trabalho. Desse modo, a educação é um mecanismo de adequação dos sujeitos aos modos de produção.

Além disso, de acordo com Davídov (1987), no ensino tradicional os programas de ensino são elaborados em consonância com a capacidade dos estudantes, determinada pela psicologia tradicional, para cada faixa etária. Desse modo, a aprendizagem ocorre, quando a criança atinge maturação biológica (VIGOTSKI, 2000) [14].

A psicologia tradicional supõe que uma criança com idade escolar regular e que frequenta o primeiro ano escolar não está psicologicamente desenvolvida para aprender conteúdos relacionados à álgebra, em função do seu alto nível de abstração. Então, nos

[13] Sistema capitalista. Neste, a educação é empírica.
[14] Esta é uma crítica de Vigotski à psicologia de Piaget.

primeiros anos da educação básica, o ensino de Matemática é limitado à aritmética. A álgebra fica relegada aos últimos quatro anos do Ensino Fundamental.

Porém, estudos realizados por neurologistas e psicólogos demonstram que o "pensamento lógico inicia seu desenvolvimento a partir dos 6 anos" de idade. (ILIENKOV, 2006, p. 53). É na idade escolar inicial que se desenvolvem as funções psíquicas superiores, que têm "como traços fundamentais e distintivos precisamente a intelectualidade e a assimilação, ou melhor, a tomada de consciência e a arbitrariedade." (VIGOTSKI, 2000, p. 282). A idade escolar é ideal para a criança receber "informação e socialização adequada, depois é mais difícil adquiri-la, apesar da capacidade e plasticidade do cérebro." (ILIENKOV, 2006, p. 53). As "leis e formas da lógica formal não podem servir de base ao método filosófico e à teoria do conhecimento, porquanto abstrai o desenvolvimento quer dos fenômenos do mundo exterior, quer do pensamento." (KOPNIN, 1978, p. 81).

Ao conceber o pensamento em desenvolvimento, Vigotski (2000) afirma que a aprendizagem da álgebra contribui para uma compreensão mais profunda da aritmética. E Davýdov (1987), afirma que a aprendizagem reduzida às significações aritméticas limita a compreensão posterior dos conceitos algébricos. De outro modo, o ensino tradicional obstaculiza a aprendizagem de conceitos propriamente científicos, não contribui para a elaboração de um pensamento sistemático, organizado e profundo. Esse ensino é insuficiente para o desenvolvimento do pensamento teórico (DAVÝDOV, 1982).

Conforme mencionamos, além do currículo organizado em consonância com a faixa etária dos estudantes, geralmente os conteúdos que constituem as disciplinas, no ensino tradicional, estão vinculados aos conhecimentos obtidos em situações não escolares, adquiridos anteriormente à idade escolar das crianças (DAVÍDOV e SLOBÓDCHIKOV, 1991). Esta orientação não está restrita apenas aos primeiros anos escolares, mas se estende para todo Ensino Fundamental. De acordo com os autores em referência, a diferença de conteúdos do início do Ensino Fundamental para o final dessa etapa da Educação Básica consiste na quantidade e complexidade dos conteúdos. Mas a base do ensino permanece, isto é, são os conhecimentos cotidianos dos estudantes. Os conteúdos são abordados em maior quantidade e os conceitos são mais complexos, porém com base no conhecimento cotidiano (DAVÍDOV e SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Desse modo, a "complexidade do pensamento raramente supera a condição de pensamento intuitivo, limitando-se às condições postas pelo pensamento empírico, não

atingindo níveis de pensamento teórico que se articula entre juízos, conceitos e deduções de forma dialética.” (BERNARDES, 2011, p. 13).

A adoção dos fundamentos da lógica formal não é uma exclusividade da proposição em análise. De modo geral, as proposições brasileiras contemplam uma variedade de objetos da realidade do estudante. Esse procedimento permite, de certo modo, ilustrar as características essenciais e gerais dos objetos e formular conceitos. Trata-se da elaboração do conceito com base na aparência externa e características gerais (DAMAZIO, ROSA, EUZÉBIO, 2012). Essa corrente empírica persiste, atualmente, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), tanto em vários livros didáticos de matemática quanto no ideário de muitos professores da referida disciplina.

Com o intuito de oferecer subsídios teórico-metodológicos para repensarmos algumas proposições brasileiras, no próximo capítulo apresentaremos a proposição davydoviana para o ensino de matemática. Vale antecipar que Davýdov anuncia que sua proposição de ensino é fundamenta na lógica dialética. Nosso esforço, durante a análise, será confirmar ou refutar tal máxima davydoviana.

2 PROPOSIÇÃO PARA O ENSINO DA TABUADA COM BASE NA LÓGICA DIALÉTICA

> *"A tomada de consciência passa pelos portões dos conceitos científicos."* (VIGOTSKI, 2000, p. 290).

No presente capítulo, analisamos o movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para o ensino da tabuada. Os dados da pesquisa são as tarefas davydovianas. Estas foram extraídas dos livros didáticos e dos manuais de orientação ao professor, para utilização do livro didático, escritos por Davýdov (ДАВЫДОВ) e colaboradores Gorbov (ГОРБОВ), Mikulina (МИКУЛИНА) e Savieliev (САВЕЛЬЕВА).

Esse material didático foi produzido com base em pesquisas desenvolvidas pela equipe formada por Davýdov e colaboradores, durante 25 anos com base nos fundamentos da Teoria Histórico-Cultural. As reflexões sobre a experiência realizada em sala de aula, com base nos pressupostos teórico-metodológicos, possibilitaram um amplo processo de elaboração e reelaboração da proposta. Esse movimento é refletido nos manuais de orientação ao professor em forma de relato de experiência, em um livro à parte. Sem essas, não entenderíamos as correspondentes tarefas no livro didático. Alertamos ao leitor que, para a efetiva compreensão das tarefas apresentadas no decorrer do presente capítulo, o processo de leitura é marcado por um movimento de idas e vindas, pois linearmente será insuficiente.

No que se refere ao processo da presente investigação, inicialmente identificamos a orientação metodológica apresentada nos manuais de orientação ao professor correspondente às tarefas apresentadas nos livros didáticos. Na sequência, procedemos ao estudo, concomitante, das tarefas com as orientações, base para a identificação de que Davýdov e colaboradores desenvolvem a tabuada a partir de um sistema conceitual (conceito de número, relação de multiplicidade, divisibilidade, relação parte-todo, adição, subtração, entre outros). Todos os conceitos se articulam na relação entre grandezas discretas e contínuas na inter-relação das significações aritméticas, algébricas e geométricas (EUZÉBIO, 2011; ROSA, SOARES e DAMAZIO, 2011; ROSA, 2012; ROSA e DAMAZIO, 2012; MADEIRA, 2012; ALVES, 2013; CRESTANI, 2013; DORIGON, 2013; MATOS, 2013; SILVEIRA, 2012; SOUZA, 2013; ROSA, DAMAZIO e ALVES, 2013; ROSA et al., 2013; ROSA, DAMAZIO e CRESTANI, 2014).

Em consonância com o método de investigação, consideramos o sistema conceitual mencionado anteriormente, o que significa dizer que também contemplamos as tarefas geradoras das condições de origem da tabuada, na proposição davydoviana[15]. Para tanto, selecionamos as tarefas que refletem a totalidade do sistema conceitual no qual a tabuada é introduzida e as reproduzimos, fidedignamente, no presente capítulo, inclusive com a resolução proposta nos manuais de orientação ao professor.

A metodologia de ensino da proposição davydoviana é expressão de um conjunto de princípios da Teoria Histórico-Cultural válidos para todas as disciplinas do currículo desde a Educação Infantil. Além disso, vale esclarecer que a tabuada é somente uma parte desse sistema integral, referente a uma única disciplina, a matemática. Portanto, em termos de desenvolvimento do pensamento teórico, há que se considerar o caráter mais amplo desta proposta. Pois, somente um conceito isolado não resolve o problema do desenvolvimento do tal pensamento em sua totalidade. Vale ressaltar também a necessidade de se repensar uma das finalidades da educação pré-escolar, a de preparar a criança para a atividade de estudo. Pois, sem uma educação pré-escolar adequada acreditamos que não é possível desenvolver a proposição davydoviana no Ensino Fundamental.

No início da pesquisa, nossa pretensão era escanear as imagens dos livros didáticos e, por meio das ferramentas “copiar” e “colar”, inserir no presente capítulo. Porém, descartamos essa possibilidade devido a uma exigência do método de pesquisa, no que se refere ao movimento do objeto. Para apresentarmos as tarefas em movimento, em relação ao seu processo de resolução, foi necessária a reprodução das imagens ilustrativas, apresentadas nos livros didáticos no contexto das orientações apresentadas nos manuais de orientação ao professor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008; ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003). Ao final dos parágrafos elaborados, a partir dos manuais de orientação ao professor, apresentamos as devidas referências. Os parágrafos sem referência são expressões da nossa interpretação.

Ao debruçarmo-nos aos estudos referentes à proposição davydoviana e nos trabalhos teóricos desenvolvidos por Davýdov e colaboradores, identificamos que eles consideram, com base em Elkonin, que desde o nascimento até a vida adulta, o desenvolvimento humano transcorre por seis estágios/etapas marcados por atividades

[15] No decorrer do texto, quando mencionamos “em Davýdov” nos referindo à proposição de ensino de Davýdov e colaboradores.

principais. A mudança de uma atividade para outra "caracteriza a sucessão de outros períodos evolutivos" (DAVÍDOV, 1988, p. 74):

1) **Do nascimento até um ano de idade,** a atividade principal é a *comunicação emocional direta* com os adultos. A comunicação ocorre por meio do choro, sorriso, percepção de objetos, reconhecimento das pessoas de convivência próxima, entre outros (VYGOTSKY, 2000; DAVÍDOV, 1988).

2) **De um ano até três anos de idade,** a atividade principal é a *objetal-manipulatória,* inicialmente realizada com a colaboração do adulto. A criança reproduz procedimentos de ações, por meio da manipulação dos objetos produzidos historicamente pela humanidade. Nesse processo, surge a linguagem, a designação dos objetos com sentido, a percepção do mundo objetal e o pensamento concreto em ações (VYGOTSKY, 2000, e DAVÍDOV, 1988). Nessa idade, no diálogo entre crianças e adultos, formam-se, conforme mencionamos no primeiro capítulo, os pseudoconceitos (VYGOTSKY, 2000). Vale advertir que estes não são exclusividades das crianças, trata-se de uma forma de pensar que também ocorre com certa frequência no cotidiano dos adultos (DAVÝDOV, 1982).

3) **De três a seis anos de idade,** a *atividade do jogo* é a principal. Surge, na criança, a imaginação, a função simbólica, a orientação no sentido geral das relações e ações humanas. A criança imita as ações dos adultos e, assim, inicia a formação das vivências generalizadas e a orientação consciente nestas (DAVÍDOV, 1988).

4) **De seis a dez anos de idade** ou idade escolar, a atividade principal é a de *estudo*. Neste momento, surge nos estudante, inclusive nos de menor idade, o pensamento teórico, as capacidades de reflexão, análise, planejamento, necessidades e motivos de estudo (DAVÍDOV, 1988).

5) **De dez a quinze anos de idade,** ocorre o predomínio à *atividade socialmente útil,* como o trabalho, o estudo, a organização social, o esporte e a arte. Nesse momento surge nos adolescentes o desejo de participar do trabalho socialmente necessário. A "tendência para organizar a comunicação em diferentes coletivos considerando as normas de inter-relações acordadas, a reflexão sobre o próprio comportamento, a capacidade de avaliar suas possibilidades, isto é, a autoconsciência" (DAVÍDOV, 1988, p. 75).

6) **De quinze aos dezessete/dezoito anos de idade,** correspondente ao ensino médio e cursos profissionalizantes, a atividade principal é a de *estudo-profissional*. Nesta, desenvolve-se a necessidade de trabalhar e o interesse por uma profissão. Iniciam-se as

“atitudes investigativas, a capacidade de construir projetos de vida, as qualidades ideológicas-moral e cívica, além de uma concepção estável de mundo. Nesta idade, as garotas e os garotos adquirem sua primeira qualificação em alguma profissão” (DAVÍDOV, 1988, p. 75).

Dentre o conjunto dessas atividades principais, o contexto no qual são propostas as tarefas referentes ao ensino da tabuada é a atividade de estudo. A transição da atividade do jogo para a atividade estudo, de acordo com Davídov (1988), é um momento de redirecionamento essencial na vida da criança. Nesse sentido, externamente, observam-se as mudanças referentes à organização marcada por novas obrigações, as de estudante. Ao ingressar na escola, “a criança começa se apropriar dos rudimentos das formas mais desenvolvidas da consciência social, ou seja, da ciência, da arte, da moral, do direito, aquelas ligadas com a consciência e o pensamento teórico” (DAVÍDOV, 1988, p. 158).

O modo de apropriação das formas de consciência social, por parte das crianças, pressupõe a realização de uma atividade adequada à sua idade (atividade de estudo), com o conteúdo que lhe é peculiar, “os conhecimentos teóricos” (DAVÍDOV, 1988, p. 172). Na atividade de estudo, as crianças reproduzem os conhecimentos e habilidades correspondentes aos fundamentos das formas de consciência social, tais como reflexão, análise, memória, pensamento, atenção, imaginação e experimento mental, inerentes ao pensamento teórico (DAVÍDOV, 1988). Desse modo, ocorrem mudanças internas, no próprio estudante, dentro de si, e não no objeto com o que está operando. A “atividade de estudo deve ser entendida como atividade para a autotransformação do sujeito” (REPKIN, 2014, p. 88).

A denominação *atividade de estudo* não deve

> identificar-se com o termo “aprendizagem”. Como se sabe, as crianças aprendem nas formas mais diversas de atividade (no jogo, no trabalho, no esporte, etc.). A atividade de estudo tem um conteúdo e uma estrutura especial e há que diferenciá-la de outros tipos de atividade que as crianças realizam tanto na idade escolar inicial como em outras (por exemplo, há que diferenciá-la da atividade lúdica, social-organizativa, laboral, etc.). Além disso, na idade escolar inicial, as crianças realizam outros tipos de atividade, porém, a principal é a de estudo [...] (DAVÍDOV, 1988 p. 159).

Davýdov (1982) preconiza a possibilidade de apropriação dos conhecimentos teóricos, por parte da criança. Para tanto, juntamente com seus colaboradores, estruturou sua proposição de ensino em conformidade com a atividade de estudo, sob uma base orientadora das ações.

No contexto da atividade de estudo, os autores em referência apresentam várias tarefas principais de estudo, para cada sistema conceitual. A finalidade da primeira tarefa de estudo, em Matemática, consiste na "obtenção e o emprego do número como meio especial de comparação das grandezas" (DAVÍDOV, 1988, p. 188). Esta é desenvolvida com base nas seis ações, por meio de várias tarefas particulares. Na segunda, o foco incide nos conceitos de adição e subtração, inseridos num sistema mais amplo que envolve relação todo- partes, resolução de problemas, equações, entre outros (DAVÝDOV, 1988; ALVES, 2013; DORIGON, 2013; MATOS, 2013).

Os conceitos de multiplicação e divisão, por sua vez, constituem o núcleo do sistema conceitual referente à terceira tarefa de estudo. Davýdov e colaboradores contemplam as relações de multiplicidade e divisibilidade desde o primeiro ano escolar (DAVÍDOV, 1988; MADEIRA, 2012; CRESTANI, 2013).

A tarefa de estudo tem como finalidade "eliminar o fracasso de alguém, de superar a própria capacidade para resolver um determinado problema" (REPKIN, 2014, p. 97). Cada tarefa de estudo, na proposição davydoviana, é composta por seis ações, estas são desenvolvidas por um sistema de tarefas particulares. Vale salientar que não se trata de uma sequência fragmentada e linear na qual para cada ação há um conjunto de tarefas específicas. Em alguns casos, uma mesma tarefa particular[16] atende uma ou mais ações de estudo. A referência de análise, no presente capítulo, incide na terceira tarefa de estudo, com recorte para o conceito de tabuada, a partir das seguintes ações (DAVÍDOV, 1988, p. 181):

> 1) Transformação dos dados da tarefa de estudo com a finalidade de revelar a relação universal do objeto estudado;
> 2) Modelação da relação universal na forma objetal, gráfica e literal;
> 3) Transformação do modelo da relação universal para o estudo de suas propriedades em "forma pura";
> 4) Construção de um sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
> 5) Controle da realização das ações anteriores;
> 6) Avaliação da apropriação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada.

A seguir, apresentaremos a análise das tarefas que constituem o sistema conceitual no qual a tabuada se insere.

[16] Vale lembrar que as tarefas particulares na proposição davydoviana correspondem aos exercícios ou atividades da proposição brasileira.

2.1 TAREFAS EXTRAÍDAS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO PRIMEIRO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

O material pedagógico da proposição davydoviana referente ao primeiro ano do Ensino Fundamental foi objeto de estudo de Rosa (2012), Souza (2013) e Matos (2013). Rosa (2012) investigou os possíveis nexos e relações entre as significações que expressam a síntese histórica e as formas como o homem se apropria do conceito de número em Davýdov. De acordo com a autora em referência, Davýdov, colaboradores e continuadores apresentam uma proposta para o ensino de Matemática, cuja finalidade é de que os estudantes compreendam o conceito teórico dos números reais como singularidades e particularidades das relações gerais entre grandezas discretas e contínuas.

Rosa (2012) identificou, no material didático, a primeira tarefa de estudo apresentada por Davýdov e colaboradores, como aquela que tinha a finalidade de obtenção e emprego do número como meio especial de comparação das grandezas. A tarefa é composta pelas seis ações de estudo, que especificamos na seção anterior, desenvolvidas por meio de um sistema de tarefas particulares. A autora revelou a base geneticamente inicial da interconexão entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas, no sistema integral da tarefa de estudo davydoviana para introdução do conceito de número no primeiro ano do Ensino Fundamental. Além disso, demonstrou as múltiplas relações e interconexões entre as significações numéricas no movimento que envolve as seguintes dimensões: geral ↔ particular ↔ universal↔ particular ↔ singular.

Souza (2013) analisou a distinção entre a proposição davydoviana e a formalista moderna no que se refere ao ensino do conceito de número e concluiu que as duas propostas de ensino se distinguem, em método e conteúdo. A proposição modernista envolve “uma base eminentemente empírica, dada a ênfase para que os estudantes apenas observem no exposto (conjuntos) o aparente” (SOUZA, 2013, p. 220). A proposta davydoviana envolve “de modo enfático a relação entre medidas de grandezas de mesma natureza, convida e coloca o estudante em permanente processo de análise, não somente com base em aparências externas, mas pelas relações e nexos do próprio conceito” (SOUZA, 2013).

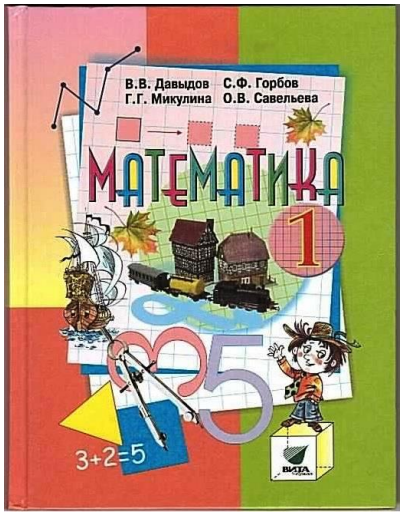
Matos (2013) investigou o ensino de resolução de problemas relacionados às operações de adição e subtração no primeiro ano do Ensino Fundamental. A autora verificou que as tarefas de introdução propõem a revelação da gênese de resolução de problemas a partir da decomposição do todo em partes e da relação entre as partes que compõe o todo. Essa relação é modelada em um processo que ocorre, inicialmente, na reta numérica e culmina com a construção do esquema composto por segmento de reta, arcos e letras. A essência da relação interna, expressa no modelo, é fundamentada no movimento inverso entre as operações de adição e subtração.

Conforme apontaram as pesquisas de Rosa (2012) e Souza (2013), o conceito de número é apresentado em Davýdov a partir das relações de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas. Na presente investigação, também analisamos a proposição davydoviana para o primeiro ano. Porém, nosso foco de análise incide nas relações de multiplicidade entre grandezas, que são a base fundamental do sistema conceitual no qual se insere a tabuada.

O material do primeiro ano é composto por um livro didático, um manual de orientação ao professor e um caderno do estudante. Nesse caderno são apresentadas as tarefas complementares para os estudantes resolverem. Em termos conceituais, apenas repete o que já foi proposto nos outros dois livros. Por isso, não o consideramos como referência de análise.

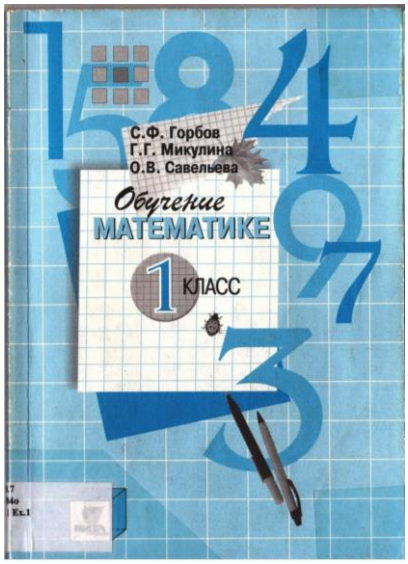
Conforme mencionamos anteriormente, o livro didático do primeiro ano é composto por várias tarefas para os estudantes desenvolverem. No manual de orientação ao professor consta o percurso teórico-metodológico para o desenvolvimento das tarefas. A título de ilustração, apresentamos, respectivamente, as imagens das capas dos dois livros (Ilustrações 17 e 18):

Ilustração 17 - Livro didático referente ao 1º ano do Ensino Fundamental



Fonte: Давыдов, et al (2012a).

Ilustração 18 - Manual de orientação ao professor referente ao livro didático do 1º ano do Ensino Fundamental



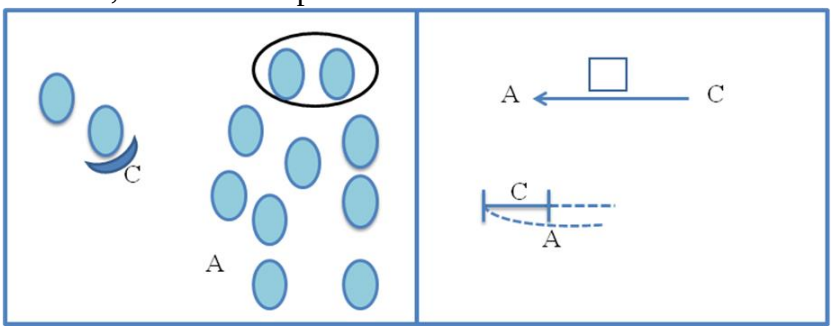
Fonte: Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Dentre as tarefas apresentadas no livro didático do primeiro ano, selecionamos cinco para análise, uma vez que elas representam a totalidade do movimento conceitual, apresentado no primeiro ano no que se refere à relação de multiplicidade entre grandezas discretas e contínuas.

Tarefa 1: Determine o valor aritmético da quantidade A, com base na unidade de medida composta C (Ilustração 19). Registre o procedimento de medição por meio de

agrupamentos dos objetos e o resultado por meio de segmentos e no esquema de seta (ДАВЫДОВ et al., 2012a).

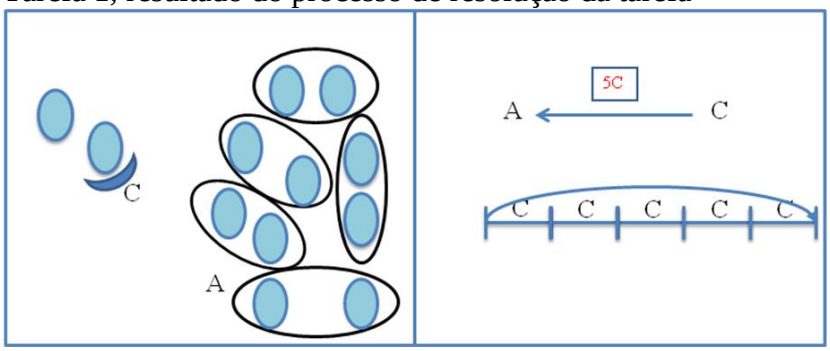
Ilustração 19 - Tarefa 1, medidas compostas



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012a, p. 45).

A tarefa consiste em determinar o valor aritmético de A, com base na unidade de medida (C). Esta é composta por dois objetos (Ilustração 19). Uma unidade de medida, que é composta por dois ovais, (C), já consta na contagem dos objetos e ao lado foi representada no esquema (um segmento). Os demais objetos também serão agrupados e representados no esquema de segmentos. Este procedimento é adotado até que se complete a contagem. A conclusão, devidamente orientada pelo professor, será que a quantidade A equivale a *cinco* (5) unidades de medida C (Ilustração 20). Faz-se o registro do número *cinco* (5) no esquema com flechas e um arco no registro com segmentos para destacar o total de unidades (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008):

Ilustração 20 - Tarefa 1, resultado do processo de resolução da tarefa



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Em síntese, a tarefa consiste na contagem de unidades compostas, que resultou em cinco (5). E requer a correspondência *dois-a-um*, pois se trata de uma unidade de medida composta. Vale salientar que os números, na proposição davydoviana extrapolam a ideia de

número como apenas resultado da contagem de objetos, nos limites da relação *um-a-um*, tal como ocorre na proposição de Centurión, Scala e Rodrigues (2011), mas com base na relação um a vários objetos. Assim, o numeral não é um representante direto da quantidade de objetos, mas depende da unidade de medida considerada para proceder à contagem (ROSA, 2012).

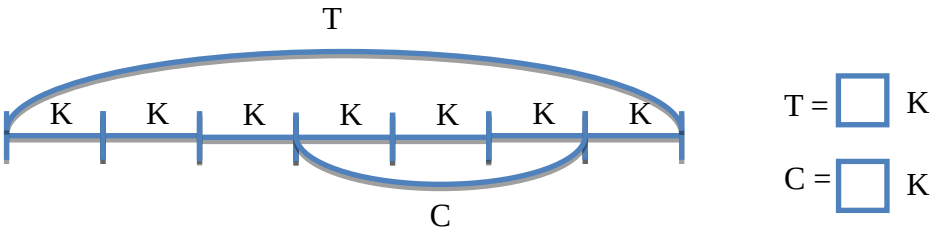
É característico do ensino tradicional que o

> aparecimento do material abstrato (em particular os símbolos expressos por letras) esteja vinculado com a finalização da aprendizagem de algum tema. No ensino experimental [desenvolvimental] esse material se introduz no início do trabalho escolar. Assim, os símbolos servem, em primeiro lugar, como meio para fixar as propriedades de um determinado material, revelado pelas crianças no processo de solução de muitos problemas concretos. Em segundo lugar, o material abstrato, introduzido relativamente na idade inicial escolar, serve como meio para que os alunos "captem" os fundamentos da ação objetal. (DAVÍDOV, 1988, p. 214).

Diferentemente da proposição davydoviana, a utilização de símbolos expressos por letras ocorre desde o inicio do primeiro ano do Ensino Fundamental.

Tarefa 2: Os valores T e C são compostos por quantas unidades de medida K (Ilustração 21)? Complete as igualdades (ДАВЫДОВ et al., 2012a).

Ilustração 21 - Tarefa 2, o aspecto quantitativo do número

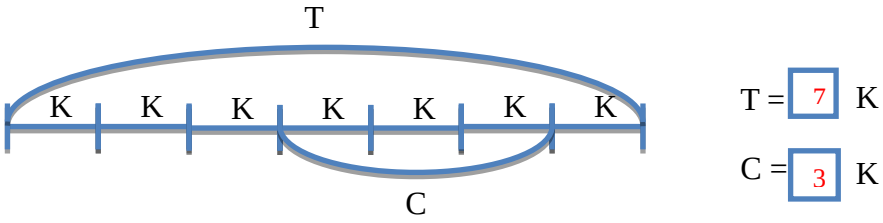


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 48).

Nesta tarefa, Davýdov e colaboradores sistematizam o aspecto quantitativo do número como representante do resultado da medição. Neste caso, o número se transforma numa resposta para a pergunta: *Quantas unidades de medida K contêm o segmento com medida T ou C?* A resposta, *sete* (7), é uma propriedade do valor genérico T. Esse novo significado é representado por meio de um novo registro: T = 7K (Ilustração 22). De modo análogo, obtém-se a resposta para a seguinte questão: *Quantas unidades de medida K cabem*

no segmento com medida C? Nessa situação o valor C é composto por *três* (3) unidades de medida K: C=3K (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 22 - Tarefa 2, nova forma de registro.

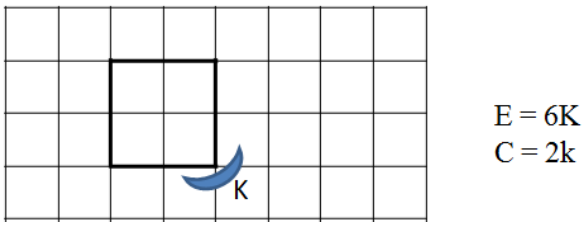


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Diferentemente da tarefa 1, em que a grandeza considerada foi a discreta, nesta, a grandeza contemplada é contínua (comprimento). A tarefa envolve significações aritméticas (3 e 7), algébricas (K, T e C) e geométricas (segmentos). Vale dizer que, em termos teóricos, um "segmento de reta é uma grandeza geométrica." (CARAÇA, 1984, p. 53). A relação entre dois segmentos é uma operação do campo geométrico, e na situação em discussão, o resultado dessa relação foi expresso por meio de símbolos aritméticos e algébricos (T = 7K e C = 3K). Assim apresentado e desenvolvido, o conceito de multiplicação faz parte do sistema conceitual no qual o número é introduzido em Davýdov[17]. O conceito de número na reta numérica é abordado na forma literal. Trata-se de uma preparação para o conceito de multiplicação que será estudado no segundo ano escolar.

Tarefa 3: Com base nas informações apresentadas na ilustração 23, construa uma figura cuja medida da área da superfície seja E. Nesta, destaque a área com medida C, a partir da unidade de medida composta, K (ДАВЫДОВ et al., 2012a).

Ilustração 23 - Tarefa 3, movimento do registro para a relação entre grandezas

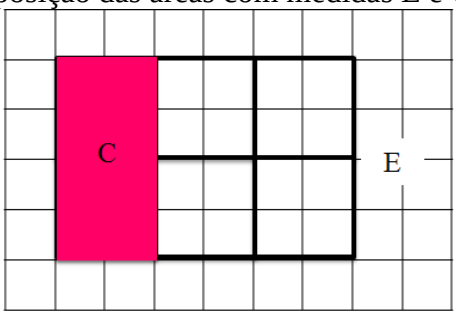


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012a, p. 48).

[17] Aos leitores interessados em aprofundar seus conhecimentos sobre a introdução do conceito de número em Davýdov indicamos a leitura da tese: Proposições de Davydov para o Ensino de Matemática no Primeiro ano Escolar: Inter-Relações dos Sistemas de Significações Numéricas de Josélia Euzébio da Rosa (ROSA, 2012).

De acordo com o registro, E = 6K, as crianças construirão uma figura cuja medida da área da superfície seja E (*seis* unidades de medida K) e, conforme prevê o enunciado destacar, na superfície de área E, a área com medida C (*duas* unidades de medida K), conforme ilustração 24 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008):

Ilustração 24 - Tarefa 3, composição das áreas com medidas E e C

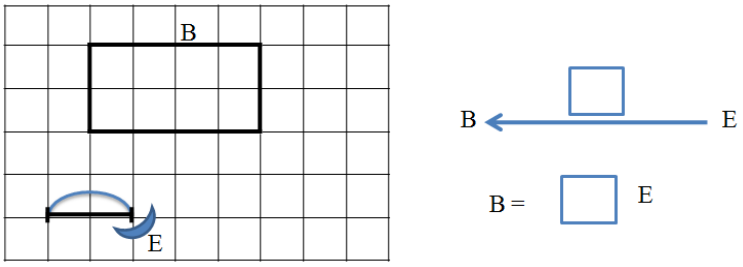


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Nas tarefas 1 e 2, o movimento de resolução da tarefa é da relação entre grandezas para o registro. Porém, na tarefa 3, ocorre o inverso, do registro para a relação entre grandezas. Esse movimento se repete ao longo de todo o sistema de tarefas, até atingir o conceito, como síntese de inúmeras abstrações.

Tarefa 4: Determine, na ilustração 25, o valor aritmético de B (ДАВЫДОВ et al., 2012a).

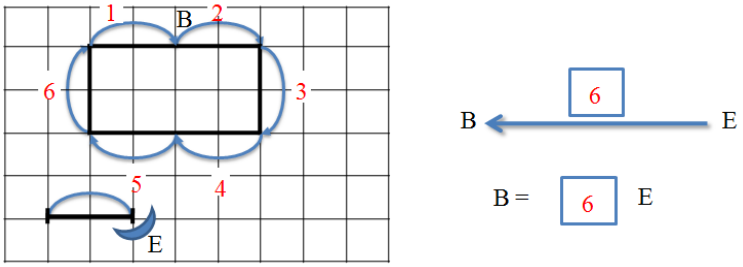
Ilustração 25 - Tarefa 4, síntese das diferentes formas de registro



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012a, p. 49).

Após o processo de medição, as crianças concluem, com orientação do professor, que o comprimento da linha quebrada fechada mede 6E. O resultado da medição é registrado no esquema com seta e na relação de igualdade, conforme ilustração 26 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 26 - Tarefa 4, resultado do processo de medição



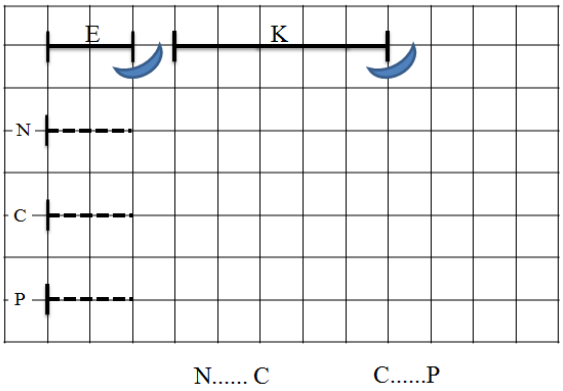
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

É importante destacar que o enunciado da tarefa 4 não explicita a grandeza a ser considerada (comprimento ou área). A criança identifica a grandeza em questão, a partir da unidade de medida proposta na tarefa, isto é, **E** se refere a uma unidade de medida de comprimento composta por dois segmentos da malha.

Vale esclarecer que, no livro do primeiro ano, são desenvolvidas várias tarefas específicas para o estudo das grandezas e suas relações. Só, posteriormente, com base nas relações entre grandezas, que o conceito de número é introduzido. Nesse estágio, de acordo com Davýdov e colaboradores, a criança já sabe que, para medir superfícies, se utilizam unidades de medida de áreas; para medir volumes se utilizam unidades de medidas de volumes e, assim, como as demais (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008). Enfim, as tarefas referentes à introdução do conceito de número proporcionam apropriação, pela criança, de que medir consiste em "comparar duas grandezas da mesma espécie" (CARAÇA, 1984, p. 29). Como diz Costa (1866, p. 9 – grifos do autor), "**Medir uma grandeza** é determinar quantas vezes ela contém a grandeza da sua espécie, que serve de **unidade de medida**. Por consequência, os números são expressões de medida das grandezas".

Tarefa 5: Construa três segmentos com as seguintes medidas: N = 4E, C = 3E e P = 2K (Ilustração 27). Compare os resultados (ДАВЫДОВ et al., 2012a).

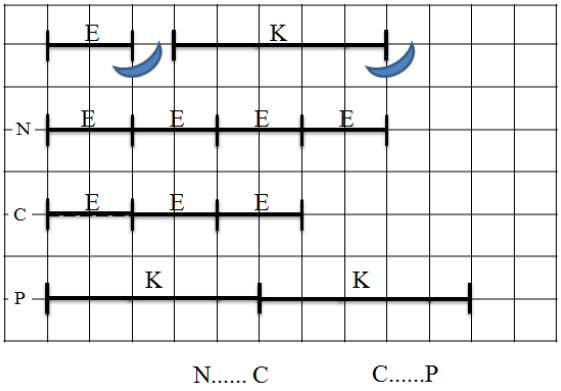
Ilustração 27 - Tarefa 5, construção de segmentos



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012a, p. 62).

O processo de realização dessa tarefa inicia-se pela leitura dos registros referentes às medidas dos segmentos: o segmento com medida N é composto por *quatro* (4) unidades de medida E, o segmento C por *três* (3) unidades E, e o segmento P por *duas* (2) unidades K. O desenvolvimento da tarefa requer a construção dos segmentos, conforme ilustração 28.

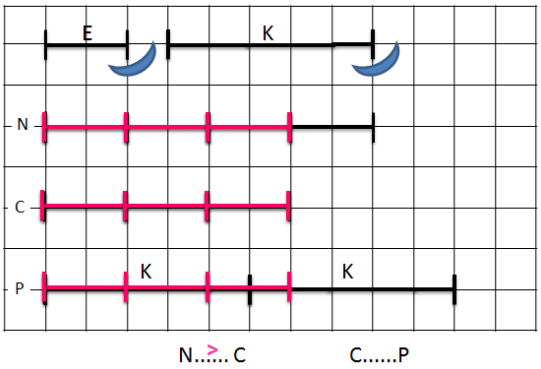
Ilustração 28 - Tarefa 5, construção dos segmentos



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na sequência, procede-se a comparação entre as medidas dos comprimentos dos segmentos (N = 4E, C = 3E e P = 2K). Primeiro compara-se as medidas N e C e conclui-se que o segmento com medida N é maior que o segmento com medida C (N > C). Tal conclusão é analisada na relação por meio dos resultados expressos aritmeticamente (4 > 3).

Ilustração 29 - Tarefa 5, comparação das medidas N e C



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Diferentemente do que ocorre na comparação entre os comprimentos dos segmentos com medidas C e P, não pode passar despercebida a diferença entre as unidades de medida considerada (C = 3E e P = 2K). O professor alerta os estudantes para o fato de que os números só podem ser comparados quando expressam o resultado de medições realizadas com a mesma unidade de medida. Na tarefa em análise o número *dois* (2K) representa uma medida de comprimento maior que o número *três* (3K).

No ensino tradicional, como vimos no capítulo anterior, o número é apresentado estaticamente. Por exemplo, o número *dois* representa *dois* objetos (●●) e o número *três* representa *três* objetos (●●●). Consequentemente, *dois* representa sempre uma grandeza menor que *três*. Porém, no terreno das aplicações do conceito de número dificilmente isso ocorre, por exemplo, *um* real é maior que *noventa e nove* centavos. Os números envolvidos são 1 e 99, o número *um* representa uma grandeza maior, nesse caso o valor monetário, do que *noventa e nove*. Desse modo, a unidade de medida tem uma importância crucial para o conceito de número e, consequentemente, para o conceito de multiplicação e, por extensão, para a tabuada, conforme apresentaremos na sequência.

Importante ressaltar o movimento multiplicativo contemplado no primeiro ano; trata-se de quantas vezes a unidade de medida se repete. Davýdov e colaboradores iniciam a modelação da relação de multiplicidade na forma literal, por meio de esquema, no primeiro ano e concluem no segundo, conforme discutiremos na continuidade.

2.2 TAREFAS EXTRAÍDAS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO SEGUNDO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

O material referente ao segundo ano foi objeto de estudo em cinco investigações (ALVES, 2013; DORIGON, 2013; SILVEIRA, 2012; MADEIRA, 2012; CRESTANI, 2013). Alves (2013) focou suas análises nas tarefas referentes ao ensino de adição e subtração. A autora constatou que as tarefas davydovianas são desenvolvidas, inicialmente, por meio de ações objetais e depois são introduzidos os esquemas abstratos e a reta numérica. Estas representações compõem o elemento mediador que possibilita a elevação das ações objetais ao plano mental. Os conceitos de adição e subtração têm por base a relação parte-todo de grandezas discretas e contínuas, entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas.

A introdução do conceito de equação, na proposição davydoviana, foi investigado por Dorigon (2013) que identificou como ponto de partida a relação *todo-partes*, na qual um dos valores é desconhecido. Se as duas partes são conhecidas, para determinar o todo basta adicioná-las. Por outro lado, se o todo e uma das partes são conhecidos, para determinar a outra parte subtrai-se a parte conhecida do todo. O valor numérico de cada termo da equação pode ser determinado a partir do valor numérico dos outros termos. É possível construir tantas equações quantos componentes existirem na igualdade.

Silveira (2012) investigou o movimento conceitual adotado por Davýdov e colaboradores ao proporem o ensino do Sistema de Numeração no segundo ano do Ensino Fundamental e concluiu que o Sistema de Numeração é introduzido com base na medição e construção de diferentes representações numéricas. A medição é realizada por meio da comparação entre a grandeza a ser medida e uma unidade de medida. A representação do número ocorre por um conjunto de algarismos cujos valores variam em conformidade com a base numérica considerada e a unidade de medida. Primeiro os algarismos são apresentados no quadro valor de lugar e, após a introdução do zero, fora do quadro.

Madeira (2012) considerou o conceito de multiplicação e concluiu que as tarefas articulam situações de análise da grandeza com o esquema (modelo), desencadeador de

> operações que permitem observar as limitações do modelo inicial simples com apenas a unidade, para produzir a necessidade de uma unidade intermediária. Com

> isso, o modelo passa a compor-se, em vez de uma, por três flechas. O importante, no entanto, não é a quantidade delas, mas da ideia conceitual que possibilita o agrupamento de unidades, condição para o surgimento dos fatores, isto é, dos números que se multiplicam. (MADEIRA, 2012, p. 159).

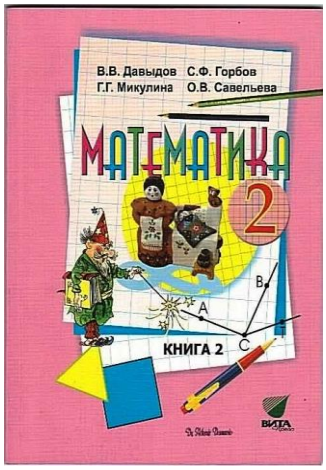
Para Madeira, a "unidade intermediária se constitui no elemento que proporciona uma concepção por princípios multiplicativos sem evidências primeiras da adição de parcelas iguais." (2012, p. 159). A unidade intermediária consiste em um elemento essencial por determinar "dois fatores componentes da operação multiplicação: multiplicando e multiplicador. Ou seja, em termos aritméticos é dela que surge a quantidade de vezes que uma determinada quantidade de unidade está sendo multiplicada." (MADEIRA, 2012, p. 159).

Crestani (2013) investigou o movimento interno entre as operações de multiplicação e divisão, na proposição davydoviana. A autora constatou que Davýdov e colaboradores introduzem a divisão como operação inversa da multiplicação por meio do esquema abstrato. Para tanto, adotam a mesma unidade de medida intermediária para ambas as operações. Isso possibilita a representação, na reta numérica, de agrupamentos idênticos que apresentam o mesmo número de unidades, porém com movimentos inversos, os quais expressam a relação interna entre as duas operações.

Conforme expomos nos parágrafos anteriores, a multiplicação foi objeto de investigação de Madeira (2012) e Crestani (2013). Porém, para atender aos nossos objetivos de investigação, faz-se necessário retomar essa discussão, uma vez que, conforme dissemos anteriormente, a multiplicação faz parte do sistema conceitual no qual a tabuada se insere.

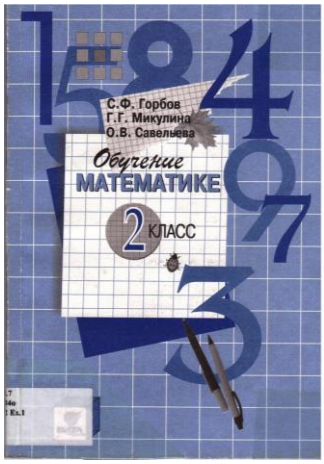
Na sequência apresentamos algumas tarefas extraídas do livro didático referente ao segundo ano (Ilustração 30), com base nas orientações apresentadas no manual do professor (Ilustração 31). As tarefas selecionadas referem-se à multiplicação e à introdução da tabuada.

Ilustração 30 - Livro didático russo do 2º ano do Ensino Fundamental



Fonte: Давыдов, et al (2012b).

Ilustração 31 - Manual de orientação ao professor referente ao livro didático do 2º ano do Ensino Fundamental

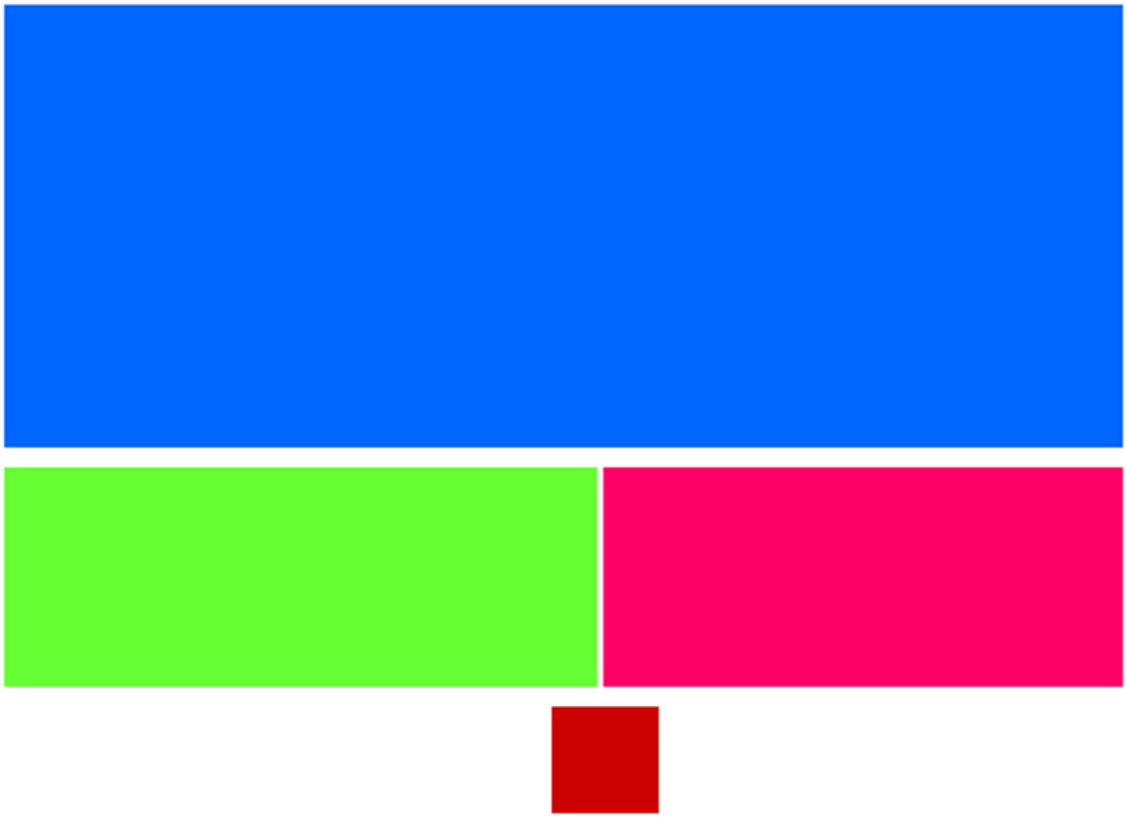


Fonte: Горбов, Микулина, Савельева (2009).

As tarefas diretamente relacionadas à multiplicação são apresentadas ao final do livro didático do segundo ano do Ensino Fundamental. Os fundamentos para o conceito de multiplicação se expressam pela necessidade de, em uma situação, determinar um valor consideravelmente maior que a unidade de medida disponível. Nestes casos, a utilização direta da unidade de medida é caracterizada para as crianças extremamente trabalhosa. Por isso, é necessário utilizar outra, maior que a inicial. No entanto, esta nova unidade de medida não é dada, será construída (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Tarefa 6: As crianças recebem uma folha, na qual estão desenhados quatro retângulos de tamanhos e cores diferentes para recortar (Ilustração 32). O kit[18] já vem pronto ao final do livro didático, cabe às crianças apenas recortarem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009), conforme apresentaremos a seguir.

Ilustração 32 - Tarefa 6, kit para recorte



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A tarefa consiste em, a partir dos recortes, construir uma figura com área da superfície igual ao modelo que somente o professor tem em mãos (Ilustração 33).

[18] Caso o leitor tenha interesse em reproduzir a tarefa, as medidas das áreas dos retângulos apresentados no kit são: 1,5cm x 1,5cm; 6 cm x 15 cm; 3 cm x 7 cm; 3 cm x 8 cm. Porém, vale ressaltar que em momento algum durante o desenvolvimento das tarefas com o kit o professor menciona tais medidas, apenas sua representação literal.

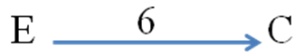
Ilustração 33 - Tarefa 6, figura modelo (3 cm x 4,5cm) que somente o professor tem em mãos

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Este modelo não se encontra no kit apresentado anteriormente (Ilustração 32), trata-se de uma figura a ser construída, nos cadernos, pelos alunos. Os recortes auxiliarão na medição, durante o processo de confecção da figura proposta (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

A medida da superfície a ser construída é denominada pelo professor, genericamente, por C. Sua composição tem como referência os recortes que compõem o kit (Ilustração 32). O professor informa que a medida da área em construção segue o esquema de seta, conforme a ilustração 34 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 34 - Tarefa 6, registro da medida C

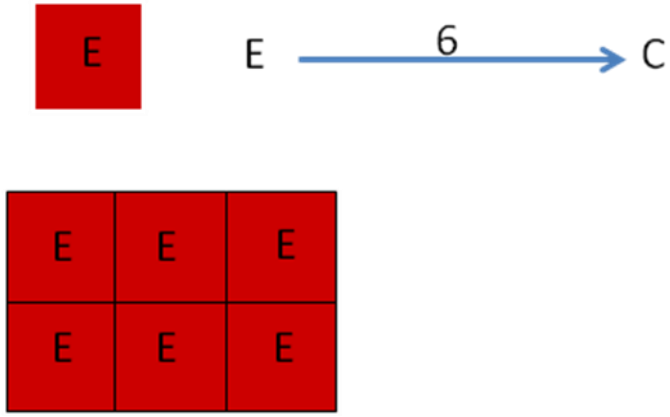


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

No referido esquema, a unidade de medida E (o menor recorte do kit) cabe *seis* (6) vezes na grandeza com medida C. Com a unidade de medida E, as crianças constroem a superfície da área C, conforme ilustração 35 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Durante o desenvolvimento da tarefa o professor promove as seguintes reflexões: *Para se obter medidas iguais é necessário que todos utilizem a mesma unidade de medida; o resultado da medição será registrado por meio do esquema com seta.*

Ilustração 35 - Tarefa 6, construção da superfície de área C



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Em síntese, a tarefa consiste na construção da área de uma superfície com unidades de medida. O foco é para o processo de elaboração de uma grandeza com medida maior, a partir de uma unidade de medida menor, com base nas informações apresentadas no esquema. Essa tarefa faz parte da introdução da terceira tarefa de estudo, referente *aos conceitos de multiplicação e divisão*.

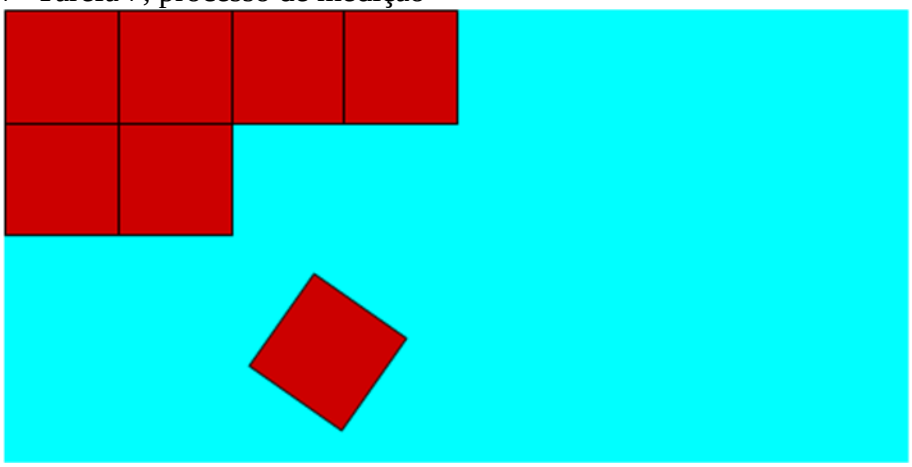
Tarefa 7: A tarefa propõe a construção da superfície com medida A, que somente o professor tem nas mãos. Para tanto, o professor propõe que se utilize a mesma unidade de medida da tarefa anterior (E) e faz o seguinte registro no quadro: E → A. Assim, a área da superfície com medida A será construída a partir da unidade de medida E (Ilustração 36). Faz-se necessário determinar a medida de A em relação à unidade de medida E (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 36 - Tarefa 7, superfície de área A, unidade de medida E e o registro com seta

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

De acordo com Gorbov, Mikulina e Savieliev (2009) [19], o professor fixa o recorte modelo no quadro (A) e inicia o processo de medição com a unidade de medida E (Ilustração 37). Enquanto isso, faz anotações e lamenta o quão incômodo é trabalhar com uma unidade de medida tão pequena. Propositalmente, deixa a unidade de medida cair, esquece quantas medidas já foram utilizadas.....

Ilustração 37- Tarefa 7, processo de medição



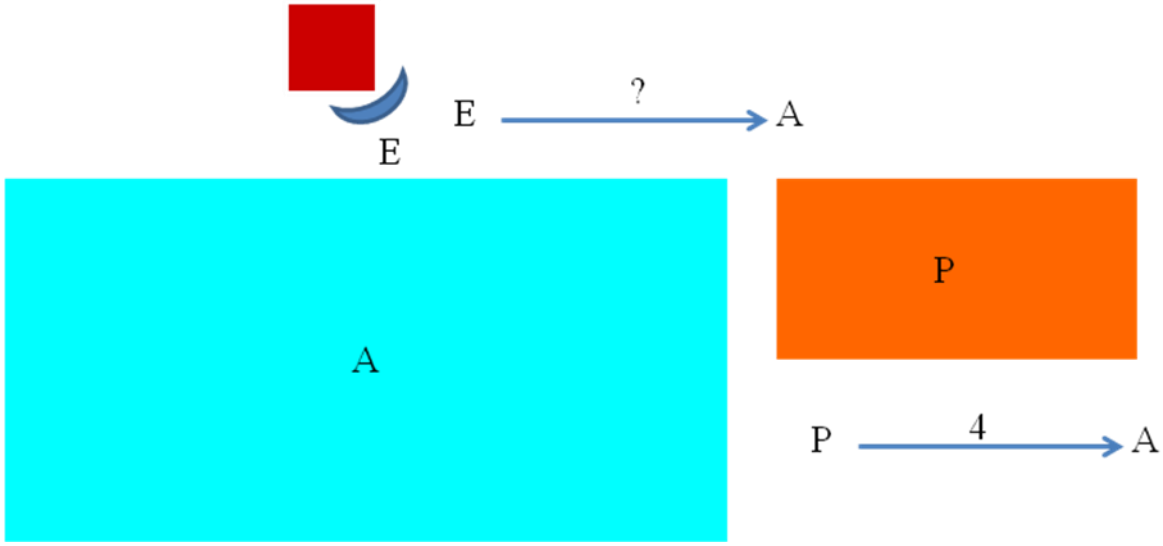
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Por fim, o professor, intencionalmente, simula *perder a paciência* e propõe a utilização de uma unidade de medida maior, para agilizar o processo de medição[20]. A nova unidade de medida é denominada de P (Ilustração 38). Faz a medição e informa o resultado: *quatro* (4). Isto é, a nova unidade de medida (P) cabe *quatro* (4) vezes na superfície com medida A. Antes, a unidade de medida considerada era E, agora a unidade de medida é P. O novo resultado não pode ser registra no esquema inicial (E → A). Isso requer um novo esquema que registre o resultado da medição da superfície de medida A com unidade de medida P (P → A). Acima da seta, o professor escreve o número *quatro* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

[19] (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009)

[20] Vale reafirmar que a resolução das tarefas por nós apresentada é fundamentada no manual de orientação ao professor, este é constituído por relatos de experiência realizada, em sala de aula, por mais de 25 anos.

Ilustração 38 - Tarefa 7, apresentação de uma nova unidade de medida



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

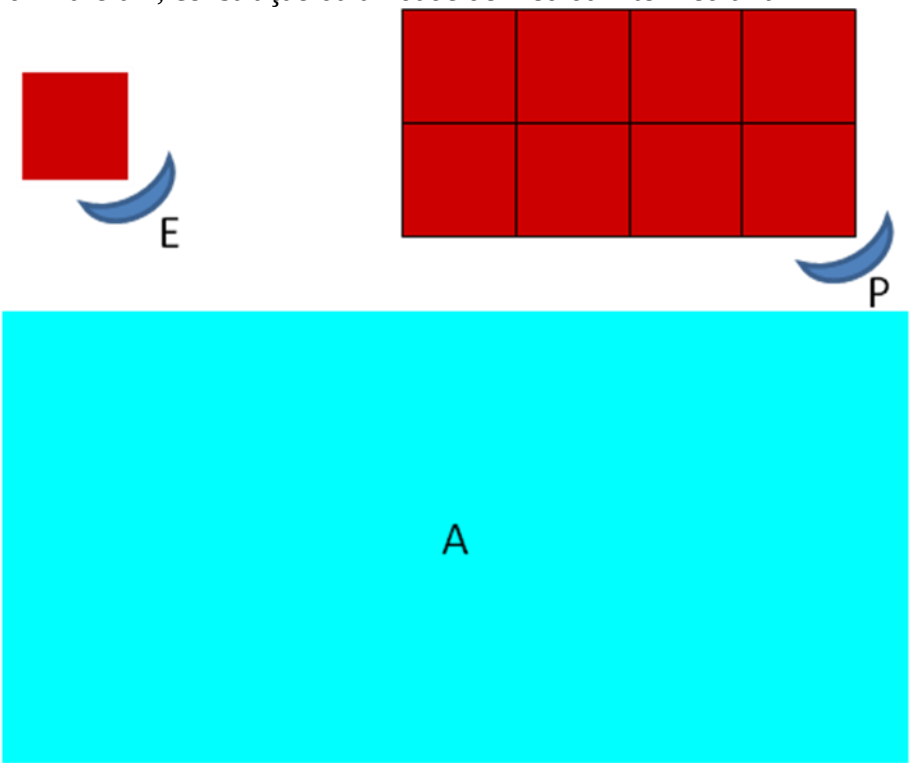
Porém, as crianças desconhecem que elas não têm, em seus kits, recortes para a unidade de medida P, há apenas dois deles semelhantes (3 cm x 8 cm e 3 cm x 7 cm). O professor os compara com a unidade de medida P e todos concluem que a unidade de medida P é menor que os recortes do kit, conforme a ilustração 39 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 39 - Tarefa 7, comparação da área da superfície da unidade de medida P com os recortes do kit

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O professor questiona sobre a possibilidade de ainda utilizar a unidade de medida pequena (E). E enfatiza que o ideal seria a adoção da unidade de medida P, por ser maior. Mas como proceder? Todos têm em comum a unidade de medida pequena (a unidade E), adotada na tarefa anterior, porém, agora desejam utilizar uma unidade de medida maior. O professor toma a unidade de medida E, e mostra que ela cabe *oito* vezes em P (Ilustração 40). A partir dessa informação as crianças iniciam a construção da área da superfície P (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

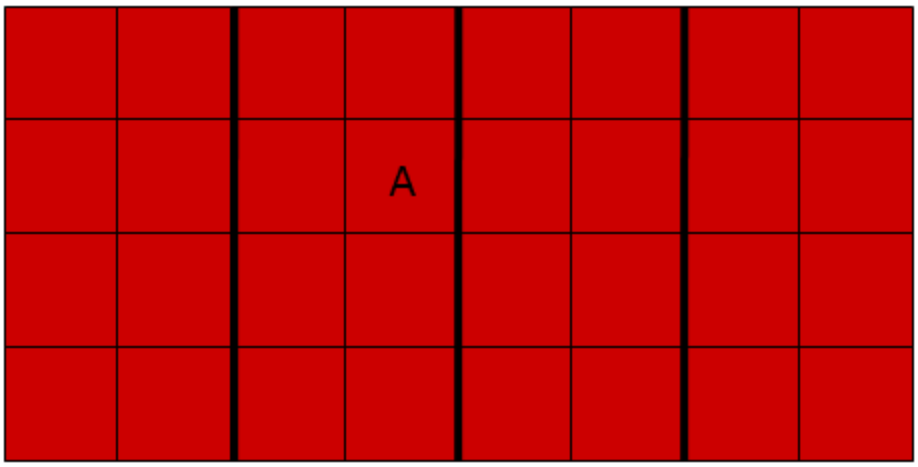
Ilustração 40 - Tarefa 7, construção da unidade de medida intermediária P



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Conforme o professor havia informado, a unidade de medida P cabe *quatro* (4) vezes na superfície com medida A. Com base nessas informações as crianças constroem a figura A, conforme a ilustração 41 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 41 - Tarefa 7, construção da área da superfície A



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

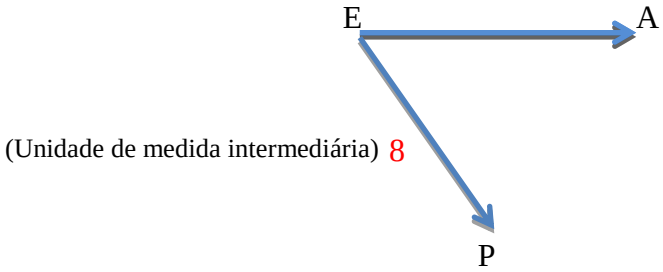
Depois da construção da superfície A, o professor esquematiza, no quadro, o processo de desenvolvimento da tarefa: tínhamos em comum a unidade de medida E, a partir dela, precisávamos construir a área com medida A. Ao falar, se registra no quadro o esquema (E → A) conforme ilustração 42.

Ilustração 42 - Tarefa 7, construção do esquema

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Porém, essa unidade de medida não foi apropriada para a medição, por ser *pequena* demais se comparada à superfície a ser construída. Então, com a unidade de medida E construímos uma nova unidade (P), composta por *oito* (8) unidades de medidas básicas (E). Ao falar, o professor acrescenta no esquema mais uma seta (E → P) e escreve o número *oito* (8) ao lado esquerdo da nova seta, conforme a ilustração 43 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

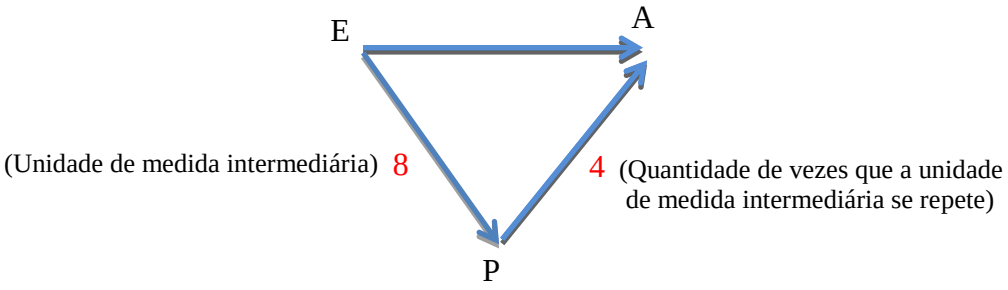
Ilustração 43 - Tarefa 7, construção do esquema



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Com a unidade de medida P, construímos a superfície A. Esta é constituída por *quatro* (4) unidades de medida intermediária (P). Esta nova etapa do processo de resolução é representada no esquema com uma nova seta. Ao lado direito da terceira seta registra-se o número de vezes que a unidade de medida intermediária (P) coube na superfície A, como indica a ilustração 44 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 44 - Tarefa 7, esquema é o início da modelação gráfica



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A unidade de medida E é denominada de unidade de medida *básica* e P unidade de medida *intermediária*. O procedimento adotado durante o processo de resolução da tarefa torna o processo de medição mais cômodo, quando a unidade de medida básica é consideravelmente menor que a grandeza a ser medida. Com esta condição, torna-se menos trabalhoso a adoção de uma unidade de medida maior (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). O esquema anterior sintetiza o movimento percorrido durante a resolução da tarefa no que se refere à construção da unidade de medida intermediária e a medida A.

Como mencionamos no início deste capítulo, a apropriação de cada conceito, na proposta em foco, ocorre por meio de seis ações de estudo. Estas são compostas por um sistema de tarefas particulares que objetivam a finalidade almejada, qual seja: a apropriação de um determinado conceito, ou sistema conceitual. Na especificidade da presente investigação, a análise incide na terceira tarefa de estudo (sistema conceitual de multiplicação e divisão), com recorte para o conceito de tabuada.

A tarefa particular, em análise (7), contempla alguns elementos da primeira ação de estudo, *transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado*, isto é, do conceito de tabuada. Mas quais são os dados da terceira tarefa de estudo que nos possibilitarão revelar a relação universal, referente ao conceito de tabuada? A resposta a esta questão é condição *sine qua non* para refletirmos sobre as ações que compõem a tarefa de estudo davydoviana.

Tanto para o sistema conceitual de multiplicação e divisão, quanto, por extensão, para tabuada, os dados da terceira tarefa estão ligados à unidade básica, à unidade intermediária e ao total de unidades básicas e intermediárias. São eles que compõem a relação universal do conceito de tabuada e permeiam todas as tarefas particulares. Inicialmente, cada

tarefa particular é apresentada na forma objetal-sensorial, a partir da relação entre grandezas.

Trata-se do concreto ponto de partida. Este não revela imediatamente as conexões internas da tabuada, que serão reveladas no processo do conhecer. E, por essa razão, o concreto nesse estágio tanto pode ser visível ou não. "É visível em suas manifestações concretas, em seu exterior, porém não é como o concreto, em que as manifestações externas e imediatas estão ligadas por sua essência interna, para as leis de sua existência e desenvolvimento." (ILIENKOV, 2006, p. 159). Isto é, o concreto ponto de partida apresenta todas as características externas e internas. Porém, as relações internas somente são reveladas no processo do conhecimento, como concreto pensado, ponto de chegada.

Para desenvolver a primeira ação de estudo, Davýdov e colaboradores apresentam situações que geram a necessidade dos conceitos em seu caráter teórico. Por exemplo, a partir do incômodo gerado pelo processo de medição, com a unidade de medida E (Ilustração 37), surgiu a necessidade da introdução de uma unidade maior (Ilustração 40), denominada por unidade de medida intermediária.

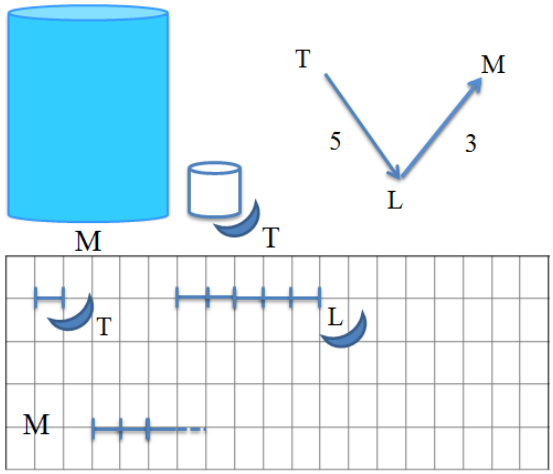
Assim, o ponto de partida, na proposição davydoviana, é a observação e transformação dos dados reais da tarefa não solucionáveis pelos procedimentos conhecidos pela criança. A finalidade é revelar e distinguir "uma relação completamente definida de certo objeto integral" (DAVÍDOV, 1988, p. 182), na especificidade deste, a tabuada. Tal relação é constituída pelos dados da tarefa e atua como fonte de todas as tabuadas (do objeto integral).

Esclarecemos que a transformação dos dados, prevista na primeira ação de estudo, ocorre em várias tarefas particulares. Em algumas, são consideradas as grandezas discretas, em outras, as contínuas. Desse modo, as unidades de medidas são unidades de comprimentos, áreas, volumes, entre outros. Além disso, as unidades básicas, compostas ou não, são transformadas em unidades intermediárias. Essa variedade de grandezas e de unidades de medida evita, de acordo com Davýdov (1982), a generalização empírica do conceito.

Na referida tarefa, também se inicia o processo de modelação referente à segunda ação de estudo, *modelação da relação universal na forma objetal, gráfica e literal*. Retomaremos essas reflexões na tarefa 12. A tarefa a seguir consiste na relação entre o registro objetal e o esquema de setas.

Tarefa 8: Com o auxílio da unidade de medida T e o registro dos números apresentados no esquema da ilustração 45, construa uma unidade intermediária para medir o volume de líquido com medida M (ДАВЫДОВ et al., 2012b).

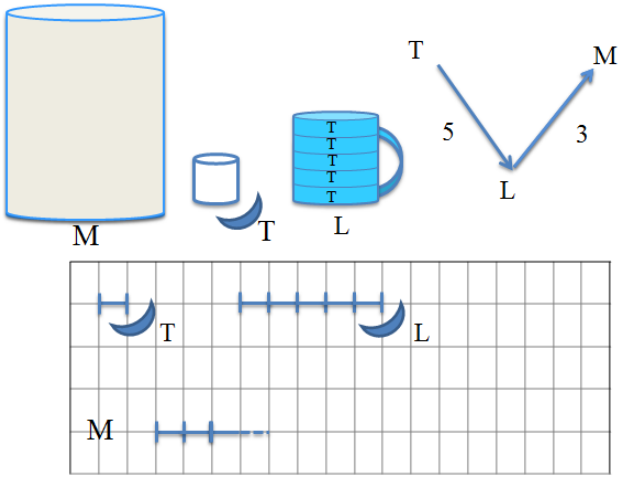
Ilustração 45 - Tarefa 8, dados para a construção da tarefa



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ, et al., 2012b, p. 57).

O professor organiza a tarefa, com material real (líquido e recipiente), que consiste em colocar o volume M de líquido em outro recipiente, mas com a unidade de medida intermediária (Ilustração 45). Tanto o esquema de setas quanto os segmentos indicam que a unidade de medida intermediária (L) é composta por *cinco* (5) unidades básicas (T), isto é, *cinco* (5) copos. Na medida M cabem *três* (3) vezes a unidade de medida intermediária (L). A resolução da tarefa requer a construção, com líquido, da unidade de medida intermediária, como se observa na ilustração 46 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

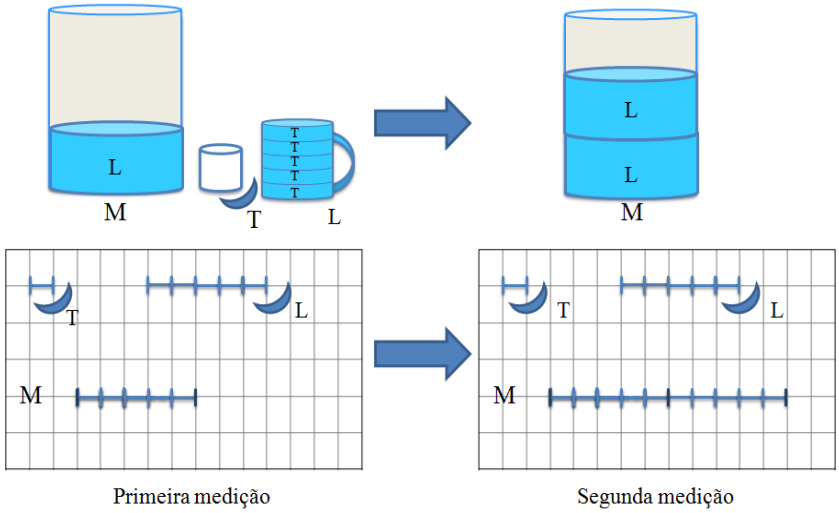
Ilustração 46 - Tarefa 8, construção da unidade de medida intermediária L



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Cada unidade de medida intermediária posta no recipiente é registrada por meio dos segmentos na ilustração 47 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

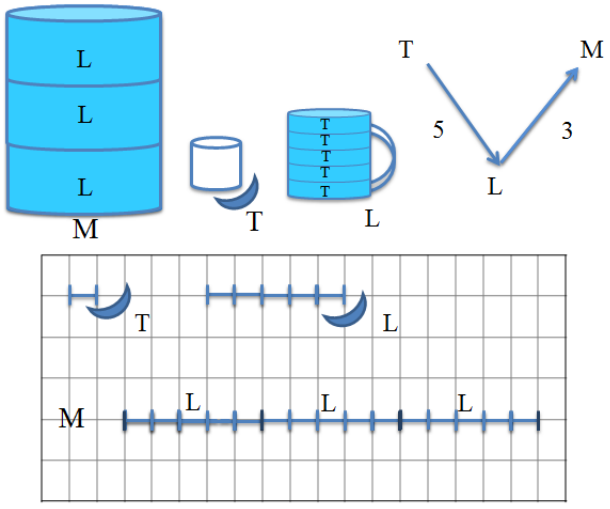
Ilustração 47 - Tarefa 8, primeira e segunda medição



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

De acordo com o esquema (Ilustração 45), esse procedimento se repete por três (3) vezes (Ilustração 46).

Ilustração 48 - Tarefa 8, terceira medição



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A ausência da seta superior no esquema indica que não há necessidade de determinar o total de unidades de medidas básicas, pois o volume do líquido estava determinado.

Portanto, o movimento segue do registro para a ação objetal: do esquema de setas e segmentos para a construção da unidade de medida intermediária do volume de líquido. Os segmentos são utilizados para expressar as relações entre grandezas (Ilustração 45). Vale explicitar que Davýdov e colaboradores apresentam os dados da tarefa de modo sensorial. No entanto, somente a contemplação sensorial não é suficiente para revelar a relação interna da tabuada.

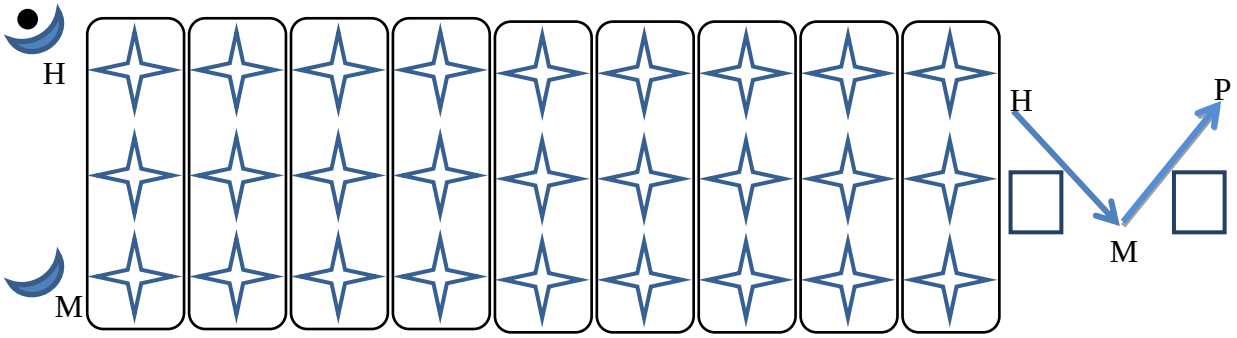
> Perante o homem, o concreto real aparece, no começo, como o que é dado sensorialmente. A atividade sensorial em suas formas peculiares de contemplação e representação é capaz de captar a totalidade (integridade) do objeto, a presença, nele, de conexões que no processo de conhecimento conduzem à universalidade. Mas a contemplação e a representação não podem estabelecer o caráter interno destas conexões. (DAVÍDOV, 1988, p. 141-142).

Nesse sentido, "ensinar uma atividade prática supõe dirigir a atenção não só à parte externa, à execução prática, mas também e, fundamentalmente, à parte interior, intelectual." (NÚÑEZ e OLIVEIRA, 2013, p. 300). Isso ocorre no trabalho com o modelo objetal e gráfico, na presente tarefa, possibilita-nos relacionar, respectivamente, multiplicando e multiplicador com a unidade de medida intermediária e a quantidade de vezes que ela se repete.

Além disso, a tarefa envolve as significações aritmética, algébrica e geométrica (Ilustração 48). Os números registrados no esquema de setas expressam a significação aritmética. A representação das unidades por meio de segmentos é uma expressão geométrica. O registro do valor das medidas por meio de letras contempla a significação algébrica. Para Toom (2001), a escola deveria ensinar álgebra e geometria, pois estas "duas disciplinas são fundamentais, são bastante ricas de conteúdo e têm problemas que podem entusiasmar um cientista futuro." (TOOM, 2001, p. 11). Essa relação entre álgebra e geometria é constantemente considerada na proposição davydoviana. Além disso, as tarefas davydovianas estão intimamente ligadas umas com as outras, porém, sempre com um novo elemento, como a seguir (Tarefa 9), na qual a unidade de medida intermediária será construída.

Tarefa 9: Com base nas informações da ilustração 49, qual foi a unidade de medida intermediária utilizada para contar as estrelas P? Complete o esquema (ДАВЫДОВ et al., 2012b).

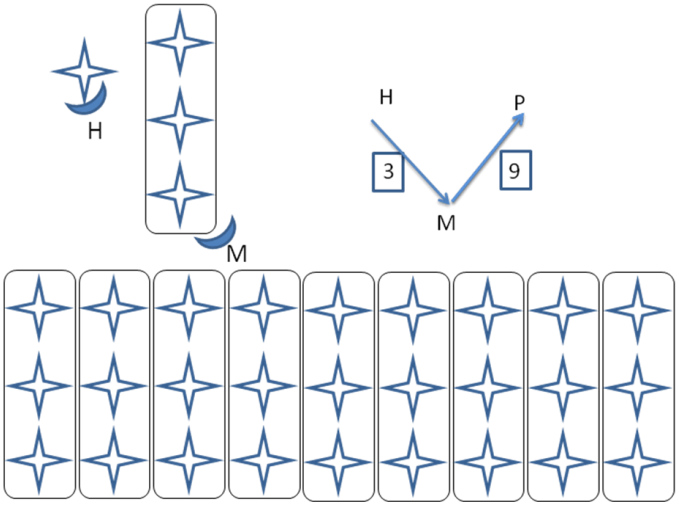
Ilustração 49 - Tarefa 9, estudo do esquema



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012b, p. 58).

A análise do esquema subsidia a resolução da tarefa que envolve reflexões sobre a composição da unidade de medida intermediária (M) e a quantidade de vezes que ela se repete em P. De acordo com a ilustração 49, a unidade de medida intermediária é composta pela quantidade de estrelas apresentadas em cada coluna: *três* (3) unidades básicas que se repete por *nove* (9) vezes. Por fim, registram-se os números no esquema de setas, conforme ilustração 50 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 50 - Tarefa 9, registro no esquema



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

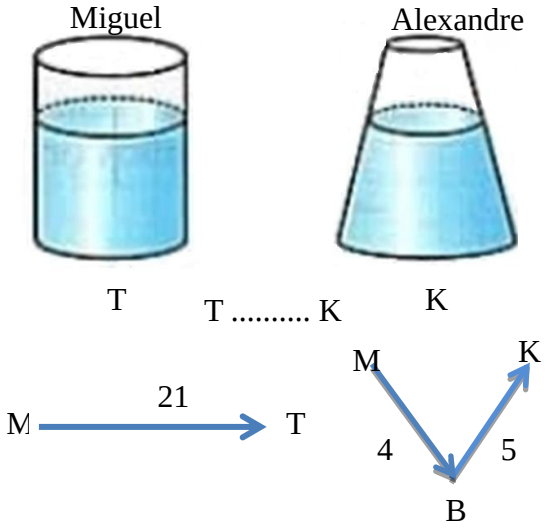
Portanto, a tarefa em questão sugere que as crianças interpretem e completem o esquema e, para tal, apresenta as informações referentes à unidade de medida intermediária e a quantidade de vezes que ela se repete, por meio das grandezas discretas (Ilustração 47). Trata-se de transformar os dados representados objetalmente na forma gráfica (esquemas com setas). A tarefa incide no estudo da relação essencial da tabuada.

Cada nova tarefa está intimamente ligada à anterior, porém, sempre com um elemento novo, de modo gradativo. Por exemplo, a relação dessa tarefa com a anterior consiste na unidade de medida intermediária e a quantidade de vezes que ela se repete. Enquanto naquela a unidade é expressa numericamente no esquema de setas, nesta será determinada. Isso se deve ao fato de que o processo de interiorização dos conceitos, pelo estudante, não ocorre de maneira "brusca, rápida e imediata" (PUENTES, 2013, p. 178). Primeiro, pela grande quantidade de conhecimentos a serem apropriados (como o conceito de número, adição, subtração, multiplicação, unidades de medida, grandezas, entre outros). Segundo, porque muitos conceitos exigem, como premissa, certo nível de desenvolvimento psíquico geral, que é desencadeado pelo próprio processo de aprendizagem (PUENTES, 2013). Este desenvolvimento se atinge gradativamente, por meio de influências externas, no processo da Educação em geral e da Educação escolar, em particular.

Na próxima tarefa (tarefa 10), Davýdov e colaboradores apresentam um elemento novo, a comparação do total de volume de líquido, por meio da unidade de medida intermediária.

<u>Tarefa 10</u>: Quem colocou mais líquido no recipiente (Ilustração 51), Miguel ou Alexandre (ДАВЫДОВ, et al., 2012b)?

Ilustração 51 - Tarefa 10, volumes de líquido e seus respectivos registros



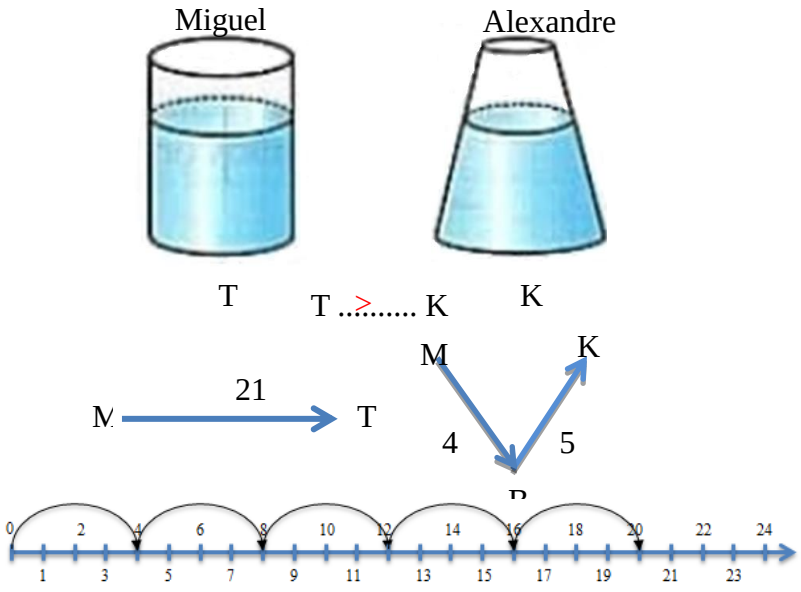
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012b, p. 61).

O professor registra o desenho e o esquema no quadro (Ilustração 51). A tarefa consiste em comparar os volumes de líquido contidos nos recipientes de Miguel e Alexandre. Não é possível resolver a tarefa com base apenas na observação direta dos dois recipientes, uma vez que ambos possuem formas e tamanhos diferentes. De acordo com o esquema de seta, para medir o volume de líquido, Miguel utilizou somente unidade básica de medida. Alexandre procedeu de modo diferente, pois além da unidade de medida básica construiu uma unidade de medida intermediária, B (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Miguel registrou, no esquema de seta, o resultado final de sua medição: *vinte e uma* unidades básicas, procedimento não adotado por Alexandre, cujo registro traduz o seu processo de medição (Ilustração 51). O professor enfatiza que a Matemática exige respostas exatas e sugere que as crianças utilizem a reta numérica para calcular o número total de unidades básicas utilizadas por Alexandre (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

As crianças acompanham a explicação do professor para posteriormente desenvolverem a tarefa em seus cadernos. Alexandre registrou seu procedimento de medição no esquema de setas: a unidade de medida intermediária, composta por *quatro* (4) unidades básicas, se repete por *cinco* (5) vezes (Ilustração 52). A partir dessas informações é possível determinar o valor desconhecido na reta numérica, ilustração 52 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 52 - Tarefa 10, comparação dos volumes

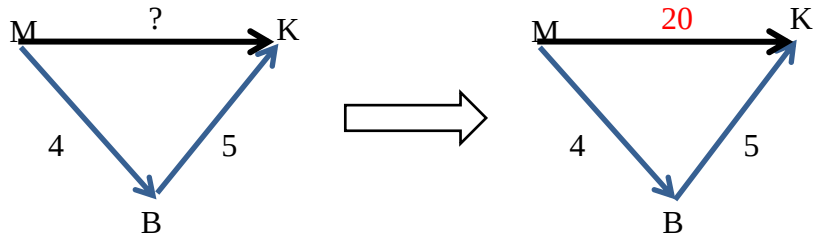


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Cada unidade de medida intermediária é representada na reta por um arco (Ilustração 52). Esse procedimento, de acordo com o esquema, se repete por *cinco* vezes. A conclusão a ser obtida consiste em que o volume de líquido do recipiente de Alexandre é composto por *vinte* (20) unidades básicas, menor que o de Miguel (21). Em seguida, faz-se o registro da desigualdade (T > K) conforme consta na ilustração 52.

Ao final da tarefa, o professor promove uma reflexão sobre a constituição do segundo esquema. Além disso, faz a seta superior e anota o sinal de interrogação acima dela (Ilustração 53). O ponto de interrogação representa o número total de unidades básicas. Na sequência procede-se a leitura do esquema: são *quatro* (4) unidades de medida básica que se repetem por *cinco* vezes (5). *Quatro* vezes *cinco* é igual a *vinte* (20) unidades básicas. Para finalizar, completa-se o esquema com a substituição do ponto de interrogação pelo número referente à quantidade de unidades de medidas básicas, como evidencia a ilustração 53 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 53 - Tarefa 10, total de unidades de medidas básicas no esquema



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

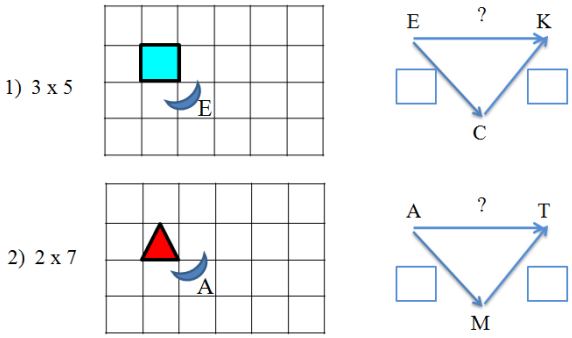
Desse modo, Davýdov e colaboradores introduzem a operação de multiplicação por meio do esquema composto por três setas. O cálculo foi desenvolvido na reta numérica. Esses dois procedimentos expressam a síntese do processo realizado durante a resolução da tarefa (unidade de medida básica, unidade de medida intermediária, quantidade de vezes que a unidade intermediária se repete e o valor total). Vale ressaltar que a tarefa 10 não leva mais como referência a ação objetal, como por exemplo, a medição do líquido dos recipientes, mas o plano teórico por meio do esquema e da reta numérica.

Como mencionamos anteriormente, multiplicar um número por outro é a operação pela qual se determina um terceiro número, "que seja a respeito do primeiro o mesmo que o segundo é a respeito da unidade." (COSTA, 1866, p. 34). Na operação *a* x *b* = *c*, o produto (*c*) representa o total das partes, o primeiro fator representa uma dessas partes

(*a*) e o segundo, fator (*b*) a quantidade de vezes que a parte se repete (Ilustração 52). Tal definição é condição para desenvolver a tarefa a seguir.

Tarefa 11: Construa as imagens a partir das sentenças apresentadas na ilustração 54, complete os esquemas e determine o total de unidades básicas (ДАВЫДОВ et al., 2012b).

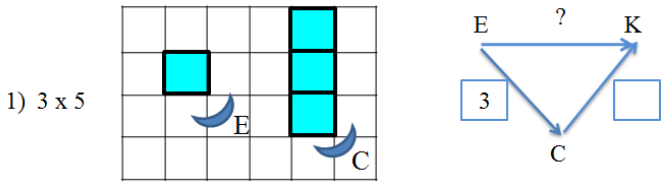
Ilustração 54 - Tarefa 11, construção das imagens a partir das sentenças dadas



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 64).

O professor explica que as imagens e os registros nos esquemas estavam prontos, mas alguém as apagou. Ficaram registradas apenas as expressões 3 x 5 e 2 x 7 (Ilustração 54). Por onde iniciar a resolução da tarefa? As expressões anteriores também representam o movimento de constituição das figuras. Na primeira sentença, o primeiro número (3) representa a unidade de medida intermediária, composta por *três* (3) unidades de medidas básicas. O professor sugere o registro do número *três* (3) no esquema e a representação da unidade de medida intermediária por meio de quadrados na malha quadriculada (C), estes serão dispostos na vertical[21], conforme a ilustração 55 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 55 - Tarefa 11, construção do esquema e do objeto a partir da sentença dada

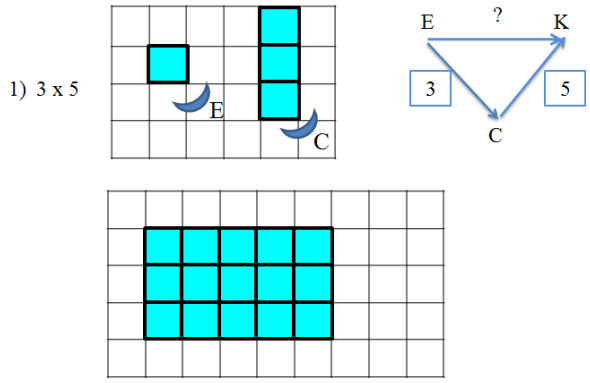


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na sentença (3 x 5), a unidade de medida intermediária C coube *cinco* (5) vezes na figura a ser construída (K). Registra-se o número (5) no esquema de setas (Ilustração 56). E,

com as informações apresentadas no esquema, as crianças constroem a superfície com área K (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

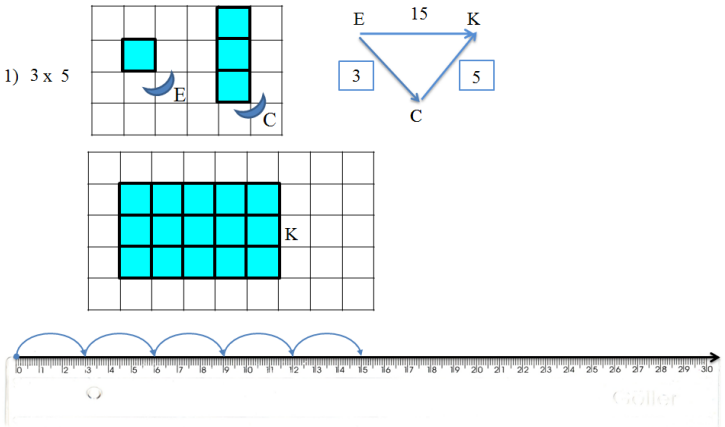
Ilustração 56 - Tarefa 11, construção do esquema e do objeto a partir da sentença dada



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Falta, ainda, determinar o total de unidades básicas que compõem a superfície cuja medida genérica é K. Para tanto, o professor propõe que uma criança conte de unidade em unidade (1, 2, 3, ..., 15), outra utilize a calculadora e as demais realizem o cálculo com auxílio da régua (Ilustração 57). A conclusão é que o resultado foi o mesmo nos três procedimentos utilizados (contagem *um-a-um*, calculadora e reta numérica): 3 x 5 = 15 unidades básicas. Em seguida, o ponto de interrogação, no esquema, é substituído pelo resultado (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 57 - Tarefa 11, cálculo do total de unidades básicas e registro no esquema

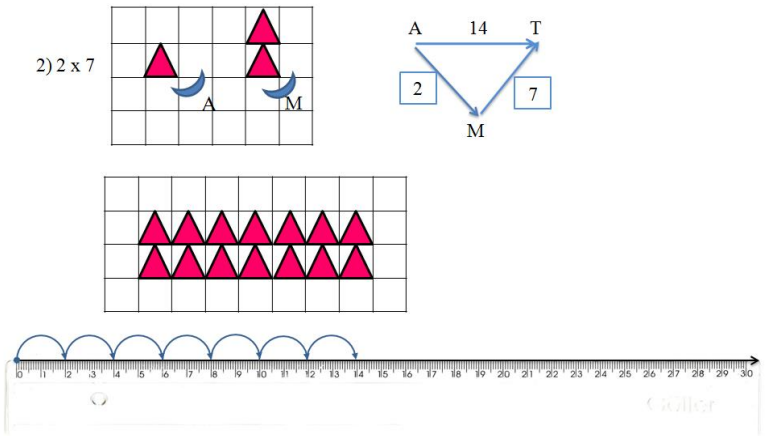


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

[21] Esclarecemos que esta orientação é dos próprios autores: Микулина e Савельева.

O desenvolvimento da segunda sentença (2 x 7) é realizado de modo análogo. As unidades intermediárias são dispostas em colunas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 58 - Tarefa 11, construção da imagem a partir da sentença e registro no esquema



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na tarefa anterior (10), o movimento seguia da representação objetal (volume de líquidos) para o registro. Nesta, Davýdov e colaboradores propõem o movimento inverso: do registro (3 x 5 e 2 x 7) para a representação objetal. A tarefa envolveu a construção das unidades de medidas intermediárias, registro das respectivas unidades no esquema de setas e elaboração da representação objetal (Ilustrações 56 e 58). O total de unidades básicas foi obtido por meio de dois instrumentos: a reta numérica e a calculadora (Ilustrações 57 e 58).

A inserção da calculadora no ensino de matemática atende ao princípio da Teoria Histórico-Cultural, que prevê a apropriação, pelo estudante, da produção humana em seu estágio atual de desenvolvimento.

> A calculadora como um instrumento tecnológico utilizado socialmente, deve ser explorada didaticamente em sala de aula com vistas a: a) apropriação dos recursos tecnológicos deste tempo, fundamental para a formação do cidadão desta sociedade; b) compreensão do processo realizado pela calculadora e; c) compreensão das várias formas de cálculo. (SANTA CATARINA, 2005, p. 110).

Como expressa a Proposta Curricular de Santa Catarina (2005), a calculadora é um instrumento tecnológico a ser contemplado em sala de aula. Na proposição davydoviana, mais especificamente nos livros didáticos referentes ao segundo e terceiro ano do Ensino Fundamental, a calculadora é utilizada para determinar valores extensos e comprovação de

resultados (obtidos com outras técnicas de resolução, como contagem *um a um*, reta numérica, entre outras). No contexto da tarefa em análise, a calculadora é utilizada para confirmar os resultados obtidos (Ilustrações 56 e 58).

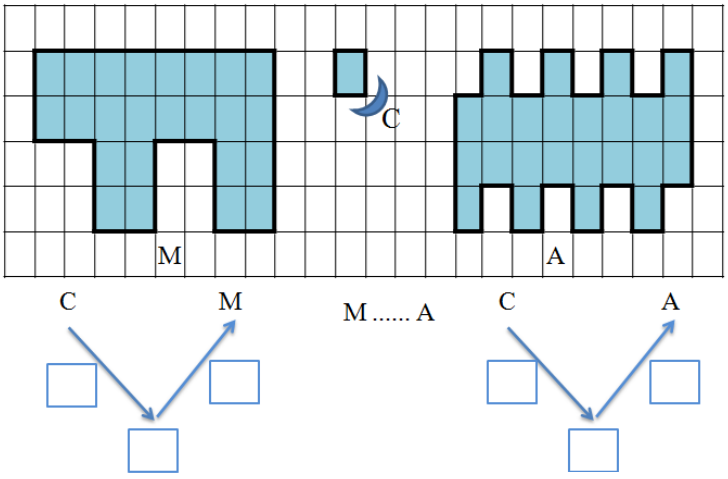
Porém, vale destacar que as máquinas de calcular não resolvem os problemas de aprendizagem, são "calculadores extremamente rápidos e eficientes [...] de valor insuperável [...] quando se trata de problemas que envolvem cálculos ou enumerações muito extensos." (EVES, 2002, p. 688). O autor em referência explica que, quanto à aplicabilidade, as máquinas de calcular alcançaram vitórias matemáticas notáveis. Por exemplo, na teoria dos números (com a descoberta dos números amigáveis[22], perfeitos, primos, entre outros). Os resultados recentes sobre esses números seriam impossíveis sem as máquinas de calcular (EVES, 2002).

Desse modo, a humanidade instrumentalizou a calculadora com o conhecimento por ela produzido, o que a torna uma ferramenta portadora de uma produção histórica que deve fazer parte do cotidiano escolar.

Na tarefa seguinte retomaremos as reflexões sobre as ações de estudo. Mais especificamente o início da segunda ação.

<u>Tarefa 12</u>: Complete os esquemas de setas e compare as áreas com medidas M e A (ДАВЫДОВ et al., 2012b).

Ilustração 59 - Tarefa 12, registro no esquema a partir da grandeza área



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 64).

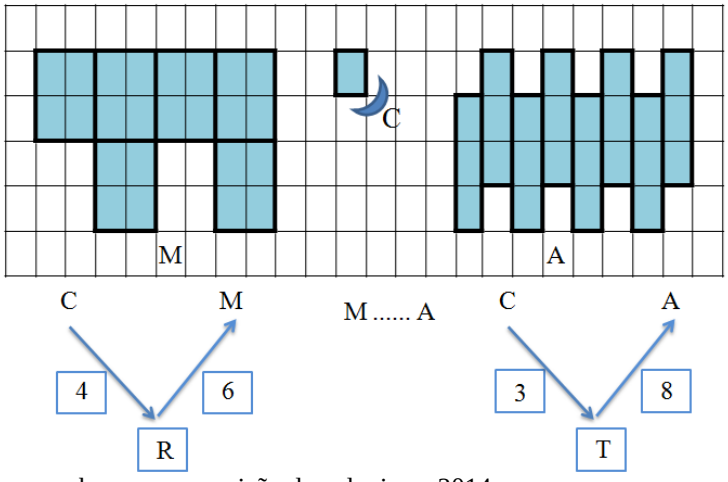
[22] "Dois números se dizem amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro. Por exemplo, 284 e 220, que constituem o par atribuído a Pitágoras, são amigáveis, pois os divisores de 220 são1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, cuja soma é 284, ao passo que os divisores próprios de 284 são 1, 2 4, 71 e 142, cuja soma é 220." (EVES, 2002, p. 98).

O registro no esquema de setas (Ilustração 59) indica que as superfícies foram compostas pela mesma unidade de medida básica (C), porém, as unidades intermediárias são diferentes (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Na primeira figura (Ilustração 59), implicitamente, a unidade de medida intermediária é composta por *quatro* (4) unidades básicas. Pela relação entre a área com medida M e a unidade de medida intermediária é possível concluir que esta cabe *seis* (6) vezes em M. Os números (6 e 4) são introduzidos, conforme ilustração (60) no esquema de setas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Na segunda situação de análise, a unidade de medida intermediária é composta por *três* (3) unidades básicas, que se repete por *oito* (8) vezes. Os resultados da medição são escritos no esquema. Como as unidades de medida intermediária são diferentes, serão representadas por letras distintas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 60 - Tarefa 12, determinação da unidade de medida intermediária



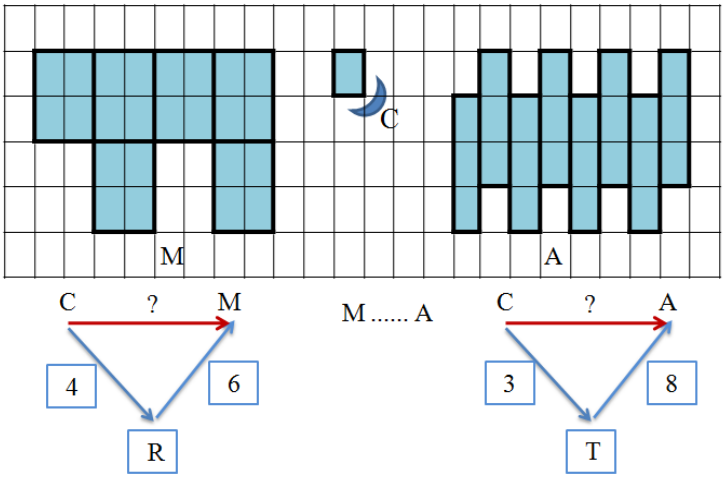
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O professor lembra que é preciso comparar as áreas das duas figuras. Relata que um estudante, de outra escola, disse que a área com medida M é maior que a área com medida A, porque a unidade de medida intermediária, da primeira, é maior. Esta afirmação está correta? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Para comparar as medidas é necessário conhecer o total das unidades de medidas básicas em cada superfície. Para o processo de medição e informação do procedimento adotado, o professor insere a seta superior no esquema e um ponto de interrogação (Ilustração

61), que representa o total de unidades básicas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 61 - Tarefa 12, o esquema é completado pela reta superior

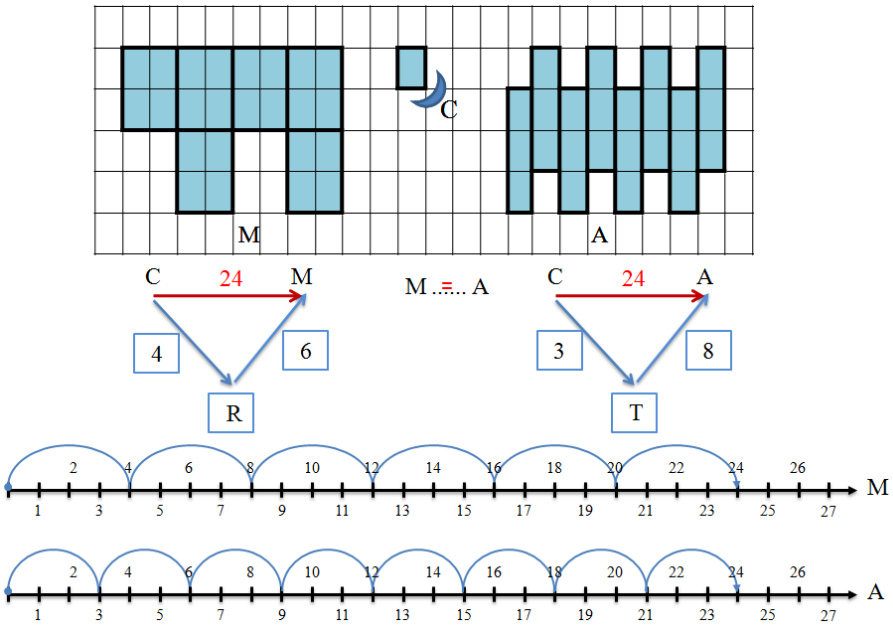


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Qual operação é adequada para determinar o valor desconhecido (total de unidades básicas) quando se conhece a unidade de medida intermediária e a quantidade de vezes que ela se repete? A resposta necessária é de que se trata da operação de multiplicação, cujo resultado obtém-se com o auxílio da reta numérica.

Constroem-se duas retas, uma para calcular o valor de M e outra para o valor de A. Na primeira delas (Ilustração 62), adota-se como procedimento de identificação da unidade de medida intermediária um arco composto por *quatro* (4) unidades básicas, a qual se repete por *seis* (6) vezes (Ilustração 62). O final do último arco incidirá sobre o número *vinte e quatro* (24), total de unidades de medidas básicas. Na segunda reta, referente à superfície de medida A, cada unidade de medida intermediária é representada por um arco composto por *três* (3) unidades básicas. Como surgem *oito* (8) arcos, o resultado é *vinte e quatro* (24). Os pontos de interrogação são substituídos pelos respectivos resultados (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 62 - Tarefa 12, construção da reta e determinação do total de unidades básicas



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Ambas as superfícies são compostas por *vinte e quatro* (24) unidades de medidas básicas, logo, M = A (Ilustração 62).

Retomemos as reflexões referente às ações de estudo iniciadas na tarefa 7. Na primeira ação, os dados da tarefa foram transformados com o objetivo de revelar a relação essencial da tabuada. Na tarefa em análise, esses dados são modelados, por meio das relações entre grandezas (as áreas das superfícies com medida M e A). Esse processo corresponde a uma parte da segunda ação de estudo: *modelação da relação universal na forma objetal, gráfica e literal*. Os dados da tarefa (unidade básica, unidade intermediária e total de unidades básicas e intermediárias) foram modelados na forma objetal, por meio da relação entre as áreas expressas na malha quadriculada (Ilustração 62).

Como por exemplo, a relação entre a superfície com medida M, a unidade de medida C e a unidade intermediária composta por *quatro* (4) unidades básicas. Em seguida, esses mesmos dados foram modelados na forma gráfica, por meio dos esquemas de setas, retas numéricas e arcos (Ilustração62).

Esse movimento de abstração da relação essencial da tabuada, do modelo, culminará com sua representação por meio de letras. O modelo é "um sistema representado mentalmente ou realizado materialmente que, refletindo ou reproduzindo o objeto de

investigação, é capaz de substituí-lo de modo que seu estudo nos dê uma nova informação sobre este objeto" (SHTOFF, 1966 apud DAVÍDOV, 1988, p. 133).

Os modelos não são

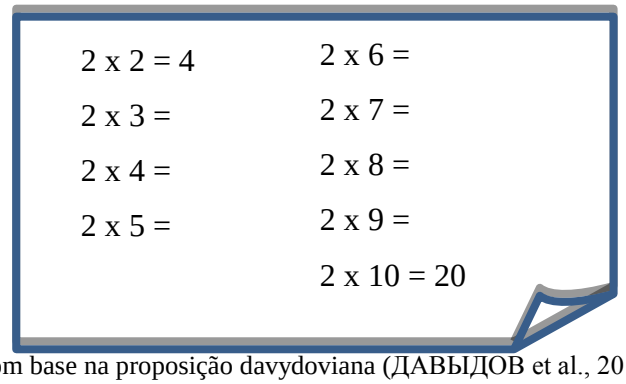
> simples substitutos dos objetos. As condições de criação, por exemplo, de um modelo material [objetal], são tais que "em seus elementos e nas relações entre eles, estão separadas e fixadas as vinculações essenciais e necessárias que formam uma estrutura completamente determinada" (SHTOFF, 1966, p.281). Os modelos são uma forma peculiar de abstração, na qual as relações essenciais do objeto estão fixadas nos nexos e relações visualmente perceptíveis e representadas, de elementos materiais e semióticos. (DAVÍDOV, 1988, p. 134).

O estudo do modelo constitui o "[...] trabalho interno imprescindível no processo de assimilação dos conceitos teóricos e dos procedimentos generalizados de ação." (DAVÍDOV, 1988, p. 182). A percepção do "modelo material [objetal] pressupõe, simultaneamente, uma participação significativa do pensamento, a aplicação dos conhecimentos teóricos e da experiência acumulados. Ao perceber o modelo, o experimentador... compreende o que ocorre nele." (SHTOFF, 1966 apud DAVÍDOV, 1988, p. 133).

Ressaltamos que o processo de modelação da relação essencial, nas várias formas de representação, não se restringe a uma única tarefa particular, ao contrário, se estende a várias tarefas da proposição davydoviana. Por ora é importante reafirmar que a reprodução da relação genética da tabuada, na forma objetal e gráfica, é o estágio inicial para chegarmos à expressão literal do modelo universal. Retomaremos a essa segunda ação na tarefa 23. Na próxima tarefa apresentaremos a sistematização da tabuada do número dois.

Tarefa 13: Introdução à tabuada do número *dois* (ДАВЫДОВ et al., 2012b).

Ilustração 63 - Tarefa 13, tabela de multiplicação pelo número *dois* (2)

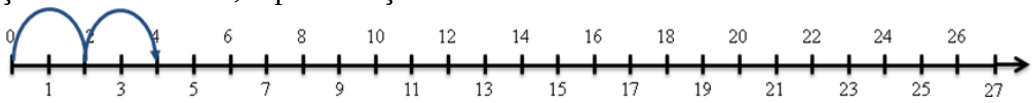


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012b, p. 66).

O professor informa aos estudantes que muitas pessoas adultas têm registrado na memória o resultado de algumas multiplicações sem precisar calculá-las, procedimentos que elas também aprenderão. Inicia-se com a leitura do quadro (Ilustração 63): *dois* (2), tomados por duas vezes é igual a *quatro* (4); *dois* (2), tomados por *três* (3) vezes; *dois* (2), tomados por *quatro* (4) vezes; *dois* (2), tomados por *cinco* (5) vezes; *dois* (2), tomados por *seis* (6) vezes; *dois* (2), tomados por *sete* (7) vezes, *dois* (2), tomados por *oito* (8) vezes; *dois* (2), tomados por *nove* (9) vezes e, *dois* (2), tomados por *dez* (10) vezes é igual a *vinte* (20).

Na sequência, os resultados desconhecidos são obtidos (um por um), com o auxílio da reta numérica (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). O professor lê o registro: 2 x 2 (dois, tomados por duas vezes) e informa o nome dos termos na operação de multiplicação: o primeiro número ou termo é denominado multiplicando e o segundo multiplicador (Ilustração 64).

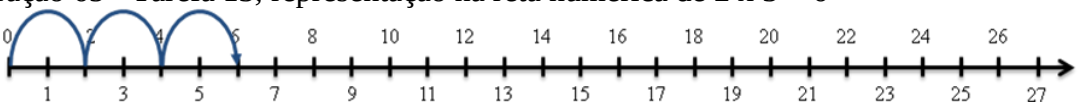
Ilustração 64 - Tarefa 13, representação na reta numérica de 2 x 2 = 4



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O próximo registro, 2 x 3, tem seu produto determinado com o auxílio da reta numérica (Ilustração 65).

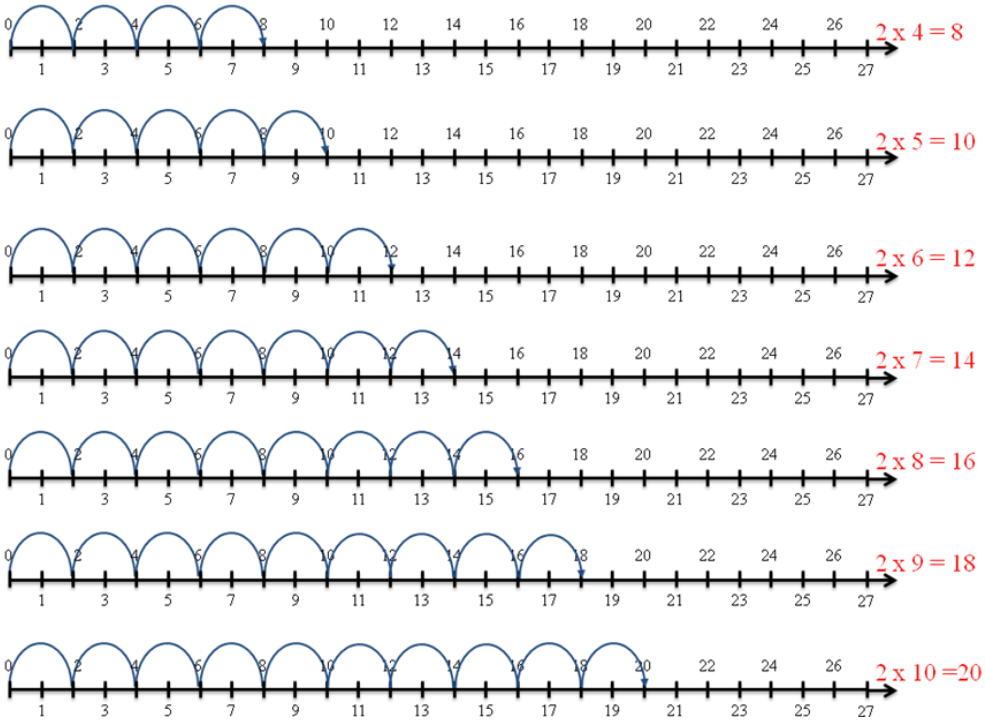
Ilustração 65 - Tarefa 13, representação na reta numérica de 2 x 3 = 6



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Os demais resultados são determinados por procedimento análogo (Ilustração 66):

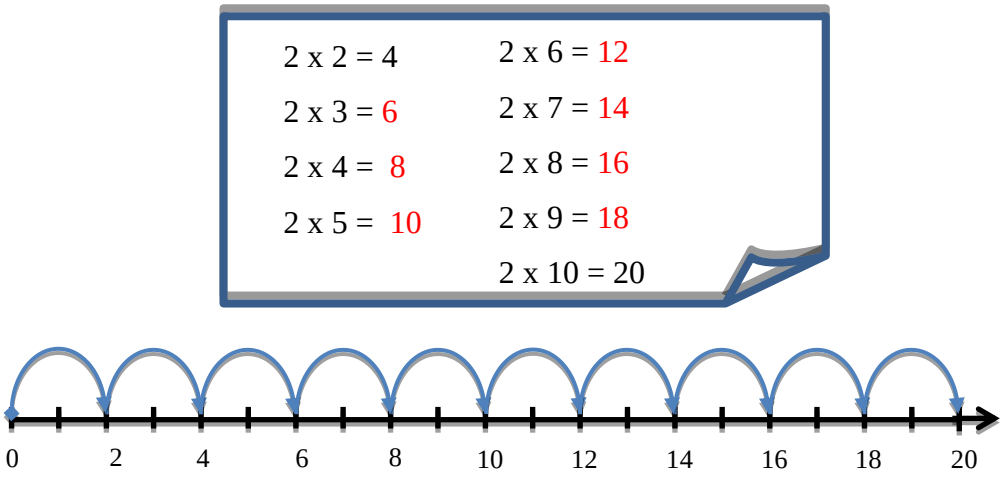
Ilustração 66 - Tarefa 13, continuidade da representação, na reta numérica, da tabuada do número dois



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Para finalizar a tarefa, a tabuada é sintetizada e registrada do seguinte modo (Ilustração 67):

Ilustração 67 - Tarefa 13, síntese da tabuada do número *dois* (2) na reta numérica



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O desenvolvimento das tarefas davydovianas apresentadas até o momento ocorreram por meio de ações objetais, esquemas e reta numérica. Estas representações compõem o elemento mediador que possibilita a elevação das ações objetais ao plano mental. Contemplam as relações entre grandezas discretas e contínuas, e as significações aritméticas, algébricas e geométricas.

A tabuada também se insere nesse contexto, inicialmente é desenvolvida na reta numérica. Nela, se reproduz a relação genética, essencial. A essência constitui a conexão objetiva, aquela que assegura a unidade de todas as tabuadas e lhes dá o caráter concreto.

Desse modo, no contexto da tarefa em análise, a referência não é mais a ação objetal, por meio da relação entre grandezas, mas a modelação gráfica, por meio da reta numérica e arcos (Ilustrações 64, 65 e 66). Os fatores que compõem a tabuada, expressos aritmeticamente, são modelados na reta numérica (significação geométrica).

A representação dos fatores, na reta numérica, expressa a síntese do processo realizado durante a resolução da tarefa (relação entre unidade de medida básica, unidade de medida intermediária e total de unidades básicas e intermediárias). São esses dados que constituem a essência do conceito de tabuada, por meio de uma relação específica, e permeiam todas as tarefas particulares (Ilustração 67).

Tarefa 14: Escreva as sentenças referentes a cada frase, represente-as na reta numérica e determine o produto (ДАВЫДОВ et al., 2012b):

Tome 3 por 5 vezes:

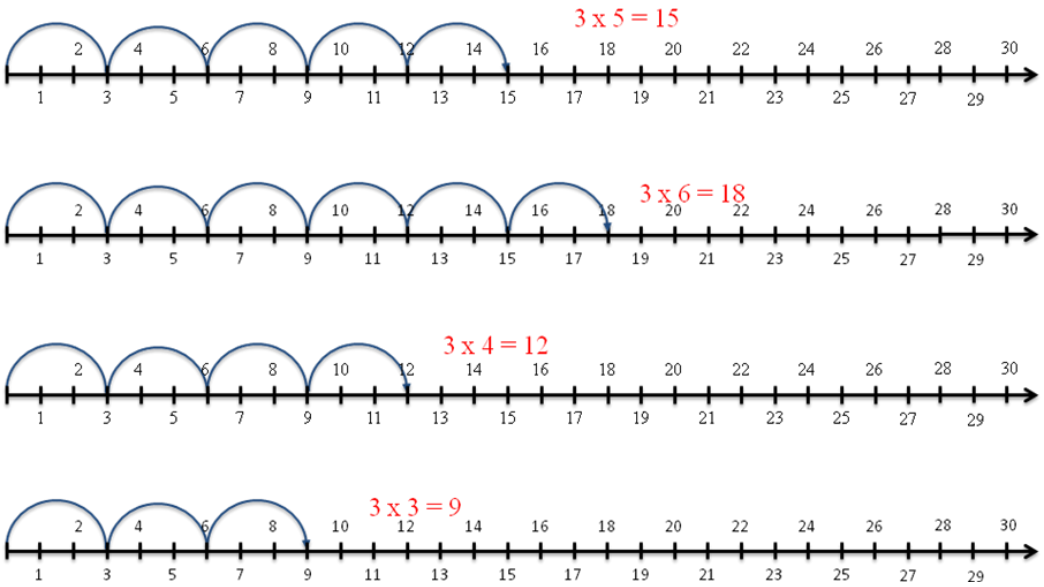
Tome 3 por 6 vezes:

Tome 3 por 4 vezes:

Tome 3 por 3 vezes:

As crianças traduzem as frases para a linguagem matemática, respectiva (Tome 3 por 5 vezes: 3 x 5; Tome 3 por 6 vezes: 3 x 6; Tome 3 por 4 vezes: 3 x 4; e Tome 3 por 3 vezes: 3 x 3) e, posteriormente, representam-nas na reta numérica (Ilustração 68):

Ilustração 68 - Tarefa 14, determinação do produto com o auxílio da reta numérica



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O resultado da operação, o produto, consiste no ponto extremo do último arco, respectivamente, 15, 18, 12 e 9. O movimento partiu das significações aritméticas (3 x 5, 3 x 6, 3 x 4 e 3 x 3) para o registro dos produtos na reta numérica (Ilustração 68). Esse movimento é o estágio inicial para o desenvolvimento da tabuada com base nas propriedades matemáticas. É importante ressaltar que não se trata de uma sequência linear (3 x 3 → 3 x 4 → 3 x 5 → 3 x 6). Isso porque a lógica dialética, diferentemente da lógica formal, "apoia-se no critério de conteúdo sobre o essencial das coisas. Sobretudo deve-se levar em conta que a essência da coisa pode ser revelada só no exame do processo do desenvolvimento de tal coisa" (DAVÍDOV, 1988, p. 146-147).

Tarefa 15: Resolva a tabuada do número *três* (3) (Ilustração 69). Determine os resultados por meio da reta numérica (ДАВЫДОВ et al., 2012b).

Ilustração 69 - Tarefa 15, tabuada do número *três* (3)

3 x 1 = 3	3 x 6 = ___
3 x 2 = 6	3 x 7 = ___
3 x 3 = ___	3 x 8 = ___
3 x 4 = ___	3 x 9 = ___
3 x 5 = ___	3 x 10 = 30

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012b, p. 72).

Uma parte dos produtos referentes à tabuada do número três foi calculada na tarefa anterior (14), portanto, basta registrá-lo, ilustração (70), a seguir (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 70 - Tarefa 15, registro dos resultados já conhecidos

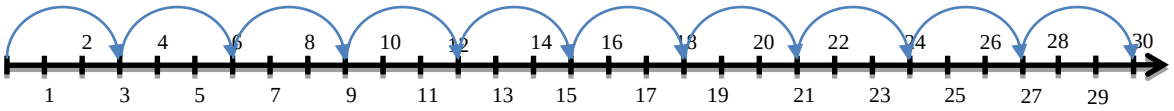
3 x 1 = 3	3 x 6 = 18
3 x 2 = 6	3 x 7 = __
3 x 3 = 9	3 x 8 = __
3 x 4 = 12	3 x 9 = __
3 x 5 = 15	3 x 10 = 30

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Os produtos desconhecidos são determinados com o auxílio da reta numérica e registrados no quadro (Ilustração 71):

Ilustração 71 - Tarefa 15, determinação dos produtos com o auxílio da reta numérica

3 x 1 = 3	3 x 6 = 18
3 x 2 = 6	3 x 7 = 21
3 x 3 = 9	3 x 8 = 24
3 x 4 = 12	3 x 9 = 27
3 x 5 = 15	3 x 10 = 30



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A tarefa consiste no registro dos produtos conhecidos (Ilustração 70), e sua representação na reta (Ilustração 71). Trata-se da abstração e generalização da essência da tabuada do número *três* (3) representada na forma geométrica. A abstração é o "processo em que se reflete a essência, a lei das coisas." (ILIENKOV, 2006, p. 154). Neste sentido, a abstração incide no pensar sobre a essência, sobre a relação interna. No contexto da tabuada, a essência é uma relação entre as unidades de medida básica e intermediária e o total destas (Ilustração 71). Nesta relação, o valor da medida intermediária é fixo: *dois* (2) para a tabuada do número *dois* (2); *três* (3) para a tabuada do número *três* (3) e assim sucessivamente. Trata-

se de conexões objetivas, reveladas a partir das relações entre grandezas, que asseguram a unidade entre as tabuadas, isto é, dão a elas um caráter concreto.

A abstração é uma atividade mental cognoscitiva, intelectual teórica específica do homem (KOPNIN, 1978; RUBINSTEIN, 1957 apud DAVÝDOV, 1982). Em síntese, é um processo do pensamento. Para Kopnin (1978, p. 121), o pensamento é o "reflexo da realidade sob a forma de abstrações. O pensamento é um modo de conhecimento da realidade objetiva pelo homem". Assim, o mundo objetivo é o conteúdo do pensamento. No contexto da tarefa davydoviana em análise, o conteúdo do pensamento é a tabuada do número *três* (3), como reflexo da realidade objetivada nas relações entre grandezas.

O movimento do pensamento (Ilustração 71) "consiste no desenvolvimento da imagem cognitiva [que segue] do desconhecido ao conhecido." (KOPNIN, 1978, p. 129). A relação entre as unidades básicas e intermediárias e o total destas, inicialmente desconhecida, aos poucos é conhecida.

O pensamento, segundo Rubinstein (1979, p. 73)

> Em um autêntico sentido da palavra, consiste em uma penetração em novas capas do existente de modo que se escava e se saca a luz do dia algo então escondido em ignotas profundidades; consiste em buscar e encontrar resposta à pergunta de como é em realidade o que se tem encontrado, que faz falta para saber como viver e como fazer.

Nesse sentido "pensar é conhecer" (RUBINSTEIN, 1979, p. 73). A abstração e a generalização são dois aspectos que pertencem ao processo de pensamento. Graças à abstração é que separamos, no estudo das relações entre grandezas, a relação essencial (compostas por unidades de medidas básica e intermediária e total das mesmas). No "processo de generalização, na identificação das conexões, sujeitas à lei, desta relação com os fenômenos singulares, o homem pode descobrir seu caráter geral como base da unidade interna do sistema integral." (DAVÍDOV, 1988, p. 151).

A partir da generalização inicial, também denominada por Davídov (1988) de substancial, se revelam as inter-relações entre o singular, particular e universal (ROSENTAL, 1962; DAVÍDOV, 1988; DAVÝDOV, 1982). Neste sentido, a generalização da tabuada consiste em identificar a interconexão entre o que há de universal para todas as tabuadas, que ao mesmo tempo é singular, para uma tabuada em particular.

> Na generalização ocorre a delimitação de características homólogas pertencentes a muitos fenômenos. Esta delimitação basta para mostrar a diferença entre o singular e o geral [universal]. Mas, a generalização, formulação científica dos conceitos, é muito mais complexa, é uma generalização que entra o conhecimento da essência, da sujeição a leis do desenvolvimento das coisas, isto é, uma essência que expressa o fundamental, o sujeito para qualquer lei, em qualquer fenômeno singular. Isso significa que a generalização científica não somente delimita os caracteres homólogos do singular, mas que toma, assim mesmo, os caracteres, as facetas, as propriedades do particular que constituem a natureza mesma de sua existência, natureza inseparável do determinante de sua evolução, etc. (ROSENTAL, 1962, p. 242-243).

A generalização teórica não é simples comparação de características externas de objetos singulares, como se faz na lógica formal. Mas, "por meio da análise da essência dos objetos e fenômenos estudados; sua essência se define precisamente pela unidade interna de sua diversidade..." (KÉDROV, 1965, apud DAVÍDOV, 1988, p. 152).

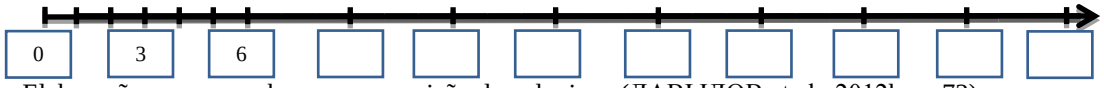
A generalização teórica é

> um efeito derivado da análise unido para a abstração. E do processo abstrativo, que leva a generalização, resulta no conceito científico e não rompe o geral [universal] do particular. No conceito científico e na lei o particular não desaparece, mas se conserva na forma de variáveis que podem obter diversos significados particulares. (RUBINSTEIN, 1957 apud DAVÝDOV, 1982, p. 231).

Na especificidade da tabuada a lei possibilita a obtenção de diversas tabuadas particulares, conforme apresentaremos na análise da tarefa 23. A lei, na tarefa 16, está relacionada com as singularidades da tabuada do número três, no processo de memorização.

Tarefa 16: Registre na reta numerada apenas os resultados da multiplicação por *três* (ДАВЫДОВ et al., 2012b).

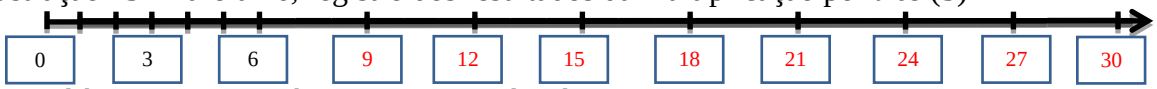
Ilustração 72 - Tarefa 16, registro dos resultados da multiplicação por *três* (3)



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2012b, p. 72).

Esta é uma das tarefas que Davýdov e colaboradores propõem para a memorização da tabuada no segundo ano do Ensino Fundamental. Trata-se do registro, na reta numérica, dos números que foram obtidos a partir da multiplicação pelo número *três* (Ilustração 73):

Ilustração 73 - Tarefa 16, registro dos resultados da multiplicação por *três* (3)



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A tabuada, na proposição davydoviana, é introduzida a partir da necessidade de conhecer algumas multiplicações sem precisar calculá-las. Além disso, Davýdov e colaboradores propõem tarefas para auxiliar o processo de memorização com compreensão. Diferentemente do que apresentamos no primeiro capítulo, sobre a memorização da tabuada por meio de parlendas.

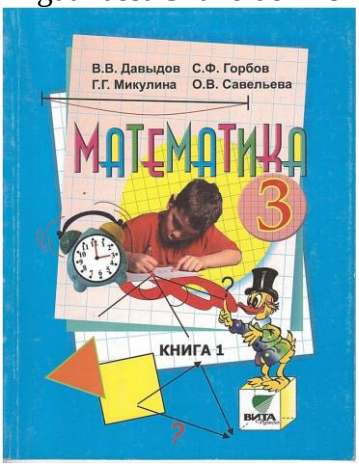
Com a tarefa 16, concluímos o material referente ao segundo ano do Ensino Fundamental. Neste, a terceira tarefa de estudo (o conceito de multiplicação e divisão) com recorte para a tabuada, foi introduzida em nível de ação objetal. O que requer uma reorganização, um agrupamento de unidades básicas, que faz emergir a "unidade de medida intermediária" que determina a condição para a multiplicação e cada tabuada. Esses dois elementos se apresentam no modelo universal.

Nesta etapa do desenvolvimento da terceira tarefa de estudo, são apresentados dois significados para as operações de multiplicação e divisão: comparação múltipla de valores e o inteiro composto por partes iguais. Na sequência, analisaremos a terceira tarefa de estudo expressa no material didático do terceiro ano do Ensino Fundamental.

2.3 TAREFAS EXTRAÍDAS DO MATERIAL DIDÁTICO REFERENTE AO TERCEIRO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

O material didático para o terceiro ano, da proposição davydoviana, ainda não foi objeto de investigação no Brasil. Portanto, a análise da terceira tarefa de estudo expressa nas tarefas referentes à tabuada, apresentadas no livro didático (Ilustração 74) e suas respectivas orientações metodológicas no manual do professor (Ilustração 75) assume um caráter de ineditismo nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática.

Ilustração 74 - Livro didático em língua russa 3º ano do Ensino Fundamental



Fonte: Давыдов, et al. (2009).

Ilustração 75 - Manual de orientação ao professor referente ao livro didático do 3º ano do Ensino Fundamental

Fonte: Горбов, Микулина (2003).

Davýdov e colaboradores iniciam o livro didático do terceiro ano com várias tarefas que retomam os conceitos estudados nos dois anos anteriores, tais como:

- Grandezas discretas e contínuas (comprimento, área, volume, massa,...);
- O número como resultado das relações entre grandezas (medida) e das operações;
- As quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão);
- Relação entre as operações inversas (adição-subtração, multiplicação-divisão).

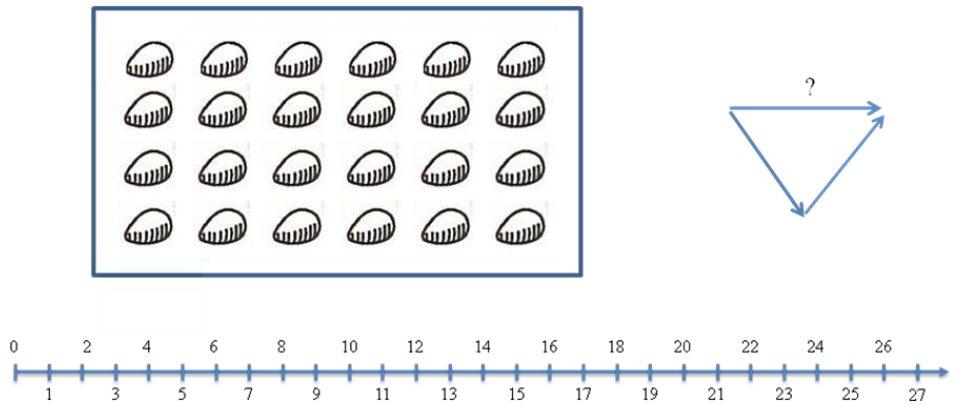
O foco, no terceiro ano do Ensino Fundamental, referente ao ensino de multiplicação e, consequentemente, da tabuada, consiste na revelação de propriedades fundamentais da Matemática. Propriedades como, por exemplo, o produto pela soma ou pela

diferença, são desenvolvidas mediante a relação real entre as grandezas. A unidade de medida intermediária constitui o elemento mediador desse processo (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Há, pois, uma forte conexão entre as relações de multiplicidade e divisibilidade. Por isso, para a reprodução do movimento conceitual davydoviano, no que se refere à tabuada, foi necessário que analisássemos as tarefas referentes à multiplicação e algumas sobre divisão.

Tarefa 17: Escolha uma unidade de medida intermediária e represente no esquema (Ilustração 76). Registre a operação correspondente e determine o resultado por meio da reta numérica (ДАВЫДОВ et al., 2009).

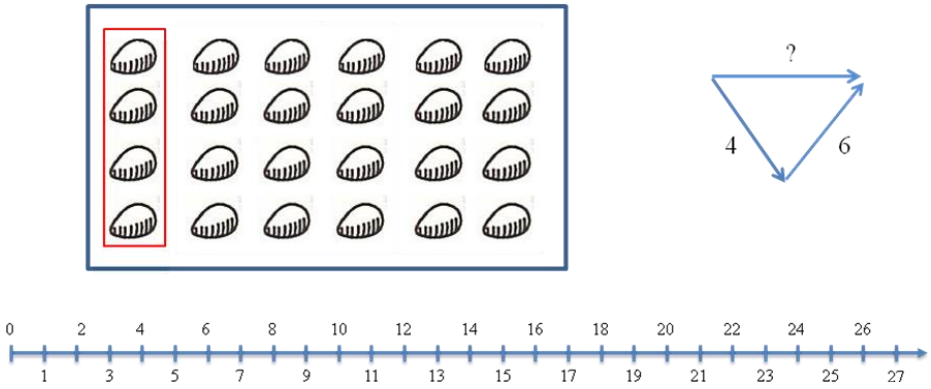
Ilustração 76 - Tarefa 17, registro dos valores no esquema



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009 p. 7).

A tarefa não indica a unidade de medida intermediária a ser considerada. Porém, a disposição das empadinhas (unidades de medidas básicas) sugere várias opções, tais como linha, coluna, agrupamentos compostos por quatro, seis e oito unidades, entre outros. A título de exemplificação, supomos que as crianças optem pela coluna, em cada qual há *quatro* (4) unidades básicas. Como são *seis* (6) colunas, a unidade intermediária (*quatro*) será tomada por *seis* (6) vezes. Registram-se os números *quatro* (4) e *seis* (6) no esquema, conforme a ilustração 77 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003):

Ilustração 77 - Tarefa 17, registro dos valores no esquema

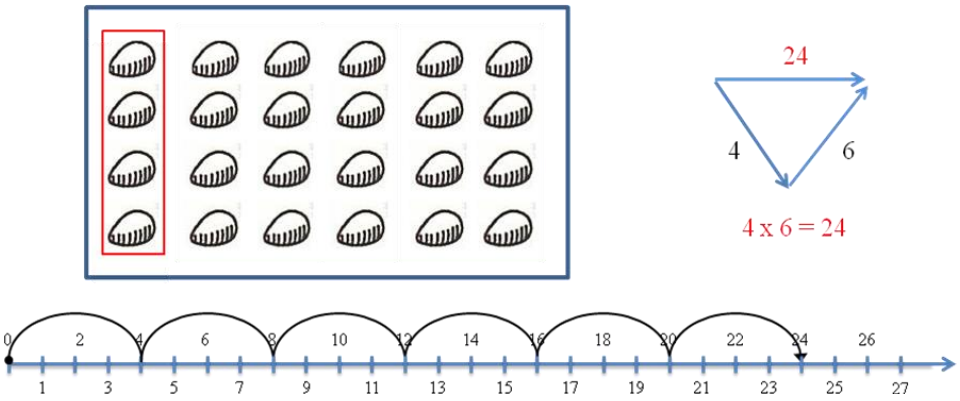


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Os dois números (4 e 6) foram determinados pela relação entre as grandezas (discretas). O terceiro número, valor desconhecido, pode ser obtido do mesmo modo, ao analisar diretamente a forma pela qual as empadinhas foram dispostas.

Porém, a orientação é que as crianças determinem o total de unidades básicas por meio de uma operação. Qual é a operação utilizada para determinar o total de unidades básicas quando se conhece, os valores referentes à unidade de medida intermediária e a quantidade de vezes que ela repete? A operação é a multiplicação. Após o registro da operação (4 x 6) determina-se o produto por meio da reta numérica, conforme a ilustração 78 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Ilustração 78 - Tarefa 17, determinação do número de unidades básicas por meio da reta numérica



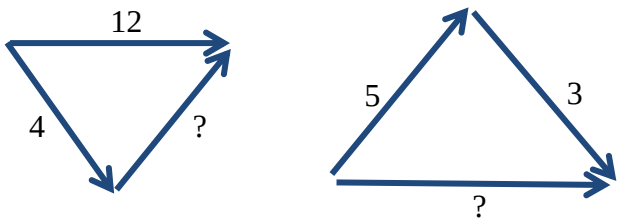
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A multiplicação, $a\ x\ b = \overbrace{a + a + a + a \ldots + a}^{(b)}$, é definida como um todo constituído de partes iguais. “Ao número ***a***, parcela que se repete, chama-se multiplicando; ao número ***b*** >1, número de vezes que ***a*** aparece como parcela, chama-se multiplicador; aos dois em conjunto dá-se o nome de fatores; ao resultado, produto.” (CARAÇA, 1951, p. 18- grifos nosso). De acordo com o referido autor, se o multiplicando é igual a 1, tem-se, da definição, 1 x *b* = 1 +1 +1 + ... + 1 = *b* e se é igual a zero, 0 x *b* = 0 + 0 + 0 + ... + 0 = 0. No caso em que “o *multiplicador* é *um* ou *zero*, o produto não tem significado em face da definição. Poremos então novas *definições*.” (CARAÇA, 1959, p. 24 - grifo do autor), pela propriedade comutativa: *a* x 1 = 1 x *a* = *a* e *a* x 0 = 0 x *a* = 0.

O total de empadinhas poderia ser determinado pela contagem direta delas (um a um). Porém, a operação da multiplicação possibilita chegar ao mesmo resultado, com mais agilidade no processo de cálculo. Com base na definição apresentada por Caraça, o número *a* consiste na unidade de medida intermediária (representada na reta numérica pelos arcos) e o número *b* a quantidade de vezes que esta unidade se repete. A compreensão de tal definição é essencial para que os estudantes identifiquem quais operações estão representadas nos esquemas abstratos a seguir (Tarefa18).

Tarefa 18: Determine os valores desconhecidos (Ilustração 79) com o auxílio da régua (ДАВЫДОВ et al., 2009).

Ilustração 79 - Tarefa 18, esquemas



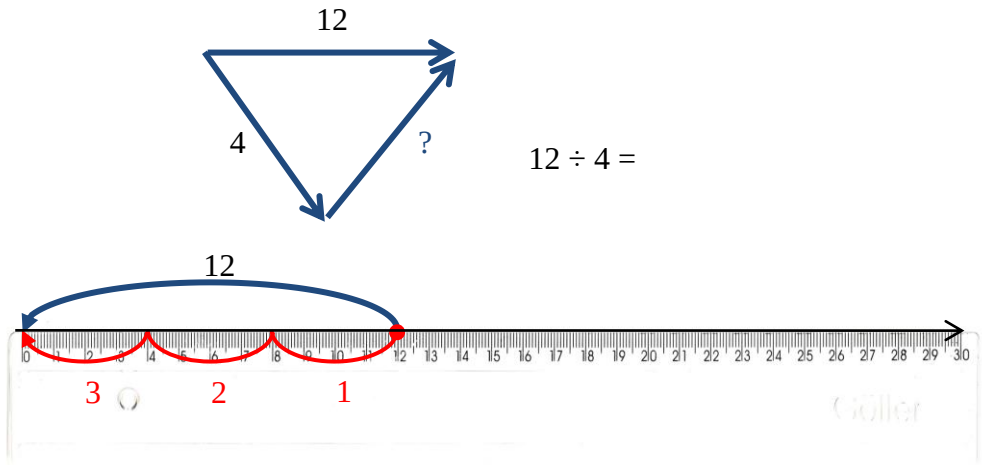
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 7).

De acordo com os esquemas (Ilustração 79), é possível a identificação de que algumas medições foram determinadas com o auxílio da unidade de medida intermediária. A resolução da tarefa requer a escolha da operação adequada para o cálculo dos valores desconhecidos.

Na seta superior do primeiro esquema (Ilustração 79) consta o número *doze* (12), o total de unidades de medidas básicas, e o número *quatro* (4), a medida intermediária. O valor desconhecido refere-se à quantidade de vezes que a medida intermediária (4) se repete. Portanto, a operação necessária é a inversa da multiplicação, a divisão, pois o referido valor corresponde ao quociente. Para a determinação do valor desconhecido utiliza-se a régua. As crianças traçam uma reta e se orientam pelos números contidos na própria régua para o registro dos arcos (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Na operação de multiplicação o ponto de partida, na reta ou na régua, é o zero, pois o que se busca, nesta operação, é o valor total de unidades de medidas básicas, ou melhor, o todo. Na operação de divisão, a referência aos arcos, na reta ou na régua, é o ponto correspondente ao total de unidades de medidas básicas, o **todo**. O movimento ocorre em direção ao zero. Como se trata da operação inversa entre multiplicação e divisão, o movimento também o será. O ponto de partida é aquele correspondente ao total de unidades de medidas básicas (12), até atingir o número zero (Ilustração 80).

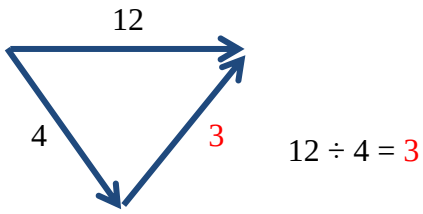
Ilustração 80 - Tarefa 18, operação da divisão na régua



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Quantas vezes a unidade intermediária (*4*) cabe nas *doze* (12) unidades básicas? A resposta para esta questão é obtida a partir da análise da quantidade de arcos, *três* (3). Para finalizar, completa-se o primeiro esquema com o número *três* (3) e ao lado do esquema o registro com a operação, ilustração 81(ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

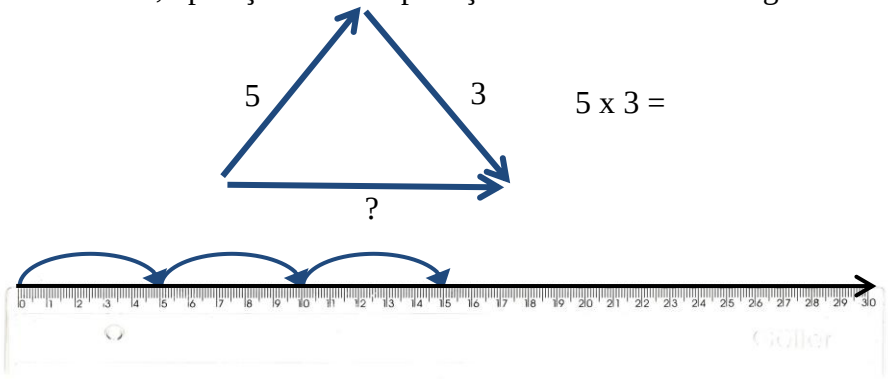
Ilustração 81 - Tarefa 18, registro do resultado da operação de divisão no esquema de setas



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

No que se refere ao segundo esquema da tarefa em análise (Ilustração 82), os questionamentos norteadores são, por exemplo: o que o número *cinco* (5) representa no esquema? E o número *três* (3)? O valor desconhecido é produto ou quociente? Qual operação será realizada para o cálculo do valor desconhecido? O número *cinco* (5) representa a unidade de medida intermediária e o número *três* (3), a quantidade de vezes que o número 5 se repete. O valor desconhecido é o total de unidades básicas, o produto, portanto, a operação realizada será a de multiplicação. Registra-se a operação e procede-se o cálculo com auxílio da régua, conforme a ilustração 82 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

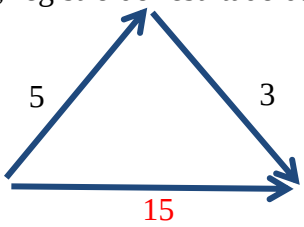
Ilustração 82 - Tarefa 18, operação da multiplicação com o auxílio da régua



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na reta (Ilustração 82), com auxílio da régua, formam-se, a partir do ponto zero, *três* (3) agrupamentos (arcos) compostos por cinco unidades básicas cada. O ponto de chegada do último arco consiste no valor total de unidades de medidas básicas (15) o produto, conforme a ilustração 83 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Ilustração 83 - Tarefa 18, registro do resultado da operação no esquema



5 x 3 = 15

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A utilização da régua, no desenvolvimento da tarefa, justifica-se por conter a sequência numérica. O estudo do esquema de setas auxilia na compreensão da propriedade fundamental das operações: "Se são conhecidos os valores de dois elementos da operação, por eles se podem determinar sempre e unicamente o valor do terceiro elemento" (DAVÍDOV, 1988, p. 211). Tal entendimento permite a construção, sobre a base da igualdade dada, de vários tipos de equações.

Na especificidade da tarefa em análise, a partir da igualdade a x $b = c$ derivam as seguintes equações: $c \div b = a$ e $c \div a = b$. Isto é, a operação de multiplicação se relaciona por meio de sua inversa, com a divisão: "Dado o produto e um dos fatores, determinar o outro [fator]. Deveria também haver duas inversas, mas que se fundem numa só - divisão - em virtude da propriedade comutativa do produto." (CARAÇA, 1954, p. 20). Na tarefa seguinte, Davýdov e colaboradores abordam a generalização e a abstração da essência da tabuada na forma gráfica.

Tarefa 19: Determine os resultados das operações com o auxílio da régua (ДАВЫДОВ et al., 2009).

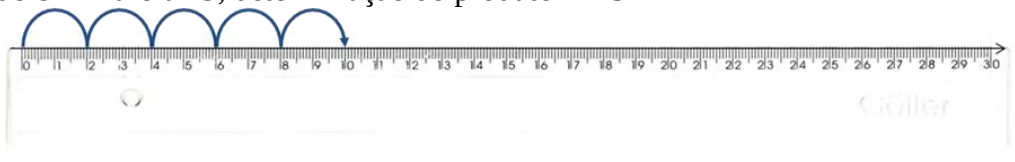
2 x 5 =	3 x 7 =	6 ÷ 3 =	12 ÷ 2 =
3 x 5 =	2 x 7 =	6 ÷ 2 =	12 ÷ 3 =

As crianças já conhecem os casos de multiplicação e divisão, mesmo assim propõem-se as operações com o auxílio da régua para que lembrem dos procedimentos para determinar o multiplicando ou do produto (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Nesse estágio de desenvolvimento da tarefa, no registro 2 x 5, por exemplo, as crianças sabem que: o primeiro número (*dois*) representa a medida intermediária, o multiplicando; o segundo número (*cinco*) indica o número de vezes que a medida intermediária se repete (multiplicador) . Também, que o produto é determinado com auxílio da régua. Como na tarefa anterior, as crianças agrupam de duas em duas unidades básicas e

destacam por meio dos arcos, num total *cinco* (5). O procedimento será iniciado a partir do ponto zero na régua (Ilustração 84), pois se trata da multiplicação. O ponto de chegada do último arco representa o valor total de unidades de medidas básicas, o produto. Logo, 2 x 5 = 10 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

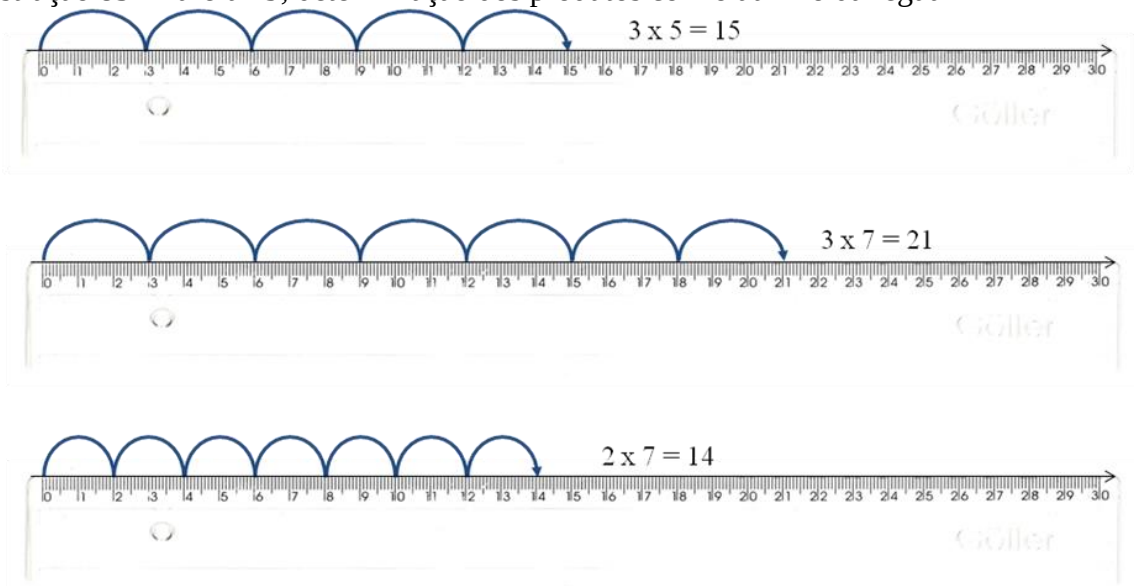
Ilustração 84 - Tarefa 19, determinação do produto 2 x 5



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Nos registros seguintes (3 x 5=__, 3 x 7=__, 2 x 7=__) as crianças realizam o mesmo procedimento de resolução que mencionamos anteriormente (Ilustração 85):

Ilustração 85 - Tarefa 19, determinação dos produtos com o auxílio da régua



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na multiplicação o "multiplicando exerce o papel passivo e o multiplicador papel ativo." (CARAÇA, 1951, p. 16). A resolução desta operação, na reta ou na régua, possibilita a explicitação desses papéis. Assim, os arcos representam o multiplicando, o valor constante. O número de vezes que o multiplicando se repete é determinado pelo multiplicador.

Nessa mesma tarefa (19), também são apresentadas algumas operações de divisão (6 ÷ 2=__, 6 ÷ 3=__, 12 ÷ 2=__ e 12 ÷ 3=__), com o objetivo de relembrar o procedimento de resolução.

Na operação 6 ÷ 2, o número *seis* (6) é o valor total de unidades básicas e o número *dois* (2) a medida intermediária. A resolução busca a identificação de quantas vezes *dois* (2) cabe no *seis* (6): o quociente, que é obtido com auxílio da régua. As crianças traçam um arco com origem no ponto correspondente ao número seis até o zero (Ilustração 86), que é a quantidade total de unidades básicas (6). Em seguida, formam os arcos menores, compostos por duas unidades cada, para representar as unidades intermediárias, contidas no valor total de unidades de medidas básicas (6) até chegar ao número zero (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

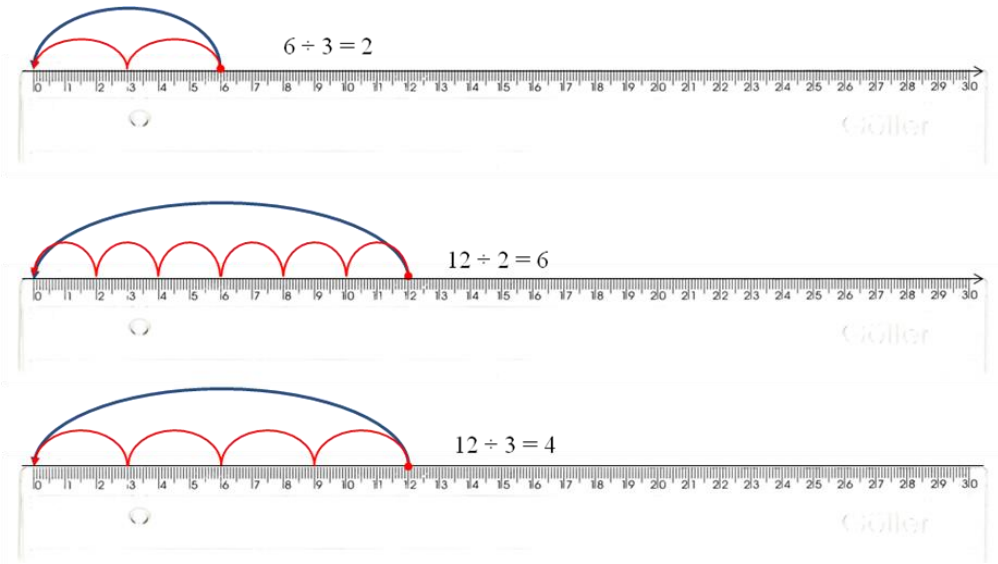
Ilustração 86 - Tarefa 19, operação de divisão na régua

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Logo, 6 ÷ 2 = 3: duas unidades cabem por três vezes em *seis* (6) (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

A resolução das demais operações de divisão (6 ÷ 3; 12 ÷ 2; 12 ÷ 3) adotam o modo análogo (Ilustração 87):

Ilustração 87 - Tarefa 19, operação de divisão na régua

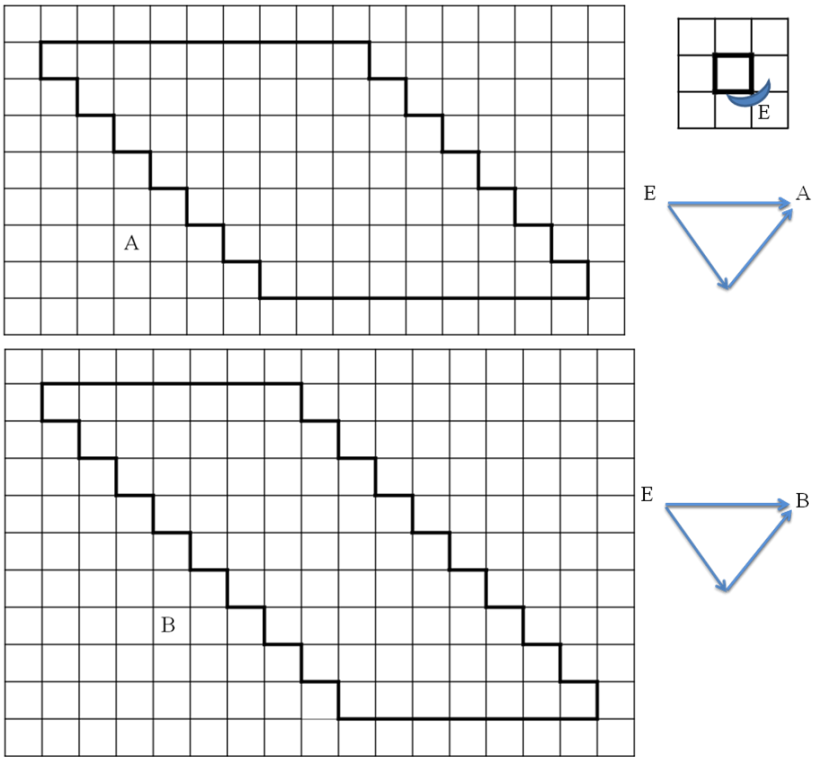


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Inicialmente, as operações eram desenvolvidas na reta numérica, aos poucos passaram a ser desenvolvidas com o auxílio da régua. Vale lembrar que nessa operação, as crianças traçam uma reta sem números e se orientam pela sequência numérica da régua (Ilustrações 84, 85, 87). Ao resolver a operação, elas retiram a régua e o registro que fica no caderno caracteriza uma operação genérica, na qual o valor da unidade de medida intermediária não é expresso. Este procedimento vale para qualquer tabuada de modo geral. Constitui uma generalização e uma abstração da essência da tabuada na forma gráfica. O movimento de abstração e generalização tem continuidade, na tarefa 20, com a propriedade comutativa.

Tarefa 20: A presente tarefa compõe-se por *três* etapas distintas (a, b e c). Na primeira parte (item a), as medidas genéricas das áreas (A e B) são apresentadas na ilustração 88: Eleja uma unidade de medida intermediária e complete o esquema (ДАВЫДОВ et al., 2009).

Ilustração 88 - Tarefa 20, propriedade comutativa da multiplicação

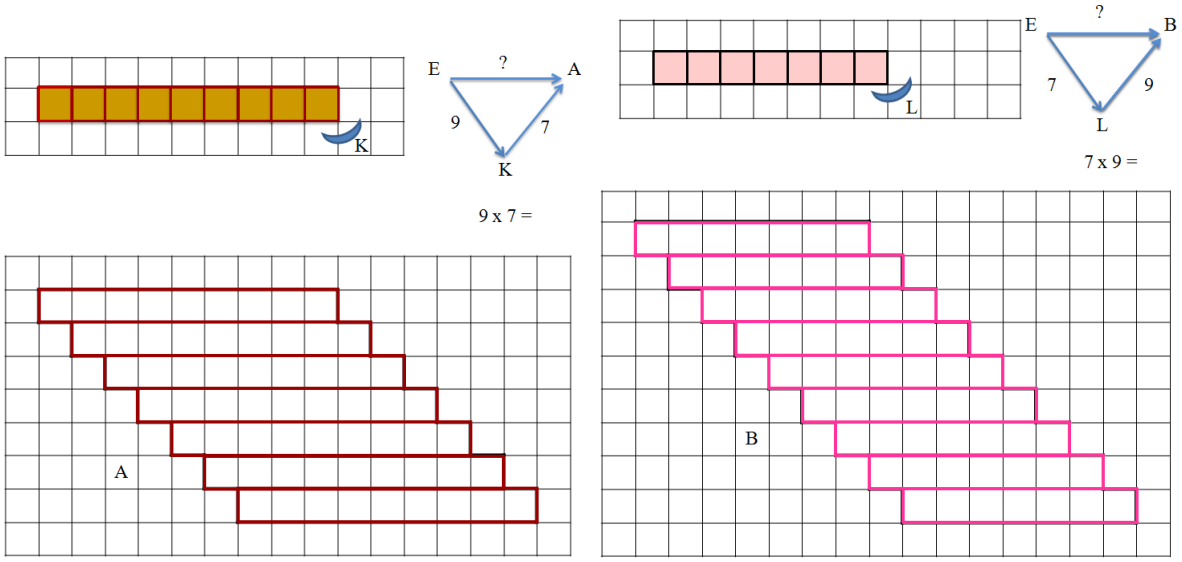


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 11-12).

A tarefa consiste na medição das áreas das superfícies e no registro das medições no esquema (Ilustração 88). Este sugere a construção de uma unidade de medida intermediária, visto que a unidade de medida básica (E) é “pequena” se comparada à área total a ser medida. As crianças concluirão, com orientação do professor, que a linha (unidades dispostas na horizontal) é considerada como medida intermediária, em ambas as figuras (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Na primeira figura (medida A), as crianças representarão a unidade de medida intermediária (K), composta por *nove* (9) unidades básicas, que se repete por *sete* (7) vezes (Ilustração 89). Na segunda figura (medida B), a medida intermediária (L) é composta por *sete* (7) unidades de medida básica, tomada por *nove* (9) vezes. Registram os números nos esquemas correspondentes a cada área. Os valores desconhecidos são indicados por um ponto de interrogação (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

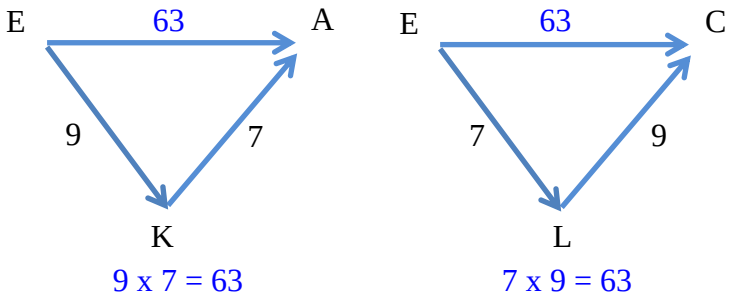
Ilustração 89 - Tarefa 20 a) construção da unidade de medida intermediária



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

De acordo com o registro proposto nos esquemas, ainda se faz necessário determinar a quantidade de unidades básicas que compõem cada figura. Conforme, mencionamos, a operação adequada para determinar o total de unidades básicas é a multiplicação (9 x 7=__ e 7 x 9=__). Como as operações envolvem números maiores, Микулина e Савельева (2003) sugerem a utilização da calculadora para determinar o produto. Os resultados são registrados nos esquemas (Ilustração 90).

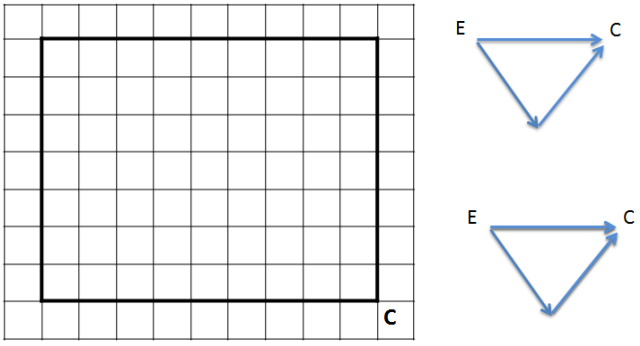
Ilustração 90 - Tarefa 20 a) registro dos valores nos esquemas



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Tarefa 20: b) Calcule a área da figura apresentada na ilustração 90, com unidades de medidas intermediárias diferentes, e represente o resultado do processo de medição nos esquemas (ДАВЫДОВ et al., 2009).

Ilustração 91 - Tarefa 20 b) propriedade comutativa da multiplicação

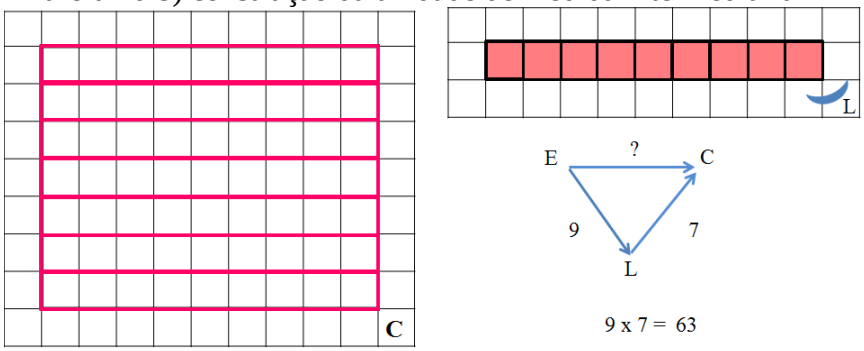


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A tarefa consiste em determinar a área da superfície de dois modos diferentes, isto é, de duas unidades de medidas intermediárias distintas: linha e coluna (Ilustração 91). O professor sugere a divisão da turma em dois grupos para a realização da tarefa. Um grupo utiliza a linha como unidade de medida intermediária e o outro a coluna (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

As crianças que adotarem a linha como unidade de medida intermediária fazem a devida representação, na malha (L), que é composta por *nove* (9) unidades básicas e se repete por *sete* (7) vezes na área total. Os números são registrados no esquema, seguida da operação (9 x 7 =) que possibilita o cálculo da área total, conforme a ilustração 92 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

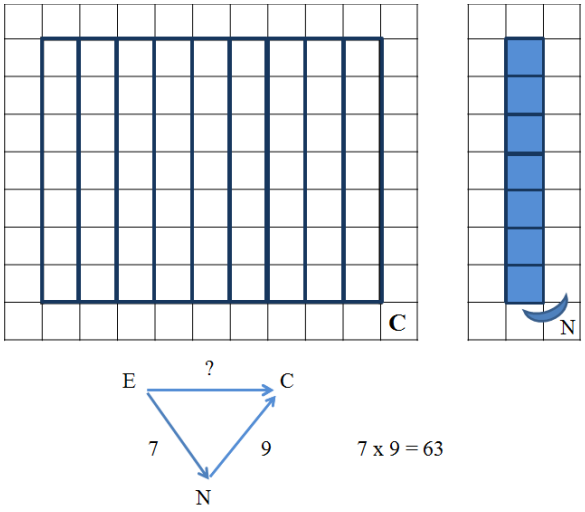
Ilustração 92 - Tarefa 20 b) construção da unidade de medida intermediária – linha



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

As crianças que estabeleceram a coluna como unidade de medida intermediária procedem a medição de forma semelhante à que acabamos de expor. Porém, a coluna é composta por *sete* (7) unidades de medidas básicas e se repete por *nove* (9) vezes na área total (Ilustração 93). Os números são registrados no esquema seguido da operação que possibilita o cálculo da área em referência (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Ilustração 93 - Tarefa 20 b) construção da unidade de medida intermediária – coluna



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O professor propõe que os grupos apresentem seus registros e a operação (Ilustrações 92 e 93). E lembra que ambos mediram a mesma superfície, por isso, as unidades básicas são as mesmas, um quadrado da malha. No entanto, as medidas intermediárias foram compostas de modos diferentes. As crianças verificam que o resultado é o mesmo (Ilustrações 92 e 93) e finalizam com a análise da composição dos registros tanto da primeira parte da tarefa quanto da segunda (9 x 7 = 63 e 7 x 9 = 63). (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Tarefa 20: c) Utilize a calculadora para determinar a área total das figuras apresentadas nos itens anteriores (áreas com medidas genéricas A, B e C) e compare os resultados (ДАВЫДОВ et al., 2009).

A reflexão que subsidiará a resolução da tarefa é a seguinte: as três superfícies A, B e C foram construídas com a mesma unidade básica (um quadrado da malha). No entanto, as unidades de medidas intermediárias eram compostas de modo diferente. Na superfície com medida A, a unidade intermediária era composta por *nove* (9) quadrados e se repetia por *sete* (7) vezes: 9 x 7 = 63. Em B, o inverso, *sete* (7) tomados por *nove* (9) vezes, isto é, 7 x 9 = 63.

Na superfície com medida C, sua área foi calculada de dois modos diferentes. Primeiro, a linha foi considerada como unidade de medida intermediária, constituída de *nove* unidades básicas. A figura era composta por sete linhas; então, a operação é 9 x 7 = 63. No segundo, a coluna foi tomada como unidade de medida intermediária, com *sete* unidades básicas, o que se traduz em 7 x 9 = 63, pois havia *nove* colunas. Desse modo, as três superfícies possuem a mesma área: A = B = C = 63 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Será que os produtos compostos por fatores iguais, porém colocados em ordem diferente, são sempre iguais? É bem provável que as crianças respondam de forma positiva à pergunta. O professor sugere verificar a afirmação com a resolução de novas tarefas que são apresentadas no livro didático (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

A resolução das tarefas, sugeridas no parágrafo anterior, levam à elaboração de uma fórmula para representar a propriedade comutativa da multiplicação. Dados dois números quaisquer *m* e *p*, tomados em ordem diferente, os produtos serão os mesmos, que se sintetiza pela igualdade *m* x *p* = *p* x *m*: o deslocamento dos fatores não altera o produto (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003). Porém, altera o significado para o multiplicando e o multiplicador.

Os recursos algébricos abrem caminho para a expressão de qualquer operação aritmética, sem que seja necessário operar com as grandezas. Na tarefa em análise, o modelo (*m* x *p* = *p* x *m*), que representa a propriedade comutativa da multiplicação, decorre da generalização da relação entre as grandezas (Ilustrações 89, 92 e 93).

A utilização dos símbolos propicia o trabalho "com a relação entre as grandezas, sem que esta esteja associada a entes numéricos, geométricos, ou de qualquer outra espécie, o que se destaca como essencial ao conhecimento algébrico, assim como a generalização dessas relações entre as grandezas" (PANOSSIAN, 2014, p. 104). A representação por símbolos

sintetiza e possibilita o trabalho com a relação entre grandezas, mas de modo geral, como a tarefa a seguir (21).

Tarefa 21: Calcule os produtos 7 x 2, 5 x 2, 9 x 2 e 6 x 2 a partir da propriedade comutativa da multiplicação (ДАВЫДОВ et al., 2009).

Nesse estágio de desenvolvimento da proposta davydoviana, as crianças ainda não estudaram as tabuadas dos números *cinco*, *seis*, *sete* e *nove*, no entanto, por meio da propriedade comutativa da multiplicação é possível determinar os produtos, a partir dos conhecimentos referentes à tabuada do número *dois*:

7 x 2 = 2 x 7 = 14

5 x 2 = 2 x 5 = 10

9 x 2 = 2 x 9 = 18

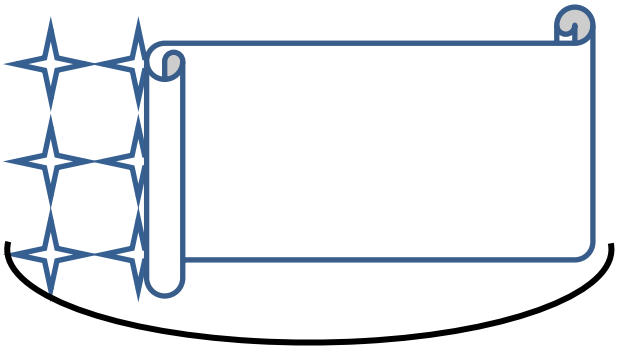
6 x 2 = 2 x 6 = 12

A tarefa consiste em relacionar, mentalmente, a tabuada do número *dois* a outras tabuadas por meio da propriedade comutativa. Esta se torna mais um procedimento para a memorização da tabuada, que somente ocorre no momento em que as tarefas estão em nível do concreto pensado - se pressupõe a apropriação do conceito em sua essência.

Porém, essa relação no plano mental não surge do nada, mas é antecedida por um movimento que envolveu várias relações reais entre grandezas. Como afirmam Núñez e Oliveira (2013, p. 295), a formação das ações mentais e dos conceitos "realizam-se com apoio de objetos externos e, na medida em que são manipulados, passando-se por uma série de etapas, posteriormente são realizadas no plano mental e se tornam propriedade de psique." A "memória é uma forma especial da psique, de atuação psicológica efetiva, está entrelaçada com a atividade: ela muda e se desenvolve com a atividade." (REPKIN, 2014, p. 86), que, na especificidade deste, é a de estudo. O desenvolvimento das ações mentais é proposto em Davýdov, no contexto do objeto de estudo, por meio das propriedades matemáticas, como ocorre, por exemplo, na tarefa 22.

Tarefa 22: A presente tarefa é composta por três etapas (a, b e c). No primeiro item (a), as estrelas de quatro pontas estão dispostas em 38 colunas. Cada coluna é composta por três estrelas (Ilustração 94). Componha a operação para proceder ao cálculo do número total de estrelas (ДАВЫДОВ et al., 2009).

Ilustração 94 - Tarefa 22 a) estrelas de quatro pontas

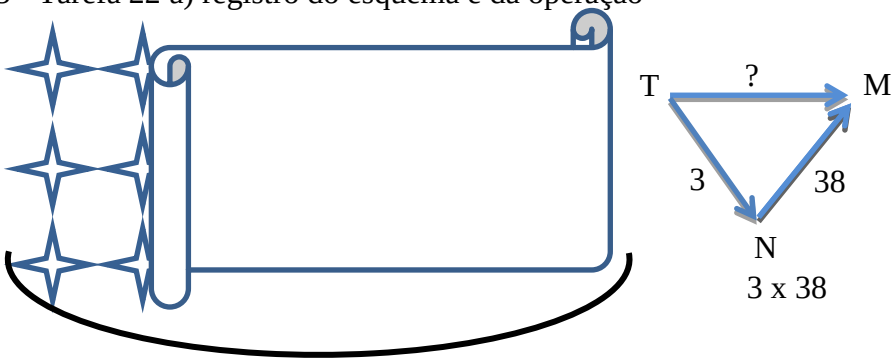


38 colunas

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p.17).

A título de exemplificação, tomamos a coluna como unidade de medida intermediária. Assim, são *três* (3) tomados por *trinta e oito vezes* (38). O professor registra no quadro o esquema e a operação correspondente para determinar o total de unidades básicas, conforme a ilustração 95 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Ilustração 95 - Tarefa 22 a) registro do esquema e da operação

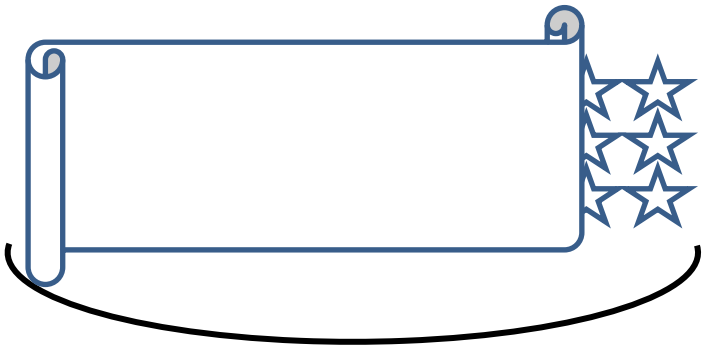


38 colunas

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Tarefa 22: b) Estrelas de cinco pontas estão distribuídas em 56 colunas compostas por três estrelas cada (Ilustração 96). Componha a operação para calcular o número total de estrelas (ДАВЫДОВ et al., 2009).

Ilustração 96 - Tarefa 22 b) estrelas de cinco pontas

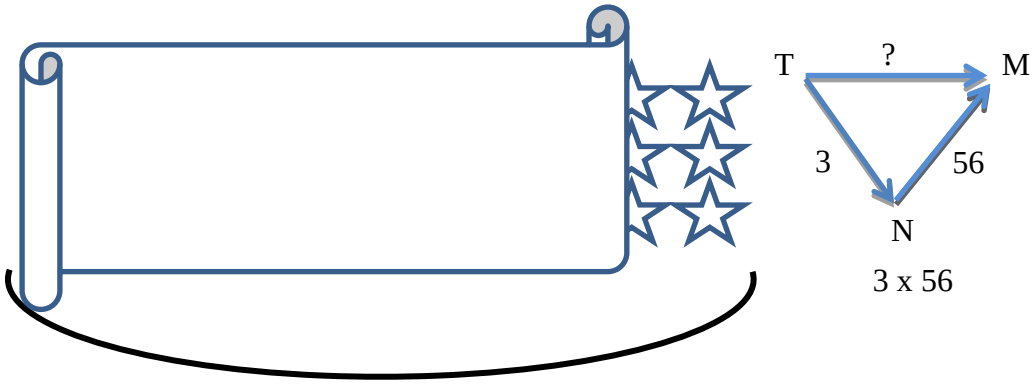


56 colunas

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p.17-18).

Para determinar o valor total de estrelas de *cinco* pontas (Ilustração 96), o professor sugere que a coluna seja considerada como unidade de medida intermediária. Conclui-se que são *três* (3) tomados por *cinquenta e seis* (56) vezes. O professor e as crianças constroem o esquema, no quadro e no caderno, respectivamente, e registram a operação: 3 x 56 =__, conforme a ilustração 97 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Ilustração 97 - Tarefa 22 b) construção do segundo esquema

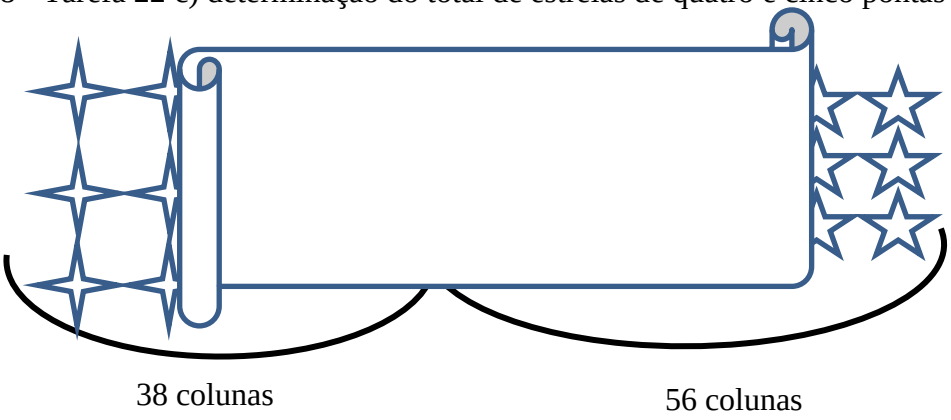


56 colunas

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

<u>Tarefa 22</u>: c) Determinar o total de estrelas de quatro e cinco pontas (Ilustração 98) escondidas atrás da tela. Represente por meio de esquemas de setas (ДАВЫДОВ et al., 2009).

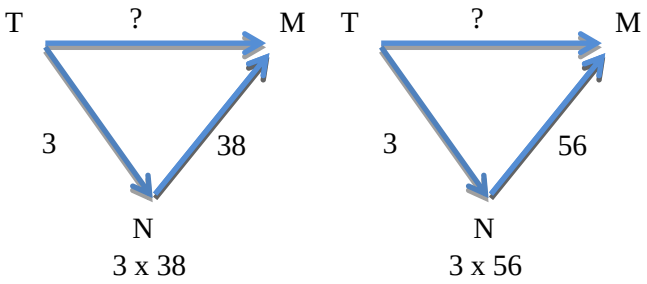
Ilustração 98 - Tarefa 22 c) determinação do total de estrelas de quatro e cinco pontas



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p.18).

Essa etapa da tarefa solicita que se determine a quantidade total de unidades escondidas atrás da tela, constituídas de estrelas de quatro e cinco pontas (Ilustração 98). A partir dos registros obtidos nos itens a e b (Ilustrações 95 e 97), as crianças concluirão, com orientação do professor, que se obtém a solução pela soma das duas partes (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003):

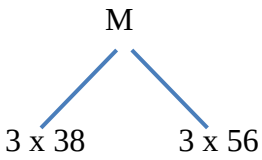
Ilustração 99 - Tarefa 22 c) determinação do total de estrelas de quatro e cinco pontas



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A solução, portanto, é obtida pela soma das duas expressões multiplicativas: 3 x 38 + 3 x 56. É possível pensar em um novo esquema que represente as ações que possibilitam determinar o total de estrelas de quatro e cinco pontas? As reflexões são orientadas para a elaboração do esquema apresentado na ilustração 100 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Ilustração 100 - Tarefa 22 c) esquema que representa a soma das partes



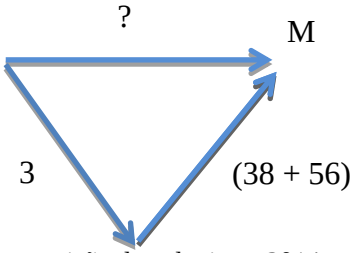
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O professor questiona: *Esse esquema (Ilustração 99) oferece as condições para determinar o total de estrelas de quatro e cinco pontas?* As crianças concluirão, com o auxílio do professor, que é possível determinar o inteiro quando se conhece o valor das partes. Neste caso, as partes são (3 x 38) + (3 x 56).Trata-se do esquema que representa a soma das partes[23]. Dito em outras palavras, o esquema refere-se ao todo dividido em partes. Em cada parte, há o mesmo número de linhas. Assim, para determinar o todo se adiciona as partes.

Tarefa 22: d) Determine outra forma de calcular o total de estrelas de quatro e cinco pontas. Represente suas ações por meio de esquema de setas (ДАВЫДОВ et al., 2009).

O professor retoma a análise da última tela de estrelas (Ilustração 98): *É possível calcular a quantidade total de estrelas de quatro e cinco pontas com o emprego de outro método?* Ele direciona as análises para que as crianças constatem que é possível determinar o valor do todo por meio de outro procedimento. Mas, para isso, é necessário determinar o número total de colunas (38 + 56). Há em comum nas sentenças (3 x 38 e 3 x 56), o fator *três* (3) - a unidade de medida intermediária é a mesma em ambos. O professor constrói o esquema de setas no quadro (Ilustração 101) e registra os números que representam as ações dos itens *a* e *b*. (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Ilustração 101 - Tarefa 22 d) esquema com setas para o cálculo do total de estrelas

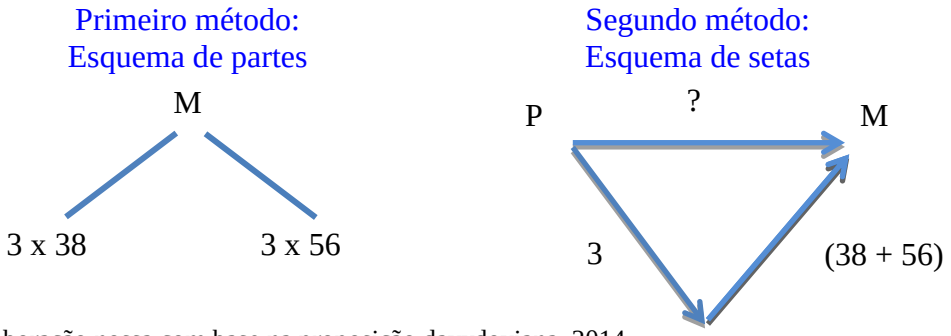


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

[23] Este esquema, na proposição davydoviana, é utilizado na operação de adição e indica o número de partes que constituem o todo. Aos poucos esse esquema, será associado à operação de multiplicação.

Após o registro dos números no esquema, o professor lembra os estudantes os dois procedimentos para o cálculo do total dos dois tipos de estrelas de quatro e cinco pontas (Ilustração 102).

Ilustração 102 - Tarefa 22 d) métodos de cálculo

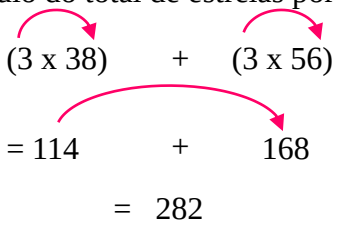


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Então, questiona: *Qual é o resultado que obteremos ao fazer o cálculo pelo primeiro método? E pelo segundo? Qual resultado é maior?* O professor informa que, por se tratar de valores maiores, os resultados podem ser obtidos com o auxílio da calculadora.

No processo de resolução pelo primeiro método (3 x 38) + (3 x 56), as crianças determinarão, inicialmente, os produtos dentro dos parênteses e, em seguida, procedem à soma (114 + 168), conforme ilustração 103:

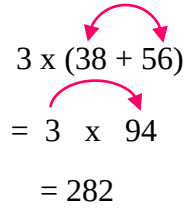
Ilustração 103 - Tarefa 22 d) cálculo do total de estrelas por meio do primeiro método



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Pelo segundo procedimento, as crianças primeiro determinarão a soma dentro dos parênteses (38 + 56) e, em seguida, o produto (3 x 94), conforme ilustração 104:

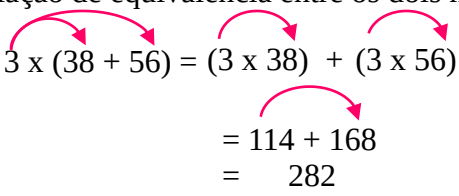
Ilustração 104 - Tarefa 22 d) cálculo do total de estrelas por meio do segundo método



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O professor e as crianças comparam os resultados (Ilustrações 103 e 104) e concluem que o valor obtido pelos dois procedimentos são os mesmos, pois se trata da mesma quantidade, porém se diferenciam no método de resolução, conforme apresentamos na ilustração 105 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003):

Ilustração 105 - Tarefa 22 d) relação de equivalência entre os dois métodos de resolução



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Assim, para multiplicar um número pela soma, pode-se multiplicar cada termo separado e adicionar o resultado ao final. Tal conclusão fundamenta a elaboração da seguinte regra: a x (b + c) = a x b + a x c (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003). Esta consiste na propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma (CARAÇA, 1959). Essa propriedade está relacionada ao estágio inicial do desenvolvimento do conceito de multiplicação como adição de parcelas iguais. Isto é, quando o todo é composto por várias partes iguais.

As propriedades, em matemática, são uma forma de generalização do conceito aritmético. Este "[...] é considerado como caso particular de um conceito mais geral [algébrico]" (VIGOTSKI, 2000, p. 372). Operar a partir da fórmula mais geral, como por exemplo, a propriedade distributiva da multiplicação, significa tornar-se independente de uma expressão aritmética determinada (Ilustração 105). A álgebra possibilita a generalização e tem como produto a tomada de consciência e apreensão das operações aritméticas (VIGOTSKI, 2000).

Davýdov e colaboradores, em sua proposição de ensino, contemplam uma série de propriedades matemáticas que consistem nas raízes conceituais da tabuada e que, no Brasil, são apresentadas apenas ao final do Ensino Fundamental. Em nosso país, o acesso dos estudantes à álgebra geralmente inicia-se por volta do sétimo ano com a introdução das equações, das letras. Nesse sentido, a álgebra é concebida como manipulação de letras. Para Panossian (2012, p. 14), esta concepção se estende ao longo dos demais anos de escolaridade até o Ensino Médio e "é fonte de dificuldades dos estudantes, que não compreendem o significado atribuído ao símbolo e mesmo ao conhecimento algébrico como um todo".

Para a autora em referência, algumas dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem da matemática, são decorrentes do modo como o ensino é organizado. Na especificidade do ensino de álgebra, por exemplo, a partir de sua forma simbólica, no estágio mais formalizado, não se considera o movimento lógico e histórico.

Outra dificuldade incide no modo como os professores concebem o conceito de álgebra: como aritmética simbólica (PANOSSIAN, 2014). Nesse sentido, em "vez de trabalhar com números específicos, como fazemos em aritmética, em álgebra empregamos letras que representam esses números" (EVES, 2002, p. 546). Os conceitos algébricos são vistos pelos professores como produtos que compõem a lista de conteúdos (PANOSSIAN, 2014).

Além disso, não consideram a essência da álgebra como generalização entre grandezas. Com essa concepção, "os professores podem destacar suas características, efetuar classificações, desenvolver técnicas e tratá-los apenas de forma empírica, por sua aparência, sem alcançar a essência dessa forma de conhecimento." (PANOSSIAN, 2014, p. 263). Tais condutas são fundamentadas nos princípios da lógica formal. Diferentemente da proposição davydoviana, na qual a álgebra surge a partir da relação entre grandezas e avança para a abstração e generalização, como apresentaremos na tarefa a seguir (23).

Tarefa 23: Calcule cada produto (Ilustração 106) por meio das propriedades da multiplicação estudadas anteriormente (ДАВЫДОВ et al., 2009).

Ilustração 106 - Tarefa 23, construção da tabuada do número *quatro*

4 x 1 =	4 x 6 =
4 x 2 =	4 x 7 =
4 x 3 =	4 x 8 =
4 x 4 =	4 x 9 =
4 x 5 =	4 x 10 =

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 24).

As operações da ilustração 106 são organizadas em uma determinada sequência e representam a tabuada do número *quatro* (4). O professor direciona a atenção para três multiplicações conhecidas (4 x 1 =__, 4 x 2 =__ e 4 x 3=__). Espera-se que as crianças saibam os resultados que são, respectivamente, 4, 8 e 12 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

O professor questiona: *Como podemos determinar o produto da próxima multiplicação (4* x *4) sem utilizar a calculadora e a régua? É possível utilizar a regra da multiplicação pela soma como procedemos na tarefa anterior (tarefa 22)?* Após ouvir as sugestões das crianças, o professor recorda a regra da multiplicação do número pela soma e questiona: *Como podemos utilizá-la para determinar os próximos produtos?* A sugestão é que o próximo valor desconhecido (4 x 4 = __) seja determinado a partir do último resultado obtido (4 x 3 = 12), pois 4 x 4 é equivalente a, por exemplo, 4 x (3 + 1) e 4 x (2 + 2), conforme ilustração 107 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003):

Ilustração 107 - Tarefa 23, construção da tabuada do número *quatro*

4 x 4 = 4 x (3 + 1)	ou	4 x 4 = 4 x (2 + 2)	
= (4 x 3) + (4 x 1)		= (4 x 2) + (4 x 2)	
= 12 + 4		= 8 + 8	
= 16		= 16	

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O mesmo procedimento se estende para o cálculo de 4 x 5= __. Isto é, 4 x 5 = 4 x (4 + 1) → (4 x 4) + (4 x 1) = 16 + 4 = 20. O professor enfatiza que os resultados são obtidos a partir do valor comum (*quatro*).

Nos próximos cálculos, o professor adota o registro resumido: 4 x 6 = 4 x (5 +1) → (4 x 5) + (4 x 1) = 20 + 4 = 24. Na sequência, o registro é reduzido um pouco mais: 4 x 7 = 24 + 4 = 28. Esse procedimento é adotado para o cálculo nos próximos fatores: 4 x 8 = 28 + 4

= 32, 4 x 9 = 32 + 4 = 36 e 4 x 10 = 36 + 4 = 40 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003). Ao final, a tabuada é organizada do seguinte modo (Ilustração 108):

Ilustração 108 - Tarefa 23, sistematização da tabuada do número *quatro* (4)

4 x 1 = 4	4 x 6 = 24
4 x 2 = 8	4 x 7 = 28
4 x 3 =12	4 x 8 = 32
4 x 4 =16	4 x 9 = 36
4 x 5 = 20	4 x 10 = 40

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O professor expõe que, além de construir a tabuada, também é necessário memorizar seus resultados (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003). A tabuada do número *quatro* (4) é generalizada do seguinte modo (Ilustração 109):

Ilustração 109 - Tarefa 23, generalização da tabuada do número *quatro* (4)

4 x 5 = 4 x (4 + 1)

4 x 6 = 4 x (5 + 1)

= 4 x (*b* + 1)

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A ilustração 109 indica a determinação de um novo resultado, em que o segundo fator da sentença seja composto pelo fator da sentença anterior (*b*), mais uma unidade (*b* + 1). Isso traduz o movimento de generalização em conexão com o da abstração expresso na síntese: o resultado anterior mais quatro. Esta síntese atende ao último estágio da segunda ação de estudo davydoviana, qual seja, modelação dos dados da tarefa de estudo na *forma literal*, referente à tabuada do número *quatro*: 4 x (b + 1) = c. Trata-se de uma nova generalização.

> Um novo conceito, uma nova generalização não surge senão com base no conceito ou generalização anterior. Isto se manifesta nitidamente no fato de que, paralelamente ao aumento das generalizações algébricas, ocorre o aumento da liberdade de operações. Libertar-se da vinculação ao campo numérico é operação diferente de libertar-se da vinculação do campo visual. A explicação do aumento da liberdade proporcional ao aumento das generalizações algébricas está na possibilidade de um movimento inverso do estágio superior para o inferior, contido na generalização superior: a operação inferior já é vista como caso particular da superior. (VIGOTSKI, 2000, p. 372).

Desse modo, 4 x (5 + 1) é um caso particular da generalização superior, expressa no modelo 4 x (b +1). De acordo com Davídov (1988, p. 133), "a modelação é um tipo peculiar de idealização simbólico-semiótica [...]", "[...] os símbolos e os signos são os meios de construção da objetivação idealizada." (p. 132), expressa nos modelos. Estes podem ser materiais ou mentais. Os modelos materiais estão relacionados com a atividade prática, admitem a transformação objetiva, enquanto que os mentais envolvem "somente a transformação mental." (DAVÝDOV, 1982, p. 313).

O modelo material, reproduzido por meio das relações entre grandezas (Tarefa 12), expressa as propriedades estruturais da tabuada (unidades de medida básica e intermediária, total de unidades básica e intermediária). Os modelos mentais semióticos podem ser representados algebricamente. Estes são compostos por elementos individuais que não apresentam semelhança externa com o modelo original (objetal), mas em sua estrutura reproduzem a estrutura do objeto (SHTOFF, 1966 apud DAVÍDOV, 1988).

Os modelos de estudo constituem o trabalho internamente imprescindível no processo de apropriação dos conhecimentos teóricos (DAVÍDOV, 1988). Por meio de modelos, as tarefas da proposição davydoviana são organizadas de modo a propiciarem o estudo das propriedades conceituais, a fim de revelar as conexões internas. Isto é, revelar a "relação universal do objeto dado, no qual deve ser refletido no correspondente conceito teórico" (DAVÍDOV, 1988, p. 182).

Mas, quais são as conexões internas que constituem a essência do conceito de tabuada? Estas são reveladas durante o desenvolvimento das seis ações, inerentes à tarefa de estudo davydoviana. Para responder a questão anteriormente apresentada, examinaremos a função de cada dado que compõe o modelo da tabuada em análise e suas inter-relações.

Na expressão literal do modelo universal para a tabuada do número *quatro*, temos: 4 x (b + 1) = c (Ilustração 108). O primeiro termo é fixo (4), este corresponde a medida intermediária. O segundo (b + 1) é um operador composto pelo fator da sentença anterior, mais uma unidade de medida intermediária, que, neste caso, equivale a *quatro*. O operador (b + 1) designa quantas vezes a unidade intermediária se repete. Em síntese, o segundo fator de cada sentença (operador) é composto pela soma do termo da sentença anterior, mais uma unidade. Dessas relações, podemos inferir que o segundo fator conforma uma sequência numérica, na especificidade deste estudo, de números positivos (1, 2, 3, 4,...).

Desse modo, Davýdov e colaboradores revelam as características internas, não observáveis diretamente nas grandezas, por meio do modelo da tabuada do número quatro, em interconexão com o modelo universal, válido para todas as tabuadas. Mas qual é o modelo universal?

Para responder a esse questionamento, inicialmente, vamos analisar o modelo do conceito de número, $\frac{c}{a} = b$ ou a x $b = c$. Este é resultado, na proposição davydoviana, das relações entre grandezas. As letras *a*, *b* e *c* assumem os seguintes significados: ***c*** representa a grandeza a ser medida, ***a*** é a unidade de medida e ***b*** é o número resultante da quantidade de vezes que a unidade de medida cabe na grandeza em medição (ROSA, 2012). A partir do modelo do conceito de número, cuja essência envolve a relação de multiplicidade, Davýdov e colaboradores desenvolvem o modelo da tabuada do número quatro: a x $(b + 1) = c$ (Ilustração 109). Neste, o primeiro fator de cada sentença é um número fixo (*a*), o segundo (*b* + 1) conforma uma sequência de números positivos (1, 2, 3, 4,...).

Em cada operação da sequência que configura a tabuada do número quatro (4 x 1 = 4, 4 x 2 = 8, ...), o produto do termo seguinte é composto pelo produto da operação anterior (*c*) mais uma unidade de medida intermediária (*a*): $c + a$. Esse modelo, no contexto da matemática, é denominado de lei da recorrência, pois para encontrar determinado produto da sequência "é necessário recorrer ao anterior, o que permite certo grau de generalização" (PANOSSIAN, 2014, p. 124). Como por exemplo,

> na sequência (4, 8, 12, 16,…), entende-se que pela lei de recorrência, a sequência é formada pela soma de quatro unidades ao elemento imediatamente anterior. Essa informação permite que se conheçam os próximos elementos da sequência, mas torna-se um procedimento exaustivo se quiser atingir o centésimo elemento, por exemplo. Nesse caso, analisando os casos numéricos particulares e generalizando os procedimentos aritméticos, é possível alcançar uma relação e expressá-la, mas esta é limitada, apesar de compreender os recursos da aritmética generalizada. (PANOSSIAN, 2014, p. 124-125).

Portanto, para expressar a tabuada do número *quatro* (4), sem recorrer ao termo anterior, precisamos considerar a posição do segundo termo. Ou, no contexto da proposição davydoviana, a quantidade de vezes que a unidade de medida é tomada. É possível "encontrar termos da sequência sem que seja necessário escrevê-la completamente" (PANOSSIAN,

2014, p. 124). Nesse sentido, os recursos algébricos são fundamentais, pois possibilitam "reconhecer e expressar a lei de formação" (p. 124).

O modelo particular apresentado na ilustração 109, para a tabuada do número quatro, 4 x (b + 1), é expressão do modelo universal válido para qualquer tabuada. Mas qual é esse modelo universal? Davýdov e colaboradores não o explicitam em sua proposição de ensino. Porém, partimos do pressuposto de que é tarefa da investigação científica revelar a essência do objeto de estudo. Por isso, decorre o seguinte questionamento: o que é necessário considerar para construir o modelo universal da tabuada?

Conforme mencionamos, o modelo universal não nos está dado explicitamente. Mas sua essência é revelada durante o processo de generalização e abstração, desencadeado no desenvolvimento do sistema de tarefas particulares, a partir das relações entre grandezas expressas algebricamente.

> O essencial para o desenvolvimento do conhecimento algébrico, ao ensinar sequências, é identificar as grandezas envolvidas e investigar a regularidade que pode existir entre elas. Por ser uma sequência, uma das grandezas envolvidas em geral é a posição que determinado elemento quantitativo ocupa em relação aos demais elementos. Por exemplo, sequência de dias; sequência de números pares; sequência de números triangulares e outros. A partir disso, se torna possível generalizar e encontrar uma forma geral de relação entre as grandezas. (PANOSSIAN, 2014, p. 125).

Nesse sentido, na especificidade da tabuada, é necessário considerar uma determinada relação entre grandezas. Vale reafirmar que, nesta, os fatores que a compõem ocupam uma determinada posição e conformam uma sequência numérica, na qual cada termo posterior é a soma do anterior mais uma unidade de medida intermediária, denominada de razão, que na tabuada coincide com o valor da unidade de medida intermediária. Subjacente à proposição davydoviana sobre o registro resumido (no parágrafo que antecede a ilustração 108) há a seguinte regularidade:

$$4 \times 6 = 4 \times (6 - 1) + 4 = 24$$
$$4 \times 7 = 4 \times (7 - 1) + 4 = 28$$
$$4 \times 8 = 4 \times (8 - 1) + 4 = 32$$
$$4 \times 9 = 4 \times (9 - 1) + 4 = 36$$
$$\vdots$$
$$a \times n = a \times (n - 1) + a = c$$

A partir de um longo processo de análise das regularidades, que possibilitam o registro resumido, revelamos o modelo universal da tabuada. Na especificidade da tabuada do número quatro, temos: 4 = ***a***; a sequência numérica 6, 7, 8, 9, ... = ***n***; o produto..., 24, 28, 32, 36,... = **c**.

Desse modo,

> associar o elemento à posição que ocupa produz outra generalização em que cada elemento é a multiplicação de quatro vezes a sua posição, assim o décimo elemento da sequência é 40, o centésimo, 400, e assim por diante, e para tanto não é preciso conhecer os elementos anteriores. Nesse caso, a sequência tem uma dimensão funcional no sentido de que relaciona as grandezas, posição do elemento na sequência, com o valor numérico do elemento [resultado]. (PANOSSIAN, 2014, p. 125).

Se considerarmos o décimo elemento da sequência, no modelo universal, temos 4 x 10 = 4 x (10 - 1) + 4 = 40. Porém, Davýdov e colaboradores consideram em sua proposição de ensino a relação entre as grandezas discretas e contínuas no contexto dos números reais. Portanto, o modelo não pode ser válido apenas para os números naturais. Consideremos, por exemplo, $n = \frac{1}{2}$ e $n = -3$, ainda no contexto da tabuada do número quatro. Substituindo os valores numéricos no modelo a x $(n - 1) + a = c$, temos:

Para $n = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 \text{ x} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + 4 = \frac{4}{2} - 4 + 4 = 2 - 4 + 4 = 2$.

Para $n = -3 \Rightarrow 4 \text{ x} (-3 - 1) + 4 = -12 - 4 + 4 = -12$.

Reafirmamos que, o modelo é válido para qualquer *n*, independentemente da unidade de medida intermediária, posição em que o segundo fator se encontra e sentido (positiva ou negativa). Nesse sentido, a modelação algébrica da tabuada possibilita ultrapassar os limites dos números naturais e se estende ao campo dos números reais. Além disso, ele é válido para qualquer tabuada em particular, e conforme exemplificaremos na tarefa 24 com a tabuada do número *cinco* (5).

O modelo universal "é a lei, a essência dos fenômenos singulares, ou seja, é algo qualitativamente distinto em comparação com a simples soma de características das coisas singulares", conforme prevê a lógica formal (DAVÝDOV, 1982, p. 243). A lei "é um dos modos de manifestar a universalidade." (ROSENTAL, 1965, p. 258).

> Por *universal* se entende a comunidade que existe objetivamente de traços, propriedades e características dos objetos e fenômenos singulares da realidade objetiva, ou também a similitude das relações e nexos entre eles. O universal é o que se repete através do múltiplo, do diverso ou do individual. (STERNIN, 1965, p. 257 - grifo do autor).

O universal está intimamente vinculado com a categoria de essência (STERNIN, 1965). Esta é o aspecto interno que expressa o nexo profundo, o que se mantém por meio das várias manifestações particulares. A "essência é aquilo sem o qual o objeto perde sua qualidade específica [...]" (STERNIN, 1965, p. 259). Vale repetir que no modelo da tabuada, a essência consiste na relação de multiplicidade entre grandezas (por meio de unidades básicas e intermediárias), cujo resultado conforma uma sequência, na qual o produto posterior é uma unidade de medida intermediária maior que o anterior. Esta essência é expressa no modelo $a \times n = a \times (n - 1) + a = c$.

Desse modo, o universal está relacionado com a lei, esta "expressa o nexo estável, essencial, interno e reiterado entre os fenômenos" (ROSENTAL, 1965, p. 258). De acordo com o matemático russo Bernshléin (1947, apud DAVÍDOV, 1988, p. 134), "toda relação entre símbolos matemáticos reflete as correspondentes relações entre as coisas reais." Nessa direção, Davídov (1988, p. 134) afirma que os "modelos semióticos refletem as conexões e relações dos objetos reais e, nesse sentido, as relações e conexões entre os signos matemáticos [...] podem ser consideradas como expressão visual do original." As relações entre os objetos reais ocorrem por meio de suas grandezas.

Na presente tarefa, revelamos o modelo universal subjacente à proposição davydoviana para o ensino da tabuada. Na tarefa 25, apresentaremos a transformação do modelo, por meio da análise de suas manifestações em diferentes particularidades. Esta constitui a terceira ação de estudo.

Tarefa 24: Calcule cada produto referente à tabuada do número *cinco* (Ilustração 110) por meio das propriedades de multiplicação estudadas (ДАВЫДОВ et al., 2009):

Ilustração 110 - Tarefa 24, apresentação da tabuada de *cinco* (5)

5 x 1 =	5 x 6 =
5 x 2 =	5 x 7 =
5 x 3 =	5 x 8 =
5 x 4 =	5 x 9 =
5 x 5 =	5 x 10 =

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 33).

A tarefa consiste na construção da tabuada de *cinco* (5) conforme ilustração 110. O professor sugere que as crianças determinem os produtos a partir das tabuadas estudadas anteriormente. Assim, por meio da propriedade comutativa, procedem-se os seguintes raciocínios (Ilustração 111):

Ilustração 111 - Tarefa 24, apresentação da Tabuada de *cinco* (5)

5 x 1 = 1 x 5 = 5;
5 x 2 = 2 x 5 = 10;
5 x 3 = 3 x 5 = 15;
5 x 4 = 4 x 5 = 20.

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Essa etapa inicial culmina com o registro dos respectivos resultados, conforme a ilustração 112:

Ilustração 112 - Tarefa 24, determinação de alguns produtos da tabuada de *cinco* (5)

5 x 1 = 5	5 x 6 =
5 x 2 = 10	5 x 7 =
5 x 3 = 15	5 x 8 =
5 x 4 = 20	5 x 9 =
5 x 5 =	5 x 10 =

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

E, a partir de 5 x 5, como proceder (Ilustração 112)? Vale lembrar que se trata de algo novo que não foi estudado nas tabuadas anteriores, portanto, o método da propriedade comutativa se esgota. Procede-se, assim, como na tabuada do número quatro (Tarefa 23), o cálculo do produto por meio da multiplicação de um número pela soma de outros dois. Assim, 5 x 5 pode ser escrito do seguinte modo 5 x 5 = 5 x (4 + 1). Recorre-se a propriedade distributiva: (5 x 4) + (5 x 1) = 20 + 5, logo, 5 x 5 = 25. A partir de então, toma-se como suporte os resultados dos produtos anteriores (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003). Isto é:

Ilustração 113 - Tarefa 24, determinação de alguns produtos da tabuada de *cinco* (5)

5 x 6 = 5 x (5 + 1) = 25 + 5 = 30,
5 x 7 = 5 x (6 + 1) = 30 + 5 = 35,
5 x 8 = 35 + 5 = 40,
5 x 9 = 40 + 5 = 45,
5 x 10 = 45 + 5 = 50.

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Por fim, completam-se os demais registros da tabuada do número cinco (Ilustração 114):

Ilustração 114 - Tarefa 24, resultados da tabuada do número *cinco* (5).

5 x 1 = 5	5 x 6 = 30
5 x 2 = 10	5 x 7 = 35
5 x 3 = 15	5 x 8 = 40
5 x 4 = 20	5 x 9 = 45
5 x 5 = 25	5 x 10 = 50

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A utilização da regra do produto de um número pela soma é, didaticamente, um dos modos de memorização das tabuadas. Para a tabuada do número *cinco* (5), o professor sugere que as crianças fechem seus cadernos que a contêm, e pronunciem, em sequência crescente, todos os seus resultados. Esse processo, além de contribuir para a memorização, possibilita a constatação que todos os produtos da tabuada apresentam uma sequência alternada de resultados na qual os números constituintes terminam em *zero* (0) ou *cinco* (5) (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003). As sequências "procuram captar o que há de regular nos fenômenos." (PANOSSIAN, 2014, p. 123). Essa regularidade, na proposição em análise, consiste no universal expresso no modelo (Tarefa 23). Após ter alcançado o universal, o conhecimento

> aspira para fixar as características específicas, as propriedades de grupos singulares de fenômenos dentro desse universal, isto é, para chegar ao individual e ao particular. O verdadeiro e pleno conhecimento consiste tanto em captar as características essenciais, gerais dos objetos, como em penetrar nas formas concretas com que o universal se manifesta. (STERNIN, 1965, p. 273).

O conhecimento do universal ocorre por meio da investigação e confrontação de um grande número de fatos singulares (STERNIN, 1965). O estudo da essência da tabuada implica a análise das manifestações singulares, pois é por meio dessas que o universal se manifesta. Nesse sentido, é necessário conhecer a relação entre o universal e o singular, como o universal se manifesta nas diferentes singularidades. Para tanto, nosso pensamento se move em um sentido inverso "[...] em direção do particular para o singular." (STERNIN, 1965, p. 274).

Mas em que consiste o particular? Para Sternin (1965), o particular é o elo que une o singular ao universal. Desse modo, no modelo da tabuada a x (n - 1) + a = c, o elo que une o universal ao singular consiste no número ***a***, a unidade de medida intermediária. Com a variação de ***a***, obtemos as diferentes tabuadas particulares (a = 4, a = 5, a = 6,...). Mantendo o número ***a*** fixo e variando o valor de ***n***, obtemos as singularidades. Por exemplo, tomemos uma particularidade, a tabuada do número *cinco* (5), ao variarmos ***n***, temos: 5 x 1 = 5; 5 x 2 = 10; 5 x 3 = 15; ... Assim, a tabuada do número *cinco* (5) surge como resultado do estudo entre o universal, particular e singular, como conhecimento teórico.

Desse modo, os conhecimentos teóricos surgem no processo de análise do papel e da função de certa relação peculiar, a relação de multiplicidade a x (n - 1) + a = c dentro do sistema integral que, ao mesmo tempo, serve de base genética de todas as suas manifestações singulares, ou seja, para todas as tabuadas. Os conhecimentos *teóricos*, que se apresenta sobre a base da transformação mental dos objetos, refletem suas relações e conexões internas, isto é, as unidades básicas e intermediárias, o total de unidades básicas e intermediária. As conexões internas saem dos limites das representações, tais como: os objetos, a reta numérica, os esquemas. A análise permite revelar a relação geneticamente inicial da tabuada como sua base universal ou essência.

A concretização dos conhecimentos teóricos consiste na dedução e explicação das manifestações particulares e singulares do sistema integral a partir de seu fundamento universal. Portanto, incide na explicação de como a relação, universal, a x (n - 1) + a = c se manifesta em todas as tabuadas. No contexto das ações de estudo, esta é a quarta: *construção de um sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral*, que será abordada nas próximas tarefas (Tarefas 26, 27,...). A seguir apresentaremos a terceira ação de estudo: transformação do modelo.

Tarefa 25: Determine a diferença entre as medidas A e B (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

A presente tarefa, base para introdução das próximas tabuadas, é organizada em três “partes” (a, b e c) e será desenvolvida em equipes a qual receberá duas malhas quadriculadas com as seguintes medidas:

Equipe **a**: 6 x 15 e 6 x 12

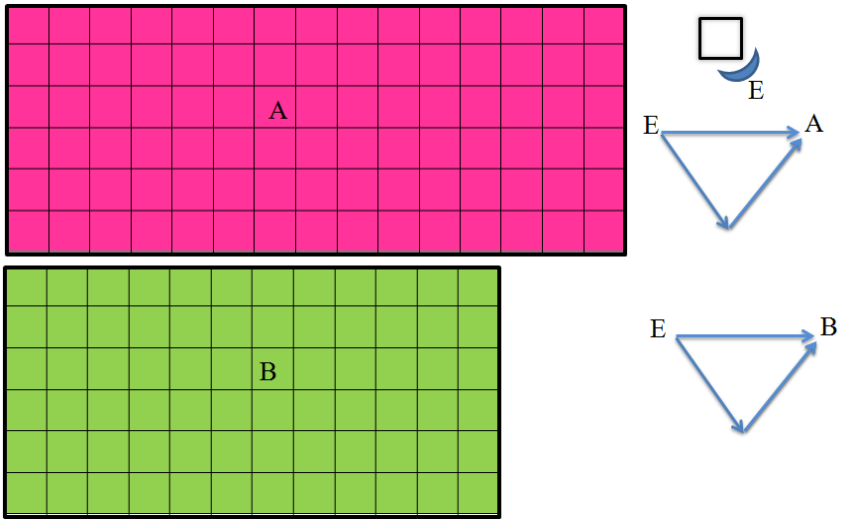
Equipe **b**: 5 x 14 e 5 x 11

Equipe **c**: 7 x 17 e 7 x 12

Equipe **d**: 8 x 18 e 8 x 13

Vale esclarecer que as crianças não terão acesso aos registros anteriormente apresentados, esses serão construídos durante a resolução da tarefa. A título de exemplificação, apresentaremos o material que receberá a primeira equipe (Ilustração 115):

Ilustração 115 - Tarefa 25, superfícies A e B da equipe a



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 51 - 52).

O enunciado da primeira parte da tarefa consiste no seguinte:

Tarefa 25: a) Registre, no esquema, o valor da unidade de medida intermediária e a quantidade de vezes que esta se repete em cada superfície quadriculada. Na sequência, componha a expressão que representa o total de medidas básicas das duas superfícies (ДАВЫДОВ et al., 2009).

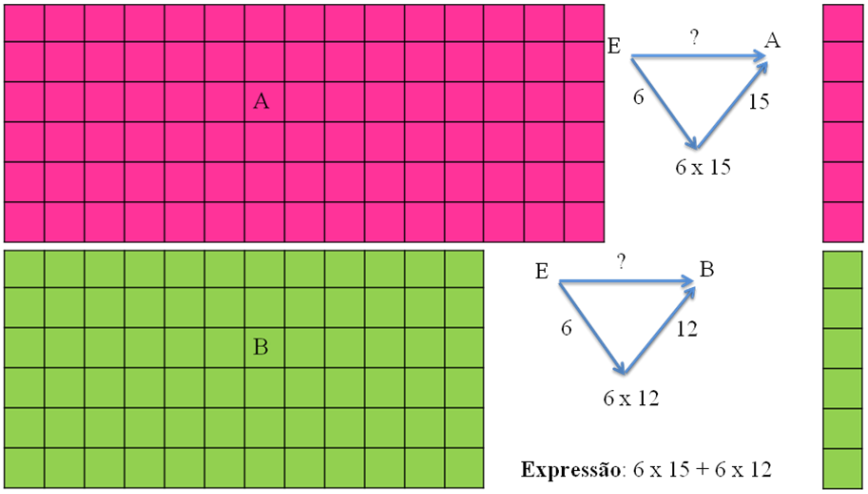
As duas malhas quadriculadas, que cada equipe recebe, possuem o mesmo comprimento da altura e se diferem no comprimento da largura. Porém, os comprimentos das alturas das malhas de cada equipe variam. Nas malhas da equipe (**a**), por exemplo, o comprimento da altura mede 6 unidades. Nos demais pares de malhas, as medidas dos comprimentos são, respectivamente: 5, 7 e 8 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

A tarefa consiste na composição de uma expressão para o cálculo das áreas das duas superfícies que cada equipe recebeu. O professor questiona: *Por onde vamos começar?* Ele sugere que se analise primeiro os esquemas, pois estabelecem que a unidade de medida básica é *E*, constituída por um quadrado da malha. Mas como proceder para calcular a área da superfície de cada figura? Contar cada quadradinho, de um em um, como fazem as crianças

do primeiro ano? Já aprendemos a construir a medida intermediária. Então vamos construí-la para as duas superfícies (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Cada equipe realiza a medição das superfícies que receberam e registram o resultado nos respectivos esquemas. Uma vez que a medida do comprimento da altura é a mesma, em cada par de malhas, ela é considerada, por todas as equipes, como unidade intermediária. A título de ilustração vamos continuar com o exemplo da primeira equipe (a). Por meio de contagem, as crianças constatam, na primeira malha (Ilustração 115), que a coluna é composta por *seis* (6) unidades básicas e que são *quinze* (15) colunas no total. Esses valores são registrados no esquema seguido da expressão 6 x 15 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003). O mesmo procedimento ocorre na segunda malha. Novamente a coluna é considerada como unidade de medida intermediária, assim, são *seis* (6) unidades básicas que se repetem por *doze* (12) vezes (Ilustração 116):

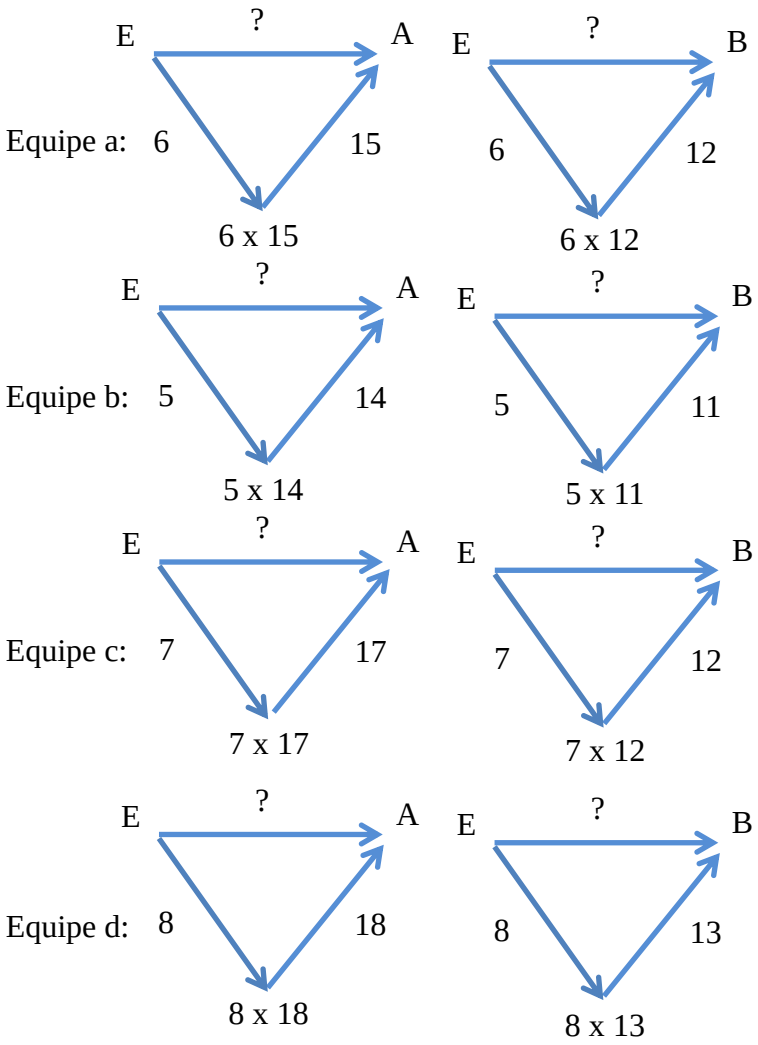
Ilustração 116 - Tarefa 25a) registro do processo de medição das superfícies A e B



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O professor esclarece que a medida do comprimento da altura do par de malhas varia de uma equipe para outra e sugere que compartilhem os diferentes resultados obtidos, que são registrados no quadro (Ilustração 117):

Ilustração 117 - Tarefa 25, registro dos esquemas no quadro



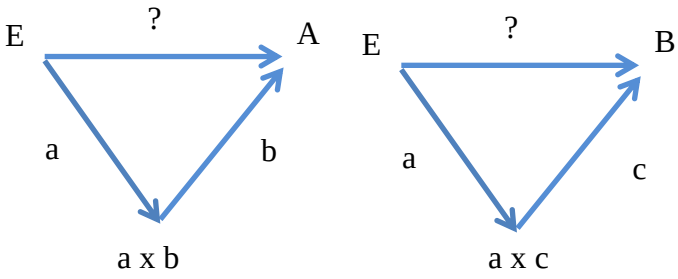
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

As crianças constatam que, em cada par de esquemas (Ilustração 117), os valores das unidades de medidas intermediárias são iguais (6 e 6; 5 e 5; 7 e 7; 8 e 8). Então, o professor questiona: Podemos elaborar um par de esquemas que seja válido para todos os *quatro* (4) distribuídos na classe? É possível substituir os números por letras? (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Como as unidades de medidas intermediárias, em cada par de esquemas, é a mesma, então representar-se-á pela letra *a* (Ilustração 118). A diferença entre os valores correspondentes ao número de vezes que a unidade de medida intermediária foi tomada, em cada esquema, impede a adoção da mesma letra. De outro modo, em cada superfície a unidade de medida intermediária se repetiu uma quantidade de vezes diferente. Para tanto, como

exemplo, adotaremos as letras *b* e *c*. Logo abaixo do esquema, são registradas as respectivas expressões literais (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003):

Ilustração 118 - Tarefa 25 a) esquema genérico e expressão literal



Expressão literal: *a* x *b* + *a* x *c*

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

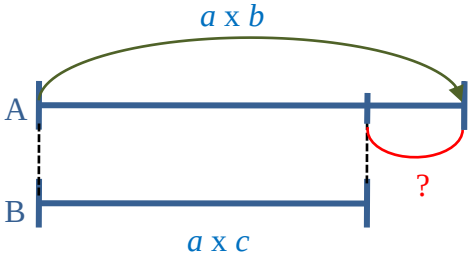
Tarefa 25: b) Determine a diferença entre as medidas A e B, conforme apresentamos na ilustração 119 (ДАВЫДОВ et al., 2009).

Ilustração 119 - Tarefa 25 b) representação gráfica da relação entre as grandezas

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 51-52).

Inicialmente, a relação entre as duas áreas é representada graficamente, por meio de segmentos (Ilustração 119). A partir da análise dos segmentos, as crianças concluirão que A é maior que B (A > B). O professor questiona: *Como proceder para determinar a diferença entre as medidas?* (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Ilustração 120 - Tarefa 25 b) comparação entre as medidas A e B

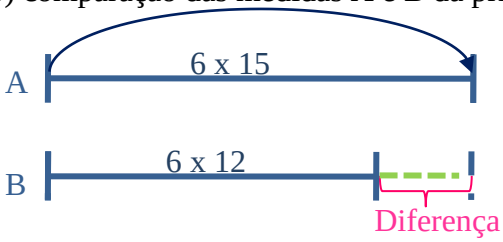


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A diferença corresponde a uma parte desconhecida que adicionada a outra parte (B) resulta na parte maior (A). Nesse caso, a operação indicada para determinar o valor desconhecido é a subtração: (*a* x *b*) – (*a* x *c*) (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

A expressão genérica anteriormente apresentada possibilita a resolução do problema por todas as equipes. Na especificidade da primeira equipe, temos (Ilustração 121):

Ilustração 121 - Tarefa 25 b) comparação das medidas A e B da primeira equipe



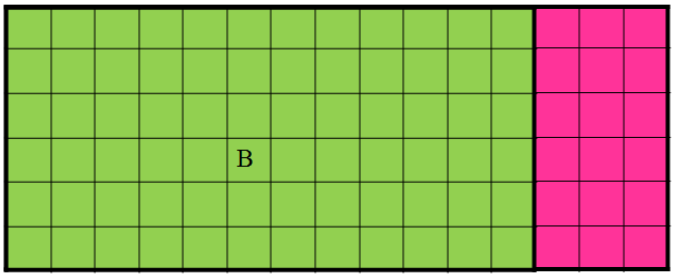
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O processo de resolução consiste no seguinte: (*6* x *15*) – (*6* x *12*) = 90 – 72 = 18.

Tarefa 25: c) Represente no esquema de setas outro modo de determinar a diferença entre as medidas A e B (ДАВЫДОВ et al., 2009).

A diferença entre as medidas pode ser determinada a partir da sobreposição das superfícies, conforme ilustração 122 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003):

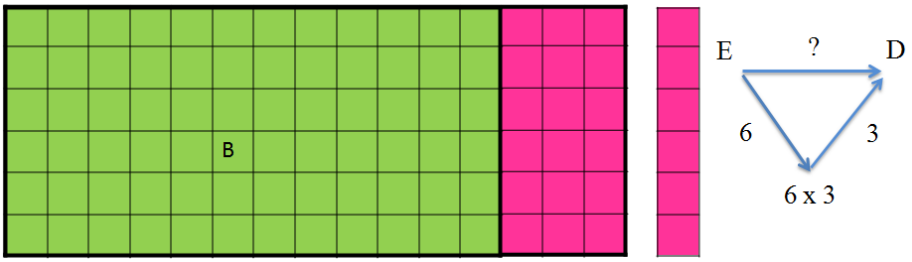
Ilustração 122 - Tarefa 25 c) sobreposição das superfícies A e B



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Ao sobrepor as superfícies, verifica-se que a unidade de medida intermediária (6) coube poucas vezes na diferença, para sermos mais exatos, apenas *três* (3) vezes. Essa conclusão pode ser representada no esquema com setas, conforme ilustração a seguir (123) (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003):

Ilustração 123 - Tarefa 25 c) outro modo de determinar a diferença

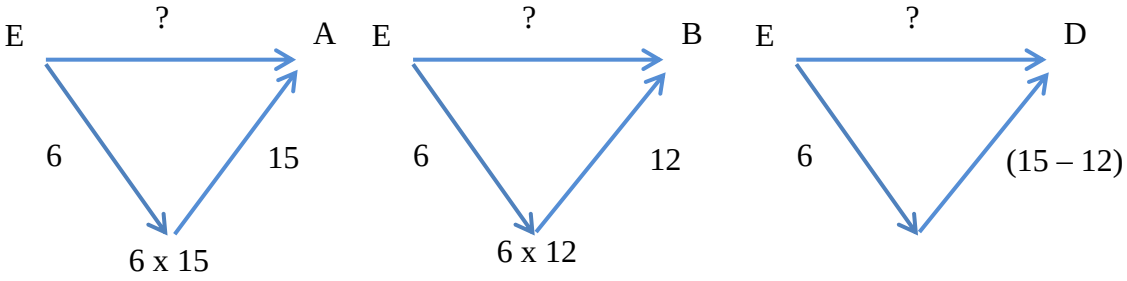


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O professor questiona: *Para determinar a diferença, entre as medidas A e B, é necessário calcular cada uma delas separadamente, conforme procedemos anteriormente?* A partir da análise do procedimento realizado na ilustração anterior (122), as crianças concluirão que a diferença poderia ser identificada a partir da sobreposição das superfícies (Ilustração 123) e, posteriormente, calculada (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

O professor propõe a seguinte reflexão: Por meio do trabalho realizado, determinamos dois modos distintos de calcular a diferença entre as medidas A e B: Primeiro, compomos expressões para calcular, separadamente, a área de cada superfície (Ilustração 115). Em seguida, sobrepomos as superfícies e compomos uma única expressão para determinar a diferença. Esse movimento pode ser representado também por meio dos esquemas, conforme ilustração 124 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003):

Ilustração 124 - Tarefa 25 c) outro modo de determinar a diferença

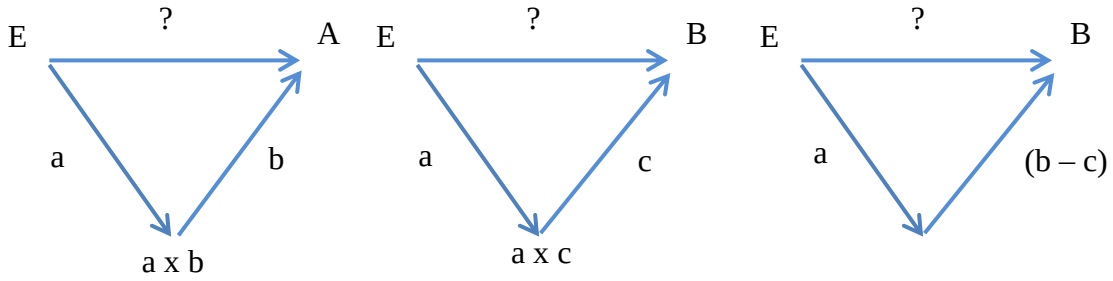


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Para calcular a diferença pelo primeiro método, (6 x 15) – (6 x 12), multiplica-se os números apresentados entre parênteses e, em seguida, subtrai-se os resultados (90 – 72 = 18). No segundo método, 6 x (15 - 12), subtrai-se os números que estão entre parênteses (15 –

12 = 3) e multiplica-se o resultado (3) por 6: 6 x 3 = 18. Genericamente, o segundo método consiste no seguinte modelo:

Ilustração 125 - Tarefa 25 c) genericamente



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Esse duplo procedimento expressa uma propriedade matemática, a Multiplicação de um número pela diferença, como indica a ilustração 126 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003):

Ilustração 126 - Tarefa 25 c) regra da multiplicação de um número pela diferença

$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Para multiplicar um número pela diferença entre dois números, pode-se multiplicar o mesmo, separadamente, pelo minuendo e pelo subtraendo e, depois, determinar a diferença entre os resultados (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003). Trata-se da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração.

Nessa tarefa, Davýdov e colaboradores envolveram vários elementos que subsidiaram a resolução, tais como malhas quadriculadas, composição de esquemas, cálculo da diferença das medidas A e B (Ilustrações 115, 116, 117 e 118), entre outras. Nesse processo, o modelo da tabuada sofreu várias transformações. No contexto da tarefa de estudo, essas variações referem-se à terceira ação: *transformação do modelo para estudar a propriedade da relação universal em forma pura* (DAVÍDOV, 1988).

A relação universal, nos dados reais da tarefa, parece estar *oculta* devido às várias características particulares (DAVÍDOV, 1988) que, no referente à tabuada, são : malhas quadriculadas (modelação objetal); construção de esquemas de seta e de segmentos

(modelação gráfica); propriedade distributiva, em relação à adição e à subtração (modelação literal), entre outras. Esse conjunto de características obscurece a essência. Portanto, diferentemente do que ocorre com o estudo do modelo literal, em que, a relação universal é visível, em sua forma, pura, absoluta (DAVÍDOV, 1988). Por isso, "**transformando e reconstruindo** o modelo, os estudantes têm a possibilidade de estudar as **propriedades da relação universal** como tal, sem o 'obscurecimento' que produzem as circunstâncias acessoriais." (DAVÍDOV, 1988, p. 183- grifos nosso).

Como mencionamos anteriormente, a transformação dos dados da tarefa ocorre de diversos modos: na forma objetal; gráfica; literal, e construção e reconstrução do próprio modelo.

> A transformação do modelo é realizada pela criança em duas direções. No começo, os alunos constroem o modelo durante ou depois da manipulação do material objetal. Em seguida, de modo inverso, segundo o modelo dado, a criança deve realizar as correspondentes manipulações. (DAVÍDOV, 1988, p. 213).

Como Davýdov afirma, a transformação do modelo ocorre em duas direções: do objeto (relação entre grandezas) para o modelo (gráfico, literal) e do modelo para as diferentes manifestações. Inicialmente (Ilustração 116), os dados da tarefa 25, apresentados na forma objetal (área das malhas quadriculadas, unidades de medida intermediária e quantidade de vezes que ela se repete) são modelados na forma aritmética e gráfica (Ilustração 117) e, posteriormente, na forma literal (Ilustração 118).

Nesse processo, a transformação também ocorre em direção inversa, do próprio modelo, com suas propriedades na forma pura para a objetal. Isto é, a partir do modelo gráfico, são realizadas variações na relação essencial. Para tanto, os valores correspondentes às unidades de medida intermediária e o total de vezes que elas se repetem são alterados (Ilustração 117). Por meio da análise da relação essencial obtém-se diferentes tabuadas (do cinco, seis, sete e oito) e seus respectivos resultados singulares (representados pelo ponto de interrogação).

A transformação do modelo também ocorre quando são dadas novas condições de medição, como por exemplo determinar a diferença entre as medidas A e B representadas no esquema de segmentos (Ilustração 119). Ele possibilita a análise da relação inversa entre as operações de adição e subtração e suas relações com a tabuada. É peculiar da operação de

subtração a propriedade fundamental: para determinar a diferença entre dois segmentos subtrai-se do comprimento do segmento maior (*a* x *b*) o comprimento do segmento menor (*a* x *c*). O terceiro segmento corresponde à parte desconhecida (diferença). Logo, é possível compor uma expressão genérica, que representa a diferença entre as medidas dos segmentos: *a* x *b* - *a* x *c* = *d* (Ilustração 120).

> Os modelos expressos com letras, os modelos gráfico-espaciais cumprem um importante papel na formação dos conceitos matemáticos. Sua particularidade essencial é que reúnem o sentido abstrato com o concreto objetal. Falando estritamente, a abstração da relação matemática pode ser produzida somente com a ajuda das fórmulas expressadas por meio de letras. Porém, nelas se fixam apenas os resultados das ações realizadas real ou mentalmente com os objetos, enquanto que as representações espaciais (por exemplo, segmentos ou retângulos) têm uma grandeza visível (extensão), permite às crianças realizem transformações reais cujos resultados não só se podem supor, mas também observar. (DAVÍDOV, 1988, p. 213-214).

Os modelos expressos por meio de segmentos e letras (Ilustrações 119, 120 e 121) refletem o cálculo da diferença entre as áreas com medida A e B, no plano objetal (Ilustrações 122 e 123). As grandezas consideradas são as mesmas, porém em condições diferentes. Desse modo, a sobreposição das superfícies com medida A e B foi fundamentada na propriedade matemática da subtração, mencionada anteriormente. Assim, ocorre uma nova generalização e abstração (Ilustração 126). Esta é expressa pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração *a* x *b* – *a* x *c* = *a* x (*b* – *c*). Nesse sentido,

> [...] a modelação está ligada ao caráter visual amplamente utilizado pela didática tradicional. Contudo, no marco do ensino experimental [proposição davydoviana], o caráter visual tem um conteúdo específico. Nos modelos visuais se reflete as relações e as vinculações essenciais ou internas do objeto, separadas (abstraídas) por meio das correspondentes transformações (o visual concreto habitualmente somente fixa as propriedades externamente observáveis das coisas [lógica formal]). (DAVÍDOV, 1988, p. 214).

O caráter visual contemplado, na tarefa em análise, por meio das áreas e dos esquemas com setas e segmentos, reflete as relações entre as unidades de medidas básica e intermediária e a quantidade de vezes que essas se repetem. Trata-se das vinculações das características internas da tabuada. Assim, o trabalho com o "modelo aparece como o processo pelo qual se estudam as propriedades da abstração substancial da relação universal [...]" (DAVÍDOV, 1988, p. 183). As propriedades da abstração substancial formam o

conteúdo do modelo. Este “fixa as características internas do objeto, não observáveis de maneira direta.” (DAVÍDOV, 1988, p. 183).

O estudo da relação essencial da tabuada é imprescindível para formação do procedimento geral, cujo objetivo é solucionar a tarefa de estudo “e assim formar o conceito do ‘núcleo’ do objeto. Entretanto, a adequação do ‘núcleo’ a seu objeto é revelada quando dele se extraem as múltiplas manifestações particulares.” (DAVÍDOV, 1988, p. 183). Esta constitui a quarta ação de estudo que será abordada na tarefa 27. Na continuidade (tarefa 26) apresentaremos a tabuada do número nove.

Tarefa 26: Determine os resultados das multiplicações pelo número *nove* (9). Nos casos mais difíceis, utilize a regra do produto de um número pela diferença (ДАВЫДОВ et al., 2009).

Ilustração 127 - Tarefa 26, tabuada de *nove* (9)

1 x 9 =	6 x 9 =
2 x 9 =	7 x 9 =
3 x 9 =	8 x 9 =
4 x 9 =	9 x 9 =
5 x 9 =	10 x 9 =

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 58).

O professor lembra que alguns casos foram estudados nas tabuadas anteriores e sugere que as crianças registrem os resultados conhecidos (Ilustração 128):

Ilustração 128 - Tarefa 26, resultados já conhecidos da tabuada do número *nove*

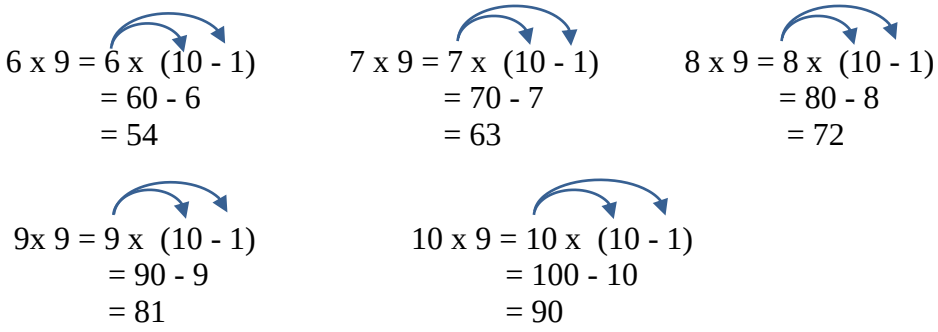
1 x 9 = 9	6 x 9 =
2 x 9 = 18	7 x 9 =
3 x 9 = 27	8 x 9 =
4 x 9 = 36	9 x 9 =
5 x 9 = 45	10 x 9 =

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Estão registrados os cinco primeiros resultados, que foram estudados nas tarefas anteriores (Ilustração 128). Os demais casos serão calculados. Porém, o professor questiona: *Como proceder para determinar os demais produtos?* A expectativa é que as crianças indiquem a regra da multiplicação de um número pela diferença. Caso isso não ocorra, ele

mesmo sugere. O segundo fator (9) será escrito como 10 – 1, conforme apresentamos na ilustração 129 (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003):

Ilustração 129 - Tarefa 26, determinação dos produtos por meio da regra multiplicação de um número pela diferença



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A partir dos resultados obtidos, as crianças completam a tabuada do número *nove* (Ilustração 130):

Ilustração 130 - Tarefa 26, sistematização da Tabuada de *nove* (9)

1 x 9 = 9	6 x 9 = 54
2 x 9 = 18	7 x 9 = 63
3 x 9 = 27	8 x 9 = 72
4 x 9 = 36	9 x 9 = 81
5 x 9 = 45	10 x 9= 90

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O leitor pode estar se questionando: como multiplicar um número por *dez* (10)? A tabuada do número *dez* (10) é desenvolvida no decorrer do estudo das demais tabuadas. Mas vale apresentar a seguinte síntese proposta por Davýdov e colaboradores: multiplicar um número por *dez* (10) consiste em acrescentar um zero a este número. De outro modo, multiplicar um determinado número pela base de qualquer sistema de numeração significa acrescentar um zero a este número[24].

Na tarefa 26, os procedimentos de cálculo decorrem da generalização das propriedades comutativa e distributiva (da soma e da subtração) da multiplicação. Além disso,

[24] Sobre as diferentes bases numéricas e seus respectivos sistemas de numeração sugerimos a leitura do trabalho desenvolvido por Silveira (2012).

a resolução da tarefa propicia o estudo do modelo, em suas diversas manifestações particulares, no plano mental (Ilustração 130).

Segundo Davídov (1988), por meio do experimento mental são realizadas transformações dos objetos não mais em nível de ações práticas, objetais. Como por exemplo, o produto de 6 x 9 = 54 (Ilustração129) é obtido a partir de 6 x 10 = 60, subtraído de uma unidade de medida intermediária (6). Este procedimento consiste em estudar o modelo da tabuada na forma pura, com a finalidade de revelar um procedimento geral de resolução.

Por meio dessas transformações, se revelam novas propriedades que, ao resultarem do pensamento teórico, refletem a natureza interna da realidade. Desse modo, ter "consciência das operações mentais supõe reconstruí-las, na imaginação [...]" (DAVÝDOV, 1982, p. 221). O ato de pensar de modo conceitual apresenta uma característica essencial: a "possibilidade de designar cada conceito por um número infinito de métodos por meio de outros conceitos (lei de sua equivalência)." (DAVÝDOV, 1982, p. 225).

Tarefa 27: Determine os produtos de 6 x 6, 6 x 7 e 6 x 8 (ДАВЫДОВ et al., 2009).

Ilustração 131 - Tarefa 27, produto do número *seis* (6) pelas regras da soma e diferença

6 x 6	6 x 7	6 x 8
(5 + 1)	(6 + 1)	(7 + 1)
(3 + 3)	(5 + 2)	(4 + 4)
(4 + 2)	(3 + 4)	(10 - 2)

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 64).

A tarefa consiste em determinar os produtos (6 x 6; 6 x 7 e 6 x 8) a partir das propriedades estudadas nas tarefas anteriores. O segundo fator é considerado como soma ou diferença entre dois números. A resolução da tarefa é concretizada na ilustração (132) do seguinte modo (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003):

Ilustração 132 - Tarefa 27, aplicação da propriedade distributiva na tabuada de *seis* (6)

6 x 6	6 x 7	6 x 8
O segundo fator é (5 + 1) 6 x 6 = 6 x (5 + 1) 6 x 5 + 6 x 1 = 30 + 6 = = 36	O segundo fator é (6 + 1) 6 x 7 = 6 x (6 + 1) 6 x 6 + 6 x 1= 36 + 6 = = 42	O segundo fator é (7 + 1) 6 x 8 = 6 x (7 + 1) 6 x 7 + 6 x 1= 42 + 6 = = 48
O segundo fator é (3 + 3) 6 x 6 = 6 x (3 + 3) 6 x 3 + 6 x 3 = 18 + 18 = = 36	O segundo fator é (5 + 2) 6 x 7 = 6 x (5 + 2) 6 x 5 + 6 x 2 = 30 + 12 = = 42	O segundo fator é (4 + 4) 6 x 8 = 6 x (4 + 4) 6 x 4 + 6 x 4 = 24 + 24 = = 48
O segundo fator é (4 + 2) 6 x 6 = 6 x (4 + 2) 6 x 4 + 6 x 2 = 24 + 12 = = 36	O segundo fator é (3 + 4) 6 x 7 = 6 x (3 + 4) 6 x 3 + 6 x 4 = 18 + 24 = = 42	O segundo fator é (10 - 2) 6 x 8 = 6 x (10 - 2) 6 x 10 - 6 x 2 = 60 - 12 = = 48

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Pela análise do processo de desenvolvimento da tarefa (Ilustração 132), as crianças concluem, com o auxílio do professor, que se trata da tabuada do número *seis* (6) em sua totalidade (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003). Analisemos, por exemplo, o produto de 6 x 6, considerando o segundo fator (6) como soma (4 + 2). Com base na regra do produto de um número pela soma 6 x (4 + 2), temos (6 x 4) + (6 x 2). Na linha seguinte são apresentados os respectivos resultados (24 e 12). Esse movimento permite inferir que 6 x 4 = 24 e 6 x 2 =12.

Na tarefa (27), os valores desconhecidos referem-se apenas aos produtos concernentes a 6 x 6, 6 x 7 e 6 x 8. Estes foram determinados a partir dos resultados, conhecidos, decorrentes da própria tabuada do número seis. Didaticamente, esse é um dos modos adotados por Davýdov e colaboradores para as crianças memorizarem as tabuadas estudadas.

No contexto da tarefa de estudo, este procedimento (Ilustração132) está relacionado à quarta ação: *dedução e construção de um determinado sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral* (DAVÍDOV, 1988).

Após a determinação do modelo da tabuada na forma literal, a tarefa de estudo é concretizada por meio de diversas tarefas particulares (Tarefas 26, 27, 28, 29, 30, 31 e 32).

Para Davídov (1988), as tarefas particulares podem ser resolvidas por um processo único, geral, desenvolvido durante as ações de estudo anteriores.

Mas qual é o procedimento geral que foi apresentado anteriormente para o conceito de tabuada? Vale relembrar que a tabuada apresenta uma sequência de sentenças (fatores), cujos resultados (produtos) conformam uma sequência numérica, na qual cada termo posterior é a soma do anterior mais uma unidade de medida intermediária. Ou ainda, cada produto da tabuada é resultado da soma ou da subtração de *n* vezes a unidade de medida intermediária.

> O caráter eficaz desse procedimento se verifica, justamente, na solução de tarefas particulares; os estudantes as enfocam como variantes da tarefa de estudo inicial e imediatamente [...] separam em cada uma a relação geral, orientando-se pela qual podem aplicar o procedimento geral de solução assimilado. (DAVÍDOV, 1988, p. 183).

Após a dedução do procedimento geral de solução, desenvolvido nas tarefas precedentes, o passo seguinte consistiu em aplicá-lo nas sentenças correspondentes (Ilustração 132). Assim, nas sentenças 6 x 6 = 6 x (5 +1), 6 x 7 = 6 x (6 + 1) e 6 x 8 = 6 x (7 + 1), o procedimento geral adotado foi: *cada termo posterior é a soma do anterior mais uma unidade de medida intermediária*. E, nas demais sentenças, *cada produto da tabuada é resultado da soma ou da subtração de n vezes a unidade de medida intermediária* (Ilustração 132).

As quatro ações de estudo analisadas estão dirigidas para que

> os estudantes revelem as condições do surgimento do conceito do qual estão em processo de apropriação (para quê e como se separa seu conteúdo, por quê e em quê se fixa este, em que casos particulares se manifesta depois). É como se os próprios estudantes construíssem o conceito, embora com a direção sistemática do professor (ao mesmo tempo o caráter dessa direção muda gradativamente e cresce, também gradativamente, o grau de autonomia do estante). (DAVÍDOV, 1988, p. 183-184).

O desenvolvimento das ações de estudo promovido durante a realização das tarefas particulares tem como função primordial conduzir as ações dos estudantes para a apropriação do conceito. Para assegurar que os estudantes estão se apropriando do conceito, no contexto das ações de estudo da proposição davydoviana, são propostas tarefas de controle e avaliação. Estas constituem a quinta e sexta ação de estudo (Tarefa 33). Na sequência apresentaremos a tabuada do número seis (Tarefa 28).

Tarefa 28: A partir dos resultados obtidos durante a realização da tarefa anterior, complete a tabuada do número *seis* (ДАВЫДОВ et al., 2009).

A tarefa resulta no seguinte registro (Ilustração 133):

Ilustração 133 - Tarefa 28, tabuada do número *seis* (6)

6 x 1 = 6	6 x 6 = 36
6 x 2 = 12	6 x 7 = 42
6 x 3 = 18	6 x 8 = 48
6 x 4 = 24	6 x 9 = 54
6 x 5 = 30	6 x 10 = 60

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

No movimento do conhecimento, a tarefa em análise refere-se ao concreto ponto de chegada. Como mencionamos na introdução da presente dissertação, o concreto e o abstrato são momentos do movimento do processo de conhecimento: concreto ponto de partida (abstrato) e concreto ponto de chegada.

Este último "não se trata de algo sensorial, mas mental, fecundado pelo conhecimento graças às abstrações da essência, reduzidas a uma mesma base." (ILIENKOV, 2006, p. 160). No início do processo do conhecimento da tabuada, tínhamos o concreto sensorialmente perceptível por meio das relações entre grandezas. Por meio da análise dessas relações, foi possível reduzi-las à seguinte abstração: a x (n - 1) + a = c. E, a partir deste núcleo, Davýdov e colaboradores apresentam diversas tabuadas particulares, cada qual com suas singularidades, agora em nível de concreto pensado.

Tarefa 29: Calcule (ДАВЫДОВ et al., 2009).

Ilustração 134 - Tarefa 29, produto do número *sete* (7) pela soma e pela diferença

7 x 7	7 x 8
(6 + 1)	(7+ 1)
(5 + 2)	(4 + 4)
(4 + 3)	(10 - 2)

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 77).

A proposição da tarefa é o cálculo dos produtos (7 x 7 e 7 x 8) pela multiplicação de um número pela soma ou pela diferença (Ilustração 134). O segundo fator de cada sentença (7 e 8) é decomposto por adição ou subtração de dois números (6 + 1, 5 + 2, 4 + 3, 7 + 1, 4 +

4 e 10 – 2). Determinam-se os resultados com base nas propriedades estudadas (Ilustração 135):

Ilustração 135 - Tarefa 29, aplicação da propriedade distributiva na tabuada de *sete* (7)

7 x 7	7 x 8
1º caso: O segundo fator é (6 + 1)	1º caso: O segundo fator é (7 + 1)
7 x 7 = 7 x (6 + 1) 7 x 6 + 7 x 1= 42 + 7 = = 49	7 x 8 = 7 x (7 + 1) 49 + 7 = = 56
2º caso: O segundo fator é (5 + 2)	2º caso: O segundo fator é (4 + 4)
7 x 7 = 7 x (5 + 2) 7 x 5 + 7 x 2 = 35 + 14 = = 49	7 x 8 = 7 x (4 + 4) 28 + 28 = = 56
3º caso: O segundo fator é (4 + 3)	3º caso: O segundo fator é (10 - 2)
7 x 7 = 7 x (4 + 3) 7 x 4 + 7 x 3 = 28 + 21 = = 49	7 x 8 = 7 x (10 - 2) 70 – 14 = = 56

Fonte: Elaboraçao nossa com base na proposçao davydoviana, 2014.

Na primeira sentença da tarefa (7 x 7) o segundo fator (7) é decomposto de três modos diferentes. O primeiro caso consiste em 7 x (6 + 1) que, ao se considerar a propriedade da multiplicação de um número pela soma, temos: (7 x 6) + (7 x 1). Vale lembrar que não se estudou a tabuada do número *sete* (7), mas a partir da propriedade comutativa é possível determinar os resultados 42 e 7 (Ilustração 135). O mesmo procedimento se estende para o restante da tarefa, com exceção do último caso, em que será utilizada a regra da multiplicação de um número pela diferença.

Segundo Davídov (1988), a formação das atitudes e hábitos para os cálculos aritméticos tem seu fundamento nas leis e propriedades gerais de uma ou outra ação aritmética. Por isso que, somente após terem proposto o trabalho com a essência do conceito de tabuada, Davýdov e colaboradores apresentam algumas tarefas com o objetivo de desenvolver habilidades para o cálculo.

> A formação das atitudes e hábitos para efetuar diferentes cálculos dá-se na base da apropriação prévia, pelas crianças, das leis e das propriedades gerais de umas ou outras ações aritméticas. Em geral, os estudantes examinam previamente a possibilidade de utilizá-las em cálculos de diferentes tipos e somente depois passam a executar os problemas concretos de cálculo. As crianças apropriam os procedimentos de cálculo com ajuda de tarefas estruturadas de tal modo que no início exigem dos estudantes a realização completa de todas as operações do procedimento de cálculo e logo [...] as memorizam [...] em forma de tabelas. (DAVÍDOV, 1988, p. 212).

As tarefas são estruturadas de modo que, inicialmente, exija dos estudantes a execução de todos os procedimentos de cálculo (Ilustração 135). Aos poucos, o foco é direcionado para a memorização dos resultados, conforme, por exemplo, a tarefa 30.

Tarefa 30: A partir dos resultados obtidos durante a realização da tarefa anterior (tarefa 29), complete a tabuada do número *sete* (ДАВЫДОВ et al., 2009).

A tarefa resulta no seguinte registro (Ilustração 136):

Ilustração 136 - Tarefa 30, sistematização da tabuada de *sete* (7)

7 x 1 = 7	7 x 6 = 42
7 x 2 = 14	7 x 7 = 49
7 x 3 = 21	7 x 8 = 56
7 x 4 = 28	7 x 9 = 63
7 x 5 = 35	7 x 10= 70

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A sistematização da tabuada é possível devido à atuação do pensamento por meio dos juízos. Estes estão relacionados com as afirmações ou negações sobre qualidades ou

características de um objeto ou fenômeno. Trata-se de uma complexa forma do pensamento (ROSENTAL, 1962, STERNIN, 1965).

Por meio do juízo, é possível afirmar que os resultados da tarefa anterior (Ilustração135) referem-se à tabuada do número *sete* (7), porque o valor da unidade da medida intermediária é sete (Ilustração 136).

Os "juízos utilizam os conceitos como pontos de apoio para alcançar novos conhecimentos, para conhecer novas conexões e relações essenciais entre as coisas, com a finalidade de formular novos conceitos, leis, etc." (ROSENTAL, 1962, p. 339). Desse modo, mediante o conceito de tabuada, em processo de elaboração na tarefa 29 e nas demais que a antecederam, é possível afirmar que os produtos da tarefa anterior referem-se à tabuada do

número *sete* (7), e assim sistematizá-la (Ilustração 136). Porém, esse juízo não é resultado imediato da tabuada, mas de todo o trabalho desenvolvido anteriormente com as relações de multiplicidade, as propriedades comutativa e distributiva, entre outros.

Esse novo conhecimento ocorre mediante uma forma lógica de pensamento na qual o "conceito parece entrar em movimento, em relação com outros conceitos, desprende a riqueza de seu conteúdo, o desenvolvimento, engendra novos conhecimentos acerca das propriedades e relações das coisas." (ROSENTAL, 1962, p. 338). O autor ainda acrescenta que o juízo é a forma de movimento posterior do pensar, que se baseia nos conceitos e os conserva por superação.

O conceito surge como resultado de vários juízos que, por sua vez, não podem dar-se sem os conceitos com os quais operam (ROSENTAL, 1962). O conceito é uma forma de pensamento no qual sintetiza os conhecimentos. É o resultado da abstração do "singular e do particular, da revelação do universal no singular e a fixação desse último [singular] em nosso pensamento." (STERNIN, 1965, p. 272). Nesse sentido, o conceito de tabuada vai se estruturando e fixando como forma de pensamento, conforme tarefa a seguir.

Tarefa 31: Calcule (ДАВЫДОВ et al., 2009):

Ilustração 137 - Tarefa 31, tabuada do número *oito* (8)

8 x 8	8 x 8	8 x 8
(4 + 4)	(7+ 1)	(10 - 2)

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 85).

A tarefa consiste em determinar o produto (8 x 8) de três modos diferentes em que o segundo fator (8) será considerado como soma ou subtração de dois números: 4 + 4; 7 + 1 e 10 – 2. O processo de resolução é realizado com base nas propriedades apresentadas nas tarefas anteriores: 8 x 8 = 8 x (4 + 4) = 32 + 32 = 64; 8 x (7 + 1) = 56 + 8 = 64 e finalmente, 8 x (10 – 2) = 80 – 16 = 64.

Ilustração 138 - Tarefa 31, aplicação da propriedade distributiva na tabuada de *oito* (8)

8 x 8

1º caso: O segundo fator é (4 + 4)

8 x 8 = 8 x (4 + 4)

32 + 32 =

= 64

8 x 8

2º caso: O segundo fator é (7 + 1)

8 x 8 = 8 x (7 + 1)

56 + 8 =

= 64

8 x 8

3º caso: O segundo fator é (10 - 2)

8 x 8 = 8 x (10 - 2)

8 x 10 - 8 x 2

= 80 - 16 =

= 64

Fonte: Elaboraçao nossa com base na proposçao davydoviana, 2014.

A cada nova tarefa, Davýdov e colaboradores propõem a reprodução mental do conceito de tabuada, no contexto de um sistema mais amplo que envolve adição, subtração, expressões numéricas, propriedades matemáticas, entre outros. Isso porque o "conceito constitui o procedimento e o meio da reprodução mental de qualquer objeto como sistema integral. Ter um conceito sobre tal objeto significa dominar o procedimento geral de construção mental deste objeto." (DAVÍDOV, 1988, p. 153).

Porém, esse sistema não surge do nada, mas da ação objetal com as grandezas, pois, o "procedimento de construção mental do objeto é uma ação especial do pensamento humano que surge como derivado da ação objetal-cognitiva, a que reproduz o objeto de seu conhecimento." (DAVÍDOV, 1988, p. 153), conforme a tarefa 32.

Tarefa 32: Utilize os resultados da tarefa anterior (tarefa 31) para calcular os seguintes produtos (ДАВЫДОВ et al., 2009):

Ilustração 139 - Tarefa 32, tabuada do número *oito*

8 x 5	8 x 7	8 x 10
8 x 6	8 x 8	8 x 9

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 85).

Alguns resultados foram determinados na tarefa (31), tais como: 8 x 7 = 56; 8 x 8 = 64 e, 8 x 10 = 80. *Como determinar os outros produtos* (8 x 5, 8 x 6 e 8 x 9)? A sugestão é a utilização dos resultados anteriores para calcular os próximos, pois, cada termo seguinte, na sequência da tabuada, é a soma do anterior mais uma unidade de medida intermediária, que, é composta por *oito* (8) unidades básicas: 8 x 7 = 56 e 8 x 8= 64 (Ilustração 140). A diferença entre os produtos é de oito unidades (64 – 56 = 8). A partir disso, como proceder para determinar o valor de 8 x 6? Se o termo seguinte, na especificidade da multiplicação por oito, é adicionar oito unidades, o termo anterior é oito unidades menor. Logo, 8 x 6 = 56 - 8 = 48 e 8 x 5 = 48 – 8 = 40 (Ilustração 140). Para determinar o produto de 8 x 9, as crianças podem adicionar oito unidades ao produto (8 x 9 = 64 + 8 = 72) ou podem subtrair oito unidades do produto (8 x 10 = 80 – 8 = 72). Em ambas as situações, 8 x 9 = 72.

Ilustração 140 - Tarefa 32, aplicação da propriedade distributiva na tabuada de *oito* (8)

8 x 5 = 8 x (4 +1)	8 x 6 = 8 x (5 +1)	8 x 9 = 8 x (8 +1)
= 32 + 8	= 40 + 8	= 64 + 8
= 40	= 48	= 72

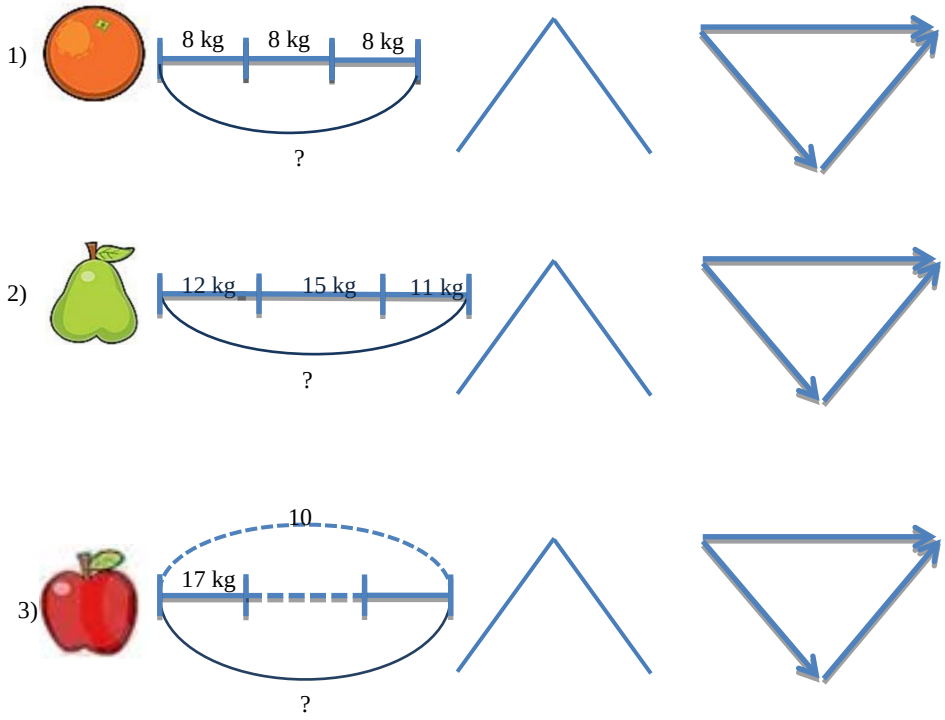
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Davýdov e colaboradores também propõem tarefas de aplicação dos conceitos matemáticos no cotidiano, conforme apresentaremos na tarefa a seguir.

[25]**Tarefa 33**: Com base nas informações contidas nos esquemas de segmentos (Ilustração 141), elabore uma situação problema para cada fruta. Componha os enunciados de cada problema com a expressão: cada uma contém. Complete os esquemas e resolva os problemas (ДАВЫДОВ et al., 2009):

[25] As tarefas de controle, nos livros didáticos russo, são sinalizadas com símbolos iguais a este.

Ilustração 141 - Tarefa 33, informações nos esquemas de segmentos para elaboração de situações problemas



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana (ДАВЫДОВ et al., 2009, p. 70).

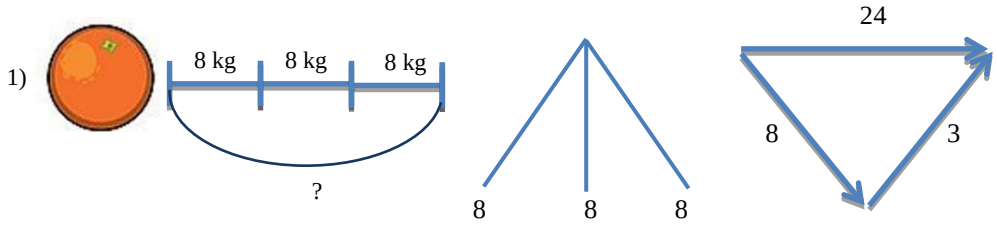
A tarefa 33 (Ilustração 141) é composta por três subitens. Em cada um deles, a proposição é que as crianças elaborem uma situação problema. Para isso, serão utilizadas as informações contidas nos três esquemas de segmentos. Nesses, estão expressos o tipo de fruta, a grandeza a ser considerada e a unidade de medida, que são iguais (quilograma), porém se diferem na quantidade (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

O professor orienta as crianças que em cada enunciado do problema deve conter o nome da respectiva fruta e a expressão: cada uma contém. Em seguida, os dados do esquema de segmentos serão modelados nos outros dois esquemas: de partes e de setas (ГОРБОВ e МИКУЛИНА, 2003).

Cada item da tarefa 33 é realizado em três etapas: elaboração da situação problema; transformação dos dados do esquema de segmentos e cálculo do resultado. Para o primeiro esquema de segmentos, elaboramos o seguinte enunciado: *Foram trazidos para a feira 3 caixas de laranjas, cada uma contém 8 kg. Quantos quilogramas de laranjas foram trazidos para a feira?*

Em seguida, as informações contidas no esquema de segmentos são transformadas e registradas no esquema de partes. Para tanto, as crianças desenham três segmentos de reta, cada qual representa uma parte dos dados do problema (Ilustração 142). Posteriormente, o problema é interpretado e resolvido. O resultado desse processo é expresso no esquema de setas. O valor de cada parte é *oito* (8), que se repete por *três* (3) vezes. Esses valores são registrados, respectivamente, no lado esquerdo e direito do esquema de setas. E, sobre a seta superior, a solução do problema, 24 (Ilustração 142):

Ilustração 142 - Tarefa 33, item 1, registro dos dados nos esquemas

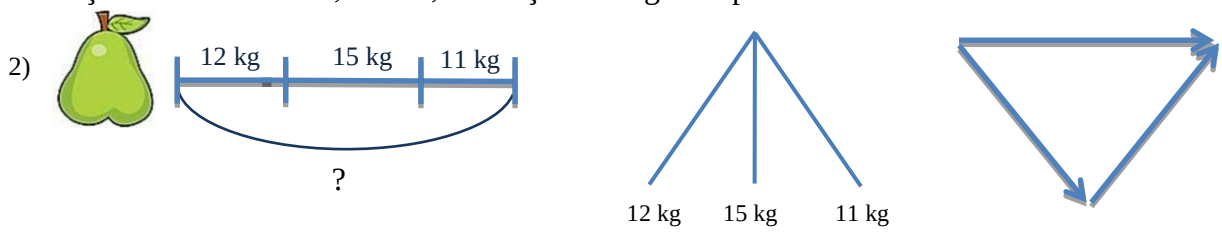


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A questão que se apresenta é: Qual operação utilizada para determinar o todo quando se conhece o valor das partes? A operação da adição (ROSA, DAMAZIO e ALVES, 2013). O todo é determinado adicionando-se as partes: 8 + 8 + 8 = 24 kg. Como se trata de partes iguais, a solução do problema pode ser obtida por meio da operação de multiplicação. Nessa, o produto representa o todo composto pela quantidade de vezes que as partes se repetem (Ilustração 142).

No segundo item (Ilustração 141), os procedimentos de resolução seriam os mesmos. Porém, Davýdov e colaboradores esperam que as crianças percebam que, embora a grandeza (massa) e a unidade de medida (quilograma) sejam as mesmas, os valores das partes são diferentes. Isso impossibilita a representação do problema no esquema de setas e da resolução por meio da multiplicação. Desse modo, os valores são registrados somente no esquema de partes (Ilustração 143):

Ilustração 143 - Tarefa 33, item 2, resolução do segundo problema



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Desse modo, a resolução ocorre por meio da operação da adição: 12 + 15 + 11 = 38 kg (Ilustração 143). Trata-se de uma pegadinha correspondente à quinta ação de estudo davydoviana: *controle da realização das ações anteriores* (DAVÍDOV, 1988).

Os colaboradores de Davýdov (ГОРБОВ Е МИКУЛИНА, 2003) orientam que o professor participe das discussões, intencionalmente, formule uma linha de raciocínio errada e a defenda. Para tanto, argumenta que os dados do problema sejam registrados no esquema de setas. Esse procedimento auxilia-o no controle da apropriação dos conceitos por parte dos estudantes. O controle garante a plenitude na composição operacional das ações e a forma correta de sua execução (DAVÍDOV, 1988).

Os problemas textos são elaborados, pelas crianças, como casos particulares de expressões de algumas regularidades gerais (DAVÍDOV, 1988). No contexto da tarefa davydoviana em análise, a regularidade que se apresenta é a composição do todo dividido em partes iguais. Nessa especificidade, é mais conveniente utilizar a operação da multiplicação que a adição. O que não ocorre quando os valores das partes são diferentes. Trata-se da generalização e abstração relacionada à operação de multiplicação como soma de parcelas iguais.

Salientamos que as tarefas relacionadas à ação de controle não são, necessariamente, relacionadas à aplicação do conceito. Assim também, não é apresentada apenas ao final da tarefa de estudo, mas desde a primeira ação. Sua finalidade consiste em "determinar a correspondência de outras ações de estudo para as condições e exigências da tarefa de estudo." (DAVÍDOV, 1988, p. 184).

Na especificidade da presente investigação, o controle tem a função de assegurar se o conceito de tabuada foi apropriado pelos estudantes e, de modo geral, "assegurar que esse procedimento tenha todas as operações indispensáveis para que o estudante resolva com sucesso a diversidade de tarefas concretas particulares." (DAVÍDOV, 1988, p. 216).

Para o terceiro item (Ilustração 141) elaboramos o seguinte enunciado: *Foram trazidos para a feira 10 caixas de maçã, cada uma contém 17 kg. Quantos quilogramas de maçãs foram trazidos para a feira?*

Inicialmente as informações do esquema de segmentos são registradas no esquema de partes. Cada semirreta, num total de 10, corresponde uma caixa de maçã, cada uma representa 17 kg (Ilustração 144). Em seguida, o problema é registrado no esquema de setas. O inteiro é constituído de 10 partes iguais. Em outras palavras, a parte (17), é tomada por *dez* (10) vezes (Ilustração 144).

Ilustração 144 - Tarefa 33, item 3, registro dos dados nos esquemas

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Ao analisar o registro nos esquemas (partes e setas) é possível identificar que se trata de um todo composto por partes iguais. A operação mais conveniente, neste caso, é a multiplicação. Para tanto, basta saber o valor da parte e a quantidade de vezes que ela se repete. Neste caso, a operação de multiplicação torna-se mais conveniente: 17 x 10 = 170 kg.

A tarefa 33 prevê a aplicação do procedimento geral da multiplicação e por inclusão o da tabuada. Na tarefa davydoviana, "quando os estudantes formam o procedimento geral de solução da tarefa de estudo lhes propõe o emprego [desse procedimento] para soluções de tarefas práticas;" (DAVÍDOV, 1988, p. 216). Os estudantes resolvem esse tipo de tarefa "rapidamente sem manifestar externamente o processo de análise dos dados." (DAVÍDOV, 1988, p. 216-217).

Essa evolução, estritamente ligada às ações de controle e avaliação, é

> dirigida para por em evidência se a criança está preparada para resolver uma nova tarefa de estudo, que exige um novo procedimento de solução (a evolução determina, em particular, o grau de formação do procedimento geral de solução da tarefa anterior). Já que a nova tarefa não é completamente nova, mas somente em uma parte de seus dados, ou condições, os alunos os separam com ajuda da evolução, esta parte não somente determina a impossibilidade de resolver a tarefa, por procedimento anterior, mas que também estabelecem com que está ligada a

> dificuldade sugerida. Uma vez que a evolução estabelece a insuficiência do procedimento geral da ação de que dispõe a criança, o orienta para busca de um novo procedimento geral de solução da tarefa de estudo sugerida e não para obtenção de um ou outro resultado parcial de sua solução. (DAVÍDOV, 1988, p. 216).

A análise da evolução do estudante é realizada por meio da sexta e última ação de estudo: *avaliação da apropriação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada* (DAVÍDOV, 1988). Esta ação está interligada com o controle. Tem como objetivo determinar se o procedimento geral de solução da tarefa de estudo foi ou não apropriada pelos estudantes. Não é uma simples constatação dos momentos de apropriação do modelo universal, mas uma análise qualitativa, substancial do resultado da apropriação tanto do procedimento geral quanto do conceito correspondente, na confrontação com a finalidade (DAVÍDOV, 1988).

Com a tarefa 33, finalizamos, na presente pesquisa, a apresentação, explicação e análise do movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para o ensino da tabuada.

No sistema conceitual apresentado no decorrer deste capítulo, o conceito de tabuada emerge de um longo percurso, permeado por várias abstrações e generalizações. Os conceitos "não são somente um ponto de partida no movimento do conhecer, senão, também, um resultado desse movimento, dado que os conhecimentos que obtemos, os fixamos em novos conceitos e leis, mais profundos e concretos." (ROSENTAL, 1962, p. 232).

Assim como uma rede é construída e mantida por meio dos inúmeros nós que unem e entrelaçam todas as suas partes, "os conceitos da ciência são os nós que conectam em uma unidade todos os seus juízos e conclusões, tornando possível a existência da própria ciência." (ROSENTAL, 1962, p. 232). Sendo assim, o que seria do conceito de tabuada sem os conceitos de número, multiplicidade, adição, grandezas, unidades de medida, entre outros? Cada um desses conceitos expressam

> conhecimentos obtidos como resultado de um longo desenvolvimento da ciência e do saber prático do homem. Cada um deles constitui uma generalização comprimida, concentrada de tais conhecimentos e experiência. Se pudermos emitir pensamentos sobre tais ou quais fenômenos e processos são, precisamente, porque temos em nossa disposição essas "células", de que está formando todo o "organismo" do conhecer. (ROSENTAL, 1962, p. 230).

Dito com outras palavras, cada um dos conceitos (número, multiplicidade, adição, unidades de medida,...) que constituem o sistema conceitual no qual se insere a tabuada, foram obtidos como resultado do desenvolvimento de várias tarefas particulares. Esses constituem uma generalização concentrada dos conhecimentos e experiências. Somente é possível emitir juízos durante o desenvolvimento da tabuada porque tivemos à nossa disposição os conceitos essenciais, básicos, as células que constituem o sistema conceitual na qual a tabuada se insere.

Os conceitos são os pontos nodais do conhecimento, pois expressam de modo abreviado as conexões e relações essenciais de uma grande quantidade de coisas e, a partir desses pontos nodais, se constroem os juízos e raciocínios. Estas são formas fundamentais de pensamento humano e estão vinculadas entre si (STERNIN, 1965; ROSENTAL, 1962). Cada conceito particular "pressupõe a existência de um determinado sistema de conceitos, fora do qual ele não pode existir" (VIGOTSKI, 2000, p. 359).

O conceito surge como

> forma de atividade mental por meio da qual se reproduz o objeto idealizado e o sistema de suas relações, que em sua unidade refletem a universalidade e a essência do movimento do objeto material. O conceito atua, simultaneamente, como forma de reflexo do objeto material e como meio de sua reprodução mental, de sua estruturação, isto é, como ação mental especial. (DAVÍDOV, 1988, p. 126).
>
> O conceito surge quando uma série de atributos abstraídos torna a sintetizar-se, e quando a síntese abstrata assim obtida se torna forma basilar de pensamento com o qual a criança percebe e toma conhecimento da realidade que a cerca. (VYGOTSKY, 2000, p. 226).

O conceito de tabuada, em Davýdov, surge como forma de atividade interna quando é possível reproduzi-lo mentalmente, assim como o sistema de relações que o integra. Ao passar por um longo processo de abstração e generalização, o conceito atua como reflexo da tabuada como tal, estruturada e, ao mesmo tempo, como meio de sua reprodução mental: como parte do pensamento teórico.

O conceito "constitui o procedimento e o meio da reprodução mental de qualquer objeto como sistema integral. Ter um conceito sobre tal objeto significa dominar o procedimento geral de construção mental deste objeto." (DAVÍDOV, 1988, p. 153). Dominar o conceito de tabuada significa conhecer a essência, a lei, o papel e a função da relação essencial no sistema integral: a relação interna entre o geral, particular, universal e singular.

Uma vez abstraído, o conceito passa a ser elemento básico do pensamento (PERES e FREITAS, 2014).

O conceito teórico serve de "procedimento para deduzir os fenômenos particulares e singulares de sua base universal. Graças a isso, o conteúdo do conceito teórico são os processos de desenvolvimento dos sistemas integrais." (DAVÍDOV, 1988, p. 152). Segundo Prestes, Tunes e Nascimento (2013, p. 61), o desenvolvimento dos conceitos científicos ou teóricos está ligado com o "significado das palavras, e relacionado com o desenvolvimento da atenção voluntária, da memória lógica, da abstração, da comparação e da distinção - fatores diretamente relacionados com o pensamento teórico".

Consideramos que, na proposição em análise o conceito

> é o resultado da generalização de uma enorme quantidade de fenômenos singulares, é o essencialmente comum, revelado pelo pensar nas coisas e nos fenômenos particulares. Surge neste ponto um dos problemas mais importantes da teoria do conceito, o da correlação, neste, entre o geral e o particular, de natureza dialética do mesmo. (ROSENTAL, 1962, p. 236 - 237).

Na proposição davydoviana, o desenvolvimento do conceito de tabuada ocorreu a partir do geral (relação entre grandezas) para as manifestações particulares (as diferentes tabuadas existentes em função das diferentes unidades de medidas intermediárias). Como reflexo da essência, dos nexos essenciais que expressamos na forma de lei, a x $(n - 1) + a = c$, o universal. Desse modo, o conceito surge "como resultado de análise que separa as propriedades, aspectos e correlações essenciais de um fenômeno" (RUBINSTEIN, 1979, p. 124).

Se no movimento do conhecimento do universal "perder em sua trajetória a riqueza do singular, não alcançaria seu objetivo básico: revelar a essência; os conceitos seriam apenas uma soma de características homogêneas de várias coisas, e nada mais." (ROSENTAL, 1962, p. 243). Porém, na dialética, nesse movimento, a "cognição não perde a diversidade do concreto, do singular; ao contrário: o concentra, o densifica e, graças a ele, abarca sua essência, a lei." (ROSENTAL, 1962, p. 243).

Na lógica dialética, os conceitos, quanto mais gerais, mais ricos são em conteúdo, pois refletem a essência de uma quantidade maior de fenômenos. "[…] os conceitos mais gerais, por refletir a essência de maior quantidade de fenômenos, são, também, os conceitos mais ricos por seu conteúdo." (ROSENTAL, 1962, p. 253). Desse modo, o

conceito de tabuada, por ser mais amplo, reflete a essência de vários fenômenos, tais como: relações entre multiplicidade, divisibilidade, entre outros. Diferentemente da lógica formal, na qual quanto mais gerais forem os conceitos, mais pobre é seu conteúdo.

Conforme mencionamos no decorrer deste estudo, a lógica formal se faz presente em várias proposições brasileiras de ensino (ROSA, 2012; DAMAZIO, ROSA e EUZEBIO 2012; SOUZA, 2014). A adoção dessa lógica, tanto em livros didáticos quanto no fazer pedagógico, limita a atenção dos estudantes para os aspectos externos dos objetos. Vale esclarecer, que a proposta davydoviana também considera os aspectos externos dos objetos, por meio de suas grandezas, porém, não se limita a este. Vai além, adentra nas relações internas que não são dadas diretamente. O caráter externo é o ponto de partida, mas é superado por abstrações e generalizações teóricas, diferentemente do que propõem os fundamentos da lógica formal.

Portanto, finalizamos o presente capítulo com os seguintes questionamentos, para futuras pesquisas: por que há um predomínio dos fundamentos da lógica formal na educação escolar brasileira? Por que algumas escolas catarinenses adotam livros didáticos fundamentados em teorias que contradizem os pressupostos da proposta curricular do Estado? Considerando que a referida proposta está em processo de atualização e que se pretende manter a mesma opção teórica, tal questionamento requer, a nosso ver, uma reflexão cuidadosa, pois, qual finalidade desse documento?

3 SÍNTESE E CONSIDERAÇÕES FINAIS

> *"O papel da educação não poderia ser maior na tarefa de assegurar uma transformação socialista plenamente sustentável."* (MÉSZÁROS, 2008, p. 79).

A finalidade da educação de modo geral, com base nos princípios da Teoria Histórico-Cultural, prevê o desenvolvimento integral do sujeito em vários aspectos, tais como: social, cultural, ético, estético, político... Consiste também no desenvolvimento do pensamento teórico, da personalidade criativa, entre outros. Em relação à educação escolar, segundo Rubinstein (1979, p. 75), sua finalidade "consiste, sobretudo, em conseguir que o aluno opere facilmente com generalizações já dadas ou firmemente assimiladas". A apropriação, na concepção de Rubinstein, em termos psicológicos, "constitui uma atividade mental de análise, síntese, abstração e generalização." (RUBINSTEIN, 1979, p. 47).

Na educação escolar, a "realização de atividades intencionalmente preparadas para um determinado fim desenvolve, no sujeito, capacidades distintas das efetuadas pela sua inserção espontânea na prática social diária." (WIGGERS, 2014, p. 107). Porém, o acesso à educação escolar não é garantia de desenvolvimento do pensamento teórico, pois depende da lógica que fundamenta o conteúdo e os métodos de ensino. O modo de organização do ensino, a lógica considerada no desenvolvimento dos conceitos, interfere no tipo de pensamento que os estudantes desenvolvem (DAVÝDOV, 1982). A partir desse pressuposto, investigamos, no trabalho que gerou a presente dissertação, o conteúdo e os métodos de ensino considerados em duas proposições de ensino, uma brasileira e outra russa, na especificidade da tabuada.

No que se refere à proposição brasileira, consideramos a Coleção *Porta Aberta*, dos autores Centurión, Scala e Rodrigues (2011), especificamente, os livros didáticos do primeiro, segundo e terceiro ano do Ensino Fundamental. A referida coleção é a mais utilizada pelos professores das escolas estaduais dos municípios constituintes da 36ª Gerência Regional de Educação, com sede em Braço do Norte, Santa Catarina. O referido Estado possui uma Proposta Curricular que se diz fundamentada na Teoria Histórico-Cultural. Também analisamos uma proposição de ensino que se diz fundamentada nesta teoria: a proposição davydoviana.

O foco da pesquisa incidiu no movimento conceitual contemplado nas duas proposições para o ensino da tabuada (exercícios na proposição brasileira e tarefas na davydoviana) nos três primeiros anos escolares do Ensino Fundamental. Para tanto, desenvolvemos as seguintes ações de pesquisa (com as duas proposições de ensino): estudamos o material didático referente aos três primeiros anos do Ensino Fundamental; revelamos a relação que nos permitiu determinar a essência da tabuada; extraímos e reproduzimos o sistema conceitual no qual a tabuada se insere; estudamos as respectivas bases teórico-metodológicas; revelamos os tipos de abstração, generalização e conceito.

Durante a análise, constatamos que a proposição brasileira é fundamentada nos pressupostos da lógica formal e a davydoviana, conforme seus próprios autores preconizam, na lógica dialética.

Na primeira, coleção Porta Aberta (Matemática), o conceito de multiplicação, base para a tabuada, é abordado com diferentes significados, tais como: adição de parcelas iguais, organização retangular, proporcionalidade, combinação, padrões geométricos e multiplicações, o dobro, triplo, quádruplo, sequência numérica (por meio dos saltos dos personagens), entre outros.

A elaboração dos conceitos é proposta a partir da percepção das características externas de determinado grupo de objetos. Por decorrência desse ponto de partida, sugere-se a abstração da característica essencial, fundamental, comum a todos os objetos. Ao designar os indícios comuns, substanciais, por meio de palavras, atinge-se o conceito: *multiplicar é o mesmo que adicionar quantidades iguais*. Os conceitos desenvolvidos por meio da percepção e generalização das características externas são denominados por Davýdov de empíricos.

Davýdov (1982) alerta-nos que atrelado a esse tipo de generalização está o pensamento intuitivo, empírico, como propõe ou entende a escola e psicologia tradicionais. Mesmo aquela generalização “sob a forma mais desenvolvida, na forma de conceito.” (DAVÝDOV, 1982, p. 215). Nesse caso, o pensamento se volta apenas para a aparência externa dos objetos, carente de análise nas relações internas. O conceito, neste caso, é resultado da percepção e generalização das características externamente/diretamente expostas. Isso traz implicações na aprendizagem dos estudantes inseridos num determinado contexto escolar que tenha tal concepção.

O processo de memorização da tabuada, na proposição brasileira, ocorre por meio de parlendas elaboradas tanto pelos autores dos livros didáticos quanto pelos próprios

estudantes, na forma de grafema e fonema. As parlendas não estão relacionadas com o contexto matemático em que o conceito de tabuada foi produzido historicamente pela humanidade.

O problema da aprendizagem dos conceitos em nível teórico não se reduz aos conteúdos e métodos adotados no Ensino Fundamental e Médio. Mas, depende também do trabalho desenvolvido na Educação pré-escolar, uma vez que esse período também é propício para o desenvolvimento de habilidades com os símbolos, signos e significados. Para que as crianças desenvolvam o pensamento teórico, no Ensino Fundamental, é imprescindível que se desenvolvam as funções psíquicas superiores correspondentes desde a Educação Infantil. Isto é, que sejam abordados adequadamente os vínculos afetivos, o manuseio dos objetos, os instrumentos, o desenho, o jogo, principalmente o jogo de papéis e a modelação. Estes possibilitam o desenvolvimento do pensamento em imagens ou representativo.

Afinal as práticas educacionais interferem no modo de pensar do estudante e, consequentemente, da educação uma vez que as relações sociais determinam as formas de atividade mental, do "desenvolvimento sócio-histórico da consciência." (LURIA, 1990, p. 23). Desse modo, a prática educacional fundamentada na lógica formal determina as formas de atividade mental nos limites das percepções externas dos objetos.

O pensamento atinge um determinado grau de abstração, geralmente para a aparência em detrimento da essência, da relação interna (DAVÝDOV, 1982). Consequentemente, o conteúdo concreto utilitário dos conhecimentos ensinados na escola cultiva e fortalece o pensamento empírico. Além disso, cria uma barreira para o domínio posterior do conteúdo teórico (DUSAVITSKII, 2014; DAVYDOV, SLOBODCHIKOV, 1991).

A lógica formal sustenta a proposta à escola tradicional que também é uma instituição social com a finalidade de ensinar e educar. O ensino é concebido como transmissão direta de conhecimentos, habilidades e hábitos que serão úteis ao estudante em sua vida futura (DAVIDOV, 1987). A função da escola é ensinar aos estudantes o que precisam saber para se inserirem, futuramente, no trabalho. Mas em qual trabalho? No trabalho que transforma o sujeito? Ou no mercado em que o sujeito vende sua força de trabalho em troca de um salário, na condição alienante? No que diz respeito ao último questionamento Mészáros (2008), entende que a educação converteu-se em um mecanismo de adequação dos sujeitos aos modos de produção vigentes. Sua função consiste em adaptar-se

constantemente às mudanças do sistema produtivo. De acordo com o autor em referência, a regra essencial da educação, no sistema capitalista, é que os estudantes interiorizem as aspirações reprodutivas da sociedade como se fossem suas.

O sistema, por sua vez, propaga a ideologia de que o desemprego é consequência da má qualificação do sujeito, por não se adaptar às novas exigências do mercado de trabalho. Para tanto, indica que é consequência da incompetência escolar, que está desatualizada e não prepara mão de obra adequadamente. Mais especificamente, culpa os professores que possuem pouca criatividade para ensinar, aos pais por não ajudarem na recuperação das escolas, entre outros (DUARTE, 2001). Assim, os problemas sociais, educacionais e ambientais são de total responsabilidade de cada um de nós. Os problemas existem porque não nos adaptamos ao sistema.

Esses discursos cumprem a tarefa de camuflar as contradições do sistema capitalista contemporâneo. A educação consiste em "tomar como dado o ***ethos*** social dominante, internalizando 'consensualmente', com isso, a proclamada inalterabilidade da ***ordem natural*** estabelecida." (MÉSZÁROS, 2008, p. 81 - grifos do autor), que está sob o poder do sistema capitalista.

Diante disso nos questionamos: o ensino com base na lógica formal contribui para a manutenção ou superação do sistema capitalista? A transformação da lógica que fundamenta o ensino contribuiria para resolver os problemas relacionados à aprendizagem dos estudantes e do sistema educacional? Esclarecemos que não acreditamos que a educação escolar, ou uma proposição de ensino, ou ainda, um conceito em particular como o de tabuada, por si só, possa promover a superação dos problemas sociais anteriormente mencionados. Porém, concebemos que a educação, nessa perspectiva, isto é, com base nos pressupostos da lógica dialética que

> consiste no processo pelo qual o homem se humaniza pela apropriação cultural. Esse processo não se restringe a uma relação unilateral de mera transmissão desse patrimônio. O homem se apropria da cultura e nela se objetiva. Portanto, esse movimento é dialético, a partir do qual o homem se constitui enquanto humano e, nesse mesmo movimento, constitui a humanidade. (LONGAREZI e FRANCO, 2013, p. 94).

Nesse movimento dialético, em que o homem se constitui e constitui a humanidade, leva-nos ao entendimento de que o ensino é um dos componentes de um sistema

educacional mais amplo que, no seu conjunto, pode contribuir com a transformação educacional.

> Hoje é possível responder à pergunta que muitos colocaram no início da pesquisa experimental: "é possível formar uma personalidade em um tubo de ensaio?" Ou seja, é possível assegurar o desenvolvimento da personalidade em uma turma de escola quando as condições externas – a sociedade, muitas vezes, também a família – não contribuem muito para esse objetivo?
> Tais questões refletem a ideia de que a criança é apenas um objeto da influência desse meio. Mas as crianças que vivem uma educação desenvolvente demonstraram um diferente mecanismo psicológico de desenvolvimento. A criança em uma turma de educação desenvolvente é sujeito e objeto de sua própria atividade e, consequentemente, é criadora de si mesma e de seu meio.
> Nessas condições, a turma da escola se transforma em uma autêntica *célula da sociedade civil*, é aberta ao mundo e capaz de exercer influência sobre a transformação desse mundo. (DUSAVITSKII, 2014, p. 81-grifos do autor).

Para que a criança seja criadora de si e do seu meio, faz-se necessária a apropriação dos conceitos científicos e, consequentemente, o desenvolvimento do pensamento teórico. Uma vez que, com o pensamento teórico desenvolvido, o sujeito busca a essência das coisas, inclusive do que é aparentemente camuflado pelas contradições. Essa somente é conhecida por meio do conhecimento da essência dos objetos.

> O tipo de pensamento que permite acessar a essência dos objetos de conhecimento é o pensamento teórico, pois o meio para alcançá-lo é buscar primeiro a essência do objeto (conteúdo), sua relação principal. O pensamento teórico não se ocupa com fatos isolados ou com características diretas, imediatas do objeto. Este tipo de pensamento requer que o sujeito se ocupe dos objetos e fenômenos considerando-os num sistema, numa rede de relações dentro de um todo. Para o pensamento teórico não é suficiente apenas classificar os objetos e fenômenos a partir da observação direta de suas características particulares e imediatas, pois o que de fato o constitui é a sua essência, compreendida a partir de suas relações mediadas. O pensamento teórico é o tipo de pensamento presente nos conceitos científicos. (PERES e FREITAS, 2014, p. 20).

Foi com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, por meio do estudo da essência das coisas, que Davýdov e colaboradores elaboraram sua proposição para o ensino de Matemática. Nesta, o conceito de tabuada é apresentado no contexto de um sistema conceitual. Ou seja, no livro didático davydoviano não há um capítulo específico para a adição, outro para multiplicação, outro para a tabuada e assim sucessivamente. Diferentemente da proposição brasileira analisada na presente pesquisa, na qual os conceitos são apresentados em capítulos ou tópicos separados.

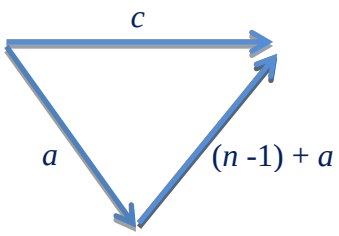
A tabuada é abordada em Davýdov a partir da medição das grandezas, por meio da unidade de medida intermediária e de algumas propriedades fundamentais da Matemática (comutativa e distributiva da multiplicação). Além disso, a tabuada contribui para a introdução de expressões numéricas e algébricas, para o desenvolvimento do conceito de multiplicação, divisão entre outros, na inter-relação entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas.

O processo de memorização é proposto no plano individual e coletivo, por meio do estudo das propriedades matemáticas em detrimento da memorização por meio de músicas, brincadeiras com dominós, entre outros, tal como procedem algumas proposições brasileiras.

A essência da tabuada, em Davýdov, não é ofuscada com recursos didáticos, como músicas na forma de paródias, dominós, quebra-cabeças, jogos de memória, entre outros, como geralmente procedem alguns professores brasileiros (NÜRNBERG, 2008). Nem como soma de parcelas iguais e como saltos de personagens como apresenta a proposição brasileira analisada na presente pesquisa. Mas "como um componente do processo de apropriação do conceito de multiplicação por ser uma prática social humana produzida historicamente para resolver determinadas situações que se apresentam aos indivíduos, como ação ou operação das suas atividades." (MADEIRA, 2012, p. 132).

A essência da tabuada em Davýdov é constituída pela relação interna entre as unidades de medidas básica e intermediárias e o total das mesmas. Pois a essência é a conexão interna, a base genética que determina todas as especificidades particulares do objeto (DAVÝDOV, 1988). O estudo dessa essência implica a análise da relação entre o universal, singular e particular. É por meio dessa relação que o universal se manifesta, conforme o esquema a seguir (Ilustração 145):

Ilustração 145 - Esquema da relação essencial da tabuada



Fonte: Elaboração nossa, 2014.

O esquema (Ilustração 145) representa a essência, a relação inicial que dá origem a todas as tabuadas. No modelo universal da tabuada, a x (n -1) + a = c, o elo entre o universal e o singular é o particular. Este consiste no número ***a***, na unidade de medida intermediária. Com a variação de ***a***, obtemos as diferentes tabuadas particulares (a = 4, a = 5, a = 6,...). Mantendo o número ***a*** fixo e variando o valor de ***n***, obtemos as diferentes singularidades para cada tabuada particular. Tomemos uma particularidade, a tabuada do número *seis* (6), ao variarmos *n*, temos as seguintes singularidades: 6 x 1 = 6; 6 x 2 = 12; 6 x 3 = 18, ... Assim, a tabuada particular, do número *seis* (6), por exemplo, surge como resultado da relação entre o universal, particular e singular, como conceito científico (VIGOTSKI, 2000). Neste, o universal existe no singular e o singular é parte do universal mediados pela particularidade (STERNIN, 1965, ROSENTAL, 1962).

É esse movimento conceitual, fundamentado nos princípios da lógica dialética, que sustenta a proposição davydoviana para o ensino da tabuada, com vistas ao desenvolvimento do pensamento teórico. Tal pensamento "*não surge e nem se desenvolve* na vida cotidiana das pessoas, ele se desenvolve somente em tal instrução, cujos programas se baseiam na compreensão dialética do pensamento." (DAVIDOV, 1999, p. 7 - grifo do autor).

Portanto, o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, no contexto da educação brasileira, requer a reflexão de alguns aspectos fundamentais, como: o desenvolvimento humano não ocorre com base apenas no amadurecimento biológico, mas no desenvolvimento intelectual; as aptidões humanas para aprendizagem teórica não são transmitidas hereditariamente, mas desenvolvidas por meio da apropriação da cultura; essa apropriação ocorre no processo orientado pelas pessoas que organizam a vida da criança, ou seja, não é qualquer atividade que propicia o desenvolvimento do pensamento teórico; os conceitos científicos desenvolvidos na escola devem contribuir para o desenvolvimento dos conhecimentos cotidianos dos estudantes; os conceitos teóricos devem ser vivenciados no dia-a-dia das crianças, pois é essencialmente importante dar significação aos conceitos aprendidos na escola, pois, caso contrário, pouco vale o esforço.

Para tanto, é necessário garantir condições objetivas, como por exemplo, escola estruturada, formação inicial e continuada dos professores com qualidade, jornada de trabalho adequada com tempo disponível para planejamento e estudos, planejamento de atividades em conformidade com as leis psicológicas do desenvolvimento humano, entre outros.

Enfim, assim como Davýdov (1982) em sua época e em seu país, também vislumbramos na lógica dialética como uma das possibilidades para repensarmos os problemas referentes ao ensino e aprendizagem no Brasil. Porém, com a consciência de que algumas proposições brasileiras, conforme já nos alertaram Rosa (2012), Damazio, Rosa e Euzébio (2012) e Sousa (2014), se aproximam daquelas proposições russas criticadas por Davýdov quando propôs o ensino desenvolvimental, juntamente com Elkonin.

Também almejamos a possibilidade do desenvolvimento contínuo da transformação social (DAVÍDOV e SLOBODCHIKOV, 1991). A educação em geral é um "órgão social capaz de satisfazer [esse] preceito." (MÉSZÁROS, 2008, p. 110). Consequentemente, a educação escolar, como parte da educação em geral, tem uma parcela de responsabilidade nesse processo. Para tanto, faz-se necessário, dentre outros, superar os limites da lógica formal no processo de ensino e aprendizagem dos conhecimentos produzidos historicamente pela humanidade. Tal necessidade é geradora de nossas futuras intenções de pesquisas que desenvolvemos após o término do mestrado. Nesse momento, dados os limites de tempo para escrever uma dissertação, é hora de parar. Mas, diante dos resultados obtidos na presente pesquisa, também é hora de recomeçar.

REFERÊNCIAS

ALVES, E. S. B. **Proposições Brasileiras e davydovianas: limites e possibilidades.** 2013. 119 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

BERNARDES, M. E. M. A constituição do pensamento na atividade prática: implicações no processo pedagógico. **Psicologia em Estudo,** Maringá, v. 16, n. 4, p. 521-530, out./dez. 2011.

BÉZOUT, E. M. **Elementos de arithmetica.** Coimbra: Livraria Portuguesa, 1849.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1951.

_____, B. de J. **Lições de álgebra e análise**. Lisboa: Gradiva, 1959.

CENTURIÓN, M.; SACALA, J. ; RODRIGUES, A. **Porta Aberta: alfabetização matemática 1º ano**. São Paulo: FTD, 2011.

_____. **Porta Aberta: alfabetização matemática 2º ano**. São Paulo: FTD, 2011.

_____. **Porta Aberta: alfabetização matemática 3º ano**. São Paulo: FTD, 2011.

COSTA, J. M. C. **Tratado de arithmetica**. Lisboa: Imprensa Nacional, 1866.

CRESTANI, S. **Análise conceitual das proposições de Davydov e seus colaboradores para o ensino do conceito de divisão.** 2013. 70 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

DAMAZIO, A. **O desenvolvimento de conceitos matemáticos no contexto do processo extrativo do carvão**. Florianópolis, 2000.

DAMAZIO, A.; PEREIRA, L. L; BANHAR, E. V. Concepção de álgebra na proposição de Davydov para o ensino de número. **Poiésis**, Tubarão, v.5, p. 280-299, 2012.

DAMAZIO, A.; ROSA, J. E. . Educação matemática: possibilidades de uma tendência histórico-cultural. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 21, p. 33-53, 2013.

DAMAZIO, A.; ROSA, J. E. ; EUZÉBIO, J. S. O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 14, p. 209-231, 2012.

DAVÍDOV, V. V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, 1987. p. 143-155.

_____. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico:** investigación teórica y experimental. Trad. Marta Shuare Moscú: Editorial Progreso, 1988.

_____. **Tipos de generalización en la enseñanza.** 3ª edição. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DAVÍDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. **La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo; en La educación y la enseñanza:** una mirada al futuro. Progreso, Moscú, 1991. p. 118-144.

DORIGON, J. C. G. **Proposições de Davydov para introdução ao conceito de equação.** 2013. 90 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

DUARTE, N. **A relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar.** 1987. 185 f. Dissertação (Mestrado em educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 1987.

_____. **Vigotski e o aprender a aprender**; críticas às apropriações neoliberais e pós-moderna da teoria vigotskiana. 2ª edição. Campinas: Autores Associados, 2001.

DUSAVITSKII, A. K. Educação desenvolvente e a sociedade aberta. **Ensino Em Re-Vista**, v.21, n.1, p.77-84, jan./jun, 2014.

EUZÉBIO, J. S. **Ensino do conceito de número: Proposta de ensino de Davydov e as proposições tradicionais**. 2011. 64f. TCC (Graduação em Pedagogia). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2011.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 3ª edição. Campinas: Ed. UNICAMP, 2002.

EWBANK, M. S. A. **O Ensino da Multiplicação para Crianças e Adultos: Conceitos, Princípios e Metodologias.** 2002. 256f**.** Tese (Doutorado em Educação: linha de pesquisa Educação Matemática). Universidade Federal de Campinas- Faculdade de Educação, Campinas, 2002.

FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. **Investigações em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

ILIENKOV, E. V. La ascensión de lo abstracto a lo concreto en principios de la lógica dialéctica. In: Alfredo Tecla Jiménez, **Teoría de la construcción del objeto de estudio**. México: Instituto Politécnico Nacional, p. 151-200, 2006.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, K.; TORÍBIO, A. **Dialética do concreto.** 2ª edição. Rio de Janeiro: Ed. Paz e Terra, 1995.

LAZARETTI, L. M. Leontiev: Danill borisovich Elkonin: a vida e as produções de um estudioso do desenvolvimento humano. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V.(orgs.). **O Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013.

LEFEBVRE, H. **Lógica Formal e Lógica Dialética**. Tradução de Carlos Nelson Coutinho. 5ª edição. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1991.

LIBÂNEO, J.C.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: A escola e a formação do pensamento teórico- científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (orgs.). **O Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 315- 350.

LONGAREZI, A. M.; FRANCO,P. L. J. A. N. Leontiev: A vida e a obra do psicólogo da atividade. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (orgs.). **O Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 67- 110.

LURIA, A. R. **Desenvolvimento cognitivo**. Tradução de Fernando Limongeli Gurgueira. São Paulo: Ícone, 1990.

MADEIRA, S. C. **"Prática": Uma leitura Histórico-Crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação**. 2012. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

MARX, K. **O capital: crítica da economia política**. 2ª ed. São Paulo, Nova Cultural, 1985.

MATOS, C. F. **Resolução de problemas davydovianos sobre adição e subtração por estudantes brasileiros do sexto ano do ensino fundamental.** 2013. 168 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

MÉSZÁROS, I; **A educação para além do capital**. 2ª ed. - São Paulo: Boitempo, 2008.

MICOTTI, M. O. **Apenas tabuadas...** In: BICUDO, Maria Aparecida V. (org). Educação Matemática. São Paulo: Ed. Moraes, 2001.

NEHRING, Cátia Maria. **Compreensão de Texto: Enunciados de Problemas Multiplicativos Elementares de Combinatória**. 2001. 224 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

NOSELLA, P.; BUFFA, E. As pesquisas sobre instituições escolares: o método dialético marxista de investigação. **Eccos:** Revista Científica, São Paulo, v. 7, n. 2, p. 351-368, jul./ dez. 2005.

NÚÑEZ, I. B.; OLIVEIRA, M. V. F. P. Ya. Galperin: a vida e a obra do criador da teoria da formação por etapas das ações mentais e dos conceitos. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (orgs.). **O Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 283- 313.

NÜRNBERG, J. **Tabuada: significados e sentidos produzidos pelos professores das Séries Iniciais do Ensino Fundamental.** 2008. 94 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2008.

PANOSSIAN, M. L. Entre o movimento lógico-histórico dos conceitos e a Organização do ensino de álgebra: o exemplo das equações, In: **Anais da XVI ENDIPE** - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino – UNICAMP, Campinas, 2012.

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014. 317 f. Tese (Doutorado em Educação). Área de concentração: Educação - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

PERES, T.C.; FREITAS, R. A. M. M. Ensino desenvolvimental: uma alternativa para a educação matemática. **Poiésis**, Tubarão, Volume Especial, p. 10-28, jan./jun. 2014.

PRESTES, Z. ; TUNES, E. ; NASCIMENTO, R. Lev Semionovitch Vigotski: Um estudo da vida e da obra do criador da psicologia histórico-cultural. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (orgs.). **O Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013. p.47-65.

PUENTES, V.; P. Vida, pensamento e obra de A. V. ZAPOROZHETS: Um estudo introdutório. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (orgs.). **O Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013. p.163-201.

REPKIN, V.V. Ensino desenvolvente e atividade de estudo. **Ensino Em Re-Vista**, v.21, n.1, p.85-99, jan./jun, 2014.

RIVERA, Y. R.; SOLOVIEVA, Y.; ROJAS, L. Q. Formación de las acciones de multiplicación y división en la escuela primaria. **Poiésis**, Tubarão, Número Especial, p. 83-101, jan./jul. 2014.

ROSA, J. E. et al. As Significações Algébricas, Geométricas e Aritméticas Éticas no Processo de Elaboração do Sistema Conceitual Numérico à Luz da Teoria Histórico-Cultural. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 11, p. 329-350, 2009.

ROSA, J. E. ; HOBOLD, E. S. F.; BERNARDO, C. S.; CORREA, D. A.; INACIO, G. M.. Introdução ao conceito de fração no livro didático mais utilizado nas escolas da rede pública estadual de Santa Catarina. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 5, p. 93-106, 2012.

ROSA, J. E. **O desenvolvimento de conceitos na proposta curricular de matemática do Estado de Santa Catarina e na abordagem Histórico-Cultural.** 2006. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

_____. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas.** 2012. 244 f. Tese (Doutorado em Educação). Área de concentração: Educação Matemática - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A. O ensino do conceito de número: uma leitura com base em Davydov. **Revista Unión** (San Cristobal de La Laguna), v. 30, p. 81-100, 2012.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; ALVES, E. S. B. Adição e subtração em Davydov. **Boletim GEPEM** / Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Rio de Janeiro, n. 63, p. 61-75, Jul/Dez, 2013.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; CRESTANI, S. Os conceitos de divisão e multiplicação nas proposições de ensino elaboradas por Davydov e seus colaboradores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.16, n.1, p. 167-187, 2014.

ROSA, J. E. ; HOBOLD, E. S. F.; BERNARDO, C. S.; CORREA, D. A.; INACIO, G. M. Relações entre as Proposições para o Ensino do Conceito de Fração com base no Ensino Tradicional e na Teoria Histórico-Cultural. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 8, p. 227-245, 2013.

ROSA, J. E. ; SOARES, M.T.C.; DAMAZIO, A. Conceito de número no sistema de ensino de Davydov, In: **Anais da XIII Conferência interamericana de Educação Matemática**; Recife, 2011.

ROSENTAL, M. M. **Princípios de Logica Dialectica.** Tradução de Augusto Vidal Boget. Uruguai: Montevideo, 1962.

RUBINSTEIN, S. L. **O desarrolo de La psicologia: principios y métodos**. Habana: Editorial Puéblos y Educación, 1979.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação Ciência e Tecnologia. **Proposta curricular de Santa Catarina**: **estudos temáticos**. Florianópolis: IOESC, 2005.

SHEPEL, E. L. Atividade de estudo: a psicologia e pedagogia do agir. **Ensino Em Re-Vista**, v.21, n.1, p.71-75, jan./jun, 2014.

SHUARE, M. **La psicologia soviéticat al como yo la veo.** Moscu: Editorial Progresso, 1990.

SILVEIRA, G. M. **Proposições para o ensino do sistema de numeração em Davydov.** 2012. 112 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

SOUZA, M. B. **O ensino do conceito de número: objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna**. 2013. 237 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

SOUSA, V. S. **Realidade e possibilidades da prática docente em matemática nos anos iniciais: um estudo mediado pelas proposições davydovianas**. 2014. 221 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual do Piauí, 2014.

STERNIN, A. O. O singular, o particular e o universal. In: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M**. Categorías del Materialismo Dialéctico.** Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo, 1965.p. 257 - 297.

TOOM, A. Ensino: o efeito dominó. **Matemática Universitária**, nº 30- p. 5-14, jun. 2001.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Ed. Atlas, 1987.

WIGGERS, V. Conceitos de educação e de educação infantil. **Poiésis**, Tubarão, Volume Especial, p. 102-120, jan./jun. 2014.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** Bezerra P. Trad.. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

_____. **Obras Escogidas I.** Madri: Visor, 1991, 383p.

_____. **Obras Escogidas III.** Madri: Visor, 1995, 383p.

ГОРБОВ, С. Ф. МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. . **Обучение математике. 1 класс: Пособие для учителей начальной школы** (Система Д.Б.Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида. перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб, 2008. **[Ensino de Matemática. 1 ano: livro do professor do ensino fundamental** (sistema do D.B.Elkonin – V.V. Davidov)/ S.F.Gorbov, G.G.Mikulina, O.V.Savieliev – 3-a edição, - Moscou, VITA-PRESS, 2008.

ГОРБОВ, С. Ф. МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. . **Обучение математике. 2 класс: Пособие для учителей начальной школы** (Система Д.Б.Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида. перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб, 2009. **[Ensino de Matemática. 2 ano: livro do professor do ensino fundamental** (sistema do D.B.Elkonin – V.V. Davidov)/ S.F.Gorbov, G.G.Mikulina, O.V.Savieliev – 3-a edição, - Moscou, VITA-PRESS, 2009.

ГОРБОВ, С. Ф. МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. . **Обучение математике. 3 класс: Пособие для учителей начальной школы** (Система Д.Б.Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида. перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб, 2003. **[Ensino de Matemática. 3 ano: livro do professor do ensino fundamental** (sistema do D.B.Elkonin – V.V. Davidov)/ S.F.Gorbov, G.G.Mikulina, O.V.Savieliev – 3-a edição, - Moscou, VITA-PRESS, 2003.

ДАВЫДОВ, В. В. О. et al. **Математика, 1-Kjiacc.** Mockba: Mnpoc - Apryc, 2012a.
Davídov, V.V. **Matemática, 1ª série**. Livro didático e de exercícios para os estudantes da primeira série. Moscou: MIROS, Argus, 2012a.

ДАВЫДОВ, В. В. О. et al. **Математика, 1-Kjiacc.** Mockba: Mnpoc - Apryc, 2012b.
Davídov, V.V. **Matemática, 2ª série**. Livro didático e de exercícios para os estudantes da segunda série. Moscou: MIROS, Argus, 2012b.

ДАВЫДОВ, В. В. О. et al. **Математика, 1-Kjiacc.** Mockba: Mnpoc - Apryc, 2009.
Davídov, V.V. **Matemática, 3ª série**. Livro didático e de exercícios para os estudantes da terceira série. Moscou: MIROS, Argus, 2009.

ANEXOS

ANEXO A: Declaração

ESTADO DE SANTA CATARINA
SECRETARIA DE ESTADO DO DESENVOLVIMENTO REGIONAL - BRAÇO DO NORTE
36ª GERÊNCIA REGIONAL DE EDUCAÇÃO - GERED
SUPERVISÃO DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

SANTA CATARINA

DECLARAÇÃO

Declaro para os devidos fins, que as Unidades Escolares pertencentes à 36ª Gerência Regional de Educação- Braço do Norte, utilizam as seguintes coleções de livros didáticos, na disciplina de Matemática, nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

- ✓ Braço do Norte, São Ludgero, Rio Fortuna e Armazém:
  - Porta Aberta: Editora FTD. Autores: Marília Centurión, Júlia La Scala e Arnaldo Rodriguês.
- ✓ Braço do Norte:
  - Bem Me Quer: Editora Brasil. Autores: Ana Lúcia, Bordeaux e Cléia Rubins.
- ✓ Braço do Norte:
  - Plural: Editora Saraiva. Autores: Luzia Fonseca Marinho e Maria da Graça Branco.
- ✓ São Martinho, São Ludgero e Santa Rosa de Lima:
  - Aprender Juntos: Editora SM. Autores: Adson Vasconcelos e Silvana Rosse Júlio.
- ✓ Grão Pará:
  - Buriti: Editora Moderna. Autora: Maria Regina Garcia Gay.

Braço do Norte, 09 de abril de 2013.

Silvânia Pereira Kinz Heinzen
Gerente Educação
Matr. 261.271-2
SED/SC - Braço do Norte

Gerente de Educação
36ª GERED