UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA
GIULIA NASCIMENTO

APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO LOGARÍTMICA E EXPONENCIAL: ATIVIDADES CONTEXTUALIZADAS

Tubarão/SC
2019

GIULIA NASCIMENTO

APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO LOGARÍTMICA E EXPONENCIAL: ATIVIDADES CONTEXTUALIZADAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Profa. Me.Vanessa Soares Sandrini Garcia

Tubarão/SC

2019

GIULIA NASCIMENTO

APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO LOGARÍTMICA E EXPONENCIAL: ATIVIDADES CONTEXTUALIZADAS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado à obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 05 de dezembro de 2019.

____
Professora e orientadora Vanessa Soares Sandrini Garcia, Me.
Universidade do Sul de Santa Catarina

____
Professora Renilda Nunes Machado de Jesus, Me.
Universidade do Sul de Santa Catarina

____
Professor Carlos Augusto Zilli, Esp.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Dedico este trabalho a minha mãe, por todo incentivo, força e suporte que me ofereceu ao longo da caminhada acadêmica.

AGRADECIMENTOS

No final desta etapa, deixo minha gratidão a todos aqueles que direta ou indiretamente me ajudaram, apoiaram e me incentivaram nesta caminhada acadêmica, que apesar de ser um pequeno passo, foi para mim, a realização de um sonho.

A Deus, pelo dom da vida e pela saúde. Sem ele nada seria possível.

Agradeço ao meu pai (in memoriam), a minha mãe e ao meu irmão por todo incentivo na vida escolar e pelos bons exemplos que sempre me deram.

Ao meu noivo Gustavo, por todo apoio e compreensão nesta etapa, seu auxílio e prestatividade foi fundamental.

Aos professores maravilhosos que tive durante a graduação que foram inspirações e contribuíram vigorosamente para minha formação profissional.

E por fim, a professora Vanessa, minha orientadora, pela excelente orientação, por todo auxílio e atenção dedicado a esse trabalho, seu cuidado e solicitude foram essenciais para sua elaboração.

“Ninguém é tão grande que não possa aprender, nem tão pequeno que não possa ensinar.” (Esopo)

RESUMO

Logaritmos e exponenciais são assuntos desafiadores a serem ministrados aos estudantes do ensino médio, visto que a maioria apresenta grande dificuldade de compreensão, pois geralmente são apresentados de forma mecânica, não estabelecendo uma ligação entre esses assuntos e suas reais aplicações. O presente trabalho propõe uma abordagem dos conteúdos de logaritmos e exponenciais através de atividades contextualizadas, utilizando como motivação as suas aplicações nas diversas áreas do conhecimento, oferecendo assim, possibilidades de trabalho interdisciplinar. O trabalho inicia-se com uma breve história da invenção dos logaritmos, sua definição e propriedades, seguido de aplicações em diversas áreas do conhecimento. Ressalta e justifica ainda, o uso de importantes tendências em educação matemática: a contextualização, a interdisciplinaridade, a resolução de problemas e a modelagem matemática. E, por fim, traz uma proposta de atividade no âmbito de uma de suas aplicações, o crescimento populacional, o qual observa a presença e o crescimento da bactéria *Escherichia coli* presentes na urina de pacientes de um laboratório do sul de Santa Catarina, através do teste laboratorial denominado Urocultura, que é considerado o padrão-ouro para a confirmação do quadro de uma infecção do trato urinário, e neste contexto sugere-se possibilidades de trabalho.

Palavras-chave: Logaritmos. Exponenciais. Aplicações.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Demonstração geométrica do logaritmo de Napier 20
Figura 2 - Tábua de Logaritmos Decimais proposta por Briggs 21
Figura 3 – pH de produtos de uso diário 32
Figura 4 – Placa de Petri com E. coli e Antibiograma 49

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Curva e função de crescimento: Paciente A 53
Gráfico 2 – Curva e função de crescimento: Paciente B 53
Gráfico 3 – Curva e função de crescimento: Paciente C 54

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Progressão Aritmética e Progressão Geométrica 19
Quadro 2 – Efeitos gerados por um terremoto 27
Quadro 3 – Intensidade sonora de situações cotidianas 30
Quadro 4 – Limites de tolerância para ruído contínuo 30
Quadro 5 – Meia - vida de alguns elementos radioativos.. 37
Quadro 6 - Etapas e procedimentos para resolução de problemas 44
Quadro 7 – Dados de coleta e análise de urina em pacientes 50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Crescimento de bactérias em determinado tempo 34

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **13**
1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA 13
1.2 PROBLEMATIZAÇÃO 14
1.3 JUSTIFICATIVAS 14
1.4 OBJETIVOS 15
1.4.1 Objetivo Geral **15**
1.4.2 Objetivos Específicos **15**
1.5 TIPO DA PESQUISA 16
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO 17
2 LOGARITMOS E EXPONENCIAS: SURGIMENTO E APLICAÇÕES **18**
2.1 A HISTÓRIA DOS LOGARITMOS 18
2.2 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADADES DOS LOGARITMOS 22
2.3 APLICAÇÕES 23
2.3.1 Matemática Financeira **24**
2.3.2 Terremotos ou Abalos Sísmicos **26**
2.3.3 Nível de intensidade sonora **28**
2.3.4 Potencial Hidrogeniônico (pH) **31**
2.3.5 Crescimento Populacional **33**
2.3.6 Desintegração Radioativa **35**
2.3.7 Resfriamento de um corpo **38**
3 TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA **41**
3.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E INTERDISCIPLINARIDADE 41
3.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 43
3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA 45
4 PROPOSTA DE ATIVIDADE: UROCULTURA E CRESCIMENTO DA BACTÉRIA ESCHERICHIA COLI **47**
4.1 A INFECÇÃO DO TRATO URINÁRIO (ITU) E O EXAME DIAGNÓSTICO 47
4.2 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS 49
4.3 TRATAMENTO MATEMÁTICO DOS DADOS 50
4.3.1 Comportamento gráfico **52**

4.4 POSSIBILIDADES DE TRABALHO EM SALA DE AULA..54
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS..56
REFERÊNCIAS 57

1 INTRODUÇÃO

A disciplina de Matemática, mesmo sendo presente e indispensável em diversas atividades do cotidiano e principalmente em muitas profissões, ainda é considerada por muitas pessoas como uma disciplina complicada e sem aplicações. A linguagem formal e a escrita com símbolos, utilizada por ela, pode parecer assustadora quando não compreendida. Essa visão errônea de que a Matemática traz complicações, torna ainda mais difícil atuar nessa área, pois é preciso estratégias para desmistificar essa visão de que a disciplina é difícil e não possui aplicações.

Particularmente no Ensino Médio, muitos estudantes fogem de cursos e áreas que envolvam cálculos, no entanto, é possível reverter essa situação utilizando algumas estratégias de ensino. Este trabalho de conclusão de curso propõe uma abordagem do tema Logaritmos e Exponenciais de uma maneira diferenciada, utilizando para isso da contextualização do conteúdo com suas aplicações dentro de áreas do conhecimento como: Geografia, Química, Física e Biologia, ampliando o campo de visão dos estudantes, que muitas vezes não vai além da sala de aula.

Diante das motivações e buscas para este trabalho, muitos professores terão a oportunidade de ampliar sua prática de ensino, especificamente de Logaritmos, que são abordados, frequentemente de maneira mecânica, através de fórmulas e demonstrações. A finalidade deste trabalho é dar suporte para o professor no ensino de Logaritmos, propondo que o ensino pode ir além das propriedades e definições matemáticas.

1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA

O tema desta pesquisa é “Aplicações das equações logarítmica e exponencial”. A delimitação do tema é “Buscar aplicações interdisciplinares da equação logarítmica e exponencial e propor atividades nesse contexto”.

1.2 PROBLEMATIZAÇÃO

Quais aplicações e atividades podem ser utilizadas no ensino da equação logarítmica e da equação exponencial?

1.3 JUSTIFICATIVAS

As equações logarítmica e exponencial são conteúdos pertinentes à primeira série do ensino médio, porém muitas vezes são deixados de lado pelos professores, por variados motivos, dentre eles: dificuldade de aprendizagem, metodologia de ensino tradicional, aulas de curta duração, pouca afinidade do professor com o assunto, não percepção de uma aplicabilidade prática desses conceitos, dentre outros. E quando abordados, esses conceitos são apresentados de maneira descontextualizada, bem como, alguns livros didáticos nem ao menos citam sua aplicabilidade, deixando de ser motivador, tanto para o aluno quanto para o professor.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p.75):

> Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial – juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc.

Observa-se que nas aulas de matemática, todo assunto desenvolvido deveria vir com alguma aplicação, que envolva o cotidiano ou outra área do conhecimento. Equações logarítmicas e exponenciais são utilizadas em inúmeras áreas do conhecimento, apesar de serem considerados assuntos complexos por muitos alunos, são fundamentais para explicação de diversos fenômenos, como por exemplo, na medição dos níveis de terremotos e no cálculo de juros compostos na matemática financeira.

Este trabalho justifica-se por buscar aplicações e propor atividades com abordagem contextualizada como recurso didático nas aulas de matemática, que busquem favorecer a construção de uma aprendizagem significativa para alunos e professores. A partir do momento que conseguimos estabelecer uma ligação entre o conteúdo estudado e uma utilidade prática, ou seja, uma abordagem contextualizada, o aluno aproxima-se da motivação necessária para aprender, favorecendo assim o aprendizado.

1.4 OBJETIVOS

Seguem os objetivos da pesquisa realizada.

1.4.1 Objetivo Geral

Apresentar as aplicações das equações logarítmicas e exponenciais em situações contextualizadas.

1.4.2 Objetivos Específicos

Ao final deste trabalho pretende-se atingir os seguintes objetivos:

- Conhecer a história do logaritmo.
- Conhecer as variadas aplicações dos logaritmos e exponencial nas diversas áreas do conhecimento.
- Destacar a importância da utilização de tendências em educação matemática como: a contextualização, a interdisciplinaridade, a resolução de problemas e a modelagem matemática, para o para desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático e de uma aprendizagem significativa.

- Propor uma atividade que utiliza da contextualização e da interdisciplinaridade para construção de conhecimento relevante acerca das equações logarítmica e exponencial.

1.5 TIPO DA PESQUISA

O plano inicial da pesquisa fundamenta-se na investigação do ambiente em que foram levantados e definidos os problemas. Desse modo, o presente estudo é classificado como uma pesquisa exploratória, qualitativa e bibliográfica.

A pesquisa exploratória tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o tema, visando torná-lo mais explícito ou construir hipóteses. A maioria dessas pesquisas demanda: (a) levantamento bibliográfico; (b) entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado; e (c) análise de exemplos que estimulem a compreensão. Apesar de a pesquisa exploratória ser bastante flexível, na maioria dos casos assume a forma de pesquisa bibliográfica ou de estudo de caso (GIL, 2007).

Este trabalho de pesquisa envolve uma investigação de caráter qualitativo, pois, de acordo com Motta (2015), analisa as percepções dos sujeitos pesquisados sobre o mundo que os rodeia, sendo a abordagem do estudo indutiva e supõe a realidade como subjetiva. Segundo o autor são características da pesquisa qualitativa: “análise de palavras (narrativas); análise indutiva (sem preocupação com as totalidades); e análise subjetiva, pois o pesquisador envolve-se com o processo e geração de categorias para analisar os fenômenos” (Motta, 2015, p.101).

A pesquisa bibliográfica segundo Motta (2015) acontece a partir de materiais já elaborados, isto é, de fontes secundárias, como: livros, revistas, jornais, monografias, teses, dissertações, relatórios de pesquisa, etc. Portanto, a natureza dessa pesquisa é bibliográfica, uma vez que para sua elaboração foram utilizadas as fontes citadas acima.

No presente trabalho, serão utilizadas as práticas dos itens “a” e “c”, dos quais através da pesquisa bibliográfica, serão apresentadas as principais aplicações dos logaritmos e exponenciais, assim como, sugestões de atividades contextualizadas sobre esses conteúdos, no campo das aplicações pesquisadas.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

O primeiro capítulo apresenta a introdução, que traz as pretensões para o desenvolvimento deste trabalho, destacando como a prática do ensino contextualizado pode tornar a disciplina de matemática mais estimulante, seguido do tema e sua delimitação, a problematização, suas justificativas e motivações, além dos objetivos da pesquisa, que busca expressar ao leitor o que se pretende com esta pesquisa.

O segundo capítulo abrange toda a fundamentação teórica da pesquisa, iniciando com a história dos logaritmos, bem como os principais estudiosos e suas contribuições para o seu desenvolvimento e aperfeiçoamento. A definição e as principais propriedades dos logaritmos, e por fim traz as principais áreas do conhecimento que utilizam de conceitos logarítmicos para modelar seus fenômenos.

O terceiro capítulo justifica o uso de tendências em educação matemática: contextualização, interdisciplinaridade, resolução de problemas e modelagem matemática. Apresentando a metodologia de cada uma dessas tendências e destacando as contribuições que podem trazer para o ensino.

O quarto capítulo contempla uma proposta de atividade de logaritmos desenvolvida no campo de uma das suas aplicações: o crescimento populacional. Através da presença e do crescimento da bactéria Escherichia coli, em pacientes com sintomas de infecção urinária. Informa as principais características da infecção do trato urinário, bem como o teste laboratorial utilizado para seu diagnóstico: a Urocultura. Organiza e expressa os dados de cada paciente de maneira matemática, estabelecendo relações e fornecendo o comportamento gráfico, de cada situação. E por fim, oferece possibilidades de trabalho dentro dessa aplicação biológica de crescimento populacional.

O quinto capítulo apresenta as considerações finais da pesquisa e posteriormente todas as referências bibliográficas utilizadas para seu desenvolvimento.

2 LOGARITMOS E EXPONENCIAS: SURGIMENTO E APLICAÇÕES

Os estudos apresentados nesse trabalho são fundamentados em livros, artigos e publicações de institutos que direcionaram sua pesquisa para as equações logarítmica e exponencial. Contempla uma breve história sobre o surgimento dos logaritmos e nomes que deram suas contribuições para o conhecimento que temos atualmente. Assim como, as principais áreas do conhecimento que utilizam dos logaritmos e exponenciais para explicar seus fenômenos.

2.1 A HISTÓRIA DOS LOGARITMOS

De acordo com Eves (2002), com o desenvolvimento da astronomia, da expansão comercial, provocada pelas grandes navegações, da engenharia e da guerra, fatos ocorridos entre os séculos XV e XVI, nasceram também a necessidade de métodos práticos que facilitassem os cálculos sem desperdiçar tempo. Nesse contexto se dá a invenção dos logaritmos, uma vez que transformava multiplicações e divisões em operações mais simples de adição e subtração, bem como transformavam potenciação e radiciação em multiplicação e divisão.

Segundo Boyer e Merzbach (2012), vários matemáticos contribuíram para a construção do conhecimento sobre logaritmos que temos atualmente, dentre eles destaca-se John Napier (1550-1617). Napier foi Barão de Merchiston, um proprietário escocês, que administrava suas propriedades, era defensor do protestantismo e escrevia sobre vários assuntos. Em matemática se dedicava principalmente a trigonometria e a computação, Napier não era matemático de profissão, mas é considerado o inventor dos logaritmos, embora muitos matemáticos tenham trabalhado simultaneamente a ele. Publicou sua descrição de logaritmos em 1614, o “Mirifici logarithmorum canonis descriptio”, que significa: Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos, obra que trabalhou durante vinte anos antes de publicar, originando suas ideias por volta de 1954. A palavra logaritmo foi criada por Napier, partindo das palavras gregas “Logos” (razão) e “Aritmos” (números), sendo mais tarde interpretado no latim como “números que evoluem”.

A proposta de Napier fundamentou-se em uma propriedade já conhecida na época, o produto de potências de mesma base: $a^m.a^n = a^{m+n}$. Isto é, a multiplicação de potências com bases iguais resulta em uma potência com essa base elevada ao expoente da soma das duas potências anteriores. Sua abordagem, que visava simplificar as longas multiplicações e divisões, baseia-se em associar os termos de uma progressão aritmética com razão igual a 1 aos termos de uma progressão geométrica. A soma dos termos da primeira progressão está associado ao produto dos termos correspondentes da segunda progressão. Conforme o Quadro 1 a seguir.

Quadro 1 - Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384

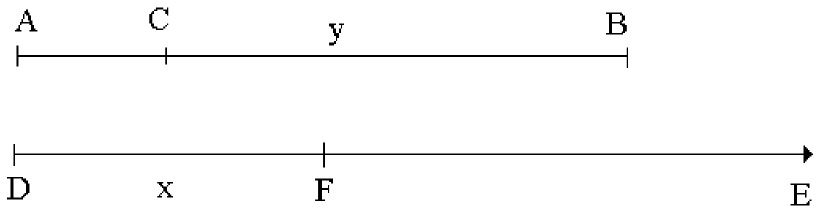
Fonte: Adaptado de PECORARI (2013).

Verifica-se que a progressão geométrica (2ª linha) foi construída através das potências de base 2, com expoentes da progressão aritmética (1ª linha). Por exemplo, para o valor 3, da primeira linha, temos o valor 8 na segunda linha, pois $2^3 = 8$. Assim, é possível criar uma correspondência entre as progressões, pois para multiplicar, por exemplo, 32 por 512 (localizados na 2ª linha), basta procurar os números correspondentes na 1ª linha, que neste caso são 5 e 9. Somando-se 5 e 9 obtemos 14, localizando 14 na 1ª linha, verifica-se que seu correspondente na 2ª linha é 16384. Concluindo que 32 x 512 = 16384. Desse modo, o resultado acima foi encontrado, através de uma simples operação de adição. No entanto, essa tabela permitia um número restrito de multiplicações e divisões.

Conforme Eves (2002), para manter os termos da progressão geométrica próximos, de forma que possa utilizar interpolação para preencher as lacunas entre os termos na correspondência precedente, Napier decidiu utilizar um número bem próximo de 1, cujas potências crescem lentamente, ofertando uma grande quantidade de números de produtos e quocientes. Assim sendo, utilizou $1-1/10^7 = 0{,}9999999$. Para evitar decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7, do seguinte modo: $N = 10^7(1-1/10^7)^L$. Chamava L de "logaritmo" do número N. Dá-se que o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de $10^7(1-1/10^7) = 0{,}9999999$ é 1. Dividindo seus números (N) e logaritmos (L) por 10^7, têm-se virtualmente um sistema de logaritmos na base $1/e$. Napier não utilizava o conceito de base de um sistema de logaritmos. Sua teoria é demonstrada geometricamente também, conforme mostra a Figura 1.

> Considere um segmento de reta AB e uma semi-reta DE, de origem D [...]. Suponhamos que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas linhas com a mesma velocidade inicial. Admitamos que C se mova com uma velocidade numericamente sempre igual à distância CB, e que F se mova com velocidade uniforme. Napier definiu então DF como o logaritmo de CB. Isto é pondo $DF = x$ e $CB = y$, resulta em: $x = Nap\log y$.(EVES, 2002, p. 344).

Figura 1 – Demonstração geométrica do logaritmo de Napier

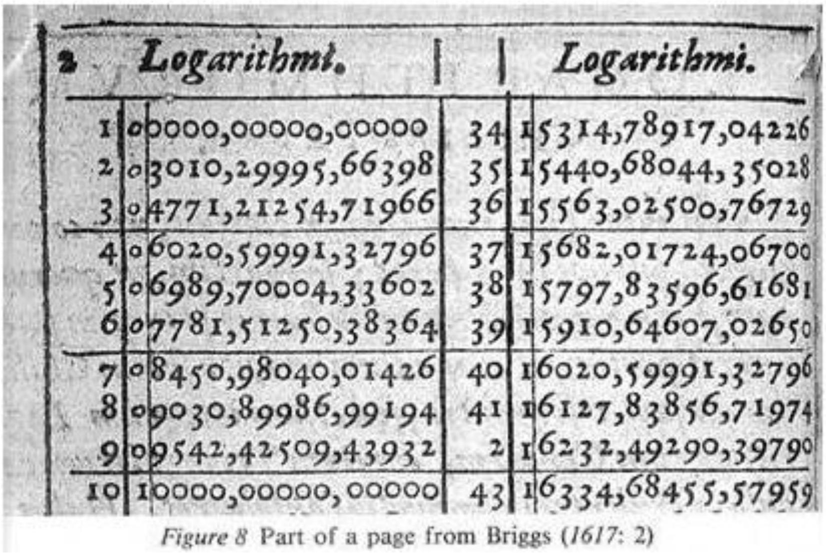


Fonte: Eves (2002. p.344).

A publicação de Napier teve sucesso imediato e despertou o interesse de vários estudiosos. Sabe-se que entre os seus admiradores entusiastas estava Henry Briggs (1561-1631), professor de geometria do Gresham College de Londres e posteriormente professor de Oxford. Em 1615, um ano após a publicação, visitou Napier na sua casa em Edimburgo na Escócia, e lá discutiram possíveis modificações no método de Logaritmos. Durante a visita Briggs propôs o uso de potências de dez, e decidiram que as tábuas seriam mais eficientes se o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, ajustando ao atual sistema de numeração decimal, originando assim os logaritmos *Briggsianos*, usados nos dias atuais (Eves, 2002; Boyer e Merzbach, 2012).

No entanto Napier já não tinha energia suficiente para executar essa ideia, assim, Briggs dedicou-se a construção dessa nova tábua, em 1624 publicou sua obra a “Arithmetica logarithmica”. Essa tábua continha quatorze casas decimais, dos números de 1 a 20 000 e de 90 000 a 100 000, conforme mostra a (Figura 2). A lacuna entre 20 000 e 90 000 foi preenchida em 1628, pelo livreiro e editor holandês Adrian Vlacq (1600-1660).

Figura 2 - Tábua de Logaritmos Decimais proposta por Briggs



2		Logarithmi.			Logarithmi.
1	0	0000,00000,00000	34	1	5314,78917,04226
2	0	3010,29995,66398	35	1	5440,68044,35028
3	0	4771,21254,71966	36	1	5563,02500,76729
4	0	6020,59991,32796	37	1	5682,01724,06700
5	0	6989,70004,33602	38	1	5797,83596,61681
6	0	7781,51250,38364	39	1	5910,64607,02650
7	0	8450,98040,01426	40	1	6020,59991,32796
8	0	9030,89986,99194	41	1	6127,83856,71974
9	0	9542,42509,43932	2	1	6232,49290,39790
10	1	0000,00000,00000	43	1	6334,68455,57959

Figure 8 Part of a page from Briggs (*1617*: 2)

Fonte: Briggs, apud Kaunzner (1992, p. 224).

Ainda segundo Eves (2002), o único adversário de John Napier na invenção dos logaritmos foi o suíço Jobst Bürgi (1552-1632), um construtor de instrumentos, que desenvolveu e construiu uma tábua de logaritmos de forma independente na Suíça, e publicou seus resultados em 1620, seis anos depois de Naiper anunciar sua descoberta.

A obra de Bürgi apareceu em Praga, num livro chamado “Arithmetisce Und Geometrische Progress ─ Tabulen”. As obras apresentavam algumas diferenças, dentre elas destacam-se os valores numéricos adotados para início do trabalho, Bürgi escolheu uma razão um pouco maior que um ($1+10^{-4}=1{,}0001$) ao contrário de Naiper que partiu de um número um pouco menor que um $(1-10^{-7})$. Ao invés de multiplicar as potências desse número por 10^{7}, ele multiplicava por 10^{8}. Assim como Naiper, Bürgi considerou uma progressão geométrica, cuja razão fosse próxima de um, para que os termos fossem próximos, ficando os cálculos com boas aproximações. Outra diferença está na demonstração, a de Naiper era geométrica enquanto a de Bürgi algébrica.

De acordo com Boyer e Merzbach (2012), Leonhard Euler (1707 - 1783) foi o melhor e mais conhecido construtor de notação matemática. Embora o número e estivesse envolvido na descoberta de Napier, foi Euler que introduziu cerca de um século depois a letra e para representar a base do sistema de logaritmos naturais.

“Pode-se demonstrar que o número e é irracional. Portanto, seu desenvolvimento decimal não termina nem é periódico. Um valor aproximado de e, com doze algarismos decimais exatos, é: 2,718281828459" (LIMA, 1991, p. 54). Isso significa que o número e não pode ser obtido como quociente de dois números inteiros, é ainda um número transcendente, ou seja, não existe um polinômio P(x) com coeficientes inteiros que se anule para x = e, ou seja, que tenha e como raiz.

Há ainda um erro na afirmação de que os logaritmos neperianos são logaritmos naturais, pois logaritmo natural é de base e que é escrito como $\ln$, já o logaritmo neperiano tem base $\frac{1}{e}$, sendo o inverso de e (Rigonatto, [201-?]).

Durante muitos anos ensinou-se a calcular logaritmos nas escolas e cursos superiores usando a régua de cálculo logarítmica, porém, atualmente com o surgimento da calculadora portátil não é mais viável utilizar uma tábua logarítmica, tornando essa invenção de Napier uma peça de museu.

Eves (2002, p. 347), ainda destaca que:

> A função logaritmo, porém, nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponencial e logarítmica são partes visuais da natureza e da análise. Consequentemente, um estudo das propriedades da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino da matemática.

Vários fenômenos da natureza podem ser explicados matematicamente com auxílio dessas funções, o que traz significado à aprendizagem desses conceitos, o presente trabalho traz alguns desses fenômenos.

2.2 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADADES DOS LOGARITMOS

Nos dias atuais um logaritmo é universalmente considerado como um expoente, assim se $a^x = b$, dizemos que x é o logaritmo de b na base a. De acordo com Dante (2006, p.226) "Dados dois números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de b na base a, ou seja, $log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$, com a e b positivos e $a \neq 1$.". Chama-se c de logaritmo, a é a base do logaritmo e b o logaritmando. De maneira sucinta podemos dizer que o logaritmo é o expoente de uma potenciação. Por exemplo, dizemos que 3 é o logaritmo de 8 na base 2 e indicamos por: $log_2 8 = 3$, pois, $2^3 = 8$. Quando a base do logaritmo for 10 podemos omiti-la.

A base do logaritmo deve ser positiva e diferente de 1, por exemplo, não existe $\log_{-3} 27$, pois não existe um número x real para que se tenha $(-3)^x = 27$. E o logaritmando só pode ser positivo, por exemplo, não existe $\log_2 (-8)$, pois não existe um número real x, que se tenha $2^x = -8$.

Segundo Dante (2006) os logaritmos possuem propriedades imediatas, consideradas também consequências da definição de logaritmo e propriedades operatórias que têm por objetivo facilitar cálculos mais complexos.

Propriedades Imediatas:
(1ª) $log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$
(2ª) $log_a a = 1$, pois $a^1 = a$
(3ª) $log_a a^m = m$, pois $a^m = a^m$ (m é um número real)

Propriedades Operatórias:
(1ª) Propriedade do Produto: $log_a (b \cdot c) = log_a b + log_a c$
(2ª) Propriedade do Quociente: $log_a \left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$
(3ª) Propriedade da Potência: $log_a (c^n) = n \cdot log_a c, \ldots \forall n \in IN$.
(4ª) Propriedade da Mudança de Base: $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$

A seção a seguir apresenta uma ligação entre os logaritmos e suas aplicações em áreas do conhecimento.

2.3 APLICAÇÕES

Como já citado, a invenção dos logaritmos foi motivada pela necessidade de simplificar os cálculos tornando-os mais rápidos e eficientes, entretanto, atualmente a ampla utilidade dos logaritmos são suas aplicações nas variadas áreas do conhecimento. Algumas dessas aplicações serão abordadas neste tópico do trabalho.

Conforme destacam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ 2006), é necessário que o ensino das equações logarítmica e exponencial esteja no contexto de suas aplicações, bem como no comportamento de fenômenos do cotidiano.

> O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. (BRASIL, 2006, p. 121).

Na seção a seguir serão apresentadas algumas áreas do conhecimento que utilizam essas funções para explicar seus fenômenos.

2.3.1 Matemática Financeira

A matemática financeira é um corpo de conhecimento que estuda a mudança de valor do dinheiro com o passar do tempo, para isso existem modelos que permitem avaliar e comparar o valor do dinheiro em diferentes pontos do tempo (PUCCINI, 2012). Tendo sua aplicabilidade em operações financeiras como: cálculo de lucros e prejuízos em investimentos, cálculo de juros em empréstimos, inflação e outras situações que surgem no âmbito financeiro.

> No regime de juros compostos, o cálculo dos juros ocorre sempre de forma cumulativa, ou seja, os juros gerados em cada período são incorporados ao capital formando o montante (capital mais juros) do período. Este montante passará a render juros no período seguinte, formando um novo montante. (PACÍFICO, 2015, p.22).

Logo, no regime de juros compostos, o dinheiro cresce exponencialmente com o passar do tempo. No contexto de investimentos, o logaritmo é utilizado para calcular quanto tempo que determinado capital deve ser aplicado no regime de juros compostos para que produza um valor total. O valor gerado após a aplicação é chamado montante.

O período de aplicação pode ser calculado utilizando a fórmula:

$$M = C.(1+i)^n \qquad (1)$$

Onde:

$M =$ montante

$C =$ capital

$i =$ taxa de juros no período

$n =$ período de aplicação

Pacífico (2015, p. 26), propõe um exemplo. “Uma aplicação de R$ 27.000,00 efetuada em determinada data produz, à taxa composta de juros de 3,4 % ao mês, um montante de R$ 34.119,88 em certa data futura. Calcular o prazo da operação.”.

Pode-se resolver esse problema utilizando a fórmula (1):

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

$$34.119{,}88 = 27.000 \cdot (1 + 0{,}034)^n$$

$$34.119{,}88 = 27.000 \cdot (1{,}034)^n$$

$$\frac{34.119{,}88}{27.000} = (1{,}034)^n$$

$$1{,}263699 = (1{,}034)^n$$

Aplicando logaritmo nos dois membros da equação:

$$\log\ 1{,}263699 = \log\ 1{,}034^n$$

Resolvendo o logaritmo no primeiro membro da equação e aplicando a propriedade da potência no segundo membro:

$$0{,}101644 = 0{,}014521 \cdot n$$

$$n = \frac{0{,}101644}{0{,}014521}$$

$$n = 7$$

Logo, o prazo de aplicação deverá ser de 7 meses.

2.3.2 Terremotos ou Abalos Sísmicos

Leinz e Amaral (2011) definem abalo sísmico como movimentos naturais da crosta terrestre (camada externa da terra) que se propagam por meio de vibrações. Podem ser percebidos diretamente pelos sentidos ou por meio de instrumentos. Os terremotos são resultado da falha que envolve o deslocamento de rochas, também denominadas de placas tectônicas. Quando essas placas colidem geram o acúmulo de pressão e a liberação repentina de energia se propaga em forma de onda sísmica, provocando um movimento brusco, popularmente conhecido como terremoto.

Utilizando um instrumento chamado sismógrafo, é possível medir a magnitude do terremoto, isto é, a quantidade de energia que ele libera no momento que se registra a intensidade máxima do movimento. A intensidade é a destruição provocada por esse fenômeno. A magnitude de um terremoto é medida em uma escala chamada Richter que atribui um número para quantificar o nível de energia liberada durante o tremor. A escala aumenta de forma logarítmica, variando entre 1 e 10, de modo que cada grau a mais significa um aumento de 10 vezes. Por exemplo, um terremoto de magnitude 9 é 10 vezes mais intenso que um de magnitude 8 e 100 vezes mais intenso que um de magnitude 7 (SAMPAIO, 2015).

O atrito entre as placas tectônicas produz ondas que são responsáveis pelas vibrações que provocam o terremoto. O sismógrafo mede a amplitude e a frequência dessas vibrações. A amplitude está associada à altura (tamanho) da onda, e a frequência com a quantidade de ondas num determinado intervalo de tempo.

A magnitude de um terremoto pode ser calculada através da equação logarítmica:

$$M = \log_{10} A + 3.\log_{10}(8.\Delta t) - 2{,}92$$

Onde:

$M =$ magnitude do terremoto medida com o sismógrafo

$A =$ amplitude do movimento da onda (em milímetros) medida com o sismógrafo

$\Delta t =$ variação do tempo (em segundos)

Cardoso et al. (2006), utilizou como exemplo o terremoto ocorrido na Ilha de Sumatra, na Indonésia, no dia 26 de dezembro de 2004, que teve Magnitude (M) estimada de 9,0 graus na escala Richter e uma variação de tempo (Δt) de 600 segundos, pode-se então calcular sua amplitude da seguinte forma:

$$M = \log_{10} A + 3 \cdot \log_{10}(8 \cdot \Delta t) - 2{,}92$$
$$9{,}0 = \log_{10} A + 3 \cdot \log_{10}(8 \cdot 600) - 2{,}92$$
$$9{,}0 = \log_{10} A + 3 \cdot 3{,}68 - 2{,}92$$
$$9{,}0 = \log_{10} A + 11{,}04 - 2{,}92$$
$$9{,}0 = \log_{10} A + 8{,}12$$
$$9{,}0 - 8{,}12 = \log_{10} A$$
$$\log_{10} A = 0{,}88 \quad \rightarrow \quad \log_a b = x$$
$$10^{0,88} = A \quad \rightarrow \quad a^x = b$$
$$A = 7{,}59$$

Utilizando a fórmula acima chega-se ao resultado de aproximadamente 7,59 milímetros de amplitude.

O Quadro 2 apresenta os efeitos gerados por um terremoto de acordo com sua magnitude na escala Richter.

Quadro 2 – Efeitos gerados por um terremoto

Magnitude Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas registrado.
Entre 3,5 e 5,4	Às vezes, sentido, mas raramente causa danos.
Entre 5,5 e 6,0	Causam pequenos danos á prédios bem construídos, mas podem danificar seriamente edificações mal construídas em regiões próximas.
Entre 6,1 e 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 km do epicentro.
Entre 7,0 e 7,9	Grande terremoto. Pode causar sérios danos numa grande área.
8,0 ou mais	Enorme terremoto. Pode causar graves danos em diversas áreas, mesmo estando a centenas de quilômetros.

Fonte: BARUFI et al., 2000.

2.3.3 Nível de intensidade sonora

Grillo et al. (2016, p. 21) definem o som como “uma variação da pressão ambiente detectável pelo sistema auditivo, ou seja, uma onda sonora que percorre um caminho em um meio material (como ar, água e parede) até os ouvidos humanos.”. Portanto, o som é uma sensação auditiva que nossos ouvidos são capazes de captar.

> No ouvido humano, as ondas sonoras são captadas pelo tímpano, uma membrana responsável pelo processo primário de transformação das frequências das ondas em pulsos elétricos, permitindo que características fundamentais sejam percebidas para diferenciação do som. (GRILLO et al., 2016, p.22).

A onda sonora possui quatro características físicas: altura, timbre, duração e intensidade. Sendo a altura definida pela frequência da onda, ou seja, o quanto as vibrações se repetem em um intervalo de tempo: alta frequência resulta em som agudo, como por exemplo, o som de um apito e baixa frequência resulta em som grave, como por exemplo, o som de uma trompa. O ouvido humano é capaz de perceber frequências de 20 Hz a 20.000 Hz, aproximadamente, o som de 20 Hz é o mais grave e o som mais agudo detectável, é de 20.000 Hz. O timbre é a qualidade que permite identificar a fonte emissora do som. A duração é representada pelo tempo que o som dura, se os sons são mais longos ou mais curtos. E a intensidade se refere à amplitude da onda sonora, ou seja, a sua força: grande amplitude resulta em som forte, e pequena amplitude resulta em som fraco. (Grillo et al., 2016; Valiante, 2004).

Para fins de simplificação, na proposta de aplicação de logaritmos nesta área é necessário ater-se somente a característica de intensidade. “Quando a onda sonora se propaga, transporta energia, distribuindo-a em todas as direções, quanto maior for a quantidade de energia que a onda transportar até nossa orelha, maior será a intensidade do som que percebemos”. (ZAMAI, 2013, p.10).

De acordo com Zamai (2013), a unidade de medida da intensidade sonora no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o bel, em homenagem ao inventor do telefone, o cientista escocês Graham Bell (1847-1922). Na prática, usa-se um submúltiplo desta unidade, o decibel (dB), ou seja, 1dB = 0,1 bel. O equipamento capaz de medir o nível de intensidade sonora é chamado decibelímetro.

A classificação do som como forte ou fraco está ligada ao nível de intensidade sonora (NIS), que relaciona a intensidade sonora (IS) que representa o fluxo de energia por unidade de área (watts por m²) e a menor intensidade sonora audível, também chamada limiar de audibilidade (IR), que vale $10^{-12}\ \mathrm{w/m^2}$. A relação entre as intensidades permite calcular o nível sonoro do ambiente (NIS) que é dado em decibéis (SILVA, [201-?]).

O nível de intensidade sonora é calculado através da equação logarítmica:

$$NIS = 10\ \cdot\ log\frac{IS}{IR} \tag{2}$$

Onde:

NIS – nível de intensidade sonora dado em decibéis (dB)

IS – intensidade sonora da fonte dada em watts por cm² ou watts por m² ($w/cm^2\ -\ w/m^2$)

IR – índice de referência/limiar de audibilidade ($10^{-12}\ w/m^2$)

Vasconsellos, Scordamaglio e Cândido (2004, p.111) trazem um exemplo: “Numa danceteria há três aparelhos de som iguais. Quando um dos aparelhos foi ligado no máximo, mediu-se o NIS, que era de 60 dB (decibéis). Vamos determinar o número de decibéis obtidos no caso de os três aparelhos serem ligados na potência máxima”.

A primeira reação seria imaginar que o NIS é igual a 180 dB, pelo fato de termos triplicado a intensidade sonora ao ligarmos os três aparelhos. Mas isso não é verdade. Pode-se resolver este problema utilizando a fórmula (2).

Vamos chamar $\frac{IS}{IR}$ de x, sabe-se que o NIS quando um aparelho está ligado é 60 dB. Logo:

$60 = 10 \log x$

Ligando-se os três aparelhos na potência máxima a intensidade sonora triplicou, ou seja, passou a ser $3x$. Então:

$NIS = 10 \log\ 3x$

Aplicando a propriedade do produto:

$NIS = 10\ \cdot (\log 3 + \log x)$

Aplicando a propriedade distributiva:

$NIS = 10 \log 3 + 10 \log x$

$\log 3 = 0{,}477$ e $10. \log x = 60$

$NIS = 10 \cdot\ 0{,}477 + 60$

$NIS = 4{,}77 + 60$

$NIS = 64{,}77\ dB$

Portanto, triplicando a intensidade sonora, o NIS teve um aumento de pouco mais de 4 dB.

A exposição a níveis sonoros superiores a 80 decibéis, por um período de tempo, pode causar lesões irreversíveis ao aparelho auditivo, ocasionando fadiga, neurose e até psicoses (SILVA, [201-?]). No Quadro 3 estão listados alguns sons cotidianos e o nível de intensidade sonora em decibéis.

Quadro 3 – Intensidade sonora de situações cotidianas

Fonte do Som	Nível de intensidade sonora (dB)
Avião a jato militar a 30 m de distância	140
Limiar da dor	120
Máquina de Rebitar	95
Trem	90
Tráfego pesado	70
Conversa comum	65
Automóvel silencioso	50
Rádio com volume baixo	40
Sussurro médio	20
Ruído de folhas	10

Fonte: YOUNG e FREEDMAN (2008).

A Norma Regulamentadora NR 15 da Portaria do Ministério do Trabalho nº 3.214/1978 estabelece os limites de exposição a ruído contínuo, que estão apresentados no Quadro 4.

Quadro 4 – Limites de tolerância para ruído contínuo

Nível de ruído (dB)	Máxima exposição diária permissível
85	8 horas
86	7 horas
87	6 horas
88	5 horas
89	4 horas e 30 minutos
90	4 horas
91	3 horas e 30 minutos
92	3 horas

93	2 horas e 40 minutos
94	2 horas e 15 minutos
95	2 horas
96	1 hora e 45 minutos
98	1 hora e 15 minutos
100	1 hora
102	45 minutos
104	35 minutos
105	30 minutos
106	25 minutos
108	20 minutos
110	15 minutos
112	10 minutos
114	8 minutos
115	7 minutos

Fonte: BRASIL, 1978.

2.3.4 Potencial Hidrogeniônico (pH)

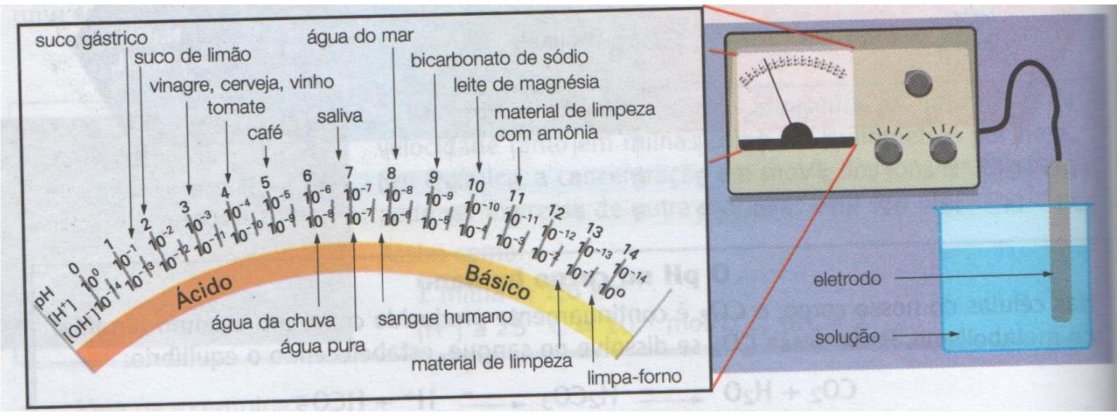
Muitas reações químicas são processadas em meio líquido e dependem fortemente das condições de acidez ou alcalinidade do meio. Segundo Gama e Afonso (2007) a definição de ácidos e bases foi dada pelo cientista sueco Svante Arrhenius (1859-1927), definiu os ácidos como substâncias que produzem em solução aquosa íons positivos de hidrogênio (H^+), enquanto as bases produzem íons negativos (OH^-), as hidroxilas.

Para expressar a acidez ou alcalinidade de uma solução, usa-se uma escala logarítmica, que recebe o nome de escala pH. Essa escala é baseada na concentração de íons de hidrogênio, é definida por: $\mathrm{pH} = -\log[H^+]$. Dessa forma, todo meio ácido tem pH < 7, e todo meio alcalino, pH > 7. Dentro de uma escala que vai de 0 a 14 e, considerando o pH 7 como neutro. (VASCONCELLOS; SCORDAMAGLIO; CÂNDIDO, 2004).

O pH é medido com indicadores ácido-base, que são substâncias que mudam de cor em valores bem definidos de pH, ou por um aparelho elétrico denominado pHmetro que mede a condutividade elétrica da solução. Embora esse último processo seja mais preciso, o uso de indicadores é mais frequente, dada a sua comodidade e disponibilidade. A mudança de cor desses indicadores, em diferentes valores de pH, é chamada de viragem do indicador. Quanto maior for a acidez de uma solução, maior será a concentração de H^+ , porém menor será o pH (FELTRE, 2004; USBERCO E SALVADOR, 2000).

A Figura 3 apresenta o pH de alguns produtos de uso diário e outras substâncias incluídas como referência, no visor de um pHmetro.

Figura 3 – pH de produtos de uso diário



Fonte: USBERCO e SALVADOR, (2000, p. 428)

Vasconsellos, Scordamaglio e Cândido (2004, p.114) trazem um exemplo: “A concentração de hidrogênio de uma solução $[H^+] = 1{,}0 \cdot 10^{-8{,}2}$. Essa solução é ácida ou básica?”.

Para calcular seu pH, utilizamos a equação logarítmica:

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log\ (1{,}0 \cdot 10^{-8{,}2})$$

Aplicando a propriedade do produto:

$$pH = -(\log\ 1{,}0 + \log\ 10^{-8{,}2})$$

Como $\log 1 = 0$, e aplicando a propriedade da potência, têm-se:

$$pH = -(0 - 8{,}2 \cdot \log 10)$$

Como $\log 10 = 1$, têm-se:

$$pH = -(-8{,}2 \cdot 1)$$

$$pH = 8{,}2$$

Logo, como resultou em pH > 7, a solução é alcalina, ou também chamada básica.

2.3.5 Crescimento Populacional

Segundo Zill (2003), foi o economista inglês Thomas Malthus (1766-1834), quem elaborou uma das primeiras tentativas de modelagem do crescimento populacional humano por meio da matemática, em 1798. O modelo Malthusiano, supõe que a taxa segundo a qual a população de um determinado país cresce em um determinado instante é proporcional à população total do país naquele instante. Isto é, quanto mais pessoas houver em um instante t, mais pessoas existirão futuramente.

Malthus (1996) considerava que a pobreza era o fim inevitável do homem, pois a população cresceria a uma taxa superior a dos meios de subsistência, segundo ele, se não ocorressem epidemias, guerras ou desastres naturais, a população duplicaria a cada 25 anos. Cresceria, portanto, em progressão geométrica (2, 4, 8, 16, 32...), enquanto o crescimento da produção de alimentos ocorreria em progressão aritmética (2, 4, 6, 8, 10, 12...).

Hoje, sabe-se que as previsões de Malthus não se concretizaram, visto que a população não duplicou a cada 25 anos, e a produção de alimentos, é crescente, graças ao desenvolvimento tecnológico e aos fertilizantes e agrotóxicos. Os erros de sua previsão estão associados às limitações da época, já que tirou suas conclusões a partir da observação do comportamento demográfico de uma região limitada, com uma população, predominantemente rural. Malthus, ainda não previu os efeitos que seriam provocados pela industrialização, pela urbanização e pelo progresso tecnológico e científico (Fontana et al., 2015).

É raro encontrar populações que crescem à taxa descrita pelo modelo de Malthus, no entanto, é utilizada para modelar o crescimento de pequenas populações, em um curto intervalo de tempo, como por exemplo, no crescimento de bactérias em uma placa de Petri (Zill, 2003).

De acordo com o exemplo apresentado por Vasconsellos, Scordamaglio e Cândido (2004), num laboratório de biologia, um aluno, observando uma cultura de bactérias fez a Tabela 1 a seguir:

Tabela 1 – Crescimento de bactérias em determinado tempo

Tempo (minutos)	0	5
Número de bactérias	2000	2323

Fonte: VASCONSELLOS, SCORDAMAGLIO E CÂNDIDO (2004).

Sabendo que o crescimento dessa cultura obedece à lei:

$$Q(t) = Q_0 . e^{k.t} \tag{3}$$

Onde:

Q- é a quantidade de bactérias em qualquer instante;

Q_0- é a quantidade de bactérias no instante t = 0 (início);

e- valor constante, aproximadamente 2,71828 (o número e é a base dos logaritmos naturais);

k- constante de crescimento que varia de acordo com a bactéria;

t- instante qualquer.

Sabendo disso qual a estimativa do número de bactérias passado 15 minutos?

Para iniciar a resolução, primeiro calcula-se o valor de k, utilizando a fórmula (3) e os dados da tabela:

$$2323 = 2000 \cdot 2{,}71828^{k\cdot 5}$$

Considerando o fato: se $\mathrm{b} = \mathrm{c}$, então $\log \mathrm{b} = \log \mathrm{c}$.

Aplicando logaritmo nos dois membros da equação:

$$\log\ 2323 = \log\ (2000\ \cdot 2{,}71828^{k\cdot 5})$$

Aplicando a propriedade do produto:

$$\log\ 2323 = \log 2000 + \log 2{,}71828^{\mathrm{k}\cdot 5}$$

Aplicando a propriedade da potência:

$$\log\ 2323 = \log 2000 + \mathrm{k} \cdot 5 \log 2{,}71828$$

Calculando os logaritmos na calculadora, têm-se:

$$3{,}3660 = 3{,}3010 + k \cdot 5 \cdot 0{,}4342$$

Isolando k:

$$k = \frac{3{,}3660 - 3{,}3010}{5 \cdot 0{,}4342}$$

$$k \cong 0{,}03$$

Encontrado a constante k, calcula-se a quantidade de bactérias decorrido 15 minutos:

$$\mathrm{Q} = 2000 \cdot 2{,}71828^{0{,}03\cdot 15}$$

$$\log\ \mathrm{Q} = \log(2000 \cdot 2{,}71828^{0{,}03\cdot 15})$$

$$\log\ \mathrm{Q} = \log(2000 \cdot 2{,}71828^{0{,}45})$$

$\log Q = \log 2000 + 0{,}45 \log 2{,}71828$

$\log Q = 3{,}3010 + 0{,}1945$

$\log Q = 3{,}4964$

A operação inversa ao logaritmo é a exponenciação, logo:

$Q = 10^{3,4964}$

$Q \cong 3136$

O tempo triplicou de cinco para quinze minutos, mas o número de bactérias não foi triplicado, (caracterizando um comportamento exponencial e não linear) é interessante até, estimar o percentual de aumento, observe:

$$Aumento\ percentual = \frac{valor\ novo - valor\ anterior}{valor\ anterior} \cdot 100$$

$$Aumento\ percentual = \frac{3136 - 2323}{2323} \cdot 100$$

$$Aumento\ percentual = 35\%$$

Logo, constata-se que o número de bactérias teve um aumento de 35%.

2.3.6 Desintegração Radioativa

> A era nuclear teve início nos últimos anos do século XIX, com a descoberta dos primeiros fenômenos radioativos, e assustou a humanidade com as explosões de duas bombas atômicas sobre as cidades japonesas de Hiroshima e Nagasaki em agosto de 1945, já no final da Segunda Guerra Mundial. Mediante o surgimento da radioatividade, começou uma nova fase da compreensão da matéria. O átomo, que até o final do século XIX era considerado indivisível, mostrou-se ser formado por partículas ainda menores. Atingiu-se o próprio núcleo dos átomos, conseguindo-se transformar um elemento químico em outro. As reações nucleares dão origem à forma mais rica de energia que conseguimos obter, possibilitando a construção de usinas elétricas, a propulsão de porta-aviões e submarinos nucleares, etc. Apesar dos muitos benefícios trazidos pelas reações nucleares, seu uso é sempre acompanhado de desconfiança, principalmente no tocante aos acidentes e ao descarte do lixo nuclear. (FELTRE, 2004, p.364)

Radioatividade segundo Feltre (2004) é a propriedade que os núcleos atômicos instáveis possuem de emitir partículas e radiações eletromagnéticas, para transformar-se em núcleos mais estáveis, esse fenômeno ocorre espontaneamente e é chamado de reação de desintegração radioativa.

Os átomos de substâncias radioativas como, por exemplo, o rádio e o urânio, possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e se transformando em outra substância não radioativa. Portanto, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui, causando o aumento da massa da nova substância formada. Assim, com decorrer do tempo, a quantidade de matéria radioativa de um corpo se desintegra proporcionalmente à massa da substância original. Cada substância radioativa tem sua constante de desintegração (α), que é determinada experimentalmente (Lima, 1991).

Através da equação: $\mathrm{M(t)} = \mathrm{M}_0 \cdot \mathrm{e}^{-\propto \cdot \mathrm{t}}$, pode-se calcular a massa de uma substância no instante t. Onde:

M- é a massa em um instante qualquer;

M_0- é a massa no instante t = 0 (início);

e- valor constante, aproximadamente 2,71828 (o número e é a base dos logaritmos naturais);

$\propto$- constante de desintegração (varia de acordo com o elemento);

t- instante qualquer.

Para estimar o tempo de desintegração de um elemento radioativo utiliza-se o conceito de tempo de meia-vida ($\mathrm{t1/2}$), que Feltre (2004, p.374) define como "o tempo necessário para desintegrar a metade dos átomos radioativos existentes em uma dada amostra".

Sabendo que o tempo de meia-vida de um determinado elemento radioativo, é o tempo que esse elemento leva para desintegrar metade da sua massa radioativa, considera-se:

$$\mathrm{M}_0 \left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{M}_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha . \mathrm{t}_0}$$

Portanto:

$$\mathrm{M}_0 \left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{M}_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha . t_0}$$

Dividindo os dois membros da equação por Mo:

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\alpha . t_0}$$

Aplicando logaritmo natural nos dois membros da equação:

$$\ln \frac{1}{2} = \ln \mathrm{e}^{-\propto \cdot t_0}$$

Aplicando a propriedade do logaritmo quociente no primeiro membro de equação, e a propriedade da potência no segundo membro da equação:

$$\ln 1 - \ln 2 = -\propto \cdot \mathrm{t}_0 \cdot 1$$

$$0 - \ln 2 = -\propto \cdot \mathrm{t}_0$$

Multiplicando os dois membros da equação por -1:

$\ln 2 = \propto \cdot t_0$

Isolando α, temos:

$$\propto = \frac{\ln 2}{t_0}$$

Portanto, a meia vida (t_0) pode ser calculada pela fórmula acima, desde que se conheça a constante de desintegração (α), que varia de acordo com a substância.

O Quadro 5 traz o tempo de meia-vida de isótopos de alguns elementos.

Quadro 5 – Meia - vida de alguns elementos radioativos

Elemento	Meia-vida (α)
Polônio 218	2 minutos e 45 segundos
Polônio 214	$1{,}64 \cdot 10^{-4}$ segundos
Rádio 226	1620 anos
Rádio 228	6,7 anos
Rádio 223	11,68 dias
Rádio 224	3,64 dias
Diversos isótopos de Urânio	Ordem de 10^9 anos

Fonte: Adaptado de Lima (1991, p.96 e 97)

No capítulo Logaritmo e Função logarítmica da coleção de Dante (2006), há diversos exercícios sobre a aplicação dos logaritmos no cálculo de desintegração radioativa, aliando o ensino de Matemática com a Química. Um dos exemplos apresentados por Dante (2006, p.241) pergunta: "Em quantos anos 500 g de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de 3% ao ano, se reduzirão a 100 g? Use $Q = Q_0 \cdot e^{-r \cdot t}$, em que Q é a massa da substância, r a taxa e t é o tempo em anos.".

Resolvendo a equação exponencial produzida com os dados da questão:

$$100 = 500.e^{-0{,}03t}$$

$$\frac{100}{500} = e^{-0{,}03t}$$

Simplificando a equação:

$$\frac{1}{5} = e^{-0{,}03t}$$

Aplicando o logaritmo natural dos dois lados da equação:

$$\ln\frac{1}{5} = \ln e^{-0{,}03t}$$

Aplicando a propriedade do logaritmo de um quociente no lado esquerdo da equação, e a propriedade da potência do lado esquerdo da equação:

$\ln 1 - \ln 5 = -0{,}03 \cdot t \cdot \ln e$

$0 - \ln 5 = -0{,}03 \cdot t \cdot 1$

$-\ln 5 = -0{,}03 \cdot t$

Isolando t:

$$\mathrm{t} = \frac{\ln 5}{0{,}03}$$

$$\mathrm{t} = \frac{1{,}6094}{0{,}03}$$

$\mathrm{t} \cong 53{,}6$ anos

Logo, conclui-se que essa substância radioativa, somente reduzirá a uma massa de 100 g quando passado 53 anos, 7 meses e 6 dias.

2.3.7 Resfriamento de um corpo

De acordo com Lima (1991) o resfriamento de um corpo baseia-se em colocar um objeto aquecido em um meio mais frio, cuja massa seja grande o suficiente, de tal modo que sua temperatura não se altere pela presença do objeto mais quente, ou seja, a temperatura do meio permanece constante. A lei de resfriamento de Newton afirma que, de acordo com essas condições, a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença.

De maneira análoga a lei da desintegração radioativa, a lei da do resfriamento de um corpo se traduz matematicamente como: $\mathrm{D(t)} = \mathrm{D_0} \cdot \mathrm{e}^{-\propto \cdot \mathrm{t}}$. Onde:

D – é a diferença de temperatura entre o objeto e o meio que o contém, num instante qualquer;

$\mathrm{D_0}$– é a diferença de temperatura entre o objeto e o meio que o contém, no instante $t(0)$;

α – constante que depende do material que é constituída a superfície do objeto.

No capítulo Aplicações do livro Logaritmos de Lima (1991), há vários exemplos resolvidos e exercícios de logaritmos no contexto de suas aplicações, dentre eles a respeito do resfriamento de um corpo. Um dos exemplos apresentados por Lima (1991, p.99) pergunta:

"Num certo dia, a temperatura ambiente é de 30°. A água que fervia numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo tem temperatura de 65°. Quanto tempo depois de apagado o fogo a água atingirá a temperatura de 38°?".

Para entender o questionamento e iniciar a resolução é importante fazer algumas considerações que vêm a seguir.

No momento em que o fogo foi apagado ($t = 0$), a temperatura da água era de 100° (temperatura de ebulição da água) e a do ambiente 30°. Portanto a diferença entre as temperaturas é dada por: $D_0 = 100 - 30 = 70$. Passado t minutos, a diferença da temperatura da água para a do ambiente é dada por $D(t) = 70 \cdot e^{-\propto \cdot t}$. Para determinar a constante α, utilizamos $t = 5$. Logo:

$$D(5) = 70 \cdot e^{-5 \cdot \propto} \qquad (4)$$

Como $D(5)$ é a diferença de temperatura do tempo de cinco minutos considera-se:

$$D(5) = 65 - 30 = 35$$

Retornando a equação (4):

$$35 = 70 \cdot e^{-5 \cdot \propto}$$

$$e^{-5 \cdot \propto} = \frac{35}{70}$$

Simplificando a fração encontrada no segundo membro têm-se:

$$e^{-5 \cdot \propto} = \frac{1}{2}$$

Para encontrar a constante α, aplica-se o logaritmo natural nos dois membros da equação:

$$\ln e^{-5 \cdot \propto} = \ln \frac{1}{2}$$

Aplicando a propriedade da potência no primeiro membro da equação:

$$-5 \cdot \propto \cdot \ln e = \ln \frac{1}{2}$$

$$-5 \cdot \propto \cdot 1 = -0{,}6931$$

$$-5 \cdot \propto = -0{,}6931$$

$$\propto = \frac{-0{,}6931}{-5}$$

$$\propto = 0{,}1386$$

Queremos saber o valor de t para o qual a diferença de temperatura seja:

$$D(t) = 38 - 30 = 8$$

Têm-se então:

$$8 = 70 \cdot e^{-0{,}1386 \cdot t}$$

$$e^{-0,1386 \cdot t} = \frac{8}{70}$$

Simplificando a fração encontrada no segundo membro têm-se:

$$e^{-0,1386 \cdot t} = \frac{4}{35}$$

Para encontrar t, aplica-se o logaritmo natural nos dois membros da equação:

$$\ln e^{-0,1386 \cdot t} = \ln \frac{4}{35}$$

Aplicando a propriedade da potência no primeiro membro da equação:

$$-0,1386 \cdot \mathrm{t} \cdot \ln \mathrm{e} = \ln \frac{4}{35}$$

$$-0,1386 \cdot t \cdot 1 = -2,1691$$

$$-0,1386 \cdot t = -2,1691$$

$$\mathrm{t} = \frac{-2,1691}{-0,1386}$$

$$\mathrm{t} = 15,65 \text{ minutos}$$

Sendo assim, conclui-se que depois de apagado o fogo a água atingirá a temperatura de 38°, passado pouco mais do que 15 minutos e meio.

A lei do resfriamento de Newton tem sua aplicação também na perícia criminal, estimando a hora da morte de um cadáver. Segundo Silva (2010), atualmente existem várias técnicas que determinam a hora do óbito, e em sua maioria têm algo em comum: a matemática. A forma mais simples e usada no mundo é a medição da temperatura do cadáver utilizando um termômetro. Pois, a temperatura normal de um indivíduo vivo é 36,5°C, e quando morre essa temperatura começa a baixar e tende a igualar-se a temperatura do ambiente. Todavia, o método não é eficiente se o cadáver perdeu muito sangue ou se morreu devido à ingestão de veneno, ou também, se passou muito tempo após o óbito, ficando difícil determinar a hora do óbito, utilizando o método de Newton.

3 TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Segundo Zorzan (2007), para situar as tendências matemáticas, é necessário contextualizá-las, pois toda proposta surge em situações de necessidades, que cercam determinado contexto histórico.

> [...] até as décadas de 60 e 70, o ensino da matemática, em diferentes países, recebeu influências do movimento conhecido como "matemática moderna", cujo enfoque central era o ensino voltado para o desenvolvimento excessivo da abstração, enfatizando muito mais a teoria do que a prática. Mas, no decorrer do ensino-aprendizagem da matemática, foi percebida a inadequação de alguns princípios dessa matemática moderna; ocorreram, então, novas discussões curriculares, que promoveram reformas em nível mundial. Com essas reformas, evidenciam-se a ênfase na resolução de problemas, a exploração da matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano, a compreensão da importância do uso da tecnologia, o direcionamento para a aquisição de competências básicas ao cidadão e a ação do aluno no processo da construção do conhecimento. (ZORZAN, 2007, p.78 e 79).

Com o declínio do movimento da matemática moderna, ocorreram reformas no ensino em todo o mundo no período de 1980 a 1995, e nesse contexto surge o movimento da educação matemática, também chamado de tendências em educação matemática, esse movimento propõe alternativas pedagógicas para o ensino da matemática.

Nas seções a seguir apresenta-se uma breve abordagem a respeito de importantes tendências que estão intimamente ligadas: a contextualização, a interdisciplinaridade, a resolução de problemas e a modelagem matemática.

3.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E INTERDISCIPLINARIDADE

> De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos. (BRASIL,2006, p.69).

Para alcançar o objetivo citado acima, que é preparar o estudante para o exercício da cidadania e do trabalho, a escola não pode mais ter caráter apenas enciclopédico, surgem assim, diversas estratégias de ensino que visam potencializar esse processo, sendo a contextualização e a interdisciplinaridade, importantes metodologias utilizadas para atribuir significado e importância à aprendizagem.

O conceito de contextualização do conhecimento tem grande destaque no atual cenário educativo. As orientações curriculares e metodologias de ensino e de aprendizagem expressas nos documentos legais ligados à formação de professores defendem a escola, o ensino e a aprendizagem centrada em saberes contextualizados, visando ampliar as inúmeras possibilidades de interação entre as disciplinas e as áreas do conhecimento. De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) o ponto de partida para o estudo das disciplinas deve ser o contexto do aluno e da escola, somente assim, o ensino fará sentido para o discente e a compreensão dos conceitos será efetiva. Além disso, o mundo está cada vez mais globalizado, acontecimentos distantes afetam diretamente suas vidas, podendo esse fato constituir pontos de partida para tornar os conteúdos mais atraentes, o que oferta para o professor inúmeras possibilidades de trabalho.

No entanto, as orientações curriculares alertam que contextualizar não é apenas, exemplificar com situações vividas pelos alunos, como geralmente aparece nos livros didáticos, a situação deve ser o ponto de partida para o aprendizado. A contextualização pode ser realizada no domínio de qualquer modelo de aula, tanto em aulas mais tradicionais, experimentações ou em desenvolvimento de projetos. “Além de valorizar a realidade do aluno, a contextualização permite que o aluno venha a desenvolver uma nova perspectiva: a de observar sua realidade, compreendê-la e, o que é muito importante, enxergar possibilidades de mudança.”. (BRASIL 2006, p.35).

Outra ação pedagógica complementar a contextualização, elencada pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), é a abordagem interdisciplinar dos conteúdos, esta deve ser construída em consonância com o projeto pedagógico da escola. Como primeiro passo bem-sucedido, que visa conduzir a interdisciplinaridade sistêmica é a abordagem simultânea de um mesmo assunto por diferentes disciplinas. Essa ação permite que, professores de diferentes áreas descubram conteúdos que permitam o trabalho em conjunto, cada qual investigando aspectos que se enquadram com sua área de conhecimento. Vale ressaltar que a interdisciplinaridade só é possível com a colaboração mútua entre os professores, o que exige conhecimento, confiança e entrosamento da equipe.

A pesquisa aqui desenvolvida elenca as principais áreas do conhecimento que se aplicam os conceitos e as propriedades de logaritmos e exponenciais, o que permite o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar com essas áreas, ofertando ainda atividades contextualizadas.

3.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

De acordo com os PCN's (1998), a própria história da matemática mostra que ela foi construída e motivada como resposta a problemas práticos que surgiam em diferentes contextos como, por exemplo, na divisão de terras, no cálculo de créditos, e outros problemas vinculados a outras ciências como Física e Astronomia.

A resolução de problemas, segundo os PCN's, é uma estratégia para ensinar matemática, não como exercício do que já foi ensinado, mas como uma inserção do que se pretende ensinar. Visto que, a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de lidar com situações que o cercam. Desse modo, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos sobre conceitos e procedimentos matemáticos, além de ampliar sua visão dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

> Se por um lado a ideia de situação-problema pode parecer paradoxal, *pois como o aluno pode resolver um problema se ele não aprendeu o conteúdo necessário à sua resolução?*, por outro lado, a história da construção do conhecimento matemático mostra-nos que esse mesmo conhecimento foi construído a partir de problemas a serem resolvidos.(BRASIL, 2006, p.84).

Para Dante (2009), um problema é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos específicos para solucioná-lo. A atividade de resolver problemas é exigida nas diversas vivências sociais das pessoas e demandam de estratégias para chegar à solução. Segundo o esquema de Polya (1977 apud DANTE, 2009), são quatro as principais etapas, para a resolução de um problema (Quadro 6):

Quadro 6 - Etapas e procedimentos para resolução de problemas

ETAPAS	PROCEDIMENTOS
1. Compreender o problema	- O que se pede no problema? - Quais são os dados e condições do problema? - É possível explicar a situação com uma figura ou diagrama? - É possível estimar a resposta?
2. Elaborar um plano	- Você já resolveu algum problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este? - É possível resolver o problema por partes? - É possível organizar os dados em tabelas, diagramas ou gráficos? - É possível traçar um ou vários caminhos em busca da solução? - Qual é o seu plano para resolver o problema?
3. Executar o plano	- Execute o plano elaborado, verificando-o passo-a-passo. - Efetue os cálculos indicados no plano - Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias formas de resolver o mesmo problema.
4. Fazer o retrospecto ou verificação	- Examine se a solução obtida está correta. - Existe outra forma e resolver o problema? - É possível empregar o mesmo método para resolver problemas semelhantes?

Fonte: A autora, 2019.

De uma forma mais sucinta, é necessário que o aluno compreenda o problema, levante estratégias e caminhos para resolução e ao final verifique a confiabilidade da solução encontrada.

Todavia, antes de propor um problema é necessário fazer uma clara distinção entre um exercício e um problema. O primeiro, como o próprio nome diz, serve para exercitar, praticar determinado algoritmo. Ensinar a resolver problemas é uma tarefa muito mais difícil do que ensinar conceitos e algoritmos matemáticos. A postura do professor ao ensinar um algoritmo é de um orientador que dá o passo a passo, de como fazer. Na resolução de problemas, o professor será o incentivador das ideias geradas pelos alunos, levando-os a criarem seus próprios conhecimentos (DANTE, 2009).

3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Bassanezi (2009, p. 24), um dos pioneiros em pesquisas de modelagem matemática no Brasil, define em poucas palavras o que é modelagem matemática. Segundo ele, “a Modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”.

Segundo Biembengut e Hein (2003), qualquer situação quantificada seja um problema ou não, requer uma formulação matemática detalhada. Nessa concepção, existe um conjunto de símbolos e relações matemáticas, que buscam traduzir, um fenômeno ou um problema real, denominando-se “modelo-matemático”. O ser humano sempre recorreu a modelos, e esse conceito está presente em quase todas as áreas: Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Literatura e Matemática.

Para solucionar vários problemas do mundo real, é indispensável à utilização de um modelo, como por exemplo:

> O tempo necessário para percorrer uma distância de quarenta quilômetros, mantendo-se a velocidade do veículo a uma média de oitenta quilômetros por hora. O juro cobrado por uma instituição financeira a um determinado empréstimo. A área de um terreno de forma retangular. (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p.11).

Enquanto prática educativa a modelagem matemática propõe o ensino e a aprendizagem da matemática por meio de situações do cotidiano, utilizando como motivação inicial o interesse e o contexto do grupo que se pretende desenvolver a atividade de modelagem.

Para o desenvolvimento de um trabalho de modelagem matemática Biembengut e Hein (2003), sugerem três etapas fundamentais: interação, matematização e modelo. A etapa interação consiste em familiarizar o estudante com o tema, apresentando uma síntese do tema que permitirá gerar a questão norteadora. Logo após, a matematização busca formular e resolver o problema na linguagem matemática, chegando a um modelo matemático, que possibilita a interpretação da solução e possivelmente servirá para outras aplicações similares.

Ao final, sugerem ainda realizar a validação do modelo matemático, isto é, interpretar e avaliar o resultado obtido.

> [...] a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico. (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p.18).

4 PROPOSTA DE ATIVIDADE: UROCULTURA E CRESCIMENTO DA BACTÉRIA ESCHERICHIA COLI

As subseções a seguir apresentam um breve resumo acerca da ocorrência da infecção do trato urinário e dos processos envolvidos para seu diagnóstico. Traz também uma atividade significativa, desenvolvida a partir da presença e do crescimento da bactéria *Escherichia coli*, presente na urina de pacientes reais, isto é, os dados aqui obtidos são verídicos e foram coletados através de exame laboratorial, em um laboratório do sul do estado de Santa Catarina no mês de outubro do ano de 2019.

4.1 A INFECÇÃO DO TRATO URINÁRIO (ITU) E O EXAME DIAGNÓSTICO

Conforme Martini et. al (2011) a Infecção do Trato Urinário (ITU) é uma das patologias de origem bacteriana mais comum, é caracterizada pela presença de bactérias que se multiplicam nas vias urinárias (dois ureteres, bexiga e uretra), com ocorrência frequente pode atingir pessoas de qualquer faixa etária. Dados apresentam que as ITUs representam 150 milhões de casos por ano em todo o mundo, é considerada a segunda infecção mais prevalente no ser humano. Nos Estados Unidos cerca de 3 a 4% das consultas médicas anuais em mulheres estão ligadas à sintomas de ITU, sendo esse percentual ainda maior no Brasil, corresponde a 8%. O diagnóstico de uma ITU pode incluir: febre, calafrios, urgência miccional, dor lombar, dificuldade para urinar acompanhada de dor, urina turva e/ou avermelhada.

No entanto, a infecção urinária só pode ser confirmada com a realização da Urocultura, que é um teste laboratorial considerado o padrão-ouro para a confirmação do quadro. A realização da urocultura além de indicar a presença de bactérias na urina, permite isolar e identificar o agente causador da infecção, e a execução do antibiograma, possibilita um tratamento correto, indicando a qual antibiótico tal bactéria é sensível. A infecção urinária ocorre com a invasão de bactérias, sendo Escherichia coli a bactéria mais frequente, constituindo de 70 a 85% dos casos de infecção. Uma cultura de urina é considerada positiva para infecção de urina quando a contagem das Unidades Formadoras de Colônia por mililitro

(UFC/mL) de urina for igual ou superior a 100.000 ($\geq 10^5$ UFC/ mL). No entanto, em infecções crônicas, em pacientes idosos a contagem de 10^4 UFC/ mL, já deve ser considerada positiva (Martini et. al. 2011).

> O maior desafio para se obter resultados de urocultura fidedignos está na fase pré-analítica. A qualidade dos resultados da urocultura é influenciada pela orientação correta sobre os procedimentos de coleta e transporte fornecidos ao paciente ou profissional que irá realizar a coleta. A coleta deve ser feita de modo a evitar ao máximo a contaminação com a microbiota uretral e perineal. Mesmo quando a coleta é considerada adequada, os índices de contaminação podem variar de 7 a 31%. (NOWAKONSKI et. al, 2015, p.40).

De acordo com Nowaskonski et. al (2011) o método de coleta mais usual é a primeira urina pela manhã, em frasco estéril, coletada em laboratório e não em casa, visando eliminar a interferência causada pelo aumento da contagem de colônias durante o transporte, o que pode levar a culturas falso-positivas. Quanto ao volume de urina, quanto maior o volume, maior a qualidade do exame.

O cultivo e crescimento da bactéria, geralmente são observados em uma placa de Petri, que é um recipiente cilíndrico, achatado, de vidro ou plástico utilizado para o cultivo de micro-organismos. Além da infecção do trato urinário a Urocultura pode identificar diversas anomalias, dentre elas a Bacteriúria, a Leucocitúria e o Nitrito positivo, estes são ainda, indicadores de uma possível infecção urinária.

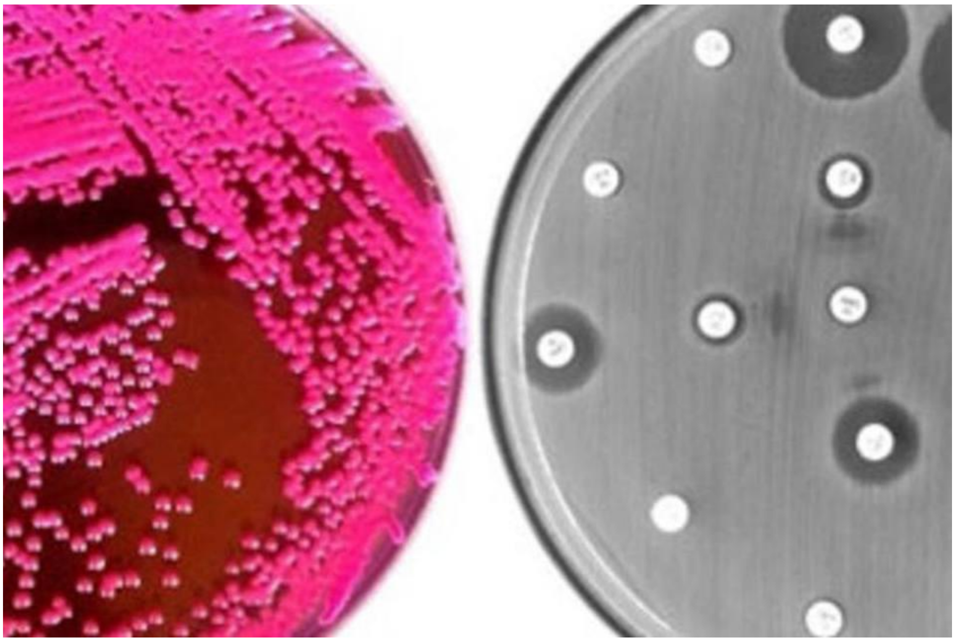
De acordo com Lenz (2006), a bacteriúria assintomática é caracterizada pela presença de 100.000 UFC/mL em uma amostra de urina colhida de paciente sem qualquer sintoma urinário, como por exemplo, o aumento do número de micções e micção dolorosa. A bacteriúria pode ser causada por uma infecção do trato urinário, ou pela contaminação da urina no momento da coleta.

Outro indicativo de uma possível infecção urinária é a contagem leucócitos presentes na urina, pois os leucócitos são as células de defesa do nosso organismo, a presença deles normalmente indica alguma inflamação nas vias urinárias. De acordo com Camargos et. al (2003), a leucocitúria é caracterizada pelo aumento do número de leucócitos na urina, apesar de grande variação dos valores de referência de leucocitúria, 5 leucócitos/campo (400x), em amostras de jato médio de urina, representam o limite superior de normalidade.

A urina é rica de um metabólico chamado nitrato, algumas bactérias presentes na urina tem a capacidade de converter o nitrato em nitrito, quando o teste de nitrito na urina é positivo pode indicar um quadro de infecção urinária.

> Em geral, um teste de nitrito positivo na urina é altamente sugestivo de bacteriúria, indicando uma contagem bacteriana igual ou superior a 10^5 UFC/mL de amostra. Apesar disso, não se destina a substituir a urocultura como principal prova de diagnóstico e controle das infecções urinárias. (SALES, [201-?])

Figura 4 – Placa de Petri com E. coli e Antibiograma



Fonte: Freire (2016)

A Figura 4 apresenta o antibiograma com os discos de antibióticos testados. Quanto maior o diâmetro do círculo em volta do disco mais sensível é a bactéria a este antibiótico. Quando não existe esse círculo ao redor, significa que a bactéria é resistente ao medicamento, nessa figura observa-se uma bactéria altamente resistente aos antibióticos testados.

4.2 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Foram coletados os resultados da urocultura de três pacientes do sexo feminino, as quais foram semeadas para observar o crescimento da bactéria Escherichia coli. Os dados das pacientes estão dispostos no Quadro 7.

Quadro 7 – Dados de coleta e análise de urina em pacientes

Paciente	**A**	**B**	**C**
Bacteriúria	Discreta	Discreta	Intensa
Leucócitos (células por campo)	10	40	80
Nitrito	Positivo	Negativo	Negativo
Contagem inicial de E. coli estimada	4	8	12
Data e horário da semeadura	05/10 às 02h45min	04/10 às 03h43min	02/10 às 03h22min
Data e horário da leitura	07/10 às 17h43min	07/10 às 09h40min	04/10 às 13h14min
Intervalo de tempo (min)	3778 min	4677 min	3472 min
Crescimento	10^5	10^5	10^5

Fonte: A autora, 2019.

Como todas as pacientes tiveram um crescimento de bactérias igual ou superior a 10^5 na Urocultura, fica que constatado que se tratam de casos de infecção urinária.

4.3 TRATAMENTO MATEMÁTICO DOS DADOS

Utilizando os dados Quadro 7, é possível calcular a constante k de crescimento da colônia de bactérias na Urocultura realizada com as três pacientes:

Paciente A:

$$Q(t) = Q_0 . e^{k.t} \tag{3}$$

$$100.000 = 4 \cdot e^{k \cdot 3778}$$

$$\frac{100.000}{4} = e^{k \cdot 3778}$$

$$\ln 25.000 = \mathrm{k} \cdot 3778 \cdot ln\ e$$

$$10{,}12 = k\ \cdot 3778 \cdot 1$$

$k = \frac{10,12}{3778}$

$k \cong 0,00268$

Paciente B:

$Q(t) = Q_0 . e^{k.t}$ (3)

$100.000 = 8 \cdot e^{k \cdot 4677}$

$\frac{100.000}{8} = e^{k \cdot 4677}$

$\ln 12.500 = k \cdot 4677 \cdot \ln e$

$9,43 = k \cdot 4677 \cdot 1$

$k = \frac{9,43}{4677}$

$k \cong 0,00217$

Paciente C:

$Q(t) = Q_0 . e^{k.t}$ (3)

$100.000 = 12 \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 3472}$

$\frac{100.000}{12} = e^{k \cdot 3472}$

$\ln 8.333,33 = k \cdot 3472 \cdot ln\, e$

$9,03 = k \cdot 3472 \cdot 1$

$k = \frac{9,03}{3472}$

$k \cong 0,00260$

Encontrado a constante k, podemos calcular a quantidade de colônias de bactérias 24 horas após a leitura da urocultura numa nova placa buscando a sensibilidade aos antibióticos (antibiograma).

Paciente A:

$Q(t) = Q_0 . e^{k.t}$ (3)

$\mathrm{Q} = 100000 \cdot \mathrm{e}^{0,00268 \cdot 1440}$

$\mathrm{Q} = 100000 \cdot \mathrm{e}^{3,8592}$

$Q = 100000 \cdot 47{,}427394$

$Q = 4.742.739{,}4$

Paciente B:

$$Q(t) = Q_0 . e^{k.t} \qquad (3)$$

$\mathrm{Q} = 100000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}00217 \cdot 1440}$

$\mathrm{Q} = 100000 \cdot \mathrm{e}^{3{,}1248}$

$Q = 100000 \cdot 22, 755343$

$Q = 2.275.534{,}3$

Paciente C:

$$Q(t) = Q_0 . e^{k.t} \qquad (3)$$

$\mathrm{Q} = 100000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}00260 \cdot 1440}$

$\mathrm{Q} = 100000 \cdot \mathrm{e}^{3{,}744}$

$Q = 100000 \cdot 42{,}266719$

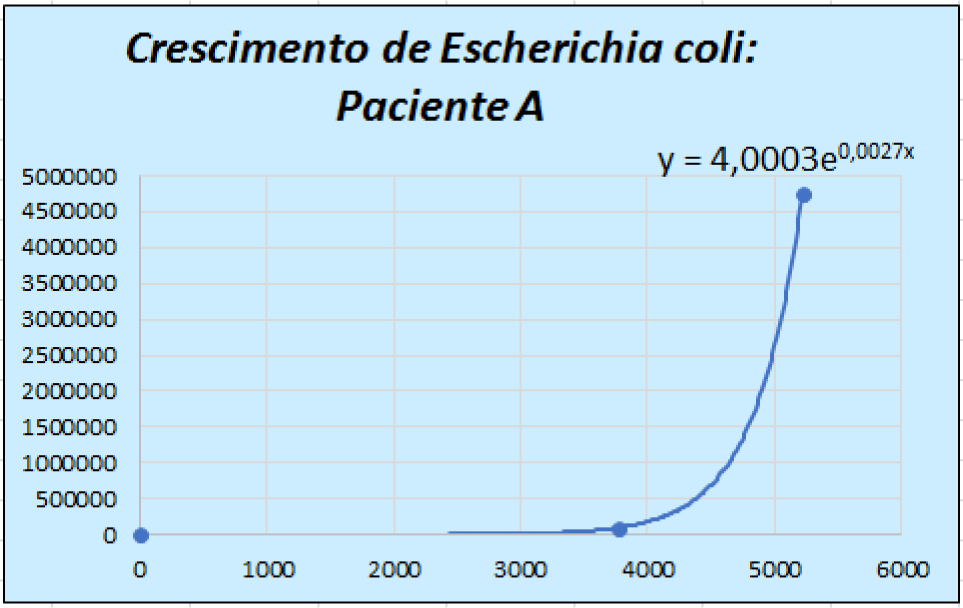
$Q = 4.226.671{,}9$

Ao calcular a quantidade final de bactérias após 24 horas da última leitura, percebe-se que mesmo passando o mesmo tempo para as três pacientes quanto maior a constante de crescimento, mais colônias serão formadas com o decorrer do tempo.

4.3.1 Comportamento gráfico

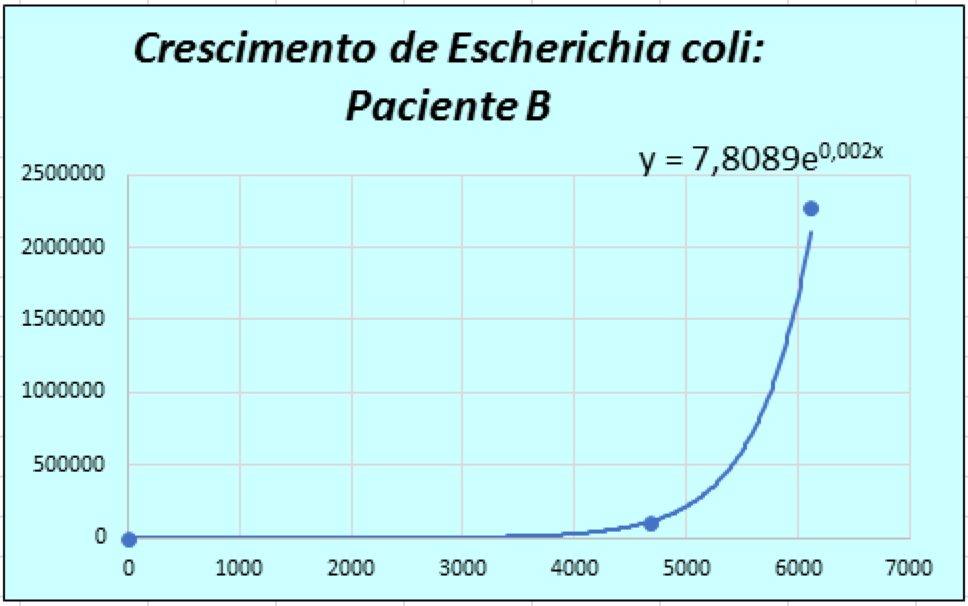
Através dos cálculos realizados anteriormente, é possível traçar uma curva de crescimento da quantidade de bactérias da urina de cada paciente, em função do tempo, observando assim, seu crescimento exponencial. Os gráficos aqui apresentados foram elaborados no software Microsoft Excel, que fornece até, a função matemática expressa pelo gráfico (Gráficos 1, 2 e 3).

Gráfico 1 – Curva e função de crescimento: Paciente A



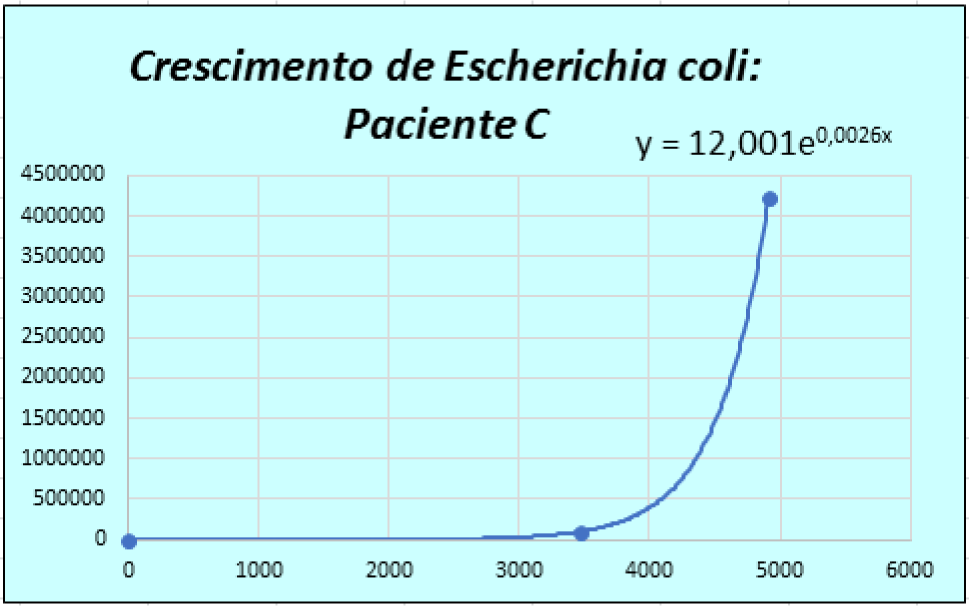
Fonte: A autora, 2019.

Gráfico 2 – Curva e função de crescimento: Paciente B



Fonte: A autora, 2019.

Gráfico 3 – Curva e função de crescimento: Paciente C



Fonte: A autora, 2019.

As funções geradas pelo software em cada gráfico são análogas à equação (3), pois se têm a quantidade inicial de bactéria multiplicado pelo número *e* elevado a constante de crescimento multiplicada pelo tempo. A paciente A tinha uma contagem inicial de bactérias em 4, e a função apresentada pelo software foi de 4,003, devido aos arredondamentos que foram realizados ao longo dos cálculos, caso todas as casas decimais fossem utilizadas, resultaria em exatamente 4. Essa pequena diferença ocorreu com a paciente B e C também, que tinham contagem inicial de 8 e 12, respectivamente.

As constantes de crescimento da bactéria nas três pacientes são bem próximas, por esse motivo têm-se gráficos bem semelhantes, mudando apenas a contagem inicial de bactérias.

4.4 POSSIBILIDADES DE TRABALHO EM SALA DE AULA

A atividade pode ser realizada com os três anos do ensino médio, visto que o conteúdo de logaritmos e exponenciais inicia-se já no primeiro ano. Como essa atividade interliga a matemática com a área biológica, torna-se viável desenvolver uma atividade interdisciplinar, juntamente com a disciplina de Biologia. Pois, além de utilizar os conceitos e procedimentos matemáticos para calcular a constante k e estimar o crescimento de bactérias no decorrer do tempo, é possível estudar o comportamento e características de determinados grupos de bactérias, os principais sintomas da infecção do trato urinário, e seus principais indicativos urinários: bacteriúria, leucócitos e nitrito, bem como entender de que forma um médico indica o tratamento adequado para cada paciente, através do resultado do antibiograma.

Quando possível, é interessante levar os estudantes para conhecer um laboratório e observar na prática como é feito este teste laboratorial. O professor de Biologia pode mostrar como fazer um meio de cultura, apresentar aos alunos uma placa de Petri, e até semear uma colônia de bactérias, da cavidade oral, coletado através de um swab (cotonete estéril) na parte interna das bochechas, por exemplo.

O professor de matemática pode explorar dentro dessa atividade diversos conceitos matemáticos como o conteúdo de função, pois têm-se uma variável (quantidade de bactérias) dependendo e variando de acordo com outra variável (tempo), obedecendo a um crescimento exponencial. Para reproduzir os cálculos aqui apresentados, é necessário conhecimento de logaritmos e suas propriedades, que pode ser uma boa opção, para entendimento desse conteúdo dentro de uma aplicação. A abordagem do assunto notação científica é conveniente nessa atividade, pois como a bactéria se multiplica muito rápido é conveniente indicar sua quantidade através de potências de base 10. Como os cálculos requerem o tempo em minutos, relembra-se a conversão de unidades de tempo, calculando a diferença entre o tempo de semeadura e de leitura. Essa atividade permite ainda, aprender a utilizar funções do software Microsoft Excel, possibilitando a inserção dos recursos tecnológicos nas atividades escolares.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Todos os conhecimentos matemáticos criados até hoje foram impulsionados por dificuldades vividas em determinado período histórico. Com o conhecimento de Logaritmos e Exponenciais não foi diferente, é resultado de uma longa construção histórica de estudiosos como Napier, Briggs e Bürgi, motivados pela necessidade de dar mais agilidade e rapidez aos cálculos aritméticos, desenvolveram e aperfeiçoaram as técnicas logarítmicas. Sob o ponto de vista histórico, é possível perceber que com o avanço da tecnologia e com advento da calculadora eletrônica, atualmente não é mais viável o uso de tabelas logarítmicas, como antes, e os logaritmos não tem mais a finalidade inicial que era ser um instrumento facilitador dos cálculos. Hoje em dia, as aplicações dos logaritmos e exponenciais têm se expandido nas diversas áreas do conhecimento, que fazem uso desses conhecimentos para explicar comportamentos e modelar fenômenos.

Em consonância com o que pede os Parâmetros Curriculares Nacionais, a pesquisa desenvolvida buscou aproximar o conteúdo matemático abstrato visto no Ensino Médio, com a realidade, que são as suas aplicações, utilizando de situações contextualizadas. Este trabalho buscou fornecer também, possibilidades de trabalho para o professor do Ensino Médio, com um ensino alternativo, fundamentado na contextualização dos conhecimentos, visando tornar o processo de ensino e aprendizagem mais significativo. Várias atividades semelhantes à proposta neste trabalho que foi modelar o crescimento da bactéria Escherichia coli, podem ser realizadas envolvendo outras aplicações na Geografia e Física, por exemplo, adequando as condições e recursos disponíveis pelos professores e pela unidade escolar. Ou até mesmo a aplicação da atividade presente neste trabalho, pelos professores de Matemática e Biologia.

Buscar alternativas diferenciadas de ensino é uma tarefa desafiadora, no entanto, o ensino centrado em conceitos e reproduções, já não é suficiente. Os professores através de sua prática de ensino têm o poder de estimular os educandos a transformar sua realidade através do conhecimento. Toda a pesquisa desenvolvida para produção deste trabalho possibilitou ampliar a visão do que antes parecia ser apenas um conteúdo curricular matemático. Ao longo do seu desenvolvimento, foram necessárias algumas simplificações e suposições para que a modelagem dos dados fosse possível, no entanto, isso não foi um impedimento para a sua realização.

REFERÊNCIAS

BARUFI, Maria Cristina Bonomi et al. **A escala Richter**. 2000. Ecalculo-USP. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm>. Acesso em: 16 set. 2019.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BAUER, Martin W.; GASKELL, George. Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: Um manual prático. 7. ed. Petrópolis: Vozes, 2008. Tradução de Pedrinho A. Guareschi.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p. Tradução de Helena Castro.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília, 2006.

___________________________. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. 1998.

___________________________. **PCN+ Ensino Médio Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006. 141 p.

BRASIL. Portaria nº 3214 de oito de junho de 1978. **Aprovam as normas regulamentadoras – NR – 15**, do cap. V, título II da CLT, relativas à segurança e medicina do trabalho. Brasília, DF, 1978.

CAMARGOS, Fabiana Chagas et al. Leucocitúria. **Revista Médica de Minas Gerais**, Belo Horizonte, p.185-189, 2003. Trimestral.

CARDOSO, A. V.; LONGARAI, G. M.; MARTINS, M. J. S. SANDRINI, V. S. **Terremotos x Logaritmos**: um trabalho interdisciplinar. In: IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2006, Caxias do Sul. Anais do IX EGEM. Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul - UCS, 2006. v. 1.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e Resolução de Problemas de Matemática**: Teoria e Prática. São Paulo: Ática, 2009. 192 p.

____________________. **Matemática:** contexto e aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 3. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2002. 844 p.

FELTRE, R. **Química.** 6. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2004. v.1. 384 p.

__________________. **Química.** 6. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2004. v.2. 418 p.

FONTANA, Raphael Luiz Macêdo et al. Teorias demográficas e o crescimento populacional no mundo**. Cadernos de Graduação**: Ciências Humanas e Sociais, Aracaju, v. 2, n. 3, p.113-124, mar. 2015. Anual. Disponível em: <https://periodicos.set.edu.br/index.php/cadernohumanas/article/view/1951/1209>. Acesso em: 17 set. 2019.

FREIRE, Diego. **Bactéria resistente a antibióticos é encontrada no Brasil**. 2016. Disponível em: <https://exame.abril.com.br/ciencia/bacteria-resistente-a-antibioticos-e-encontrada-no-brasil/>. Acesso em: 21 out. 2019.

GAMA, Michelle da Silva; AFONSO, Júlio Carlos. De Svante Arrhenius ao peagâmetro digital: 100 anos de medida de acidez. **Química Nova**, [s.l.], v. 30, n. 1, p.232-239, fev. 2007. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/s0100-40422007000100038.

GIL, Antônio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GRILLO, Maria Lúcia; PEREZ, Luiz Roberto (Org.). **Física e Música**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

KAUNZNER, Wolfgang. (1992), Logarithms. In: I. Grattan–Guinness (Ed.), Companion Encyclopdia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. London: Routledge, 210–228.

LEINZ, Viktor; AMARAL, Sérgio Estanislau. **Geologia Geral**. São Paulo: Nacional, 2001. 432 p.

LENZ, Lino Lima. Bacteriúria assintomática. **Arquivos Catarinenses de Medicina**, Florianópolis, v. 35, n. 4, p.7-10, 2006. Trimestral.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 1991.

MALTHUS, Thomas Robert. **Princípios de Economia Política**: e considerações Sobre sua Aplicação Prática. São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda., 1996. 382 p.

MARTIN, Rosiéli et al. Caracterização de culturas de urina realizadas no laboratório de análises clínicas do hospital universitário de Santa Maria – Santa Maria, RS, no período de 2007 a 2010. **Saúde**,Santa Maria,RS, v. 1, n. 37, p.55-63, 2011. Quadrimestral. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/revistasaude/article/view/3565/2125>. Acesso em: 17 out. 2019.

MOTTA, Alexandre de Medeiros. **O TCC e o Fazer Científico**: da Elaboração á Defesa Pública. 2. ed. Tubarão: Copiart, 2015. 229 p.

PACÍFICO, Ornella. **Matemática Financeira**. [s.i]: Editora Universidade Estácio de Sá, 2015. 127 p.

PECORARI, Mariana. **Logaritmos e Aplicações**. 2013. 91 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Geociências e

Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013. Disponível em:<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92409/000733605.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 14 ago. 2019.

PUCCINI, Ernesto Coutinho. **Matemática Financeira e Análise de Investimentos**. 2. ed. Florianópolis: Universidade Aberta do Brasil, 2012. 202 p.

RIGONATTO, Marcelo. **“O logaritmo natural**"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/o-logaritmo-natural.htm. Acesso em 21 de agosto de 2019.

SALES, Janyele. **Nitrito na urina**: O que isso significa?. [201-?]. Disponível em: <https://medicoresponde.com.br/nitrito-na-urina-o-que-isso-significa/>. Acesso em: 03 nov. 2019.

SAMPAIO, Fernando dos Santos. **Para Viver Juntos - Geografia - 6º ano**. 4. ed. São Paulo: Edições SM, 2015. 224 p.

SILVA, Jair Sandro Ferreira da. SOBRE O PROBLEMA DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA DE UM CORPO. **Connection Line - Revista Eletrônica do Univag**, [s.l.], v. 1, n. 5, p.44-55, 2010. Anual. UNIVAG Centro Universitario. http://dx.doi.org/10.18312/1980-7341. Disponível em: <https://www.periodicos.univag.com.br/index.php/CONNECTIONLINE/issue/view/12/showToc>. Acesso em: 29 set. 2019.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Medindo A Intensidade Dos Sons**. Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/medindo-intensidade-dos-sons.htm>. Acesso em: 08 set. 2019.

USBERCO, João; SALVADOR, Edgard. **Química 2**: Físico- Química. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2000. 528 p.

VALIANTE, F. **Apostila Básica de Áudio**. 6. ed. Taboão da Serra, 2004. Disponível em: <http://www.ibam-concursos.org.br/documento/Audio.pdf>.

VASCONCELLOS, Maria José Couto de; SCORDAMAGLIO, Maria Terezinha; CÂNDIDO, Suzana Laino. **Matemática**: Projeto Escola e Cidadania para Todos. São Paulo: Editora do Brasil, 2004. 3 v.

VON NOWAKONSKI, Angela et al**. Recomendações da sociedade brasileira de patologia clínica/ medicina laboratorial (SBPC/ML)**: boas práticas em microbiologia clínica. Barueri, SP: Editora Manole Ltda., 2015.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A.. **Física II**: Termodinâmica e Ondas. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2008

ZAMAI, Ivone de Arruda. **ACÚSTICA NO ENSINO MÉDIO**: Uma reflexão sobre a saúde auditiva. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE: Produção Didático-pedagógica, 2013. Curitiba: SEED/PR., 2013. V.2. (Cadernos PDE). Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2

013_uem_fis_pdp_ivone_de_arruda_zamai.pdf >. Acesso em: 08/09/2019. ISBN 978-85-8015-075-9.

ZILL, Dennis G.. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda., 2003. 492 p. Tradução de: Cyro de Carvalho Patarra.

ZORZAN, Adriana Salete Loss. Ensino-Aprendizagem: Algumas tendências na educação matemática. **Ciências Humanas**, Frederico Westphalen, v. 8, n. 10, p.77-93, jun. 2007. Disponível em: <http://revistas.fw.uri.br/index.php/revistadech/article/view/303/563>. Acesso em: 22 ago. 2019.