UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

CINTIA ROSA DA SILVA

CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO: DESENVOLVIMENTO DE APLICATIVOS PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

Tubarão

2009

CINTIA ROSA DA SILVA

CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO: DESENVOLVIMENTO DE APLICATIVOS PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciências da Linguagem.

Orientador: Prof. Dr. Fábio José Rauen.

Tubarão

2009

CINTIA ROSA DA SILVA

CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO: DESENVOLVIMENTO DE APLICATIVOS PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

Esta dissertação foi julgada adequada à obtenção do título de Mestre em Ciências da Linguagem e aprovada em sua forma final pelo Curso de Mestrado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 27 de agosto de 2009.

____

Professor e orientador Fábio José Rauen, Dr.
Universidade do Sul de Santa Catarina

____

Professor Saddo Ag Almouloud, Dr.
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

____

Prof. Amilton Barreto de Bem, Dr.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Aos meus pais Enor e Sueli, pela perseverança e apoio que depositaram em mim na realização desse trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por ter concedido suas bênçãos em vários momentos desta caminhada nos momentos que mais precisei, em momentos onde tudo parecia estar seguindo o caminho contrário ou regresso. Aprendi muito mais do que minha mente era capaz de imaginar. Obrigada senhor!

Agradeço aos meus pais, irmão, sobrinhos, cunhada, tios, primos e amigos, pelo incentivo, pelo apoio emocional e financeiro. Aos meus pais por tentarem compreender os momentos pelos quais fiquei em casa e ausente, pelos dias em que não pude me sentar à sala para conversar sobre assuntos do dia-a-dia, por terem assistido à TV em um volume mais ameno e por não terem ligado a serra circular que fica praticamente na janela do quarto de estudos. Obrigada. Muito obrigada! E em especial ao meu tio e padrinho Afonso, pelo esforço em me levar para reuniões e congressos; ao tio Eros e à tia Lena, que mesmo distantes não medem esforços a me ajudar e incentivar emocionalmente e financeiramente a conquistar os meus sonhos: foram eles que patrocinaram muito dos eventos de que participei; e ao tio José que me apoia com suas belas palavras de carinho que me impulsionam a continuar essa longa jornada de estudo e pesquisa.

Ao meu orientador, Fábio José Rauen, por ter tido paciência nos momentos em que eu me encontrava ansiosa e querendo abraçar o mundo, por me ajudar a compreender a linguagem matemática de uma forma que eu desconhecia (eu sentia muita dificuldade em conectar as linguagens abstratas e verbais), pelos estudos de semiótica, por ter me auxiliado a compreender as representações semióticas, por ter dito o momento em que dei o “salto qualitativo”, por ter acreditado no meu potencial, por ter me incentivado a continuar caminhando mesmo quando não se enxergava claramente os caminhos no decorrer da pesquisa, por me incentivar à seguir em frente. Minha eterna gratidão!

Agradeço ao professor Mário Guidarini, meu primeiro orientador e professor da disciplina de semiótica, por ter me ensinado a ver um pouco da luz que há nas galáxias da semiose e da noese na semiótica peirceana e por ter me considerado uma aluna de pós. Muito obrigada!

À professora Marleide Coan Cardoso, por acompanhar a minha jornada desde a graduação, pelo carinho e incentivo dedicado a mim, por me ajudar em momentos difíceis (quase de desespero!), por ter me apresentado à teoria que me abriu os olhos e me fez ver o mundo de outra forma, em forma de “representações semióticas” e por ter me conduzido nas aulas de estágio.

À professora Diva Marília Flemming, por ter me indicado algumas leituras, por ter me desafiado quanto aos meus conhecimentos prévios sobre representações semióticas, que antecedem a esta pesquisa, e por ter me indicado alguns autores. Se não fosse outorgado tal desafio, talvez eu não tivesse me dedicado tanto à pesquisa (“mergulhado de cabeça”), quanto me dediquei. Por isso, o meu obrigado!

Agradeço à Brigitte Werner por ter indicado alguns pesquisadores de representações semióticas que se encontram aqui no Brasil, por ter digitalizado e enviado alguns artigos e por ter encaminhado meu primeiro e-mail em francês ao pesquisador e criador da teoria de ‘representações semióticas’, escrito à base do tradutor do *google* e de um dicionário da época de meu avô. Essa dificuldade de expressão me incentivou tanto a estudar francês para poder ler e entender os textos quanto para escrever e me comunicar melhor com eles. A resposta do primeiro e-mail me fez saltitar feito criança, pois alguém do outro lado do mundo entendeu a minha sede de aprender.

Agradeço ao pesquisador Raymond Duval, por ter correspondido ao meu pedido, cordialmente, com um e-mail cujo assunto foi “Quels articles?” e por ter enviado alguns artigos que sustentam essa pesquisa. E que me fizeram, mais uma vez, saltitante.

À professora Mara que prontamente me auxiliou com as traduções dos *e-mails* enviados por Duval e que me ajudou a melhorar a escrita dos e-mails de respostas destinados ao autor.

Agradeço ao professor e pesquisador Saddo Ag Almouloud, por ter aceitado responder meus inúmeros e-mails “em busca de materiais”, por ter me recebido fraternalmente na PUC-SP em 2008, por ter contribuído com preciosos materiais que influenciaram significativamente essa dissertação e por ter aceitado me avaliar.

Agradeço aos professores Dalmo, Nilson, Rosana e Ana Waley por terem me dado abertura para realizar a minha pesquisa.

Aos alunos da turma 2009/1 do curso de Licenciatura em Matemática por terem participado como sujeitos da pesquisa.

Ao professor Aldo pelas contribuições na banca de qualificação do projeto.

A professora Jussara pelo carinho, pelas aulas peripatéticas e pelas contribuições na banca de qualificação do projeto.

Ao professor Amilton pelas aulas de funções no ensino médio e por ter aceitado participar da banca de defesa dessa dissertação.

Agradeço ao programador Rhoger por me ajudar a terminar em tempo hábil os aplicativos que idealizei em linguagem de programação *Java*.

A Márcio Junior pela ajuda com o *software Adobe Flash*.

À Jeanine por ter me acompanhado à PUC-SP em 2008, às aulas de francês e por ter feito parceira em algumas publicações. Obrigada!

Ao Bruno pelo incentivo e pelas sugestões com olhar de IHC (interação homem-computador).

A todos os professores do mestrado, pela atenção e pelos conhecimentos transmitidos.

A todos os colegas do mestrado, pelo carinho e pela parceria nas aulas, nos seminários e congressos.

À secretaria Layla e a todas as estagiárias do mestrado que sempre me receberam com muito carinho e respeito.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, pois sem ele eu não teria cursado o mestrado em Ciências da Linguagem.

E, por fim, agradeço a todas as pessoas que de maneira direta ou indireta estiveram presentes nessa caminhada.

Muito obrigada!

“Nenhum cientista pensa com fórmulas”.

“Tudo deveria se tornar o mais simples possível, mas não simplificado”.

(Albert Einstein)

RESUMO

Neste trabalho desenvolvem-se aplicativos informatizados para o ensino-aprendizagem sobre função, baseados no conceito de conversão de registros de representação, bem como se testa exploratoriamente uma primeira versão desses aplicativos com alunos de graduação. Para dar conta desses objetivos, esta dissertação discorre, num primeiro momento, sobre representações semióticas e registros de representação (DUVAL, 1993), destacando as noções de formação de representação identificável, tratamento e conversão. Em seguida, fundamentado nos conceitos de transposição didática e de transposição informática, descrevem-se dois aplicativos destinados ao ensino de função sob a perspectiva da noção de conversão de registros de representação: o primeiro, de caráter instrucional, e o segundo, de caráter funcional, o *ApliRFunction* 1.0. Por fim, ambos os aplicativos são testados de forma exploratória com uma turma de estudantes do curso de graduação em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina – Unisul. Os resultados, apesar do concurso de variáveis extrínsecas e intervenientes, apontam para discretas melhorias no desempenho dos estudantes em pós-teste, além de sugerir aprimoramentos nos aplicativos.

Palavras-chave: Representações Semióticas. Registros de representação. Conversão de Registros de Representação. Aplicativos informatizados. Ensino de Função.

ABSTRACT

In this work, based on the concept of conversion of registers of semiotic representation, two computer applications for teaching and learning of mathematical functions are developed, and a first version of these applications are tested with undergraduate students. To give account of these objectives, first, this dissertation discusses semiotic representation and registers of representation (DUVAL, 1993), highlighting the concepts of formation of identifiable representation, treatment and conversion. Next, based on the concepts of didactic and informatics transposition, the two applications are described: the first of them, instructional, and the second, functional, the *ApliRFunction* 1.0. Finally, an exploratory testing with Mathematics undergraduate students at the University of Southern Santa Catarina – Unisul is analyzed. The results, despite extrinsic and intervenient variables, pointing to discrete improvements in the students' post-test performance, and suggest a set of upgrades for the applications.

Keywords: Semiotic representations. Registers of representation. Conversion of registers of representation. Computer applications. Teaching of mathematical functions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para Duval (1993, p. 37), a palavra *representação* é simultaneamente importante e marginal em matemática. Nessa área do conhecimento humano: uma escrita, uma notação ou mesmo um símbolo pode representar um objeto matemático, qual seja, um número, uma função, um vetor, entre outros; traços e figuras podem representar objetos matemáticos tais como: um segmento, um ponto, um círculo, entre outros.

O "conceito de três" define um objeto matemático e não suas formas de representação. Esse conceito ou objeto pode ser representado de inúmeras formas. Por exemplo: em linguagem natural, 'três', 'three', 'drei', 'trois', etc.; em sistemas de numeração, o hindu-arábico '3', o romano 'III', o maia '•••', o egípcio '│││', o binário '11', etc.; ou ainda por figuras, que representem três objetos quaisquer.

Nesse contexto, dois aspectos essenciais do processo de compreensão em matemática devem ser distinguidos: noese e semiose. Por noese ou *noésis*, em linhas gerais, entende-se o processo consciente do trabalho cerebral. Por semiose ou *semiósis*, entende-se "a significação em função do contexto". [1] Assim, um objeto matemático faz parte do conhecimento noético, enquanto as múltiplas formas de representar esse objeto fazem parte do conhecimento semiótico.

Em tese, seria fácil de esperar que, estando essas representações no lugar dos objetos matemáticos, os indivíduos não confundiriam as representações com os objetos matemáticos que elas representam. Nos termos de Duval, "les objets mathématiques ne doivent jamais être confundus avec la représentation qui en est faite" (p. 37). [2]

Entretanto, muitos indivíduos escolarizados revelam-se incapazes de compreender que as múltiplas formas de representar conceitos matemáticos estão em lugar de mesmos objetos matemáticos, embora até saibam lidar com esta ou aquela forma de representá-los de maneira isolada. Dado que essas pessoas passaram por educação formal em matemática, é de se questionar como essa questão fundamental continua mal resolvida.

---

[1] Define-se como semiose o processo de compreensão de um signo. Podemos citar a ideia de Peirce (1992) sobre semiose: "[...] por semiose eu quero dizer, ao contrário, uma ação, ou uma influência, a qual é, ou envolve, uma cooperação entre três sujeitos, tal como um signo, seu objeto, e seu interpretante, essa influência tri-relativa não é de qualquer forma reduzível em ações entre pares. *Semeiosis*, no período grego ou romano, à época de Cícero já, se bem que me recordo, significava a ação de praticamente qualquer espécie de signos; e a minha definição confere a tudo o que assim se comportar a denominação de 'signo'".

[2] Os objetos matemáticos nunca devem ser confundidos com a representação que é feita (tradução própria).

Nesse contexto, caberia questionar por que existem tantos registros de representação e por que se deveria coordená-los? Duval alerta que o uso de múltiplos registros caracteriza o pensamento humano e que o desenvolvimento do conhecimento humano faz-se acompanhar da criação e do desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos, que convivem com os anteriores. Por hipótese, tem-se admitido que a coexistência de múltiplos sistemas semióticos se deve a diferentes custos de tratamento e às limitações específicas de cada registro. Para ele, há uma terceira condição, central para seu trabalho, a de que as várias formas de representação habilitam os seres humanos a diferenciar representante/representado, semiose/noese. Daí a importância de coordenar os diferentes sistemas.

Para Duval (1993), a distinção entre objeto e representação é estratégica na compreensão matemática. Se, por um lado, é o objeto matemático que interessa à aprendizagem, por outro, é fundamental reconhecer que esses mesmos objetos matemáticos não são diretamente acessíveis, a não ser por representações que deles se fazem. Em outras palavras, para poder lidar, vale dizer, tratar objetos matemáticos, os seres humanos dependem dos sistemas semióticos. Ou seja, a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser conceptual, mas é somente por meio de representações semióticas que atividades sobre objetos matemáticos são possíveis.

Esse paradoxo cognitivo do pensamento matemático constitui sério problema para a aprendizagem. Duval (1993) levanta duas questões: *como aprendizes, não confundiriam objetos matemáticos com suas representações, se eles operam apenas com representações?* e, ainda, *Como aprendizes seriam proficientes nos tratamentos matemáticos necessariamente ligados às representações, se eles não têm uma apreensão conceptual dos objetos matemáticos?*

Duval (1993, p. 39) alerta que geralmente se comete um engano ao considerar as representações semióticas como exteriorizações de representações mentais para fins de comunicação. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento, para o estabelecimento do conhecimento noético. Elas desempenham uma função importante: no desenvolvimento de representações mentais, no desempenho de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimentos.

Para o autor, a cognição humana é inseparável da existência de diversos registros semióticos. A semiose é intrínseca à noese: não existe noese sem semiose. Como a apreensão dos objetos matemáticos só é possível por suas múltiplas representações, a coordenação desses diversos registros semióticos é fundamental para uma apreensão conceptual dos objetos matemáticos. Somente por esse caminho, os aprendizes não confundiriam os ditos objetos com suas possíveis representações.

Para Duval, um sistema semiótico consiste num registro de representação em matemática se permitir três atividades cognitivas consideradas fundamentais à semiose: *formação de uma representação identificável*, *tratamento* e *conversão* (cf. também DAMM, 2008, p. 176-182).

A formação de uma representação identificável corresponde às unidades e às regras de formação que são próprias de determinado registro de representação. Por exemplo: os enunciados em língua natural e as regras da gramática a que eles se subordinam; o desenho de uma figura geométrica e as restrições de construção para essas figuras; a escrita de uma fórmula e as regras algorítmicas pertinentes; entre outros.

Os tratamentos são transformações das representações no próprio registro onde a representação foi formada. Trata-se de transformações internas aos registros de representação. Por exemplo: cálculos aritméticos em um sistema decimal; cálculos algébricos conforme uma fórmula; definição de funções dentro de um plano cartesiano; desenho de figuras geométricas dentro da geometria euclidiana; entre outros.

As conversões são transformações de uma representação em outro registro, ou seja, em um registro diferente daquele em que a representação foi formada, conservando uma parte ou todo o conteúdo da representação inicial. A conversão se estabelece entre registros diferentes. Por exemplo: de uma representação linguística para uma representação figural; de uma representação tabular para uma representação cartesiana; de um sistema decimal para um sistema binário; de uma notação em frações para uma notação em números decimais; entre outros.

Duval queixa-se de que o ensino da matemática negligencia o papel relevante da semiose no processo consciente do aparelho cerebral de apreensão da noese. Ele argumenta que, das três atividades cognitivas, somente a formação de uma representação identificável e o tratamento, intra-registro, são levadas em conta no ensino, quando justamente é a conversão aquela atividade que habilita a dissociação entre os objetos e as representações dos objetos matemáticos.

O autor insiste: é o recurso a vários registros uma condição necessária para não se confundir objetos e representações.

> Et, indépendamment de toute commodité de traitement, ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentationest qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations. La coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique apparaît fondamentale pour une appréhension conceptuelle des objets: il faut que l'objet ne soit pas confondu avec ses représentations et qu'il soit reconnu dans chacune de ses representations possibles. C'est à ces deux conditions qu'une représentation fonctionne véritablement comme représentation, c'est-à-dire qu'elle donne accès à l'objet représenté (1993, p. 40). [3]

A mencionada negligência às questões de conversão pode gerar como efeito casos em que o indivíduo é competente em representar e tratar determinado registro, ou seja, reconhece uma fórmula e procede aos cálculos com relativa proficiência, mas não compreende, fora desse registro e por vezes nem mesmo dentro desse registro, com que objeto matemático está operando.

Nessa concepção equivocada, considera-se: que a conversão das representações seria algo simples, desde que se fosse capaz de formar as representações nos registros diferentes e de efetuar os tratamentos sobre as representações; e que a conversão não tem nenhuma importância real para a compreensão dos conteúdos conceituais ou dos objetos matemáticos representados, pois seus resultados se limitam a uma troca de registro. Segundo Duval, esse ponto de vista fundamenta-se numa certa autonomia da atividade matemática. Isso mascara o papel central da conversão para se obter a noese e a compreensão. Para ele, na fase de aprendizagem, a conversão desempenha papel essencial na conceitualização.

> Ce point de vue est justifié dès qu'une certaine "autonomie" est atteinte en ce qui concerne l'activité mathématique. Mais il conduit à masquer le caractère fondamental de cette activité pour la noésis, et d'une façon plus générale pour la compréhension. Et, surtout, il néglige le fait qu'en phase d'apprentissage la conversion joue un rôle essentiel dans la conceptualisation (1993, p. 47). [4]

Demonstrando que a conversão não ocorre sem dificuldades entre aprendizes, Duval (1993) apresenta um estudo realizado em 1988 em que solicitou a 105 estudantes

---

[3] E, independentemente de toda comodidade de tratamento, a utilização de vários registros parece ser uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e para que eles também pudessem ser reconhecidos em cada uma das suas representações. A coordenação de vários registros de representação semiótica parece fundamental para uma compreensão conceitual dos objetos: é necessário que o objeto não seja confundido com suas representações e que eles sejam reconhecidos em cada uma das suas possíveis representações. É a essas duas condições que uma representação realmente funciona como uma representação, quer dizer, que dá acesso ao objeto representado (tradução própria).

[4] Esta opinião é justificada quando certa "autonomia" é alcançada no que diz respeito à atividade matemática. Mas isso leva a mascarar a característica fundamental desta atividade para a noese, e mais geralmente para a compreensão. E, mais importante, negligencia o fato de que, em fase de aprendizagem, a conversão desempenha um papel essencial na conceituação (tradução própria).

converter representações de funções afins em escrita algébrica para as suas respectivas representações gráficas cartesianas e vice-versa, logo após intervenção didática em que enfatizou os processos de conversão. Ele próprio se surpreendeu com os resultados, à medida que menos de dois terços reconheceram perfeitamente às funções "$y = x$" e "$y = -x$" nas representações gráficas correspondentes e menos de um terço reconheceram as funções "$y = 2x$" e "$y = x + 2$".

A conversão, tal como a tradução de uma língua natural para a outra, não ocorre sem alterações substanciais. Ou seja, não é suficiente um indivíduo saber duas línguas para ser um tradutor competente. Em matemática, por exemplo, se uma função contínua está representada numa tabela com pares ordenados e precisa ser convertida num gráfico cartesiano, é possível, além de traduzir ao pé da letra os pontos dos pares ordenados representados naquela tabela, supor a reta (ou outra formação gráfica) que expressa a continuidade. De modo inverso, convertendo o gráfico para a tabela de pares ordenados, o indivíduo está fadado a sacrificar a continuidade, dado que somente alguns pares ordenados são considerados. [5] Em outras palavras, a continuidade é implícita numa tabela, enquanto deve ser explícita no gráfico. Trata-se do problema da não-congruência dos registros de representação. É nesse sentido que se deve pensar no desenvolvimento de competências de conversão também em matemática.

Se a ênfase para as formações identificáveis e para o tratamento, e a consequente negligência para a conversão, ocorre no ensino presencial tradicional, não é menos problemática no ensino virtual. Nos últimos anos, com o desenvolvimento dos meios informatizados, os recursos para ensino a distância foram sobremaneira incrementados. A possibilidade de se ensinar matemática pelo computador já é exequível.

Nesse contexto de informatização e considerando os argumentos de Duval (1993), como poderia ser pensado um aplicativo informatizado de ensino que considerasse como central a conversão de registros de representação para o ensino de função?

Para responder essa pergunta, é necessário discutir antes as noções de transposição didática e, especialmente, de transposição informática, tais como pensadas por Chevallard (1982), Balacheff (1994) no contexto da educação matemática.

Por *transposição didática*, conforme Chevallard (1982) define-se um conjunto de transformações que se realizam sobre o conhecimento de ciência, para convertê-lo em

---

[5] Como argumenta Amilton Barreto de Bem (comunicação oral), é possível representar numa tabela a continuidade, bastando usar uma notação de intervalos: $x_1 \vdash\!\!\dashv x_2$, $y_1 \vdash\!\!\dashv y_2$.

conhecimento de ensino. Nesse processo, três saberes são considerados: o *saber de referência* ou o *saber sábio*, aquele que é concebido pelos cientistas; o *saber a ensinar*, aquele que é o produto da transformação dos textos científicos para os livros didáticos; e o *saber ensinado*, aquele que é o produto das transformações que emergem da atuação dos professores em situações concretas de ensino-aprendizagem.

No processo de transformação, uma primeira transposição didática, dita externa, ocorre quando o saber de referência é retrabalhado para fins de inseri-lo num discurso pedagógico ou instrucional, o saber escolar ou saber a ensinar. Mais a frente, uma segunda transposição didática ocorre, quando entra em cena a interpretação interna e subjetiva de cada docente. Nessa segunda transposição, o saber escolar a ensinar converte-se em saber efetivamente ensinado, aquele que emerge na docência de cada aula. Por fim, na interação docente/discente em sala de aula, na interação didática em sentido estrito, ocorre a transposição do saber ensinado para o saber efetivamente aprendido.

Esse processo pode ser resumido na ilustração, a seguir:

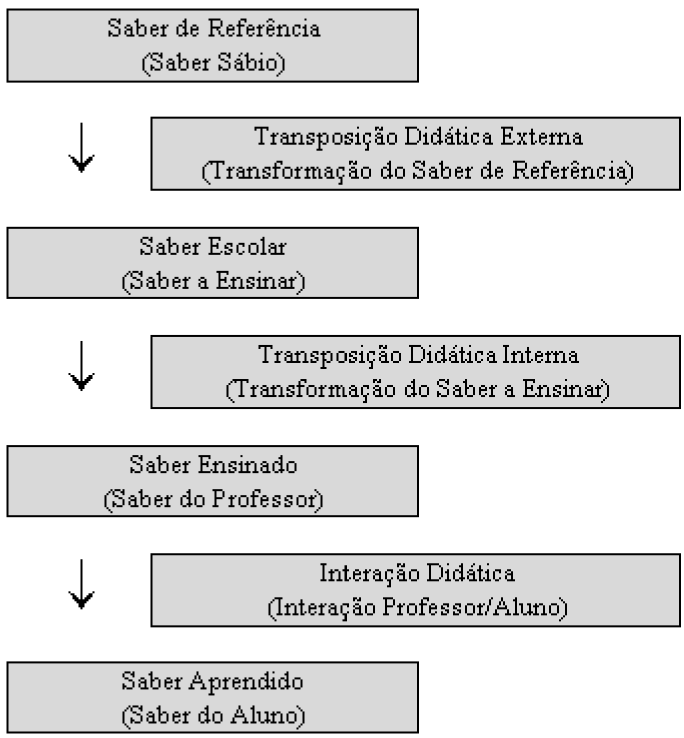


Ilustração 1 – Esquema de transposição didática.

Vale lembrar que essa transposição não se dá isoladamente, mas é fruto de um conjunto complexo de fatores sociais. A esse conjunto de fatores Chevallard (1982, p. 12) dá o nome de *noosfera*. Para ele, o conceito de noosfera refere-se aos mecanismos sociais que manipulam os saberes. É nesse lugar teórico: que se selecionam os elementos do saber acadêmico que serão objetos do trabalho de transposição, o saber a ensinar; e que se assume a parte visível ou externa da transposição didática, em oposição ao trabalho interno que transforma o saber a ensinar a saber ensinado.

Esse processo de transformação pode ser pensado na elaboração de materiais instrucionais em meios eletrônicos *off-line* ou *on-line*. Tomando-se como base os trabalhos de Nicolas Balacheff, chama-se de *transposição informática* ou *transposição computacional* a necessária adaptação dos saberes que se aplicam, por exemplo, nos ambientes virtuais de aprendizagem na internet, na elaboração de *softwares* ou na criação de dispositivos de inteligência artificial. [6]

Em essência, por transposição informática, entende-se a modelagem dos saberes científicos conforme as exigências específicas dos meios eletrônicos. Em outras palavras, é o processo em que o conhecimento, tendo origem em um saber sábio de referência e sendo dirigido para determinado saber aprendido pelo estudante, passa necessariamente por uma modelização informatizada.

Para compreender essa modelização, Balacheff concebe três segmentos ou "mundos": *universo externo*, *interface* e *universo interno*. Segundo Balacheff (1994c, p. 365), o universo interno, constitui-se de vários componentes eletrônicos que, articulados e postos em operação, permitem que o dispositivo informatizado funcione, incluindo as linguagens de programação. A interface consiste no meio de comunicação entre o usuário humano e o dispositivo informatizado. [7] O universo externo inclui o operador humano e outros dispositivos que podem ser acessados.

A partir desse panorama, a *transposição informática* define-se por um processo de transformação que ocorre na passagem de um sistema de representação externo (computador, aluno) em um sistema de representação interno (linguagem de máquina), transportando o implemento de um modelo do conhecimento para um método a ele subentendido.

---

[6] A pesquisa de Nicolas Balacheff busca conhecer como se desenvolve o processo de aprendizagem e de construção do conhecimento em *educação matemática*, utilizando-se de tecnologias de informação e comunicação (TIC). Para criar novos padrões de aprendizagem, relacionando-as aos estudos de Inteligência Artificial (IA), o autor vem realizando pesquisas com o *software Cabri-Geometre* e a linguagem de programação *Logo*.

[7] A interface, muitas vezes, é concebida como o lugar da reificação dos conhecimentos, da visualização e da manipulação direta de entidades abstratas. Para Balacheff (1994, p. 4), em matemática, a visualização é naturalmente utilizada, por exemplo, nas representações gráficas das funções, no traçado das figuras em geometria, nos raciocínios sob a forma de gráficos de inferência.

Posto isso, a *transposição informática* pode ser vista no esquema a seguir.

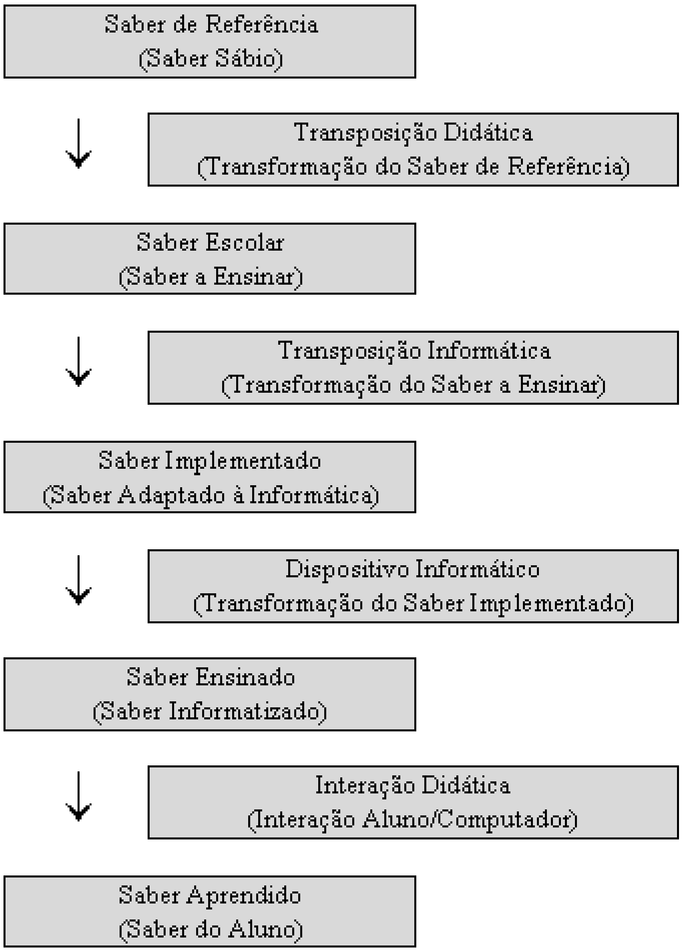


Ilustração 2 – Esquema da transposição informática.

Para Balacheff (1994b, p. 18), as transposições informática e didática estão intrinsecamente relacionadas e não podem ser facilmente separadas, embora isso seja útil para efeitos descritivos e explanatórios. Mesmo assim, há algumas diferenças entre os processos. Como se pode ver, por um lado, não é apenas o saber a ensinar que sofre modificações na transposição computacional, mas também os objetos de ensino, ao serem modelados computacionalmente, transformam-se em saberes implementados. Por outro, a mediação entre o saber ensinado (que se apresenta numa interface computacional) e o saber aprendido (aquele que o aluno efetivamente obtém), decorre da interação do estudante enquanto usuário do dispositivo informatizado com o próprio dispositivo (interação homem computador). Essas mudanças afetam a forma como o conhecimento científico deve ser adaptado para fins de ensino-aprendizagem, sempre levando em conta as exigências determinadas pelas possibilidades disponibilizadas por *hardwares* e *softwares*.

Diante dessas balizas teóricas, esse trabalho propõe-se a desenvolver aplicativos informatizados de ensino-aprendizagem do objeto matemático função, baseados no conceito de conversão de registros de representação, bem como testá-los exploratoriamente com alunos de graduação em matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina – Unisul.

Para desenvolver aplicativos informatizados fundamentados em representações semióticas, essa dissertação parte da transposição do saber escolar para um ambiente informatizado com base na transposição informática, conforme o esquema que se segue:

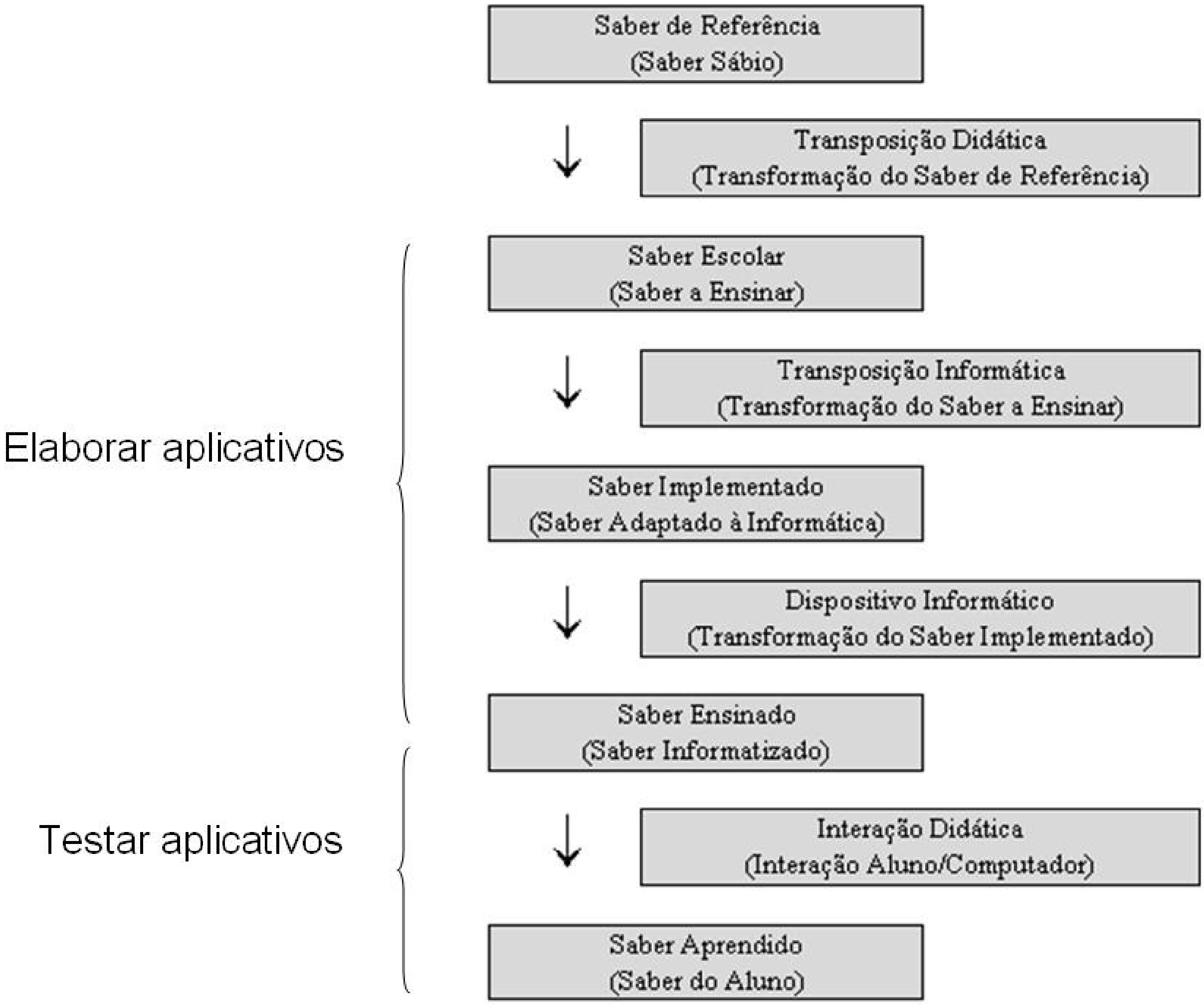


Ilustração 3 - Esquema de transposição informática II.

Conforme o esquema, para elaborar aplicativos informatizados para o estudo de função, é necessário recorrer à implementação da transposição didática, sequência didática de função, e da transformação do saber escolar (sequência didática de função) em um saber implementado, aplicativos. Após a elaboração do saber implementado, os aplicativos devem ser disponibilizados por meio de um dispositivo informatizado, o computador, o que determina o saber ensinado. A interação entre o aluno e o computador ocorre por meio da interação didática, aluno/computador, o que gera o saber aprendido.

Vale aqui abrir um parêntese para justificar a necessidade de se pensar num aplicativo próprio, em vez de optar por versões disponíveis. Para desenvolver aplicativos de caráter funcional sobre função com base na teoria de representações semióticas e da exploração de mais do que dois registros de representação, foi necessário analisar aplicativos que tratam de função, como: *WinPlot*, *GrafEq*, *Graph* e *Derive*. Ao analisar as representações abordadas nos *softwares*, constatou-se que: dos quatro aplicativos, apenas um, o *Graph*, trata de três representações gráfica, "tabelar" e algébrica. Os demais *softwares* tratam apenas da representação gráfica e algébrica. Apesar de o *Graph* tratar de três representações, observou-se que não é possível "navegar" no aplicativo partindo de todas as representações, pois há algumas limitações, dentre elas: desenhar um gráfico partindo da representação gráfica, converter uma representação gráfica em uma representação algébrica apenas por ajustes de curvas, inserir uma função no formato algébrico e obter uma tabela, apresentar três representações em uma única tela e mobilizar três representações simultaneamente.

Tendo em vista o contexto apresentado, para dar conta dos objetivos apresentados na introdução, esta dissertação apresenta mais quatro capítulos. No capítulo dois, dedicado à fundamentação teórica, apresentam-se considerações sobre a noção de representações semióticas, enfatizando a questão dos registros de representação e, nesse particular, as noções de formação de uma representação identificável, tratamento e conversão. No capítulo três, fundamentada nos conceitos de transposição didática e de transposição informática, descrevem-se e analisam-se dois aplicativos destinados ao ensino de função sob a perspectiva da noção de conversão de registros de representação: o primeiro, de caráter instrucional, e o segundo, de caráter funcional, o *ApliRFunction* 1.0 versão 1.0. No quarto capítulo, ambos os aplicativos são testados de forma exploratória. O capítulo apresenta os procedimentos de coleta e análise dos dados, e a análise dos resultados propriamente dita, destacando a utilização dos aplicativos e o desempenho dos estudantes em pós-teste, comparado com um pré-teste. Finalmente, no capítulo cinco, apresentam-se as conclusões da pesquisa, bem como se tecem considerações finais da dissertação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, refletem-se os pressupostos teóricos que fundamentam a elaboração de aplicativos sobre *função* relativas às *representações semióticas* de Duval (1993). O capítulo é dividido em três seções. Na primeira seção, apresenta-se a introdução. Na segunda seção, apresentam-se a diferença entre registros e códigos. E, na terceira seção, apresenta-se a semiose e a noese.

2.1 INTRODUÇÃO

Os objetos matemáticos não são espontaneamente inteligíveis à percepção ou em uma situação intuitiva imediata, assim como os objetos chamados habitualmente de físicos ou reais. Desse modo, eles se constroem categoricamente em suas várias representações semióticas. Duval (1993, p. 39) assim define essas representações:

> les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents. [8]

As representações semióticas são importantes para o exercício cognitivo do pensamento e para a comunicação. Além disso, conforme Duval (1993, p. 38-39), elas exercem função essencial na atividade matemática:

a) no desenvolvimento das representações mentais, posto que elas dependem de uma interiorização das representações semióticas, enquanto as imagens mentais são interiorizações das percepções;

---

[8] As representações semióticas são as produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que tem seus próprios limites de significância e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que se inserem em diferentes sistemas semióticos (tradução própria).

b) na realização de diferentes funções cognitivas: na função de objetivação (expressão privada) que é independente daquela de comunicação (expressão para outro), e na função de tratamento que não pode ser preenchida pelas representações mentais (algumas atividades de tratamentos são diretamente ligadas à utilização de sistemas semióticos, por exemplo, o cálculo); e
c) na produção de conhecimentos: as representações semióticas admitem representações muito diferentes de um único objeto destacando os diferentes sistemas semióticos. Deste modo, o desenvolvimento das ciências é ligado ao desenvolvimento de sistemas semióticos, cada vez mais específicos e independentes da linguagem natural.

Diante disso, é de grande importância para o funcionamento cognitivo a diferenciação entre os objetos matemáticos e a representação que deles se faz no ambiente de ensino e aprendizagem. É necessário estar atento para essa distinção, analisando de que forma ocorre a compreensão dos objetos matemáticos através de suas possíveis representações.

Por exemplo, imaginemos um indivíduo chamado João. Ele adora pasteis e, certo dia, resolve comprar três pasteis numa padaria. Cada pastel custa uma moeda de um real. Se quisermos representar essa situação podemos usar uma representação pictórica, língua natural ou materna, tabular, gráfica ou em uma expressão algébrica.

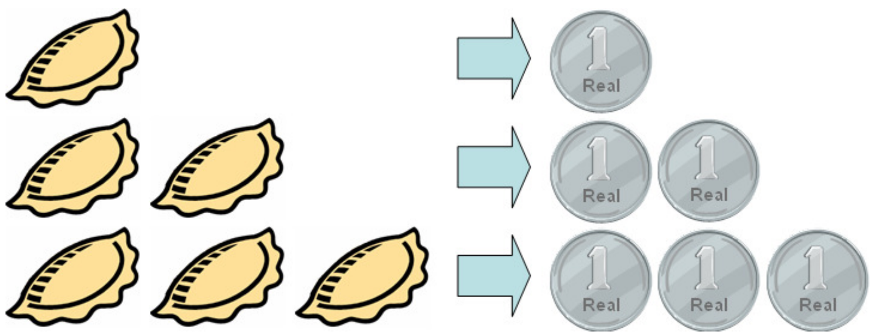


Ilustração 4 – Representação pictórica da situação problema de João.

‘Quantidade de moedas’ igual a ‘quantidade de pastéis’   Se ‘quantidade de pastéis’ é igual a <u>um</u>, então ‘quantidade de moedas’ é igual a <u>um</u>   Se ‘quantidade de pastéis’ é igual a <u>dois</u>, então ‘quantidade de moedas’ é igual a <u>dois</u>   Se ‘quantidade de pastéis’ é igual a <u>três</u>, então ‘quantidade de moedas’ é igual a <u>três</u>

Ilustração 5 – Representação em língua natural do problema de João.

Pasteis	Moedas	(x, y)
1	1	(1,1)
2	2	(2,2)
3	3	(3,3)

Ilustração 6 – Representação tabular da situação problema de João.

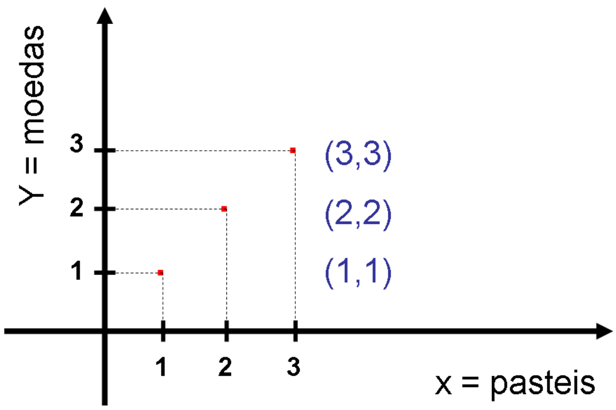


Ilustração 7 – Representação gráfica da situação problema de João.

$$f(x)=x$$

ou

$$y=x$$

Ilustração 8 – Representação algébrica da situação problema de João.

Assim, a situação-problema de João comporta vários sistemas de representação. Cada conversão, no entanto, não pode ser feito sem consequências. Formas diferentes de representação podem destacar características diversas: função crescente ou decrescente, variáveis contínuas ou discretas, variáveis dependentes e independentes, etc.

Função crescente e decrescente

- Uma função é **crescente** se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.
- Uma função é **decrescente** se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2,com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Ilustração 9 – Propriedades/características da função (crescente/decrescente).

- As variáveis contínuas são aquelas para as quais se pode estabelecer um contínuo, isto é, têm valores intermediários.
- Por exemplo entre 1, 2, 3 quilômetros, há infinitas possibilidades de números intermediários, 1,5km, 1,55km, 1,555km, etc.
- Como consequencia, pode-se fazer uma reta ligando os valores

Ilustração 10 – Propriedades/características da função (variáveis contínuas).

- As variáveis discretas são aquelas para as quais não se pode estabelecer um contínuo, isto é, têm valores fixos.
- Por exemplo 1, 2, 3 pasteis, mas não, 2,1, 2,2, 2,3 pasteis.
- Como consequencia, não se pode fazer uma reta ligando os valores

Ilustração 11 – Propriedades/características da função (variáveis discretas).

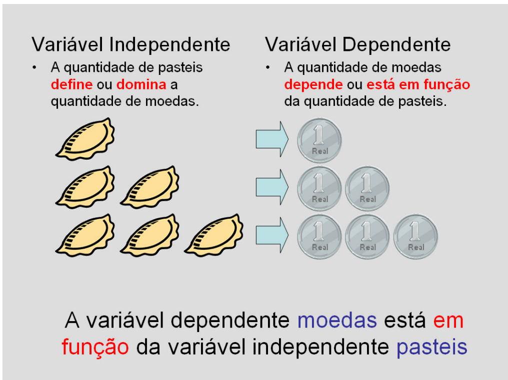


Ilustração 12 – Propriedades/características da função (variável dependente e independente).

Duval (2003, p. 14) argumenta que a aprendizagem conceitual ou noética em matemática é viabilizada pela mobilização de pelo menos dois registros de representação. Por *registro de representação*, Duval (1999, [p. 1]) define "um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente". [9] O conceito noético da função que estabelece uma relação entre quantidades de pasteis e de moedas pode ser representado (vale dizer registrado) de forma pictórica (sempre em contexto), linguística, tabular, gráfica, algébrica 'y = x', ou qualquer outra que venha a ser mobilizada ou criada.

Para Duval (2003, p. 14) "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de

[9] A expressão "registro" foi empregada pela primeira vez por Descartes no livro I de sua Geometria, de 1637, com a finalidade de distinguir a escrita algébrica das curvas e o desenho mesmo das curvas (DUVAL, 1999).

trocar a todo o momento de registros de representação". Um aluno que apenas mobiliza um dos registros, mas é incapaz de traduzi-lo em outro registro pode confundir o objeto matemático com aquele registro de representação que domina. É o caso daquele indivíduo que sabe a fórmula de um teorema ou de uma função, mas é incapaz de traduzi-lo em gráficos, tabelas, representações linguísticas.

Nesse ponto, é fundamental entender que não há como fazer um registro sem um código subjacente. Não há como expressar a função definida por $y = x$ sem conhecer certas convenções como aquelas que fazem traduzir: 'y' e 'x' por variáveis, '=' por igualdade.

Conforme Duval (1999, [p. 2]), todos os códigos se caracterizam por não poderem ser utilizados em operações de referência. Em outras palavras, eles não determinam ou representam diretamente um conteúdo de conhecimento: o que é codificado deve ser decodificado para ser compreendido. Diz ele: "a *codificação* consiste em colocar em correspondência as unidades de um código com unidades de uma mensagem já exprimida ou objetivada de modo explicito num outro sistema semiótico". [10] Codificar, nesse sentido, é diferente de expressar ou representar um registro. Por exemplo, Duval (1993, p. 44), diz que: "le système sémiotique de représentation graphique permet de définir une règle de codage: à un point correspond un couple de nombres. Donc n'importe quel couple de nombres code un point du plan ainsi repéré". [11]

Posto isto, retomando o exemplo da situação problema de João, cada ponto do gráfico (ponto em cor vermelha) corresponde a um par de números de códigos, (1, 1), (2, 2), (3, 3), ou seja, (pastéis, moedas) ou (x, y), de modo que: o que foi codificado (os pontos em cor vermelha) também foi decodificado em (pastéis, moedas), (x, y), (1, 1), (2, 2), (3, 3) para ser compreendido, conforme a representação gráfica a seguir:

[10] A correspondência se faz segundo regras que definem o sistema do código usado (ECO, 1976, p. 256 *apud* DUVAL, 1999, p. [2]). Isso implica a escolha de um "recorte" das unidades da mensagem a serem codificadas; escolha essa que geralmente é função do sistema de codificação.

[11] O sistema semiótico de representação gráfica permite definir uma regra de codificação: para um ponto corresponde um par de números. Assim, qualquer par de números codifica um ponto do plano assim representado (tradução própria).

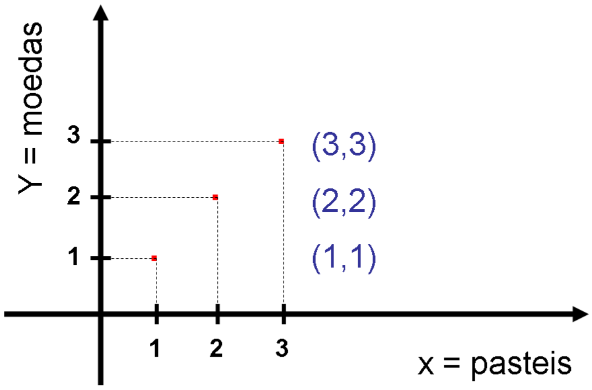


Ilustração 13 – Representação gráfica da situação problema de João.

2.2 DIFERENÇA ENTRE REGISTROS E CÓDIGOS

A diferença entre registros e códigos mostra a existência de dois níveis de funcionamento cognitivo, o nível consciente e o nível não-consciente. Defende-se aqui que toda atividade real de conhecimento por um sujeito, incluindo-se aquelas mobilizadas pela matemática, implica necessariamente a mobilização desses dois níveis. Obviamente, como para esta dissertação interessa a noção de registro, dá-se ênfase às aprendizagens que exigem do indivíduo a mobilização explícita de "estratégias" conscientes.

A transição do não-consciente para o consciente ocorre por meio da ação de objetivação. As representações que se encontram em caráter intencional e que desempenham a função de objetivação são chamadas de conscientes. Esse caráter intencional é fundamental no cenário cognitivo, pois ele é o mediador na determinação dos objetos que detêm a capacidade de serem percebidos pelo sujeito, considerando a função essencial do significado. Além disso, é por meio da intenção que ocorre a apreensão conceitual ou perceptiva do objeto.

Por exemplo, para representar em um modelo matemático a situação-problema da compra de pastéis, é necessário trocar o desenho dos pastéis e das moedas por números. Essa troca tem caráter intencional e é função de objetivação, para possibilitar a distinção do conjunto de pasteis e de moedas. Assim, para mudar da representação pictórica para a representação de dois conjuntos diferentes é necessário o funcionamento cognitivo consciente.

Veja-se a ilustração da abstração da pictografia em dois conjuntos distintos nomeando 'pastéis' por 'A' e 'moedas' por 'B'.

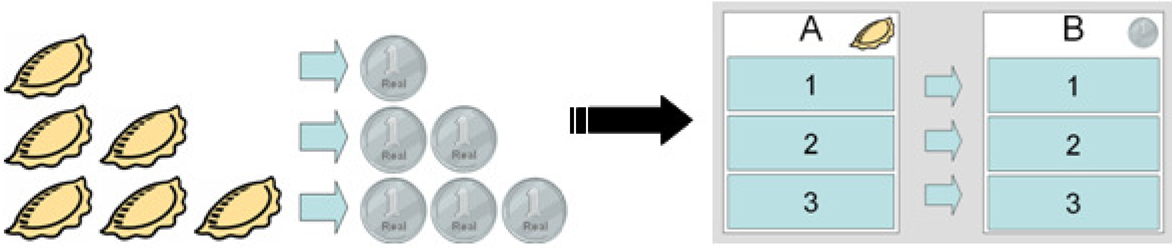


Ilustração 14 – Conjunto A (pastéis) e conjunto B (moedas).

O funcionamento cognitivo consciente/não-consciente põe em xeque também a oposição externo/interno. Esta oposição é definida pelo conflito entre aquilo que é evidente e observável por um indivíduo, sistema ou organismo e aquilo que não é observável. Para Duval (1995, p. 25),

> les représentations externes sont, par nature, des représentations sémiotiques. Ces représentations sont donc étroitement liées à um état de développement et de maîtrise d'um système sémiotique. Elles sont accessibles à tous les sujets qui out appris le systême símiotique utilisé. Les représentations internes sont les representations, appartenant à un sujet et qui ne sont pas rendues communiqués à un autre par la production d'une representation externe. [12]

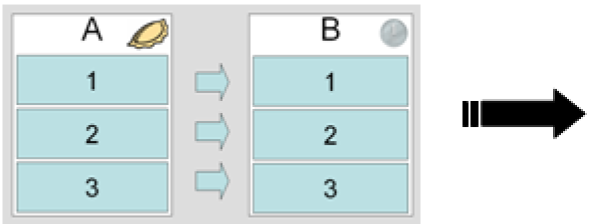
Duval (1995, p. 27) apresenta um quadro mostrando as relações existentes entre o funcionamento cognitivo conscientes/não-conscientes e a oposição interna/externa.

	Interno	Externo
Consciente	Função de objetivação	Semiótica Função de objetivação Função de expressão Função de tratamento intencional
Não consciente	Computacional Função de tratamento automático ou quase instantâneo	

Ilustração 15 – Relações conscientes/não conscientes e internas/externas.

[12] As representações externas são, por natureza, representações semióticas. Tais representações estão intimamente relacionadas com um estado de desenvolvimento e controle de um sistema semiótico. Eles estão abertos a todos os indivíduos que aprenderam a utilizar o sistema semiótico. As representações internas são as representações, pertencentes a um sujeito e que não são comunicados à outra por meio da produção de uma representação externa (tradução própria).

No quadro, observa-se que o funcionamento cognitivo consciente pode dar-se de dois modos, interno ou externo. O modo interno é o que ocorre mentalmente por meio da função de objetivação. O modo externo é o que acontece semioticamente por meio das funções de objetivação, expressão e tratamento intencional. Porém, o funcionamento cognitivo não-consciente pode ocorrer apenas por um modo, o interno, que se dá computacionalmente por meio da função de tratamento automático ou quase-instantâneo. Por exemplo, representar os conjuntos pastéis (A) e moedas (B) em uma tabela.



A	B
1	1
2	2
3	3

Ilustração 16 – Representação dos conjuntos A e B em uma tabela.

Para realizar essa mudança de representação é necessário que o sujeito construa as duas representações mentalmente, conjuntos ‘A’ e ‘B’, e a tabela. A relação que o sujeito encontra ou cria, observa e utiliza para si como modelo, regra ou conceito entre essas duas representações é função de objetivação (expressão privada). Dessa maneira, essa função de objetivação é interna e consciente do sujeito. Essa representação mental pode ser registrada semioticamente em um papel. Para isso, o sujeito utilizar-se-á da função de objetivação.

Além disso, o sujeito deve analisar os traços, a forma, o objeto, ou seja, os conjuntos ‘A’ e ‘B’ e a tabela, que são definidas como função de expressão. Entretanto, cada registro possui uma função de tratamento intencional, transformações realizadas em uma representação, que podem ser detectadas por meio da função de expressão. Desse modo, temos um exemplo de função cognitiva consciente externa.

As primeiras impressões mentais que o sujeito tem no momento que ele decide realizar a mudança da representação dos conjuntos ‘A’ e ‘B’ para a tabela, quando observa computacionalmente os elementos (códigos) que compõem os conjuntos e as tabelas e trata (tratamento) seus modelos de maneira automática ou quase-instantânea, exemplificam o funcionamento não consciente interno.

Essas distinções resumem-se no esquema a seguir, conforme Duval (1999, [p. 1]):

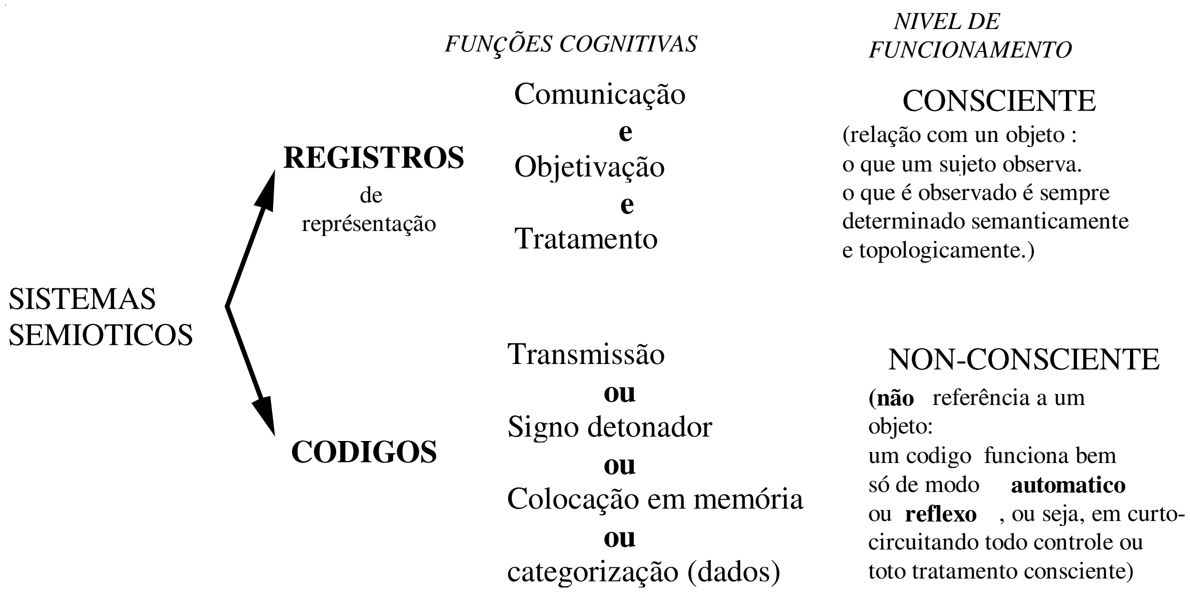


Ilustração 17 – Funções cognitivas e nível de funcionamento em sistemas semióticos.

O esquema em questão revela o que pertence a um sistema semiótico. Nesse sistema, podem existir registros de representação ou códigos. Além disso, cada elemento do sistema semiótico possui distintas funções cognitivas e diferentes níveis de funcionamentos. A comunicação, a objetivação e o tratamento são funções cognitivas dos registros de representação, e a transmissão, o signo detonador, a colocação em memória ou a categorização (dados) são funções cognitivas dos códigos.

O nível de funcionamento consciente é aquele que ocorre por meio dos registros de representação e determinam a "relação com um objeto: o que um sujeito observa. O que é observado é sempre determinado semanticamente e topologicamente". Entretanto, o nível de funcionamento não-consciente é aquele que é sucedido por meio dos códigos e "não referência a um objeto: um código só funciona bem de modo automático, ou seja, curto-circuitando todo controle ou tratamento consciente". Para Ferraz (2008, p. 22-23), "o conjunto das escritas algébricas, o conjunto de traços, o conjunto de símbolos é que formam sistemas semióticos".

Para Ferraz (2008), Duval classifica os sistemas semióticos em três: linguagem simbólica, linguagem figural e linguagem natural ou materna. Por exemplo, retomando a situação problema da compra de pastéis de João, apresentada no início do capítulo, podemos observar suas várias representações. Cada representação pode ser classificada por meio das três linguagens que se referem aos sistemas semióticos: o desenho dos pastéis em função das moedas pode ser classificado como linguagem figural; a expressão apresentada em língua natural pode ser classificada como linguagem natural ou materna; a tabela, o gráfico e a expressão algébrica podem ser classificados como linguagem simbólica.

Além disso, cada uma dessas representações pode ser considerada um registro de representações que se utiliza de códigos para existirem. Nesse caso, pode-se deduzir que se as representações apresentadas na situação-problema de João são registros, e se os registros apenas são possíveis por meio das funções cognitivas conscientes, então todas as representações do problema ocorrem conscientemente. Em outras palavras, os desenhos dos pastéis e das moedas, a expressão em língua natural, a tabela, o gráfico e a expressão algébrica ‘y = x’, são registros de representações que pertencem ao objeto ‘função’, e a relação desses com o sujeito que observa acontece por meio do funcionamento consciente e também pelas funções cognitivas, comunicação, objetivação e tratamento.

Todos os registros do problema servem para comunicar aos sujeitos o conceito de função. Para que os sujeitos apreendam os conceitos de função eles devem objetivar (expressão para si) conhecer esses conceitos e procurar compreender como se dá os tratamentos (mudanças no mesmo registro) em cada uma das representações.

Os elementos que compõem cada uma das representações do problema da compra de pastéis podem ser considerados como códigos. De maneira específica, a seta que se encontra entre a figura do pastel e da moeda, por exemplo, está no lugar da palavra ‘implica’, ou então da expressão ‘está em relação de’, ou ainda da expressão ‘está em função de’. A seta apresentada na figura pode ser considerada um código, pois serve apenas para transmitir, ser signo detonar, colocar em memória ou categorizar (dados), ou seja, a ideia de implicação, relação, função, ou seja, a ideia de que os pastéis estão em função das moedas, que são conformidades das funções cognitivas.

A seta não referencia o objeto ‘função’, ela funciona de modo automático ou reflexo, faz um curto-circuito em todo o tratamento consciente. Dessa maneira, a seta que se encontra na representação pictórica ou em linguagem figural da situação problema de João é um exemplo de nível de funcionamento não consciente. Posto isso, pode-se afirmar que para registrar uma situação é necessário utilizar códigos.

Segundo Duval (1993, p. 39),

> le fonctionnement cognitif de la pensée humaine se révèle inséparable de l'existence d'une diversité de registres sémiotiques de représentation. Si on appelle sémiosis l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique, et noésis l'appréhension conceptuelle d'un objet, il faut affirmer que la noésis est inséparable de la sémiosis. [13]

De acordo com os conceitos apresentados, destaca-se a ligação existente entre a semiose e a noese no funcionamento cognitivo do pensamento. Os aprendizes só poderão apropriar-se dos objetos matemáticos por meio da coordenação dos múltiplos registros de representação. Assim, a possibilidade de apreensão dos objetos matemáticos será maior quanto maior for a mobilização de diferentes registros de representação do próprio objeto.

2.3 SEMIOSE E NOESE

Para a realização de uma semiose, é essencial compreender as causas pelas quais a apreensão conceitual enreda a mobilização de múltiplos registros de representação e quais são as atividades cognitivas dos sujeitos. Posto isso, para validar um sistema semiótico como um registro de representação, Duval (1993) situa três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose: *formação de uma representação identificável*, *tratamento* e *conversão*.

A *formação de uma representação identificável* é a atividade que permite representar de alguma forma certo conjunto de conhecimentos, por exemplo, por meio de uma frase compreensível em certa língua natural, por meio de um esquema, gráfico ou figura geométrica, por meio de uma fórmula, diagrama entre outros. A formação de uma representação equivale a processos de descrição que devem respeitar as regras próprias de cada sistema simbólico: se em língua natural, respeitar as regras gramaticais, por exemplo. Para uma representação identificável ocorrer é preciso selecionar características e dados do conteúdo a ser representado, e essa ação depende de regras, que asseguram o reconhecimento das representações e a possibilidade de sua utilização para tratamento.

---

[13] O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de representações semióticas. Se nós chamamos de semiose a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e de noese a apreensão conceitual de um objeto, podemos afirmar que a noese é inseparável da semiose (tradução própria).

Segundo Duval (1993, p. 41), "ce sont des règles de conformité, ce ne sont pas des règles de production effective par un sujet. Cela veut dire que la connaissance des règles de conformité n'implique pas la compétence pour former des représentations, mais seulement celle pour les reconnaître". [14]

Por exemplo, pode-se pensar nas regras de reconhecimento do produto cartesiano. Dado dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se produto cartesiano de A por B o conjunto formado pelos pares ordenados nos quais o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B. Essas são descrições que respeitam as regras próprias do produto cartesiano, são características e dados que garantem o reconhecimento e a possibilidade da utilização para tratamento da fórmula: $A\ x\ B = \{(x,\ y) \mid x \in A\ e\ y \in B\}$ ou da tabela:

Tabela 1 – Relação de elementos de dois conjuntos 'A' e 'B': produto cartesiano:

A	B	(x, y)	(x, y)	(x, y)
1	1	(1,1)	(2,1)	(3,1)
2	2	(1,2)	(2,2)	(3,2)
3	3	(1,3)	(2,3)	(3,3)

O *tratamento de uma representação* é a transformação realizada no próprio registro em que foi desenvolvida. Para Duval (1995, p. 39), "un traitement est une transformation de representation interne à un register de representation ou à un système". [15] Por exemplo, as inferências, as paráfrases, o cálculo, a reconfiguração entre outros. A inferência e as paráfrases são tratamentos em determinada língua natural. O cálculo são tratamentos da escrita simbólica, assim como, cálculo sentencial, cálculo algébrico, cálculo numérico e entre outros. A reconfiguração consiste em tratamentos das figuras geométricas que oferecem um valor heurístico ao registro das figuras.

Para cada registro há específicas regras de tratamento. A natureza e o número das regras variam de um registro para outro: as regras associativas de contiguidade, as regras de similaridade, as regras de coerência temática, as regras de derivação e outras.

[14] Estas são as regras de conformidade, estas não são as regras de produção efetiva para um sujeito. Isso quer dizer que o conhecimento das regras de conformidade não implica a competência para formar as representações, mas apenas para reconhecê-los (tradução própria).

Para Damm (2008, p. 179),

> quando trabalhamos com as operações fundamentais com os números naturais no registro algorítmico, o tratamento exige a compreensão das regras do sistema posicional e da base dez. Sem a compreensão dessas regras, a representação algorítmica não tem sentido, ou seja, não existe tratamento significativo.

Os tratamentos não são relacionados ao conteúdo do objeto matemático, mas sim à forma. Damm (2008, p. 180), afirma que as operações apresentadas são:

> 0,25 + 0,25 = 0,5 (representação decimal, envolvendo um tratamento decimal);
> 1/4 + 1/4 = 1/2 (representação fracionária, envolvendo um tratamento fracionário).
>
> [...] duas representações diferentes envolvendo tratamentos completamente diferentes para o mesmo objeto matemático. Esses dois registros de representação possuem graus de dificuldades (custo cognitivo diferente) para quem aprende, e este é um dos problemas que o educador precisa enfrentar na hora de ensinar, tendo presente que trabalha sempre o mesmo objeto matemático (números racionais/operações), porém, o registro de representação utilizado exige tratamento muito diferente, que precisa ser entendidas, construídas e estabelecidas relações para o seu uso.

Veja-se, a seguir, um exemplo que demonstra as transformações realizadas no interior de uma tabela. A tabela representa os valores a serem cobrados por uma corrida de táxi, cuja bandeirada custa três reais e sessenta centavos (R$ 3,60) e o preço cobrado por quilômetros rodados é de um real e oitenta centavos (R$ 1,80).[16] Observe as transformações que ocorrem na tabela (um único registro) que possui três colunas, que apresentam, respectivamente, os valores correspondentes aos quilômetros percorridos pelo táxi, representados por ‘x’; a fórmula, lei de formação ou modelo matemático da função que descreve os valores a serem cobrados pela corrida ‘f(x)’ em relação aos quilômetros percorridos pelo táxi ‘x’: f(x) = 1,8.x + 3,6; os pares ordenados: ‘(x, y)’, onde ‘x’ representa os quilômetros percorridos pelo táxi e ‘y’ o valor (em reais) a serem cobrados pela corrida: (km, reais).

---

[15] Um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema (tradução própria).

[16] A situação problema da corrida de táxi foi inspirada no problema apresentado por Cardoso (2003, p.47).

Tabela 2 – Exemplificação de uma corrida de táxi I:

x	f (x) = 1,8.x + 3,6	(x, y)
1		(1; y)
2		(2; y)
3		(3; y)
4		(4; y)
Km	**Lei de formação**	(Km, reais)

Na primeira coluna, observa-se que há valores que representam os quilômetros percorridos pelo táxi (x), ‘1’, ‘2’, ‘3’ e ‘4’. Na segunda coluna apresenta-se apenas a lei de formação que descreve a corrida de táxi. Na terceira coluna, encontram-se os pares ordenados: ‘(x, y)’, ‘(1; y)’, ‘(2; y)’, ‘(3; y)’ e ‘(4; y)’, onde ‘x’ representa os quilômetros percorridos: 1 quilômetro, 2 quilômetros, 3 quilômetros e 4 quilômetros; e ‘y’ o valor a ser cobrado pela corrida (em reais).

Tabela 3 – Exemplificação de uma corrida de táxi II:

x	f (x) = 1,8.x + 3,6	(x, y)
1	f (1) = 1,8.1 + 3,6	(1; f (1))
2	f (2) = 1,8.2 + 3,6	(2; f (2))
3	f (3) = 1,8.3 + 3,6	(3; f (3))
4	f (4) = 1,8.4 + 3,6	(4; f (4))
Km	**Lei de formação**	(Km, reais)

Em relação à situação apresentada na tabela 2, na tabela 3, não houve alterações na primeira coluna. Porém, notam-se diferenças na segunda e na terceira coluna. A segunda coluna que apresentava apenas a lei de formação, agora mostra a substituição de ‘x’ pelos números que representam os quilômetros percorridos pelo táxi. Na terceira coluna, que apresentava os pares ordenados (x, y), (1, y), (2, y), (3, y) e (4, y), apresenta agora (x, y), (1; f (1)), (2; f (2)), (3; f (3)) e (4; f (4)). Observe que ocorreram mudanças no interior da tabela e que o objeto de estudo permaneceu o mesmo.

Tabela 4 – Exemplificação de uma corrida de táxi III:

x	f (x) = 1,8.x + 3,6	(x, y)
1	f (1) = **5,4**	(1; **f (1)**)
2	f (2) = **7,2**	(2; **f (2)**)
3	f (3) = **9,0**	(3; **f (3)**)
4	f (4) = **10,8**	(4; **f (4)**)
Km	**Lei de formação**	(Km, reais)

Na tabela 4, a primeira e a terceira coluna permanecem sem alterações. Por sua vez, a segunda coluna se apresenta de maneira distinta à situação anterior. Na situação que a antecede, trocava-se a variável 'x' pelos números que representam os quilômetros percorridos pelo táxi. Agora, observa-se que cada número substituído anteriormente foi multiplicado por 1,8 e ao resultado foram adicionados 3,6, obtendo-se consequentemente: f (1) = 5,4; f (2) = 7,2; f (3) = 9,0 e f (4) = 10,8.

Tabela 5 – Exemplificação de uma corrida de táxi IV:

x	f (x) = 1,8.x + 3,6	(x, y)
1	f (1) = **5,4**	(1; **5,4**)
2	f (2) = **7,2**	(2; **7,2**)
3	f (3) = **9,0**	(3; **9,0**)
4	f (4) = **10,8**	(4; **10,8**)
Km	**Lei de formação**	(Km, reais)

Na tabela 5, não houve alteração na primeira e na segunda coluna. Entretanto, ocorreram transformações na terceira coluna. Observa-se que na tabela 4 encontravam-se os seguintes pares ordenados na terceira coluna: (x, y), (1; f (1)), (2; f (2)), (3; f (3)) e (4; f (4)); e nessa situação apresentam-se os pares: (x, y), (1; 5,4), (2; 7,2), (3; 9,0) e (4; 10,8). Nota-se que foram substituídos o 'f (1)', 'f (2)', 'f (3)' e 'f (4)' por 5,4; 7,2; 9,0 e 10,8, respectivamente.

A tabela 5, que representa a situação-problema de uma corrida de táxi, é um registro de representação. Como vimos, esse registro de representação possui um tratamento, específico que permite transformações no mesmo registro. Isso é muito diferente de uma conversão, que será vista a seguir.

A *conversão de uma representação* é a transformação de uma representação de um registro, considerado de partida, para outra representação em outro registro, considerado de chegada, mantendo totalmente ou em parte o conteúdo da representação de partida.

Segundo Duval (1993, p. 42),

> La conversion est une transformation externe au registre de départ (le registre de la représentation à convertir). L'illustration est la conversion d'une représentation linguistique en une représentation figurale. La traduction est la conversion d'une représentation linguistique dans une langue donnée en un**e** représentation linguistique d'une autre langue ou d'un autre type de langage. La description est la conversion d'une représentation non verbale (schéma, figure, graphe) en une représentation linguistique. (Il importe à ce propos de ne pas confondre cette situation avec la description d'un objet ou d'une situation qui ne sont pas encore sémiotiquement représentés: la sélection des traits n'y obéit pas aux mêmes contraintes). [17]

Desse modo, observa-se que a conversão é cognitivamente autônoma e distinta da atividade de tratamento, e não se deve confundir conversão com tratamento. Para Damm (2008), a conversão ocorre entre registros distintos, e o tratamento acontece no interior do registro. Além disso, é a conversão que revela a dessemelhança existente entre o conteúdo de uma representação e o que ela representa, ou entre a referência dos símbolos ou dos signos e o sentido.

A atividade de conversão é próxima a outras duas, a atividade de interpretação e a atividade de codificação. No entanto, apesar da proximidade, ambas não devem ser confundidas com a atividade de conversão. A interpretação, comumente, exige uma modificação de contexto ou de quadro teórico, que mobiliza habitualmente as analogias e não implica em uma mudança de registro. A codificação é a transcrição de uma representação dada em outro sistema semiótico.

A atividade de mudança de quadro é diferente da atividade de mudança de registro. Em um quadro pode-se ter um ou vários registros de representação. Almouloud (2007 p. 78) diz que:

---

[17] A conversão é uma transformação externa ao registro de partida (o registro de representação a ser convertido). A ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação pictórica (figural). A tradução é a conversão de uma representação linguística de uma determinada língua em uma representação linguística de outra língua ou de outro tipo de linguagem. A descrição é a conversão de uma representação não-verbal (esquema/diagrama, figura, gráfico) em uma representação linguística. (É importante para este propósito não confundir esta situação com a descrição de um objeto ou de uma situação que não é ainda semioticamente representada: a seleção dos traços/características não obedece às mesmas exigências) (tradução própria).

> no quadro geométrico temos o registro da língua materna, o registro figural e o registro simbólico; e, ainda, uma [conversão de registro] pode ser feita dentro de um mesmo [quadro], como ocorre, geralmente, quando se trata do registro da escrita algébrica e do registro da língua formal. [18]

Duval (2003, p. [4]), diferencia quadros e registros da seguinte forma:

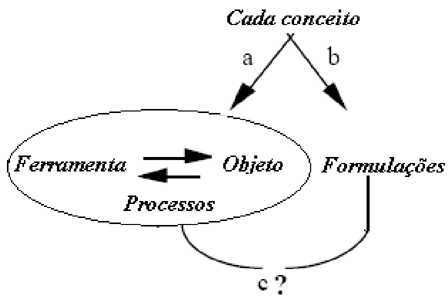
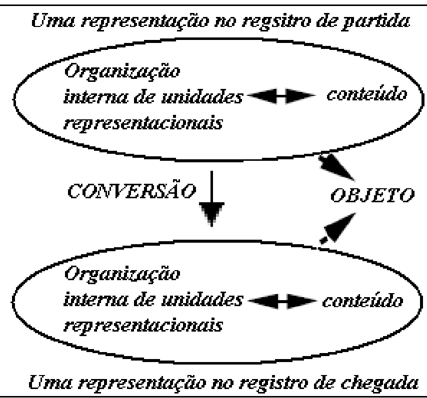
	Questões diretrizes para analisar a atividade matemática.	*Quadro*	*Registro*
I	*Como podemos distinguir os diferentes quadros e os diferentes registros?*	*Um exemplo de conceitos susceptíveis de ser organizados em uma progressão teórica.* *Um ramo das matemáticas.*	*Um sistema semiótico produto de um tipo de representação. Portanto a produção pode responder às funções cognitivas diferentes.*
II	*1 Como descrever a operação de MUDANÇA?*	*Uma reinterpretação sobre a formulação dos problemas para resolver.*	*Uma conversão sobre as unidades de representação, mas conservando a referência da representação de partida*
	2. O que se aproxima a uma mudança?	*Criação de novos objetos matemáticos ou "Executado ferramentas e técnicas que não são necessárias" (1986, p 11)*	*Tornam explícitas de outras propriedades do objeto* *Permite os tratamentos impossíveis ou muito custosos no registro de partida*
	3. Que tipo de transparências há entre os dados anteriores e posteriores?	*"Correspondências imperfeitas".*	*Congruência ou não congruência entre as respectivas unidades de representações de partida e de chegada.*
	4. Qual condição para compreender o processo de mudança?	*Utilidade de recursos para "uma quadro auxiliar de representação"*	*Discriminação entre mudanças na representação em um registro que conduzam a uma mudança na representação dos outros registros e aqueles que não mudam*
III	*Quais são as distinções operatórias utilizadas para analisar o funcionamento da atividade matemática?*		

Ilustração 18 – Questões que diferenciam quadros de registros.

[18] As informações entre colchetes equivalem à correção feita oralmente pelo autor ao texto original.

Diante desse cenário, vejam-se alguns exemplos de conversão, de mudança de quadros e de codificação.

Pasteis	Moedas	(x, y)
1	1	(1,1)
2	2	(2,2)
3	3	(3,3)

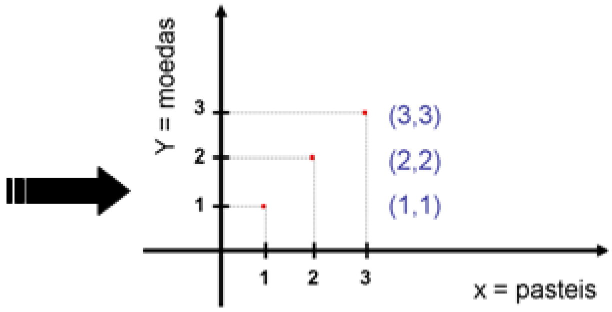


Ilustração 19 – Conversão da tabela para o gráfico.

No exemplo apresentado observa-se que ocorreu uma mudança de registro. Os dados que se encontram na tabela foram convertidos em uma representação gráfica. Entretanto, no processo de conversão dos dados ocorreu uma mudança de conceito, de contexto, ou seja, de quadro teórico.

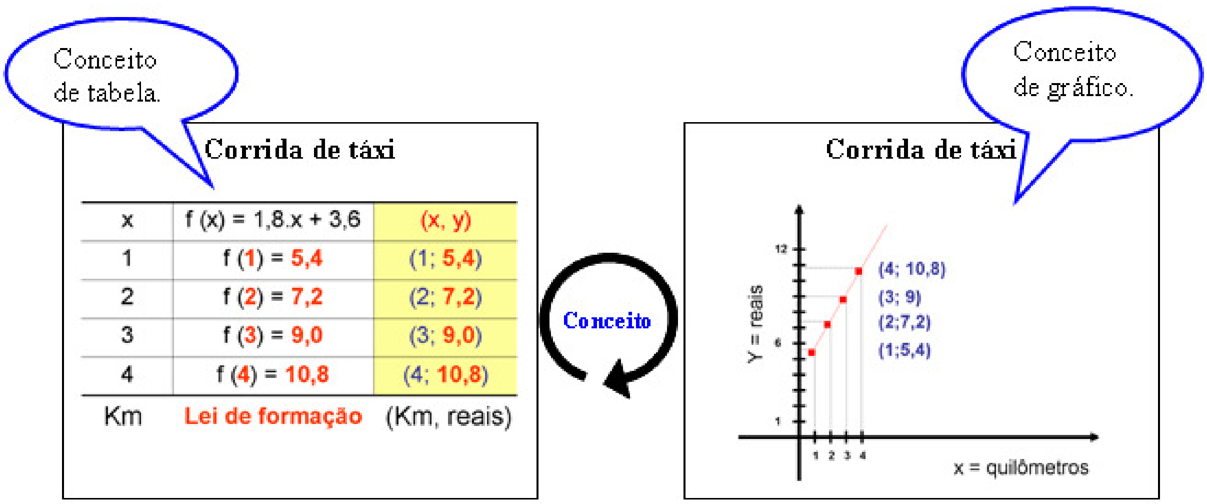


Ilustração 20 – Exemplo de mudança de conceitos (mudança de quadros).

Na sequência, observa-se o processo de codificação de pares ordenados que se encontram em uma tabela em pontos num gráfico.

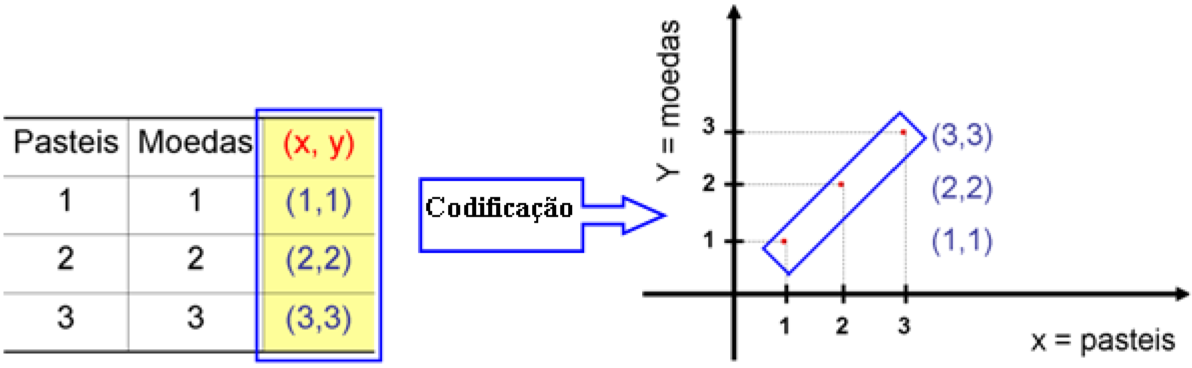


Ilustração 21 – Codificação de pares ordenados em pontos no gráfico.

Para Duval (1993, p. 43),

> Bien que l'activité cognitive de conversion d'une représentation puisse souvent paraître être étroitement liée à une interprétation ou à un codage, elle leur est irréductible, parce que d'une part elle ne se fonde sur aucune analogie comme dans le cas de l'interprétation et que, d'autre part, la conversion ne peut être obtenue par l'application de règles de codage.Il n'existe et il ne peut exister de règles de conversion comme il existe des règles de conformité et des règles de traitement. [19]

Das três atividades cognitivas atreladas à semiose, *formação de uma representação identificável*, *tratamento e conversão*, apenas as duas primeiras são consideradas no ensino (DUVAL, 1993; DAMM, 2008). Essas atividades consideradas abordam a construção de questões de avaliação ou a organização de sequências de aprendizagem. No entanto, conforme Duval (1993, p. 47), em geral, observa-se que:

> – la conversion des représentations irait de soi dès que l'on est capable de former des représentations dans des registres différents et d'effectuer des, traitements sur les représentations, par exemple construire un graphique ou écrire une équation et y substituer des valeurs numériques aux variables.
> – la conversion n'a aucune importance réelle pour la compréhension des objets ou des contenus conceptuels représenté, puisque son résultat se limite à un changement de registre. Ce point de vue est justifié dès qu'une certaine "autonomie" est atteinte en ce qui concerne l'activité mathématique. Mais il conduit à masquer le caractère fondamental de cette activité pour la noésis, et d'une façon plus générale pour la compréhension. Et, surtout, il néglige lê fait qu'en phase d'apprentissage, la conversion joue un rôle essentiel dans la conceptualisation. [20]

---

[19] Embora a atividade cognitiva de conversão de uma representação pode frequentemente parecer estritamente ligada a uma interpretação ou a uma codificação, lhes é irredutível, porque de uma parte ela não se baseia sobre nenhuma analogia como no caso da interpretação e que, de outra parte, a conversão não pode ser obtida por aplicação de regras de codificação. Não existe e não pode haver regras de conversão como existem as regras de conformidade e as regras de tratamentos (tradução própria).

[20] – a conversão das representações seria ela própria capaz de formar as representações nos diferentes registros e de efetuar os tratamentos sobre as representações, por exemplo, construir um gráfico ou escrever uma equação e substituir os valores numéricos às variáveis.

Em didática da matemática, a análise cognitiva das investigações carece de uma distinção clara do que pertence ao tratamento e do que cabe a uma conversão. Entretanto, é imprescindível distinguir dois tipos de tratamentos e dois tipos de conversão, conforme apresentado no esquema elaborado por Duval (1999).

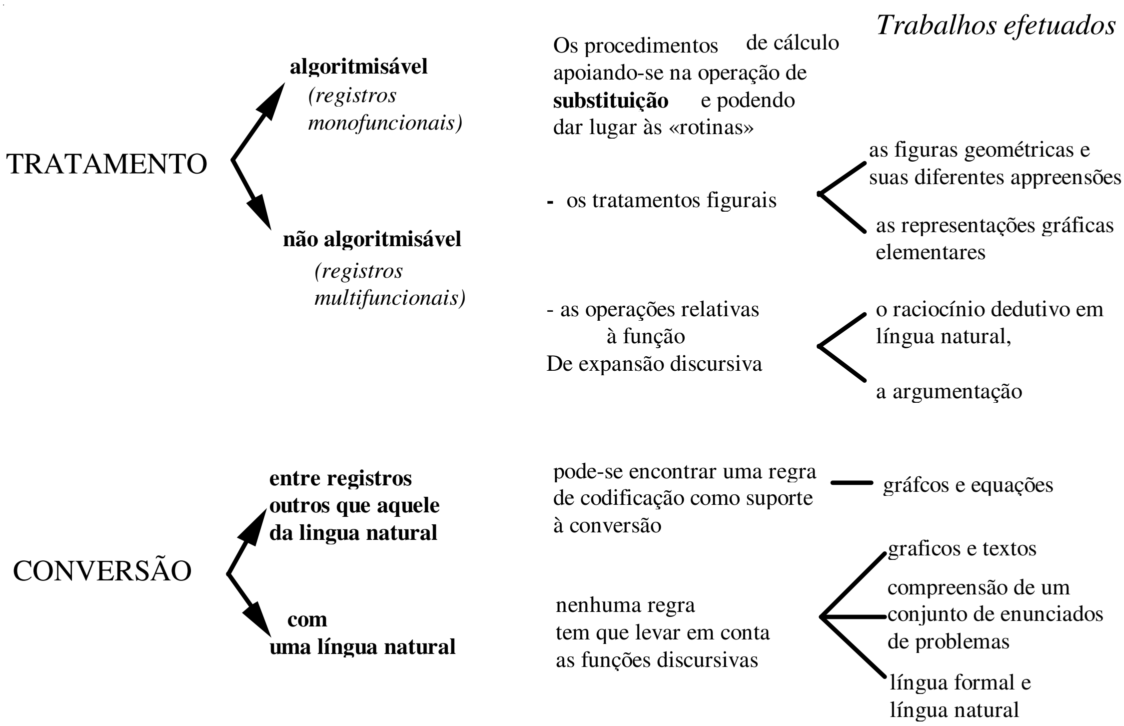


Ilustração 22 – Tratamento e conversão conforme Duval (1999).[21]

Na Ilustração 22, Duval apresenta os dois tipos de tratamentos, o algoritmisável e o não algoritmisável. Os tratamentos algoritmisáveis são registros monofuncionais que admitem processos de cálculo que se apoiam na operação de substituição e podem dar lugar às rotinas.

– a conversão a conversão não tem real importância para a compreensão dos objetos ou dos conteúdos conceituais representados, porque são resultados limites para uma mudança de registro. Este ponto de vista se justifica quando certa "autonomia" é alcançada em relação a atividade matemática. Mas leva a mascarar o caráter fundamental desta atividade a favor da noese, e de uma maneira mais geral a favor da compreensão. E, sobretudo, negligencia o fato de que na fase de aprendizagem, a conversão desempenha um papel essencial na conceitualização (tradução própria)

[21] Esquema elaborado por DUVAL (1999, p. 68) conforme citado por Almouloud (2007, p. 72). Utilizou-se essa ilustração porque apresenta a relação existente entre os conceitos tratamento, conversão e registros monofuncionais e multifuncionais de forma clara e sucinta. Entretanto, ao tratar de registro monofuncionais, especificamente em gráficos cartesianos, essa ilustração mostra que os gráficos pertencem ao conjunto de registros multifuncionais, logo, há uma contradição nesse tema apresentados em outros artigos (DUVAL, 2003a, 2003b, 2003c, 2001, 2005).

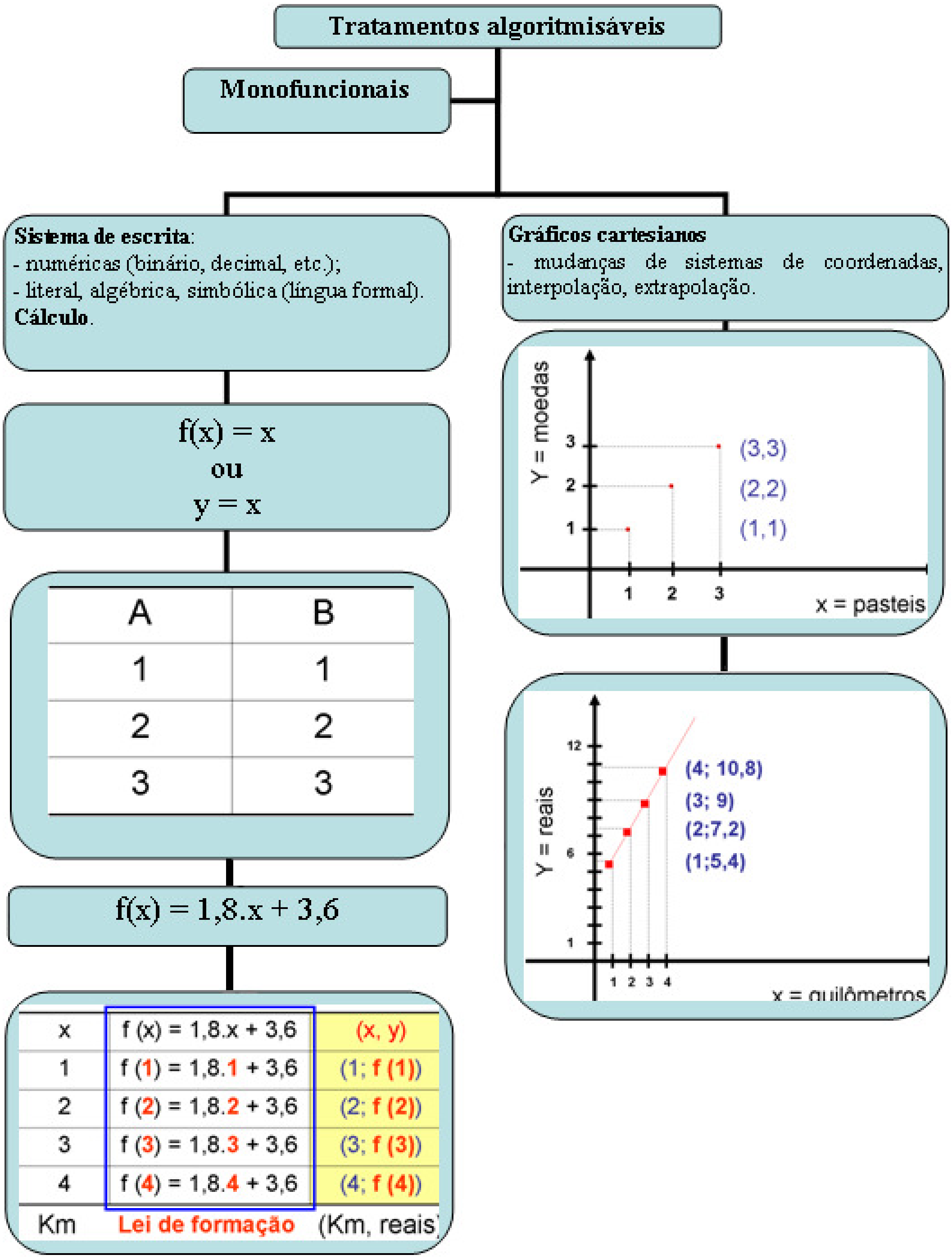


Ilustração 23 – Exemplo de tratamento algoritmisável.

Por sua vez os tratamentos não algoritmisáveis são registros multifuncionais que reconhecem os tratamentos figurais, tanto as figuras geométricas e suas diferentes apreensões quanto às representações gráficas elementares. Além disso, esse tratamento também adota as operações relativas à função de expansão discursiva, como o raciocínio dedutivo em língua natural e a argumentação.

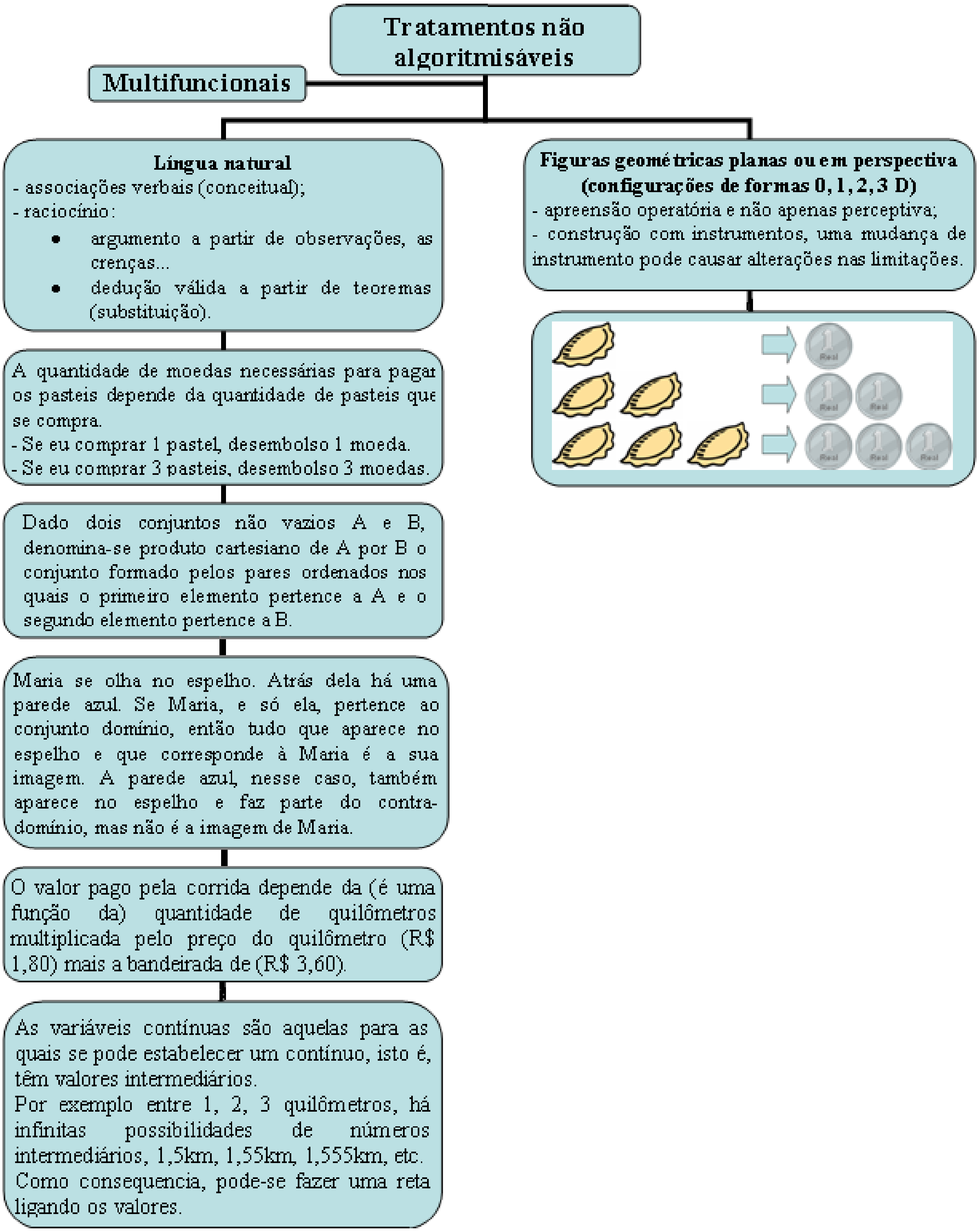


Ilustração 24 – Exemplos de tratamentos não algoritmisáveis.

Nessas ilustrações, o autor mostra os dois tipos de conversão, a que ocorre entre registros diferentes da língua natural e aquele com uma língua natural. A conversão que admite registros distintos da língua natural pode-se encontrar regras de codificação como suporte à conversão, assim como os gráficos e as equações.

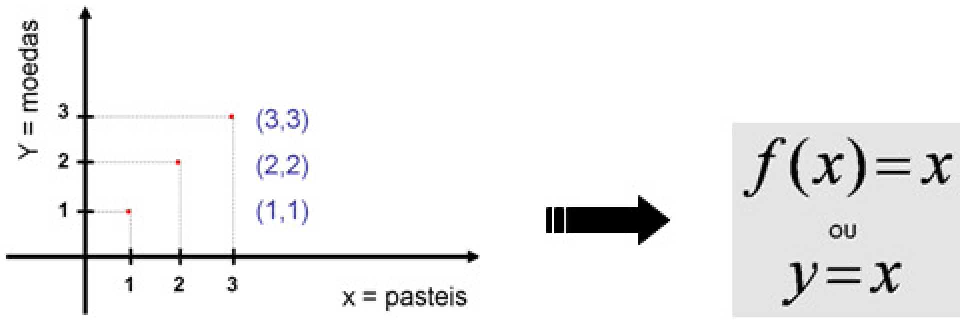


Ilustração 25 – Exemplo de conversão distinta daquelas que envolve língua natural.

Por sua vez a conversão com registros de uma língua natural não admite regras que levem em conta as funções discursivas. Por exemplo, gráficos e textos, compreensão de um conjunto de enunciados de problemas e língua formal e língua natural.

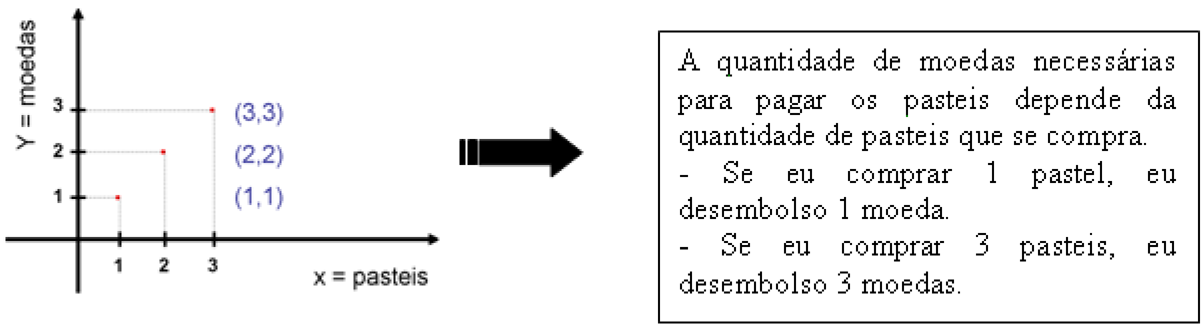


Ilustração 26 – Exemplo de conversão que envolve língua natural.

Há dois tipos de fenômenos característicos da conversão das representações, o da *congruência* e *não-congruência* e o da *heterogeneidade dos dois sentidos de conversão*.

O caráter natural ou arbitrário de uma conversão é determinado pela congruência ou não congruência. Duval (1993, p. 53), afirma que havendo congruência entre a representação de partida e aquela de chegada, a conversão é trivial, podendo ser consideradas quase intuitivamente como mera codificação. Ou seja, o caso da representação de partida ser mais ou menos transparente à representação de chegada satisfaz ao fenômeno de congruência, caso contrário, corresponde ao fenômeno de *não-congruência*. Além disso, o fenômeno de *congruência* obedece a um isomorfismo semiótico e não matemático em um caráter metafórico. Posto isto, há três critérios de congruência que procuram esclarecer este isomorfismo semiótico e determinar os graus de congruência ou de não congruência.

Conforme Almouloud (2007, p 74), parafraseando Duval (1993), os critérios são:

> CRITÉRIO 1: possibilidade de uma correspondência lexical entre as unidades significantes próprias a cada registro. Considera-se como unidade significante elementar todo o que diz respeito ao léxico de registro. O primeiro registro de congruência consiste em dispor, para a representação a efetuar, de unidades significantes elementares no registro de chegada que corresponde às unidades significantes elementares da representação a converter. Naturalmente isso é raramente o caso.
> CRITÉRIO 2: A univocidade semântica terminal. Para uma unidade significante na representação a converter, tem-se várias unidades significantes possíveis no registro de chegada. Isso é as vezes o caso quando o registro de chegada é a língua natural.
> CRITÉRIO 3: a ordem de organização das unidades significantes na representação de partida é conservada ou não na representação de chegada. Esse critério é verdadeiramente pertinente quando as unidades significantes estão organizadas segundo o mesmo número de dimensão (1 para a linguagem). Pode-se colocar a questão para escrita literal ou algébrica.

Considerando como exemplo, a conversão entre uma representação em língua natural falada como ‘f de x igual um virgula oito vezes x mais três virgula seis’, temos como unidades semânticas ‘f’, ‘de’, ‘x’, ‘igual’, ‘um’, ‘virgula’, ‘oito’, ‘vezes’, ‘x’, ‘mais’, ‘três’, ‘virgula’, ‘seis’. A essa ordem corresponderia a representação na escrita matemática respectivamente a “f(x)”, “=“, “1,8”, “+”, “3,6”, exemplificada na ilustração a seguir:

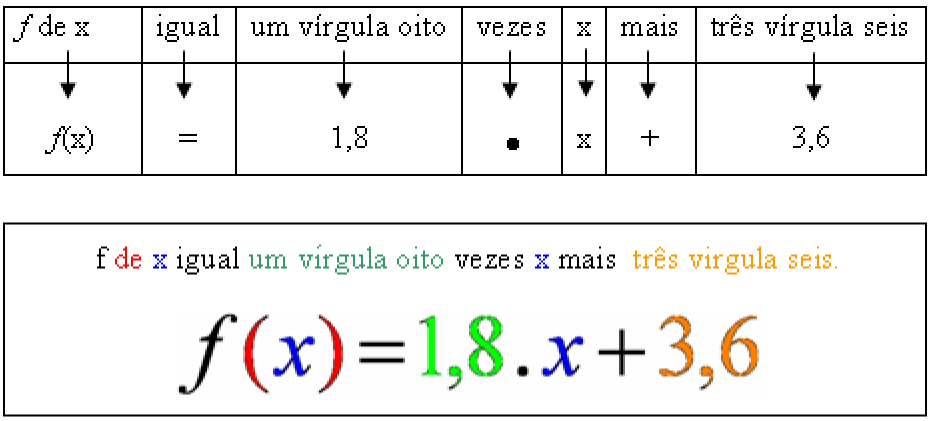


Ilustração 27 – Exemplo de congruência.

No exemplo, há uma correspondência lexical, pois há uma palavra (registro de partida) para cada símbolo encontrado na escrita matemática (registro de chegada) de acordo com o primeiro critério de congruência. Além disso, há uma univocidade semântica, cada palavra (registro de partida) corresponde a apenas um símbolo na escrita matemática (registro de chegada) de acordo com o segundo critério de congruência. Além disso, nota-se que a ordem das palavras está de acordo com a ordem dos símbolos na escrita matemática, conforme o terceiro critério de congruência.

Ao considerar a conversão entre uma representação em língua natural falada como "o valor pago pela corrida depende da (é uma função da) quantidade de quilômetros multiplicada pelo preço do quilômetro (R$ 1,80) mais a bandeirada de (R$ 3,60)", as unidades semânticas seriam "o valor pago pela corrida", "depende da (é uma função da)", "quantidade de quilômetros", "multiplicada pelo", "preço do quilômetro (R$ 1,80)", "mais", "a bandeirada de (R$ 3,60)". Que não correspondem a essa ordem na escrita matemática "f(x)", "=", "1,8", "+", "3,6", exemplificada no esquema a seguir:

O valor pago pela corrida	depende da (é uma função da)	quantidade de quilômetros	multiplicada pelo	preço do quilometro (R$ 1,80)	mais	a bandeirada de (R$ 3,60)
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$f(x)$	$f(x)$	x	•	1,8	+	3,6

O valor pago pela corrida depende da (é uma função da) quantidade de quilômetros multiplicada pelo preço do quilômetro (R$ 1,80) mais a bandeirada de (R$ 3,60).

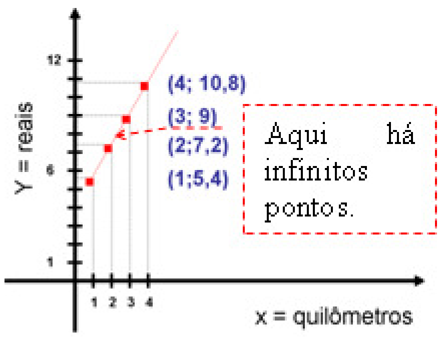
$$f(x) = 1{,}8 \, . \, x + 3{,}6$$

Ilustração 28 – Esquema de não congruência.

Nesse caso, observa-se que não há uma correspondência lexical, pois há um conjunto de palavras, ou seja, uma expressão no registro de partida para os símbolos encontrado na escrita matemática (registro de chegada), primeiro critério de congruência. Além disso, não há uma univocidade semântica, pois cada palavra (registro de partida) não corresponde a um símbolo na escrita matemática (registro de chegada), segundo critério de congruência. Além disso, nota-se que a ordem das palavras não está de acordo com a ordem dos símbolos na escrita matemática, conforme o terceiro critério de congruência.

Por sua vez, o fenômeno da *heterogeneidade dos dois sentidos de conversão* é aquele que postula que "nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e o de chegada” (DUVAL, 2003, p. 20). Assim, podemos afirmar que há sistemas semióticos que podem ser congruentes em um sentido, mas não ser no sentido inverso.

Por exemplo, converter os pontos do gráfico da corrida de táxi que envolve variáveis contínuas em uma tabela. No gráfico há infinitos pontos que representam: o valor a ser cobrado pela corrida e os quilômetros percorridos pelo táxi. Portanto, como podemos representar esses infinitos pontos em uma tabela? Para que o leitor tenha ideia da dificuldade de fazer tal representação, veja a ilustração que segue:



x	f (x) = 1,8.x + 3,6	(x, y)
1	f (1) = 5,4	(1; 5,4)
2	f (2) = 7,2	(2; 7,2)
3	f (3) = 9,0	(3; 9,0)
4	f (4) = 10,8	(4; 10,8)
Km	Lei de formação	(Km, reais)

Ilustração 29 – Exemplo de heterogeneidade.

O problema do ensino da matemática é que ele considera apenas os tratamentos e as formações da representação no desenvolvimento cognitivo. No entanto, o que garante a apreensão do objeto matemático, sua conceitualização, é a coordenação entre esses vários registros de representação, e não a determinação de representações ou as várias representações possíveis de um mesmo objeto.

Uma criança que, em fase de aprendizagem da aritmética, já manipula dinheiro e consegue somar ou dar troco, isso não garante que ela vai converter essas operações concretas para o algoritmo aritmético. Da mesma forma, crianças que manipulam operações aritméticas em desenhos, em material dourado, isso não garante que elas terão aprendido a montar as contas e resolver os cálculos, a não ser que elas aprendam a conversão. Isso ocorre, porque cada forma de manipulação (dinheiro, desenho, material dourado e algoritmo aritmético) requer um tratamento diferente.

Ou seja, se o objetivo do ensino é que os alunos operem com o algoritmo matemático, de nada adianta o sujeito resolver determinada operação em outros registros, se ele não conseguir coordenar/avistar essas operações no tratamento aritmético. Vale mencionar que essas coordenações até são bem sucedidas nas séries iniciais, mas são progressivamente abandonadas nas séries seguintes.

Assim, é importante entender a noese, isto é, a coordenação dos registros de representações. Ou seja, como o sujeito consegue coordenar vários registros e com base nessa coordenação apreender o objeto matemático em questão, uma vez que se apropriou de múltiplos registros de representação. Para dar conta disso, Duval (1993) coloca em xeque três posições, *economia de tratamento*, *complementaridade de registros* e *conceitualização*, para responder a seguinte pergunta: qual a necessidade da diversidade de registros de representação para o funcionamento do pensamento humano?

A *economia de tratamento* corresponde ao funcionamento de cada registro e aos custos de tratamento. Posto isto, o objetivo de executar tratamentos de maneira mais econômica e poderosa ocorre por meio da troca de registros que só é possível devido à existência de vários registros que permitem essa troca.

Por exemplo, para representar a função $y = x$, podemos utilizar tabelas, gráficos, figuras, língua natural e outros, conforme apresentado no início desta seção. Esses registros distintos possuem diferentes custos de tratamento.

De acordo com isso, Duval (1993, p. 49) afirma que

> l'existence de plusieurs registres permet de changer de registre, et ce changement de registre a pour but de permettre d'effectuer des traitements d'une façon plus économique et plus puissante. Il semble que cette réponse ait été explicitement exposée pour la première fois par Condillac dans le Langage des Calculs à propos de l'écriture des nombres et des notations algébriques. Elle montre, en termes de coût en mémoire, les limites très vite atteintes dans le registre de la langue naturelle pour les traitements de type calcul. Une telle réponse peut évidemment être étendue à d'autres traitements: les relations entre des objets peuvent être représentés de façon plus rapide, et plus simple à comprendre, par des formules littérales que par des phrases, comme c'est le cas par exemple pour les énoncés du livre V des Elements sur les proportions (Euclide). [22]

Isto é, a economia no tratamento encontra-se extremamente amarrada a formas mais ingênuas e econômicas aos métodos adotados, em especial, e a proximidade com a língua natural. Para dar conta disso, Damm (2008) exemplifica a economia em um tratamento

[22] A existência de vários registros permite alterar o registro, essa mudança de registro tem por objetivo permitir fazer tratamento de uma forma mais econômica e mais potente. Parece que esta resposta foi explicitamente apresentada pela primeira vez por Condillac língua em cálculos sobre a escrita de números algébricos e notação. Ela mostra, em termos de custo de memória, limites muito rapidamente alcançados no registro de linguagem natural para o tratamento do tipo de cálculo. Essa resposta pode obviamente ser alargada a outros tratamentos: o relacionamento entre objetos pode ser representado de forma mais rápida e mais fácil de incluir, por fórmulas como literal apenas, como é o caso das declarações no livro V dos Elementos Proporções (Euclides) (tradução própria).

partindo do sistema métrico. Para a autora, há muitas formas de representar a medida dois metros e cinquenta e quatro centímetros.

> - 2m 5dm 4cm
> - 254cm
> - 25,4dm
>
> Ou ainda 2,54m que é uma das formas mais econômicas de representação e que se aproxima da linguagem falada (DAMM, 2008, p. 183-184).

O exemplo de Damm trata da aproximação com a língua natural, mas é possível exemplificar a situação onde uma figura pode representar uma fórmula. Retome-se a compra dos pasteis:

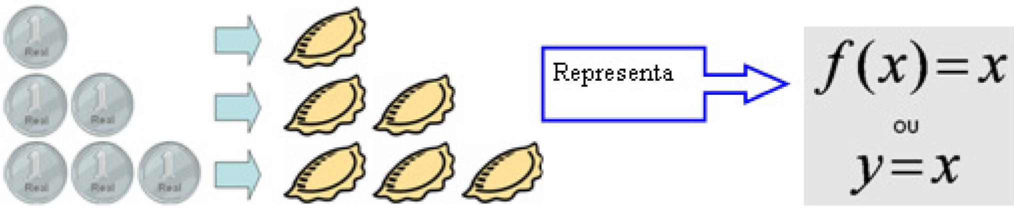


Ilustração 30 – Exemplo de economia de tratamento.

A *complementaridade de registros* se origina nas barreiras representativas características a cada registro em comparação com distintas maneiras de representação. Além disso, pode-se afirmar que a seleção de elementos significativos ou informações do conteúdo que um registro está representado é imposta pela natureza do registro semiótico selecionado para representar um contexto, um objeto, um conceito, uma situação está relacionada com a complementaridade de registros.

Conforme argumenta Duval (1993, p. 49-50),

> cette réponse qui est davantage centrée sur les possibilités propres à chaque système sémiotique a été avancée plus récemment (Bresson, 1987). On peut la formuler ainsi: la nature du registre sémiotique qui est choisi pour représenter un contenu (objet, concept ou situation) impose une sélection des éléments significatifs ou informationnels du contenu que l'on représente. Cette sélection se fait en fonction des possibilités et des contraintes sémiotiques du registre choisi. Un langage n'offre pas les mêmes possibilités de représelration qu'une figure ou qu'un diagramme. Cela veut dire que toute représentation est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente et que d'un registre à un autre ce ne sont pas les mêmes aspects du contenu d'une situation qui sont représentés. [23]

---

[23] Esta resposta que é mais centrada sobre as oportunidades dentro de cada sistema semiótico foi apresentada recentemente (BRESSON, 1987). Pode ser formulada como: a natureza do registro que é escolhido para

A possibilidade de conversão entre os registros permite ao indivíduo perceber outras características do caso representado. Isso exige do professor lidar com múltiplas representações do mesmo objeto. Posto isto, Damm argumenta que

> [...] quando trabalhamos com as funções, os gráficos, as tabelas e as equações são todos registros parciais desse objeto. Cada um desses registros é parcial e possui uma especificação própria. Perceber essas especificidades a cada registro e reforçá-las é um caminho para o entendimento do objeto como um todo (2008, p. 185).

Para representar a importância do argumento de Damm, retomam-se as representações evolvidas na situação problema da compra de pastéis e da corrida de táxi.

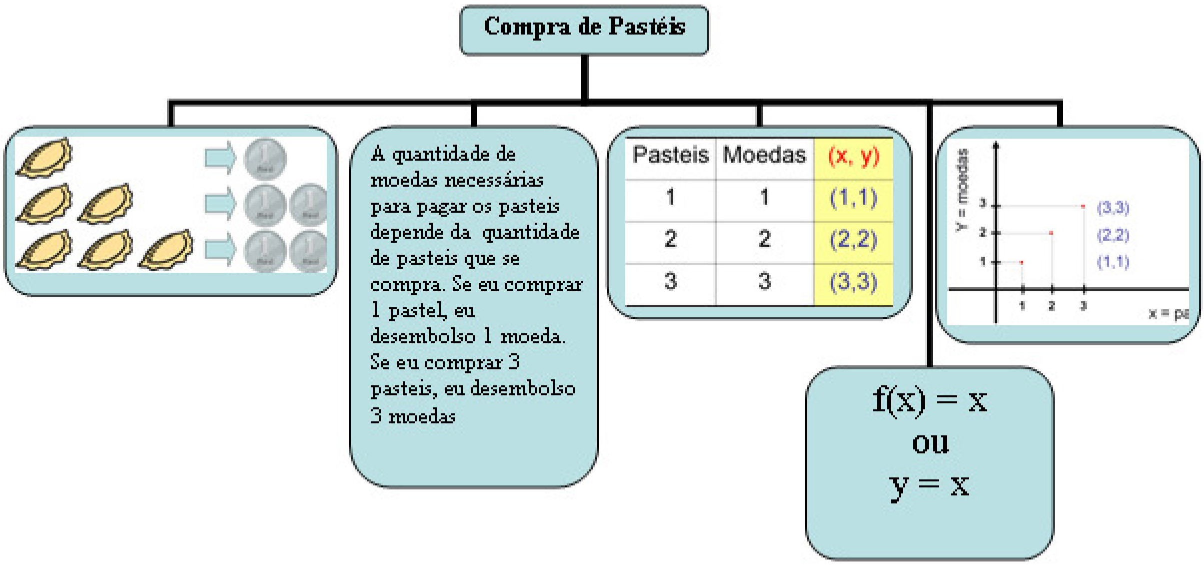


Ilustração 31 – Múltiplas representações da compra de pasteis.

---

representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) requer uma seleção de elementos significativos do conteúdo ou informação que se representa. Esta seleção é feita em função das possibilidades e das exigências semióticas do registro selecionado. A língua não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama oferece. Isto significa que a representação é cognitivamente parcial em comparação com aquilo que ela representa e que de um registro para outro não são os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que são representados (tradução própria).

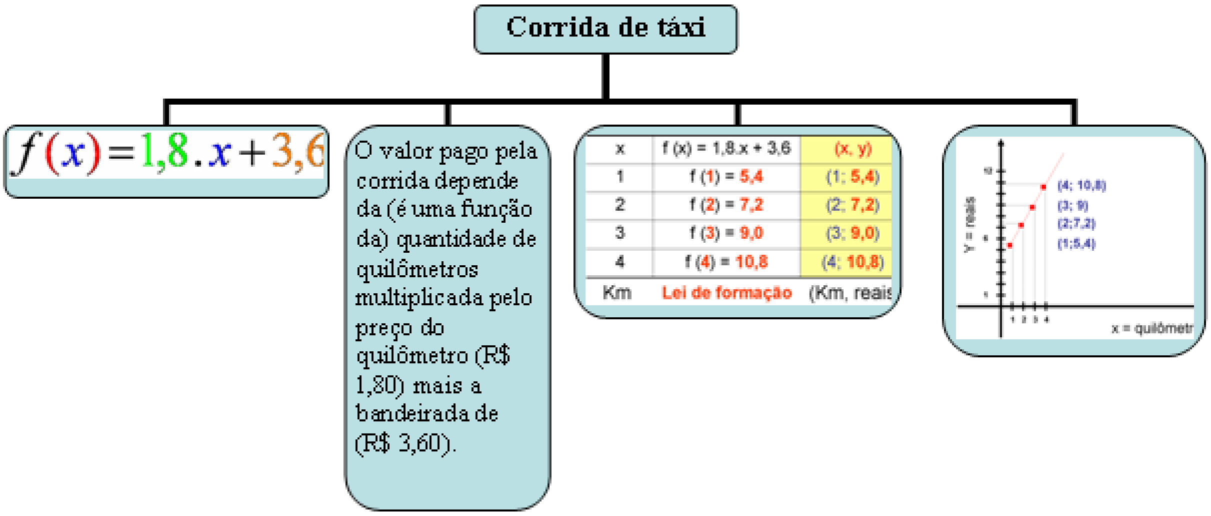


Ilustração 32 – Múltiplas representações da corrida de táxi.

A *conceitualização* sugere a coordenação de registros de representação. Essa coordenação não é automática, mas é condição essencial à compreensão dos objetos matemáticos. Contrapondo a isso, “podemos observar, em diferentes níveis da aprendizagem, um ‘fechamento’ de registros de representação junto aos alunos: isso acontecendo em todas as etapas do currículo” (DAMM, 2008, p. 185). Além disso, para vários alunos em distintos níveis de ensino, mudar de registro, converter uma representação, mudar a forma de representação, apresenta-se como uma intervenção complexa e muitas vezes irrealizável. Em outras palavras, é como se a compreensão de um conteúdo matemático se encontrasse limitada à configuração de representação empregada. Isso é facilmente exemplificado em adultos que sabem de cor fórmulas matemáticas como, por exemplo, a do teorema de Pitágoras, mas não conseguem convertê-la em nenhuma situação real.

Conforme o exposto, para exprimir a ideia de conceitualização, Duval (1993) apresenta duas hipóteses. Uma de que para a representação de um registro ser suficiente e permitir a compreensão conceitual do conteúdo representado, o registro de representação deve ser bem escolhido, assim como é geralmente fundamentada a estrutura do significado dos signos. A outra de que para compreender conceitualmente um conteúdo é necessário coordenar, ao menos, dois registros de representação. Esta coordenação de registros se apresenta por meio da agilidade e da naturalidade da atividade cognitiva de conversão.

Posto isto, o autor descreve a primeira hipótese por meio de uma figura que mostra a oposição entre dois tipos de signos.

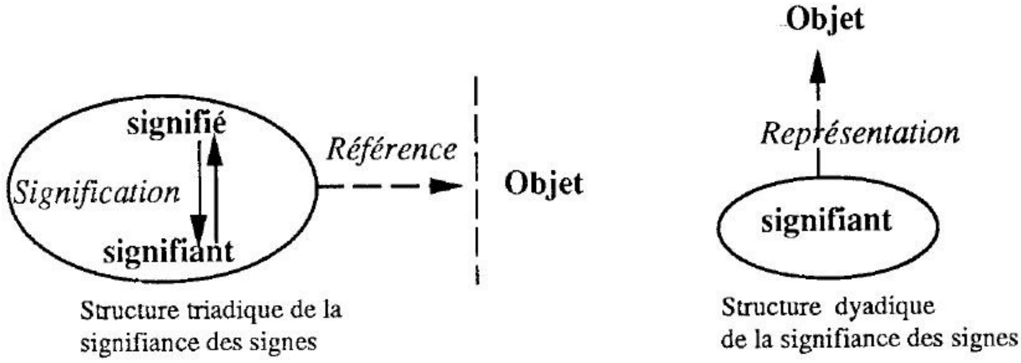


Ilustração 33 – Oposição entre dois tipos de signos

Na figura, há dois esquemas. O primeiro, à esquerda, apresenta a estrutura triádica da significância dos signos. No segundo esquema, à direita, mostra a estrutura diádica da significância dos signos.

A *estrutura triádica dos signos* apresenta três elementos, significante, significado e o objeto, que são intimamente ligados aos signos linguísticos ou figurais. Para os tipos de signos linguísticos ou figurais há duas características. A primeira descreve que a relação a um objeto está sujeita a uma relação de significação. Essa relação de significação é resultado do sistema da língua ou da percepção visual. A segunda característica apresenta a relação com um objeto que tem a possibilidade de não ser fundamentada em termos de discurso ou em termos de interpretações figurais. Entretanto, na *estrutura diádica dos signos* aparecem apenas dois elementos, o significante e o objeto. Para Duval (1993, p. 50), os signos diádicos, tais como os das notações matemáticas não possuem significação e são constituídos por uma relação com um objeto.

As estruturas triádicas e diádicas, frequentemente, não são distinguidas. Além disso, distinguindo ou não, não há dúvidas que o emprego de signos ou de representações de um só registro é suficiente para que a significância funcione cognitivamente para os sujeitos em situação de aprendizagem. Ou seja, a significância é depositada como uma condição imediata, trans-registro. Nesse trans-registro, as conversões de um registro de representação a outro parecem evidentes e insignificantes comparadas com uma das duas atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose, formação ou tratamento de uma representação.

Conforme Duval (1993, p. 51), "l'opinion selon laquelle l'activité de conversion ne peut pas soulever de difficultés majeures découle directement de cette hypothèse 1 et de la conception que l'on se fait de la structure de la représentation". [24] Além disso, quando nos referimos aos sujeitos com um bom desempenho em matemática, como os professores ou pesquisadores em matemática, é esta hipótese que se mostra satisfatória.

Para Duval (1993, p. 51), "elle n'est plus suffisante si l'on se réfère à des sujets en cours d'apprentissage (les élèves de collège ou de Lycée). Elle ne permet pas d'imaginer que la conversion des représentarions d'un registre à un autre puisse être une source importante de difficultés ou d'échecs". [25] Essa hipótese não nos deixa imaginar que a conversão de um registro de representação a outro tem a capacidade de ser uma admirável fonte de falhas ou problemas. Essas falhas e problemas não detêm a capacidade de destacar que não são da semiose e são da noese.

Contrapondo a primeira hipótese, Duval (1993) descreve a segunda hipótese, que foi apresentada anteriormente, por meio de uma ilustração que descreve a estrutura e o funcionamento das representações semióticas.

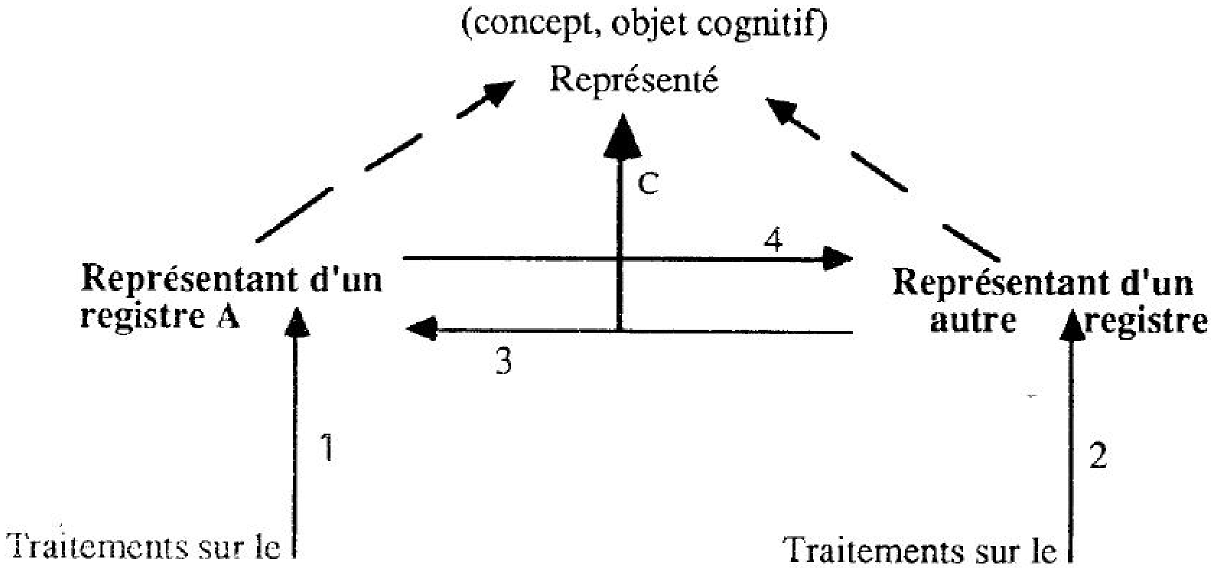


Ilustração 34 – Estrutura e o funcionamento das representações semiótica

[24] A opinião que a atividade de conversão não pode erguer as grandes dificuldades surge diretamente desta hipótese 1 e da concepção que tem se feito da estrutura da representação (tradução própria).

[25] Ela não é mais suficiente quando nos referimos aos sujeitos em curso de aprendizagem (os alunos de universidades ou de escolas). Ela não permite imaginar que a conversão das representações de um registro para um outro pode ser uma fonte importante de dificuldades ou de falhas (tradução própria).

A estrutura representada baseia-se na convicção de que a compreensão conceitual é fundamentada na coordenação da representação de pelo menos dois registros. Essa coordenação está distante de ser espontânea, conforme Duval (1993, p. 52),

> [...] elle ne semble pas pouvoir se réaliser dans le cadre d'un enseignement principalement déterminé par les contenus conceptuels. On peut observer à tous les niveaux un cloisonnement des registres de représentation chez la três grande majorité des élèves. Ceux-ci ne reconnaissent pas le même objet à travers des représentations qui en sont donnés dans des systèmes sémiotiques différents: l'écriture algébrique d'une relation et sa représentation graphique [...], l'écriture numérique d'un rapport et sa représentation géométrique sur une droite ou dans le plan (Lémonidis, 1990), l'énoncé d'une formule en français et l'écriture de cette formule sous forme littérale, la description d'une situation et sa mise en équation,... Ce cloisonnement subsiste même après un enseignement sur des contenus mathématiques ayant largement utilisé ces différents registres. [26]

Certamente, a carência de coordenação não evita qualquer compreensão. Porém, ela pouco beneficia as transformações e as aprendizagens futuras, é restringida ao contexto semiótico de apenas um registro. Para Duval, "elle rend les connaissances acquises peu ou pas mobilisables dans toutes les situations où elles devraient réellement être utilisées. En définitive, cette compréhension mono-registre conduit à un travail à l'aveugle, sans possibilité de contrôle du 'sens' de ce qui est fait" (1993, p. 52). [27]

Além disso, a coordenação da linguagem natural e das imagens mentais em seu emprego corrente não é satisfatória para garantir a coordenação dos vários registros de representações semióticas mobilizáveis em matemática, como em qualquer disciplina.

Para Duval, existem muitas razões que detêm a capacidade de explanar a profundidade e a amplitude do fenômeno de particionamento dos registros de representação. Segundo ele, isso pode ocorrer

---

[26] [...] ela não parece poder se realizar no quadro de uma educação principalmente determinada pelos conteúdos conceituais. Podemos observar em todos os níveis um particionamento dos registros de representação entre a grande maioria dos alunos. Estes não reconhecem o mesmo objeto através de representações que são dadas nos sistemas semióticos diferentes: a escrita algébrica de uma relação e a sua representação gráfica [...], a escrita numérica de uma relação e sua representação geométrica sobre uma linha reta ou um plano (LÉMONIDIS, 1990), o enunciado de uma fórmula em francês e a escrita desta fórmula sob a forma literal, a descrição de uma situação e sua aplicação em equação,... Este particionamento existe mesmo após uma aprendizagem sobre os conteúdos matemáticos amplamente utilizados estes diferentes registros (tradução própria).

[27] Ela torna o conhecimento adquirido pouco ou não mobilizável em todas as situações onde elas deveriam realmente ser utilizadas. Definitivamente, esta compreensão mono-registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do "sentido" do que é feito (tradução própria).

> lorsqu'il y a congruence entre la représentation de départ et la représentation d'arrivée, la conversion est triviale et pourrait presque être considérée, intuitivement, comme un simple codage. Mais lorsqu'il n'y a pas congruence non seulement la conversion devient coûteuse en temps de traitement mais elle peut créer un problème devant lequel le sujet sent désarmé. Alors, la possibilité d'une conversion ne vient même plus à l'esprit. Il n'y a aucune règle qui puisse déterminer a priori tous les cas de non-congmence entre les représentations de deux registres déterminés. Les obstacles liés au phénomène de non congruence ne sont pas des difficultés conceptuelles (DUVAL, 1993, p. 53). [28]

Diante deste cenário, o autor considera a segunda hipótese como uma condição categoricamente importante para que a primeira hipótese funcione cognitivamente. O fato é que a segunda hipótese não se efetua espontaneamente entre os sujeitos em diferentes níveis de escolaridade.

No próximo capítulo serão expostas as idéias fundamentais deste trabalho, como a criação de dois aplicativos para o ensino e aprendizagem de função com base na teoria de registros de representação semiótica.

[28] Quando há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, a conversão é trivial e quase poderia ser considerada, intuitivamente, como uma simples codificação. Mas quando não há congruência não somente a conversão trona-se caro em tempos de tratamento, mas ela pode criar um problema para o qual o sujeito se sente desarmado. Portanto, a possibilidade de conversão não é mais levada em conta. Não existe uma regra que pode determinar, a priori, todos os casos de não-congruência entre as representações de dois registros determinados. Os obstáculos ligados ao fenômeno de não congruência não são dificuldades conceituais (tradução própria).

3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS APLICATIVOS

Nesse capítulo apresenta-se a descrição do desenvolvimento de um ‘aplicativo instrucional’ e de um ‘protótipo de aplicativo de representações de função’, que foram construídos com base nos conceitos de conversão de registros de representação e de transposição informática. [29]

O ‘Aplicativo Instrucional’ é um material didático auto-explicativo que foi desenvolvido em setenta e sete *slides* da ferramenta *Microsoft Office Power Point 2003* para apresentar o conteúdo de definição de função. Esse material didático foi elaborado pensando na virtualização do ensino de matemática. Preocupando-se com a representação e a conceitualização dos objetos matemáticos na modalidade de ensino a distância, o material didático foi construído com base em representações semióticas enfatizando a conversão, uma vez que, segundo Duval, é por meio dela que o aluno chega à compreensão dos conceitos matemáticos. Diante disso, ele recebeu esse nome ‘aplicativo’ não pelo sentido estrito da palavra, mas pelo sentido de aplicabilidade, de aplicação.

O ‘protótipo de aplicativo’ é um *software* sobre representações de função desenvolvido em linguagem de programação *Java* e que foi nomeado de ‘*ApliRFunction* 1.0’. Esse aplicativo também foi elaborado pensando no ensino virtual e na mobilização de três registros de representação, algébrica, gráfica e tabelar, de acordo com a teoria de Duval.

Estes aplicativos encontram-se fundamentados na teoria de transposição informática, conforme o que se encontra no segundo capítulo e segunda seção dessa dissertação.

Os aplicativos foram reunidos em um ambiente virtual de aprendizagem que funciona tanto *on-line* quanto *off-line*. Além disso, o *software* e o ambiente virtual foram desenvolvidos em linguagem de programação *Java* e com as tecnologias: JWS e J2SE, que serão apresentadas na seção designada de protótipo *ApliRFunction* 1.0. Para dar conta de fazer tal união, foi necessário transcrever o aplicativo desenvolvido em *slides* do *power point* no *software Adobe Flash* de modo a desenvolver animações em *flash*, compatíveis com a linguagem de programação *Java*.

[29] Os conceitos e definições de funções apresentados nos aplicativos provêm de: Flemming; Luz; Wagner (2008), Dante (2005), Barreto Filho; Silva (2000), Giovanni; Bonjorno; Giovanni Jr. (2002), Santos; Gentil; Greco (2003) e Paiva (2003).

O ambiente foi desenvolvido para dar conta de um teste exploratório *online*. Além disso, desenvolveu-se um domínio, www.professoracintiarosa.com, uma página em linguagem html (*HyperText Markup Language*) e contratou-se um servidor para hospedagem. Ao disponibilizar o material *online*, encontraram-se alguns problemas tecnológicos, o servidor deixava de funcionar em alguns momentos, tornando sua utilização um meio imprevisível. Veja a seguir a interface da página em html.

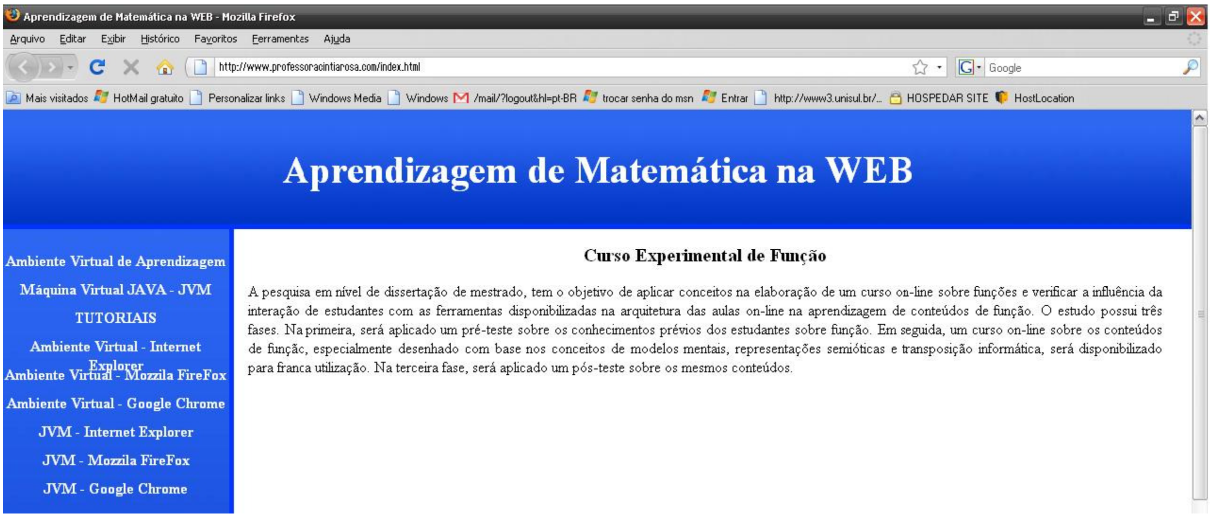


Ilustração 35 – Página em html.

A página foi intitulada ‘Aprendizagem de matemática na WEB’. Além disso, nela havia um *link* de acesso ao ambiente virtual, um *link* para baixar a máquina virtual Java, algumas informações sobre o teste exploratório e alguns tutoriais contendo informações para acessar o ambiente conforme o navegador que o usuário desejasse utilizar. Na sequência, veja a interface do ambiente virtual de aprendizagem.

Ilustração 36 – Ambiente virtual de aprendizagem.

O ambiente virtual de aprendizagem é dividido em três seções. A primeira seção apresenta uma mensagem de boas vindas ‘Bem Vindo!’, que aparece cada vez que o usuário acessar o ambiente, e o assunto ‘Função’ que se deseja tratar. A segunda seção apresenta as ferramentas: mural, professor, monitor, atividades (na horizontal) e turma, fórum, *chat*, *Software* Função (na vertical). E por fim, a terceira seção, mostra-se a Unidade I, as páginas 1-9, que contém os conteúdos sobre função, conceito e definição, e os botões para navegar nas páginas ‘Página Anterior’ e ‘Próxima Página’.

Diante deste cenário, para garantir a aplicação desses aplicativos em um teste exploratório e para não ter uma pesquisa que envolvesse variáveis antecedentes que pudessem prejudicar a intervenção didática, decidiu-se criar três alternativas de aplicação. [30]A primeira seria a aplicação do aplicativo instrucional no ambiente virtual desenvolvido em linguagem de programação Java disponibilizado no site da Web, composto do protótipo de aplicativo (*ApliRFunction* 1.0). A segunda, por sua vez, seria a versão on-line replicada off-line. E, por fim, a terceira alternativa, seria a aplicação do aplicativo instrucional desenvolvido em *slides* do Microsoft Power Point 2003 separado do *ApliRFunction* 1.0.

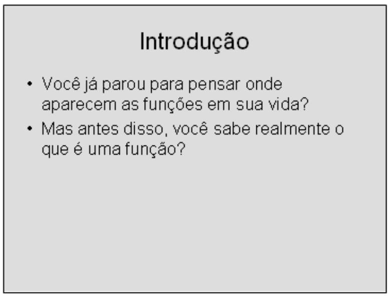
A descrição apresentada neste capítulo não deixa de ser uma conversão cognitivamente consciente externa da pesquisadora, conforme a teoria de representações semióticas que se encontra no segundo capítulo dessa dissertação. Para dar conta disso, este capítulo será dividido em duas seções destinadas, respectivamente, à apresentação do aplicativo e a apresentação do protótipo *ApliRFunction* 1.0.

3.1 O APLICATIVO INSTRUCIONAL

Nessa seção expõe-se a descrição dos setenta e sete *slides* que compõem o aplicativo sobre função.

1

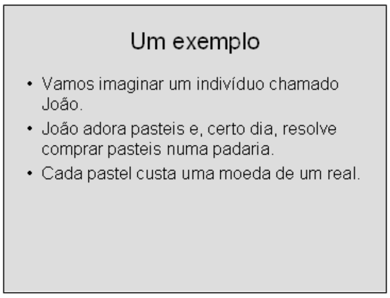
No primeiro *slide*, apresenta-se o título do material instrucional “Função: conceito e definição”.



2

No *slide* 2, mostra-se a introdução do aplicativo que é composta por duas questões: ‘Você já parou para pensar onde aparecem as funções em sua vida?’ e “Mas antes disso, você sabe realmente o que é uma função?’ Essas duas questões visam fornecer um contexto para a continuidade da aula.

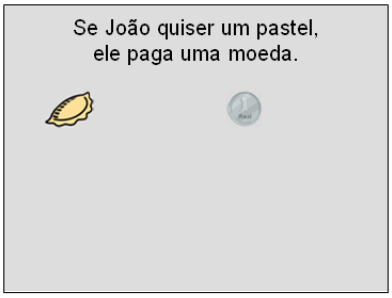
[30] Por variável antecedente, Rauen (2006, p. 127) define: “fator que se coloca antes da relação ‘x-y’ e que pode ampliar, diminuir ou anular a influência de ‘x’ sobre ‘y’. Na relação temporal, a variável antecedente surge antes mesmo da variável independente”.



3

No *slide* 3, expõe-se um exemplo sobre a compra de pasteis. Textualmente: “Vamos imaginar um indivíduo chamado João. João adora pasteis e, certo dia, resolve comprar pasteis numa padaria. Cada pastel custa uma moeda de um real”.

Conforme a teoria de representações semióticas, nesse *slide*, mostra-se a formação de uma representação identificável de uma situação problema que envolve João por meio de um sistema semiótico em linguagem natural.



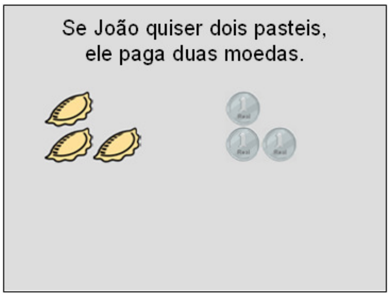
4

No *slide* 4, apresenta-se o raciocínio em *modus ponens*, P → Q ou Se P, então Q, tal que o antecedente é a intenção de adquirir um pastel e o consequente é o custo do pastel em real. Textualmente: “Se João quiser um pastel, ele paga uma moeda”. Para ilustrar a correlação fundamental para o conceito de função, ocorre aqui uma conversão entre a linguagem natural e a linguagem pictórica ou figural, mediante a imagem de um pastel à esquerda e a consequente moeda necessária para sua compra à direita.

Nesse *slide*, mostra-se o registro da compra de um pastel por meio de dois sistemas semióticos: em linguagem natural ou materna e em linguagem figural. Ambos os registros são representações semióticas (semiose) dos conceitos envolvidos: número de pasteis, número de moedas, e a relação implícita entre pasteis e moedas (noese).

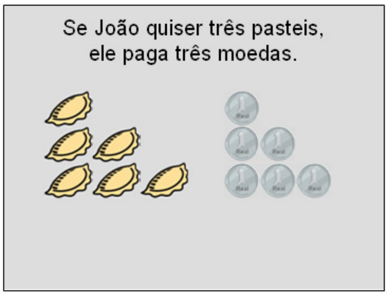
Em ‘semiose’, cada registro possui suas próprias formações de representação identificáveis. No caso do *slide* apresentado, o registro em linguagem natural é apresentado em língua portuguesa, possui regras sintáticas, semânticas, lexicais e gramaticais, por sua vez, o registro em linguagem figural possui traços, formas e regras (linhas, cores, números e etc.) que identificam um pastel e uma moeda. Além disso, observa-se que a representação em linguagem natural ocorre ao modo de uma inferência por *modus ponens* (P→Q) que, por sua vez, pode ser pensada como uma espécie de tratamento em língua natural.

Saliente-se que a ‘conversão’ da representação em linguagem natural para linguagem figural é ‘não congruente’. Mesmo na representação figural mais completa do problema, mais adiante, parte da situação apresentada em linguagem natural não será representada, porque não será possível responder, entre outras questões, onde está a representação de ‘João’ nas ilustrações?



5

No *slide* 5, há uma continuidade do raciocínio e da ilustração. Textualmente: "Se João quiser dois pasteis, ele paga duas moeda". No campo destinado às figuras, mantém-se a correlação entre um pastel e uma moeda, mas agora acrescenta a correlação entre dois pasteis e duas moedas. Como já frisado, o objetivo é demonstrar a função crescente de pasteis à esquerda, causa, e moedas à direita, consequência.



6

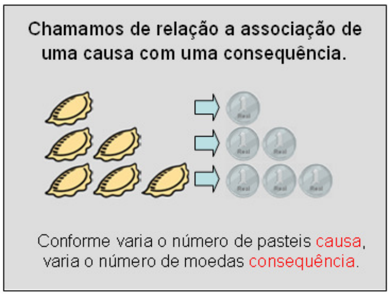
No *slide* 6, prossegue a correlação crescente. Textualmente: "Se João quiser três pasteis, ele paga três moedas". No campo das figuras, uma terceira linha se agrega correlacionando os três pasteis com as três moedas. Essa sequência de pasteis e moedas em ordem crescente nos permite elaborar uma representação mental da compra de pastéis.

7

No *slide* 7, a correlação torna-se explícita. Para dar conta disso, três elementos são agregados. No cabeçalho, há a seguinte afirmação: "Podemos dizer que pasteis e moedas estão relacionados". No campo destinado às figuras, em cada linha, mediando pasteis e moedas, acrescentou-se uma flecha a direita (→) indicando causa e consequência da correlação. No rodapé, como que corroborando a intenção, acrescenta-se: "Conforme varia o número de pasteis, varia o número de moedas".

Com base em Duval, apresenta-se a relação entre pasteis e moedas por meio de um registro em linguagem natural ou materna e em linguagem figural. O registro em linguagem natural é constituído por códigos, como as letras do alfabeto usadas para formar as palavras. O registro em linguagem figural, por sua vez, também é constituído por códigos, como a seta (→) que há entre os ícones de pasteis e moedas, conforme esclarecido na fundamentação teórica.

Diante do exposto, observa-se que o registro em linguagem figural, noeticamente, está de acordo com o conceito de 'economia de tratamento'. Além disso, a relação existente entre as linguagens natural e figural é de 'complementaridade de registro'.

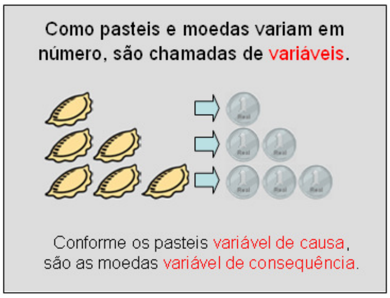


8

No *slide* 8, no cabeçalho, explicita-se em linguagem natural a relação de causa e consequência. Textualmente: "Chamamos de relação a associação de uma causa com uma consequência". No meio do *slide*, mantêm-se as figuras, tais como no *slide* anterior. No rodapé, ao texto do *slide* anterior, acrescenta-se em vermelho as palavras 'causa' e 'consequência'. Textualmente: "Conforme varia o número de pasteis *causa,* varia o número de moedas *consequência*".

O objetivo desse *slide* é o de marcar explicitamente os elementos postos em relação, uma vez que se quer demonstrar inúmeras formas semióticas de se expressar o conceito matemático da função.

O *slide* destaca a associação de causa/consequência entre pasteis e moedas por meio de registros de representação que compõem sistemas semióticos em linguagem natural, que nesse caso é uma formação de uma representação identificável; e em linguagem figural que, por sua vez, foi mostrado e analisado no *slide* anterior.



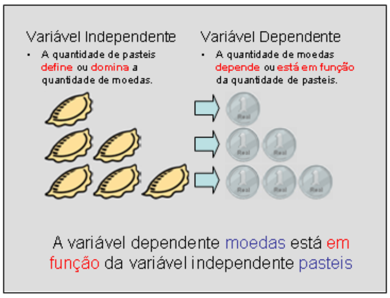
9

No *slide* 9, somente cabeçalho e rodapé são modificados. O objetivo, aqui, é de apresentar o conceito de 'variável', apresentada em vermelho. Textualmente: "Como pasteis e moedas variam em números, são chamadas de *variáveis*" e, respectivamente, "Conforme os pasteis variável de causa, são as moedas, variável de consequência".

10

No *slide* 10, apresenta-se a ideia de dependência entre pasteis e moedas no cabeçalho (a palavra 'depende' está em vermelho). Textualmente: "O número de moedas, então, *depende* do número de pasteis". Mantida a área central com as mesmas figuras, o rodapé visa apresentar o conceito de função: "O número de moedas está **em função** do número de pasteis".

O objetivo desse *slide* é estabelecer um contato entre a noção de dependência e a noção de função.

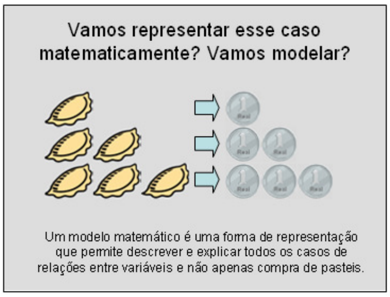


11

No *slide* 11, destaca-se a noção de variáveis independentes e dependentes que há entre os pasteis e as moedas.

Diante disso, há duas afirmações no cabeçalho, uma para variável independente e outra para variável dependente, respectivamente: "A quantidade de pasteis *define* ou *domina* a quantidade de moedas" e "A quantidade de moedas *depende* ou *está em função* da quantidade de pasteis". No centro, mantém-se o registro figural. No rodapé, por sua vez, acrescenta-se a seguinte frase: "A variável dependente *moedas* está **em função** da variável independente *pasteis*". Repare-se que as palavras 'moedas' e 'pasteis' estão em azul e a sequência lexical 'em função' é mantida em vermelho.

O objetivo aqui é mostrar que moedas é uma variável dependente e pasteis uma variável independente.

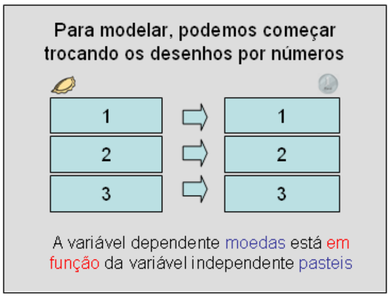


12

No cabeçalho do *slide* 12, há dois convites que exploram a possibilidade de mudança de representação, ou seja, mudança de registro. Textualmente: “Vamos representar esse caso matematicamente?” e “Vamos modelar?”. O *slide* foi proposto no sentido de um convite à interlocução. Mantida a área central com as mesmas figuras, no rodapé, apresenta-se uma definição de modelo matemático. Textualmente: “Um modelo matemático é uma forma de representação que permite descrever e explicar todos os casos de relações entre variáveis e não apenas compra de pasteis”.

O objetivo era marcar a ideia de que existem outras formas de representar a situação problema apresentada, por meio da modelagem e da mudança de registro.

Teoricamente, nesse caso, segue-se a análise apresentada nos *slides* 7-9. Contudo, há uma diferença no texto apresentado no cabeçalho, é uma indagação; desse modo, o tratamento aqui também é distinto dos referidos *slides*.



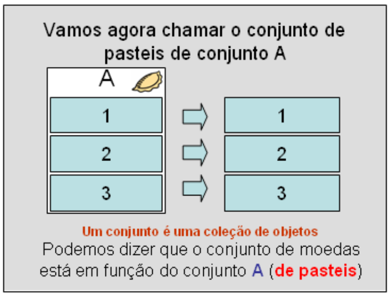
13

No *slide* 13, apresenta-se uma sugestão de como modelar a situação da compra de pasteis. Textualmente: “Para modelar, podemos começar trocando os desenhos por números”. Na sequência aparece o ícone de um pastel e o ícone de uma moeda. Abaixo de cada um desses ícones há três retângulos com números que correspondem à quantidade de pasteis e moedas, conforme os registros apresentado nos *slides* 6-12, remetendo-se à ideia de conjunto. Entre esses conjuntos mantêm-se as três setas que implicam/relacionam, respectivamente que, um pastel (1) corresponde a uma moeda (1), dois pasteis (2) correspondem a duas moedas (2) e três pasteis (3) correspondem a três moedas (3).

Os conjuntos de pasteis e moedas possuem formas, dados e traços próprios. Diante disso, têm maneiras próprias de tratamento, podendo ser considerados como outro registro de representação semiótica que representa a situação de compra de pasteis. Esses conjuntos foram elaborados com base nas funções de objetivação, de expressão e de tratamento intencional. Observe-se que esse registro é uma transição do sistema semiótico em linguagem figural para o sistema semiótico em linguagem simbólica.

No rodapé, mantém-se agora a sentença do *slide* 11, a relembrar: “A variável dependente *moedas* está **em função** da variável independente *pasteis”*. O objetivo desse *slide* é mostrar que há outra maneira de representar o mesmo problema dos pasteis e das moedas, ou seja, por meio de um modelo matemático.

Nesse *slide*, ocorreu uma conversão de linguagem figural para linguagem simbólica, que exige tratamento próprio. Além disso, a conversão fica evidente na formação de uma representação identificável apresentada no cabeçalho. Além disso, ocorreu uma mudança de quadro teórico nesse processo de conversão.



14

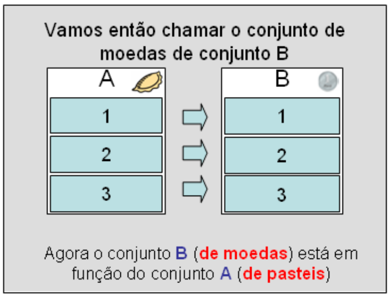
No *slide* 14, sugere-se como abstrair os conjuntos de pastéis e moedas. Para dar conta disso, no lado esquerdo do ícone do pastel, acrescenta-se a representação ‘A’. Além disso, um retângulo maior (em cor branca) circunscreve os retângulos da esquerda. Nesse *slide*, o possível conjunto moedas perde seu ícone, uma vez que se trata de um *slide* que visa demonstrar o processo de mudança.

No rodapé desse *slide*, por sua vez, apresenta-se o conceito de conjunto. Textualmente: “Um conjunto é uma coleção de objetos”. Além disso, mais abaixo, completa-se: “Podemos dizer que o conjunto de moedas está em função do conjunto *A* (**de pasteis**)”, sendo ‘A’ em azul e ‘de pasteis’ em vermelho.

O objetivo do *slide* 14 é mostrar o processo de mudança, de abstração e de modelagem da situação problema da compra de pasteis. Além disso, apresentar o conceito de conjuntos.

No caso, prosseguem as conversões nesse *slide*. O registro em linguagem figural (em transição) sofreu modificações com o acréscimo da expressão ‘A’ ao lado do ícone do pastel, representando a conversão do sistema semiótico em linguagem figural para a linguagem simbólica. Além disso, as considerações apresentadas no rodapé são formações de representação identificáveis de conjunto.

Para além do escopo do registro em linguagem natural (cabeçalho e rodapé), observa-se que os códigos ‘setas’ (→) apresentados nos sistemas semióticos em linguagem figural permanecem nos sistemas em linguagem simbólica, conforme analisado no *slide* 7.



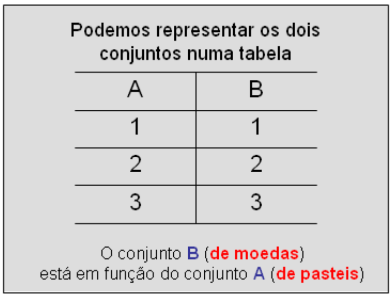
15

No *slide* 15, completa-se a transição. Com base na estrutura do *slide* anterior, ao lado esquerdo do ícone da moeda, acrescenta-se a expressão ‘B’ e circunscrevem-se os retângulos da direita com um retângulo em cor branca.

No rodapé, agora o texto é ligeiramente diferente, acrescentando as mudanças e destacando também a expressão ‘B’ e ‘A’ em azul, ‘de moedas’ e ‘de pasteis’ em vermelho. Textualmente: “Agora o conjunto *B* (**de moedas**) está em função de *A* (**de pasteis**)”.

O objetivo desse *slide* é mostrar a transição completa da mudança de registro, do modelo matemático.

Nesse *slide*, prosseguem as conversões em comparação com o *slide* anterior. Essa conversão é explícita na formação de uma representação identificável apresentada no cabeçalho e no rodapé (com a palavra ‘Agora’). Além disso, os registros (conjunto A ‘pastel’ e conjunto B ‘moedas’) que antes eram apresentados em linguagem figural são apresentados em linguagem simbólica. Os conjuntos apresentados em linguagem simbólica evidenciam a relação, propiciando economia de tratamento em noese.



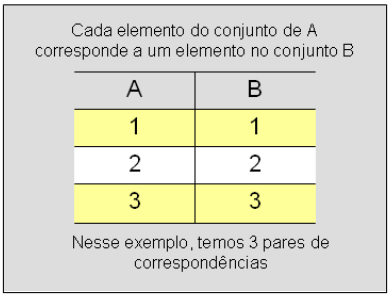
16

No *slide* 16, convida-se a transpor os conjuntos na forma de uma tabela. Textualmente "Podemos representar os dois conjuntos numa tabela".

No centro do *slide*, há uma tabela que possui duas colunas e quatro linhas. Na casela superior esquerda (primeira linha, primeira coluna) apresenta-se a letra 'A' (que representa pasteis); na casela superior direita (primeira linha, segunda coluna) mostra-se a letra 'B' (que representa moedas); seguem-se as correlações de pasteis e moedas nas linhas abaixo.

No rodapé do *slide*, mantém-se o texto do *slide* 15, exceto pela palavra 'agora'. Textualmente: "O conjunto *B* (**de moedas**) está em função do conjunto *A* (**de pasteis**)".

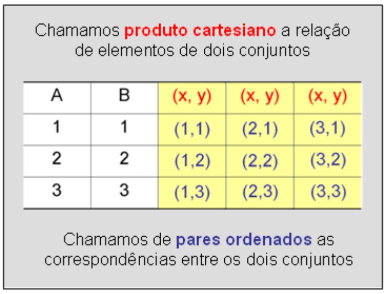
O objetivo desse *slide* é mostrar a conversão dos dados do conjunto de pasteis e moedas apresentados no *slide* anterior em uma tabela que, por sua vez, possui 'tratamento' próprio, destacado no rodapé.



17

No *slide* 17, o objetivo é destacar a correspondência entre as linhas da tabela. No cabeçalho, apresenta-se: "Cada elemento do conjunto A corresponde a um elemento no conjunto B". No centro desse *slide*, a tabela anterior é modificada para destacar com cores cada uma das linhas. Para corroborar essa intenção, afirma-se no rodapé: "Nesse exemplo, temos 3 pares de correspondências".

Teoricamente, observa-se que os textos apresentados no cabeçalho e no rodapé, em linguagem natural, são 'formações de representação identificáveis'. Além disso, nota-se também, que esses textos 'complementam' o registro tabelar.



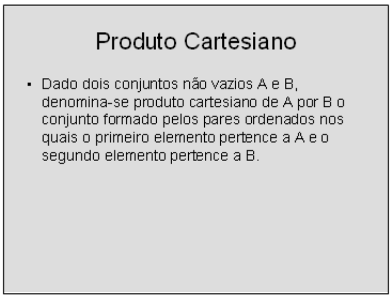
18

No *slide* 18, um processo de 'tratamento' entra em marcha. No cabeçalho, apresenta-se uma definição: "Chamamos **produto cartesiano** a relação de elementos de dois conjuntos".

No centro, à tabela do *slide* anterior, acrescenta-se uma terceira coluna. Na primeira linha dessa coluna, apresenta-se uma representação do produto cartesiano **(x, y)**. Para cada uma das linhas, como se pode conferir ao lado, apresentam-se as correspondências de pares ordenados (1, 1), (2, 2) e (3, 3).

Justamente o conceito de par ordenado passa a ser o objeto do rodapé. Textualmente: "Chamamos de *pares ordenados* as correspondências entre os dois conjuntos".

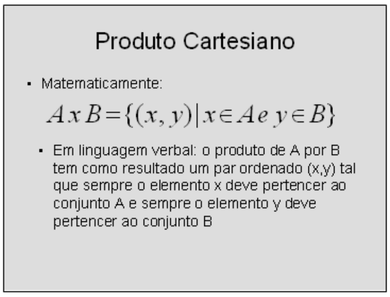
O propósito desse *slide* é mostrar o conceito de produto cartesiano aproveitando as tabelas apresentadas nos *slides* anteriores.



19

No *slide* 19, expõe-se a definição de produto cartesiano. Textualmente: "Dado dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se produto cartesiano de A por B o conjunto formado pelos pares ordenados nos quais o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B".

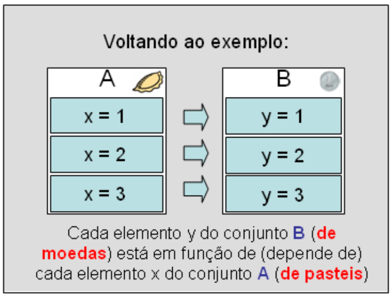
O objetivo desse *slide* é apresentar o conceito de produto cartesiano em linguagem natural.



20

O *slide* 20, mostra a representação matemática do produto cartesiano: $A\ x\ B = \{(x,\ y) \mid x \in A\ e\ y \in B\}$. Em seguida, traduz-se essa representação em linguagem natural. Textualmente: “Em linguagem natural: o produto de A por B tem como resultado um par ordenado (x, y) tal que sempre o elemento x deve pertencer ao conjunto A e sempre o elemento y deve pertencer ao conjunto B”.

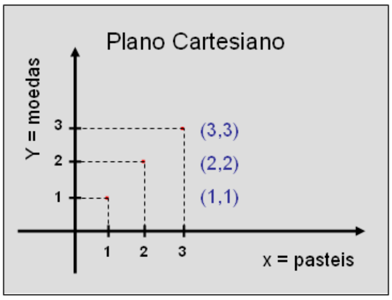
O propósito desse *slide* é representar o conceito de produto cartesiano em dois registros distintos do que foi apresentado no *slide* anterior, como: linguagem algébrica (simbólica) e linguagem natural.



21

No *slide* 21, retorna-se ao exemplo da compra de pasteis. Nele, apresentam-se os conjuntos A (de pasteis) e B (de moedas). Nas subdivisões dos conjuntos A de pasteis (retângulos em cor azul), apresentam-se ‘x’ igual a ‘1’, ‘x’ igual a ‘2’ e ‘x’ igual a ‘3’, e, por sua vez, nas subdivisões do conjunto B de moedas, mostram-se ‘y’ igual a ‘1’, ‘y’ igual a ‘2’ e ‘y’ igual a ‘3’. Após essa representação de conjuntos, define-se no rodapé: “Cada elemento y do conjunto *B* (**de moedas**) está em função de (depende de) cada elemento x do conjunto *A* (**de pasteis**)”.

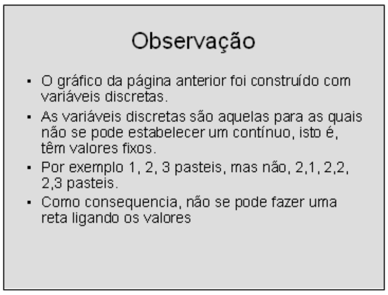
O objetivo desse *slide* é apresentar a ideia do conceito de função por meio da linguagem natural, ‘formação de uma representação identificável’, ‘complementada’ com a ilustração em linguagem simbólica de conjuntos.



22

No *slide* 22, mais uma vez pensando na conversão de registros, apresenta-se a representação gráfica (plano cartesiano) da situação problema de João (compra de pasteis). Nela, há uma reta horizontal com uma seta na extremidade direita nomeada de ‘x’ igual a ‘pasteis’ dividida em três partes iguais, onde cada divisão recebe, respectivamente, 1, 2 e 3; essa mesma reta é cortada por outra reta vertical que, juntas, formam um ângulo de 90º. Essa reta vertical também é dividida em três partes iguais, onde cada parte também recebe, respectivamente, 1, 2 e 3. Nela também há uma seta, no entanto, na sua extremidade superior, e foi intitulada de ‘y’ igual a ‘moedas’. Cada uma de suas partes se “unem” por meio de linhas pontilhadas que se cruzam. Cada intersecção dessas linhas recebe um ponto, que corresponde a um par ordenado (1, 1), (2, 2) e (3, 3).

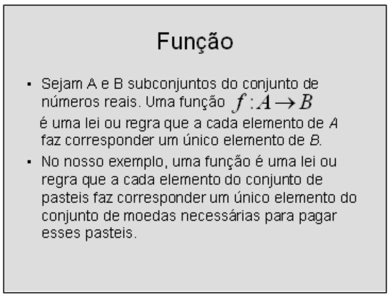
Essa representação gráfica possui formas, dados e traços próprios, diante disso, tem maneiras próprias de tratamento. Desse modo, pode ser considerada como outro registro de representação semiótica que representa a situação da compra de pasteis. Foi elaborado com base nas funções de objetivação, de expressão e de tratamento intencional.



23

No *slide* 23, corresponde a quatro observações que levam em conta o problema dos pasteis ser elaborado com variáveis discretas. Textualmente: “O gráfico da página anterior foi construído com variáveis discretas”; “As variáveis discretas são aquelas para as quais não se pode estabeleces um contínuo, isto é, têm valores fixos”; “Por exemplo, 1, 2, 3 pasteis, mas não, 2,1; 2,2; 2,3 pasteis”. Por fim, a quarta observação diz: “Como consequência, não se pode fazer uma reta ligando os valores”.

O objetivo desse *slide* é mostrar ‘formações de representação identificáveis’ de variáveis discretas.

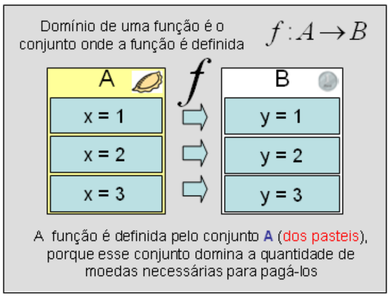


24

No *slide* 24, expõe-se a definição do objeto matemático função. Textualmente: “Sejam A e B subconjuntos do conjunto de números reais. Uma função $f: A \to B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B”.

Além disso, relaciona-se a definição de função com o exemplo da compra de pasteis: “No nosso exemplo, uma função é uma lei ou regra que a cada elemento do conjunto de pasteis faz corresponder um único elemento do conjunto de moedas necessárias para pagar esses pasteis”.

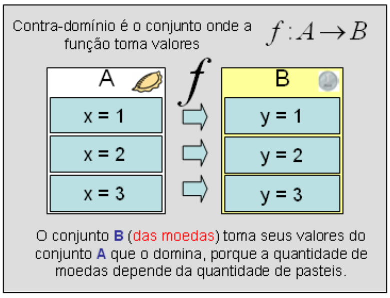
Apresenta-se aqui, em linguagem natural, a ‘formação de uma representação identificável’ de função.



25

No *slide* 25, retoma-se aos conjuntos A (de pasteis) e B (de moedas) para definir o conceito de domínio de uma função. No cabeçalho, define-se: “Domínio de uma função é o conjunto onde a função é definida” e “$f: A \to B$”. No centro do *slide*, mostra-se o registro dos conjuntos ‘A’ e ‘B’, sendo o conjunto ‘A’ apresentado como destaque (em cor amarela). Por fim, afirma-se no rodapé do *slide*: “A função é definida pelo conjunto *A* (**dos pasteis**), porque esse conjunto domina a quantidade de moedas necessárias para pagá-los”.

Teoricamente, no cabeçalho e no rodapé são apresentadas a ‘formação de uma representação identificável’ de domínio em linguagem natural. Além disso, essa representação em linguagem natural ‘complementa’ o registro apresentado em linguagem simbólica.

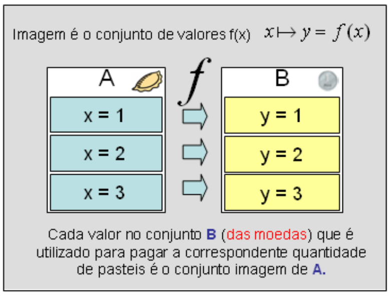


26

No cabeçalho do *slide* 26, retoma-se aos conjuntos A (de pasteis) e B (de moedas) para definir o conceito de contradomínio de uma função. Textualmente: "Contradomínio é o conjunto onde a função $f : A \to B$ toma valores".

No centro, mostra-se o registro dos conjuntos 'A' e 'B', sendo agora 'B' apresentado como destaque (em cor amarela) e no rodapé afirma-se: "O conjunto *B* (**das moedas**) toma seus valores do conjunto *A* que o domina, porque a quantidade de moedas depende da quantidade de pasteis".

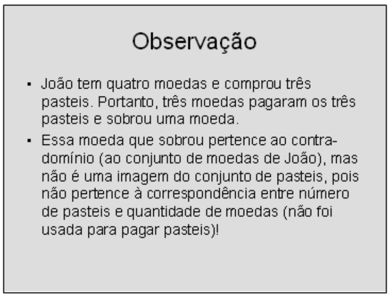
As considerações teóricas apresentadas no *slide* 25 são válidas para este *slide*, para isto, muda-se apenas a palavra 'domínio' para 'contra-domínio'.



27

No *slide* 27, retomam-se os conjuntos 'A' (de pasteis) e 'B' (de moedas) para definir a imagem de uma função. Portanto, no cabeçalho, define-se que a "Imagem é o conjunto de valores f(x) $x\,\alpha\; y = f(x)$". Na sequência mostra-se o registro dos conjuntos A e B, sendo agora as subdivisões do conjunto B apresentadas como destaque (em cor amarela). No rodapé desse *slide* afirma-se: "Cada valor no conjunto *B* (**das moedas**) que é utilizado para pagar a correspondente quantidade de pasteis é o conjunto imagem de *A*".

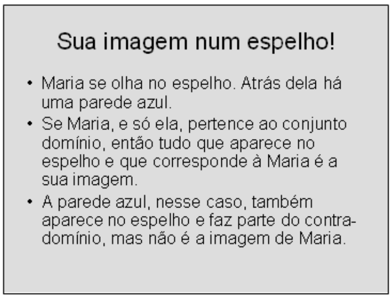
As considerações teóricas apresentadas no *slide* 25 também são válidas para este *slide*, para isto, troca-se a palavra 'domínio' por 'imagem'.



28

No *slide* 28, apresentam-se duas observações. A primeira diz que "João tem quatro moedas e comprou três pasteis. Portanto, três moedas pagaram os três pasteis e sobrou uma moeda". A segunda observação diz que "essa moeda que sobrou pertence ao contra-domínio (ao conjunto de moedas de João), mas não é uma imagem do conjunto de pasteis, pois não pertence à correspondência entre número de pasteis e quantidade de moedas (não foi usada para pagar pasteis)!".

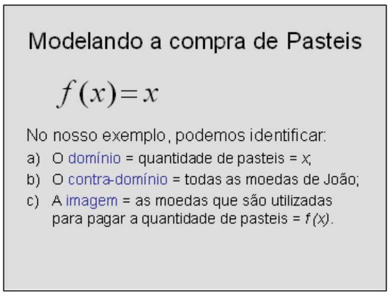
Observa-se que o registro de representação em linguagem natural que trata dos assuntos: domínio, contra-domínio e imagem, é uma 'complementaridade de registro' da situação problema de João que foi apresentada em linguagem simbólica nos *slides* 25-27.



29

No *slide* 29, apresenta-se outra forma de dizer o que é domínio, contra-domínio e imagem de uma função. O objetivo, aqui, é o de possibilitar ao usuário construir um modelo mental que o ajude a compreender os conceitos de domínio, contradomínio e imagem. Diante disso, teoricamente, essa representação de domínio, imagem e contra-domínio são 'tratamentos' em semiose.

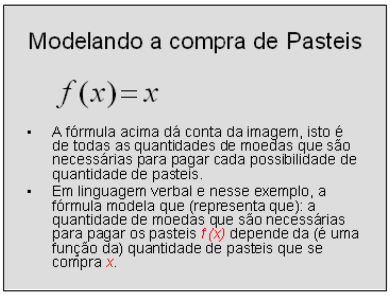
No cabeçalho, há o título: "Sua imagem num espelho!". Adiante, apresenta-se o seguinte texto: "Maria se olha no espelho. Atrás dela há uma parede azul. Se Maria, e só ela, pertence ao conjunto domínio, então tudo que aparece no espelho e que corresponde à Maria é a sua imagem. A parede azul, nesse caso, também aparece no espelho e faz parte do contra-domínio, mas não é a imagem de Maria".



30

No *slide* 30, “Modelando a compra de Pasteis”, mostra-se a modelagem da compra de pasteis, “f(x) = x”. Para cada elemento da modelagem, há uma explicação. Textualmente: “No nosso exemplo, podemos identificar: a) O domínio = quantidade de pasteis = x; b) O contra-domínio = todas as moedas de João; e c) A imagem = as moedas que são utilizadas para pagar a quantidade de pasteis = f (x).”

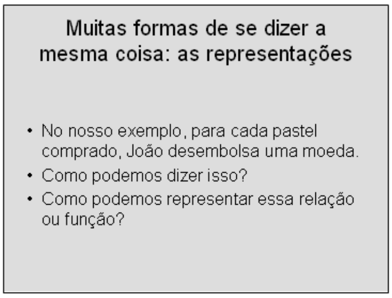
Teoricamente, esse modelo em linguagem simbólica (algébrica) é uma ‘conversão’ dos registros de representação da compra de pastéis que vem ‘complementar’ os registros apresentados até aqui, representação gráfica, tabelar, conjuntos e linguagem natural. Além disso, essa conversão não representa só a situação problema de João, bem como, mas sim as mudanças nos conceitos de domínio, contra-domínio e imagem que ocorrem nesse registro.



31

No *slide* 31, com o mesmo título do *slide* anterior, retoma-se à modelagem “f(x) = x” da compra de pastéis. Além disso, mostra-se a relação do modelo “f(x) = x” com a situação da compra de pasteis e a representação da modelagem em linguagem natural. Textualmente: “A fórmula acima dá conta da imagem, isto é de todas as quantidades de moedas que são necessárias para pagar cada possibilidade de quantidade de pasteis.” e “Em linguagem natural e nesse exemplo, a fórmula modela que (representa que): a quantidade de moedas que são necessárias para pagar os pasteis **f(x)** depende da (é uma função da) quantidade de pasteis que se compra **x**”.

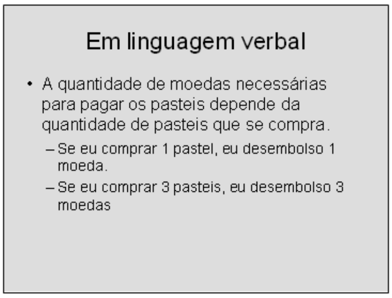
Com base na teoria de representação semiótica, apresenta-se nesse *slide* a ‘formação de uma representação identificável’ da fórmula ‘f(x) = x’.



32

No *slide* 32, faz-se referência a "Muitas formas de se dizer a mesma coisa: as representações". Esse *slide* tem o objetivo explícito de introduzir a ideia da multiplicidade semiótica, convidando o usuário a pensar nas possibilidades de representação. Textualmente: "No nosso exemplo, para cada pastel comprado, João desembolsa uma moeda. Como podemos dizer isso? Como podemos representar essa relação ou função?".

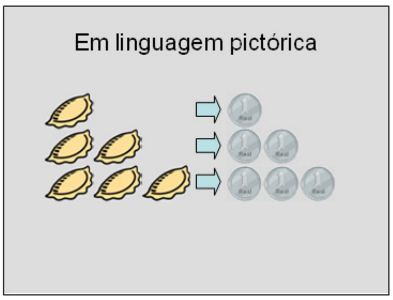
A representação apresentada aqui pertence a sistemas semióticos em linguagem natural. O conteúdo dessa representação infere o resgate das várias formas de representação da situação da compra de pasteis de João. Além disso, ela dá ênfase ao objeto matemático que foi colocado em evidência no *slide* 1.



33

No *slide* 33, apresenta-se uma primeira possibilidade "Em linguagem natural". Textualmente: "A quantidade de moedas necessárias para pagar os pasteis depende da quantidade de pasteis que se compra. Se eu comprar 1 pastel, eu desembolso 1 moeda. Se eu comprar 3 pasteis, eu desembolso 3 moedas".

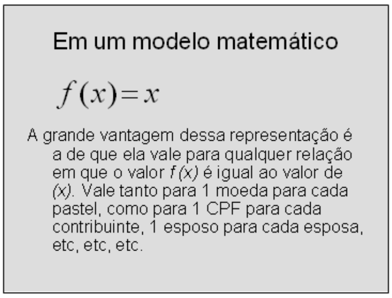
O objetivo desse *slide* é mostrar uma das representações semióticas da situação problema da compra de pasteis: a linguagem natural.



34

No *slide* 34, mostra-se a representação da situação da compra de pasteis "Em linguagem pictórica", que é composta por imagens de seis pasteis em ordem crescente, um pastel, dois pasteis e três pasteis, mais três setas que dão a ideia de implicação em direção a seis moedas, que também se encontram em ordem crescente, uma moeda, duas moedas e três moedas.

O objetivo desse *slide* é apresentar a representação pictórica da compra dos pasteis.



35

No *slide* 35, mostra-se o mesmo caso “Em um modelo matemático”, a saber: “f(x) = x”.

Além disso, comenta-se: “A grande vantagem dessa representação é a de que ela vale para qualquer relação em que o valor f (x) é igual ao valor de (x). Vale tanto para 1 moeda para cada pastel, como para 1 CPF para cada contribuinte, 1 esposo para cada esposa, etc., etc., etc.”.

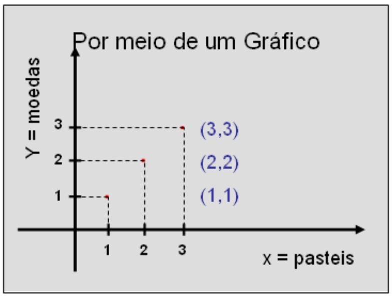
O objetivo do *slide* é mostrar mais uma das representações da compra: a representação algébrica.

Pasteis	Moedas	(x, y)
1	1	(1,1)
2	2	(2,2)
3	3	(3,3)

36

No *slide* 36, apresenta-se o problema da compra dos pasteis “Por meio de uma tabela”, contendo quatro linhas e três colunas. As colunas representam, respectivamente, o conjunto de pasteis, o conjunto de moedas e o subconjunto do produto cartesiano (x, y) de pasteis e moedas. As linhas estabelecem as devidas correlações entre pasteis e moedas.

O objetivo desse *slide* é mostrar outro registro da situação da compra de pasteis: a representação tabular.



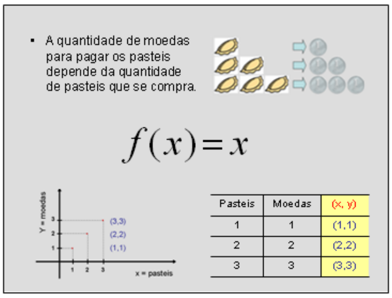
37

No *slide* 37, mostra-se o mesmo problema “Por meio de um Gráfico”. Nele, há uma reta horizontal com uma seta na extremidade direita nomeada de “x = pasteis”. Essa mesma reta é cortada por uma reta vertical nomeada “y = moedas” que, juntas, formam um ângulo de 90º. Nesse gráfico a correlação entre pasteis e moedas se dá por pontos na interseção de linhas que partem das retas e representam a quantidade respectiva, de pasteis e moedas. Cada ponto é considerado um par ordenado (1,1), (2, 2) e (3, 3).

O objetivo desse *slide* é mostrar mais uma representação semiótica que representa a situação da compra de pasteis de João: a representação gráfica.

38

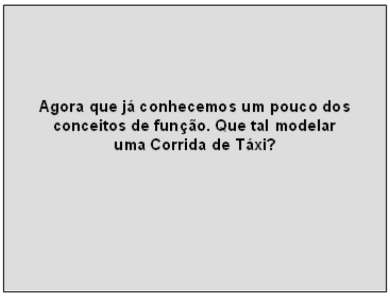
No *slide* 38, destaca-se o enunciado: “Múltiplas Representações”.



39

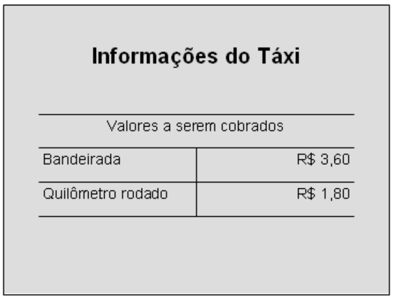
No *slide* 39, expõem-se as várias representações semióticas da compra de pastéis: verbal, pictórica, algébrica, gráfica e tabelar. O objetivo, aqui, é o de enfeixar as formas de representação numa única tela, demonstrando que não importa a forma como se representa, o conceito matemático é o mesmo.

Teoricamente, observa-se que a união de todas essas representações num único *slide* está de acordo a ‘complementaridade de registros’ em noese. Para além do escopo dessas representações, está a proposição da conceitualização da noção (noética) de função pelos sujeitos que às observam, como objetivo maior.



40

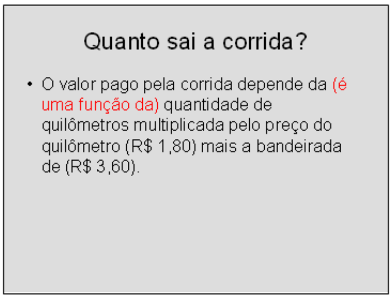
No *slide* 40, faz-se um convite para modelar outra situação problema: uma corrida de táxi.



41

No *slide* 41, apresentam-se as informações referentes à corrida de táxi, como os valores a serem cobrados: bandeirada, três reais e sessenta centavos (R$ 3,60) e quilômetro rodado, um real e oitenta centavos (1,80).

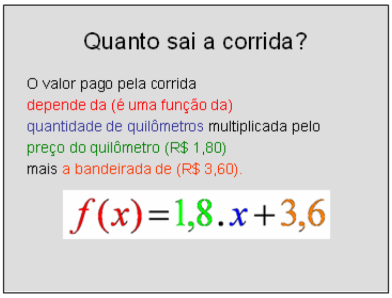
O objetivo desse *slide* é mostrar os dados referentes a uma corrida de táxi. Teoricamente, a tabela apresentada é um registro mediado por um sistema semiótico em linguagem simbólica.



42

No *slide* 42, questiona-se, no cabeçalho: “Quanto sai a corrida?”. Além disso, afirma-se: “O valor pago pela corrida depende da (**é uma função da**) quantidade de quilômetros multiplicada pelo preço do quilômetro (R$ 1,80) mais a bandeirada de (R$ 3,60)”.

O objetivo desse *slide* é apresentar a função que representa a situação da corrida de táxi em linguagem natural. Essa representação em linguagem natural é uma ‘formação de uma representação identificável’.



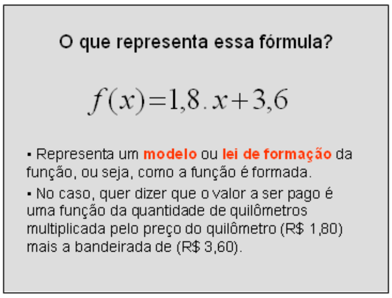
43

No *slide* 43, mantendo-se o questionamento do *slide* anterior, cada um dos elementos do enunciado em linguagem natural é destacado por cores. Textualmente: “O valor pago pela corrida depende da (é uma função da) quantidade de quilômetros multiplicada pelo preço do quilômetro (R$ 1,80) mais a bandeirada de (R$ 3,60)”.

A relação que expressa o valor a ser pago pela corrida em decorrência da quantidade de quilômetros é explícita no enunciado:

$$f(x)=1{,}8.x+3{,}6$$

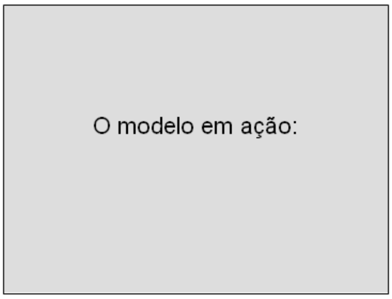
O objetivo desse *slide* é destacar as unidades semânticas dos elementos apresentados em linguagem natural e simbólica, cuja conversão, relembre-se, é não congruente.



44

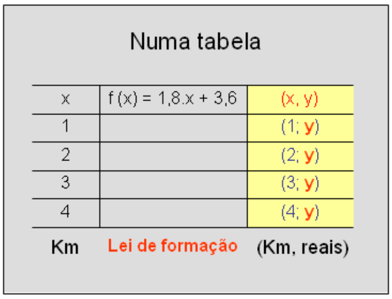
No *slide* 44, questiona-se: “O que representa essa fórmula?”, transcrevendo-a “f(x) = 1,8. x + 3,6”. Mais abaixo, acrescenta-se textualmente: “Representa um **modelo** ou **lei de formação** da função, ou seja, como a função é formada e que, no caso, quer dizer que o valor a ser pago é uma função da quantidade de quilômetros multiplicada pelo preço do quilômetro (R$ 1,80) mais a bandeirada de (R$ 3,60)”.

O propósito desse *slide* é apresentar em linguagem natural a ‘formação de uma representação identificável’ da expressão em linguagem simbólica ‘f(x) = 1,8 . x + 3,6’.



45

No *slide* 45, apresenta-se o título “O modelo em ação:”.



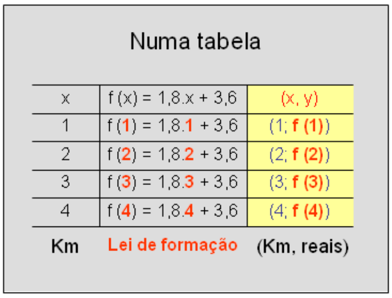
Numa tabela

x	f (x) = 1,8.x + 3,6	(x, y)
1		(1; y)
2		(2; y)
3		(3; y)
4		(4; y)
Km	Lei de formação	(Km, reais)

46

No *slide* 46, “Numa tabela”, apresenta-se uma tabela contendo quatro linhas e três colunas, que representa a situação da corrida de táxi. Na primeira linha da primeira coluna da tabela apresenta-se ‘x’; na segunda coluna mostra-se o modelo ‘f(x) = 1,8. x + 3,6’; e na terceira coluna apresenta-se os pares ordenados (x, y); na segunda linha, respectivamente, na primeira coluna expõe-se o número 1; na segunda coluna há um espaço em branco; e na terceira coluna expõe-se o par *ordenado* (1, **y**). As demais seguem esse esquema. No rodapé do *slide*, para cada coluna há uma tradução em linguagem natural, de tal modo que: ‘x’ está para ‘Km’; ‘f(x) = 1,8. x + 3,6’ está para ‘Lei de formação’; e ‘(x, y)’ está para ‘(Km, reais)’.

O propósito desse *slide* é representar em linguagem simbólica (nesse caso, tabelar) a situação da corrida de táxi, ou seja, converter a expressão em linguagem algébrica (também simbólica) apresentada no *slide* 44 em uma tabela.



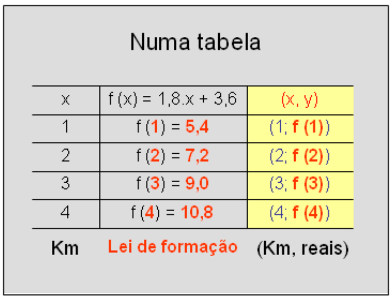
Numa tabela

x	f (x) = 1,8.x + 3,6	(x, y)
1	f (1) = 1,8.1 + 3,6	(1; f (1))
2	f (2) = 1,8.2 + 3,6	(2; f (2))
3	f (3) = 1,8.3 + 3,6	(3; f (3))
4	f (4) = 1,8.4 + 3,6	(4; f (4))
Km	Lei de formação	(Km, reais)

47

No *slide* 47, a tabela demonstra os cálculos necessários para ser preenchida. Repare-se que os valores de ‘x’ aparecem na lei de formação de cada linha da segunda coluna da tabela, bem como a variável ‘y’ é substituída por ‘f(x)’, posto que ela é uma função dos valores de ‘x’.

O objetivo desse *slide* é mostrar que há transformações no interior da tabela em relação ao que foi apresentado anteriormente, ou seja, que há tratamentos.



Numa tabela

x	f (x) = 1,8.x + 3,6	(x, y)
1	f (1) = 5,4	(1; f (1))
2	f (2) = 7,2	(2; f (2))
3	f (3) = 9,0	(3; f (3))
4	f (4) = 10,8	(4; f (4))
Km	Lei de formação	(Km, reais)

48

No *slide* 48, os cálculos da segunda coluna são consumados. Desse modo, prossegue às transformações no interior da tabela, ou seja, os tratamentos.

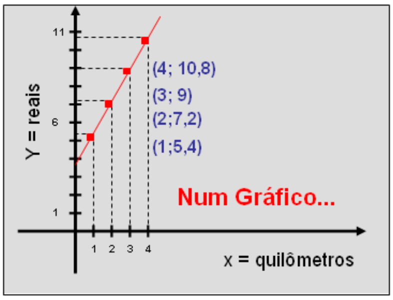
Numa tabela

x	f (x) = 1,8.x + 3,6	(x, y)
1	f (1) = 5,4	(1; 5,4)
2	f (2) = 7,2	(2; 7,2)
3	f (3) = 9,0	(3; 9,0)
4	f (4) = 10,8	(4; 10,8)
Km	Lei de formação	(Km, reais)

49

No *slide* 49, por fim, os valores de f(x) são transportados para os pares ordenados da terceira coluna.

O objetivo dessa sequência é demonstrar passo a passo como se chegam aos valores da variável ‘y’ em função dos valores da variável ‘x’. Além disso, apresenta-se o encerramento dos tratamentos, o fim das transformações internas do registro tabelar iniciando no slide 46 e concluindo no slide 49.

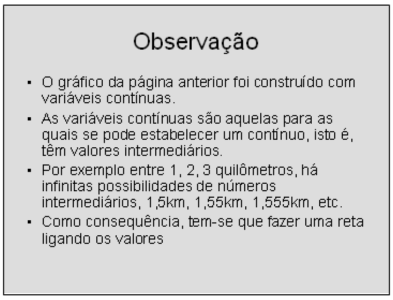


50

No *slide* 50, "Num Gráfico", apresenta-se a representação gráfica (plano cartesiano) da situação problema sobre uma corrida de táxi. Nela, há uma reta horizontal (em cor preta) com uma seta na extremidade direita nomeada de 'x' igual a 'quilômetros' dividida em quatro partes iguais, onde cada divisão recebe, respectivamente, 1, 2, 3 e 4; essa mesma reta é cortada por outra reta vertical (também em cor preta) que, juntas, formam um ângulo de 90º. O ponto de encontro dessas retas é chamado de origem. A reta vertical é intitulada eixo y, apresenta a variável y (reais) dividida em doze partes iguais que, nesse caso, foram numeradas de seis em seis, respectivamente, 1, 6 e 12. Nela também há uma seta, no entanto, na sua extremidade superior, que foi intitulada de 'y' igual a 'reais'.

Cada ponto (em cor vermelha) no gráfico representa um par ordenado (1; 5,4), (2; 7,2), (3, 9) e (4; 10,8), que são formados pela união de duas retas pontilhadas que ligam os valores da reta 'x' com os valores da reta 'y' que juntos formam o par. Além disso, há uma reta (em cor vermelha) que une todos os pontos.

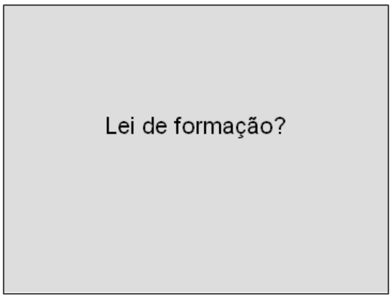
Como essa representação gráfica possui formas, dados e traços próprios, possui maneiras próprias de tratamento, e pode ser considerada como outro registro de representação semiótica que representa a corrida de táxi, ou ainda, a conversão da tabela em um plano cartesiano. Foi elaborado com base nas funções de objetivação, de expressão e de tratamento intencional.



51

No *slide* 51, mostram-se quatro observações que se referem ao caráter contínuo das variáveis desse segundo exemplo. Textualmente: “O gráfico da página anterior foi construído com variáveis contínuas. As variáveis contínuas são aquelas para as quais se pode estabelecer um contínuo, isto é, têm valores intermediários. Por exemplo entre 1, 2, 3 quilômetros, há infinitas possibilidades de números intermediários, 1,5 km, 1,55 km, 1,555 km, etc.”. Por fim, a quarta observação diz “Como consequência, tem-se que fazer uma reta ligando os pares ordenados”.

O objetivo desse *slide* é mostrar ‘formações de representação identificáveis’ de variáveis contínuas.



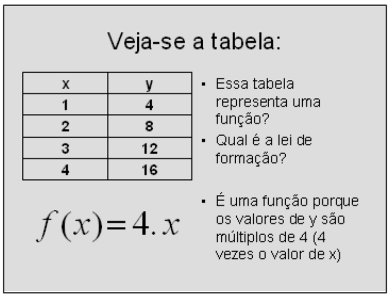
52

No *slide* 52, questiona-se o que é lei de formação. Textualmente: “Lei de formação?”.

53

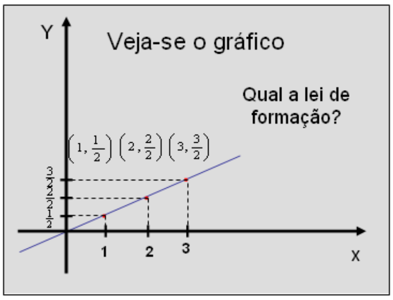
No *slide* 53, “Veja-se a tabela”, apresenta-se uma tabela que contém cinco linhas e duas colunas. Na primeira linha da primeira coluna mostra-se ‘x’; na segunda coluna expõe-se ‘y’; abaixo, seguem-se os valores atribuídos a essas variáveis. No lado esquerdo da tabela há duas questões: “Essa tabela representa uma função?” e “Qual é a lei de formação?”.

O objetivo desse *slide* é encontrar a lei de formação dos dados apresentados na tabela, intuitivamente.



54

No *slide* 54, as respostas às duas perguntas são expressas no canto inferior direito da figura. Como para cada valor de ‘x’, o valor de ‘y’ é o quádruplo, a lei de formação é “f(x) = 4.x”, respondendo a segunda questão do *slide* anterior. No lado dessa lei, há a resposta da primeira questão. No caso, a tabela: “É uma função porque os valores de y são múltiplos de 4 (4 vezes o valor de x)”.



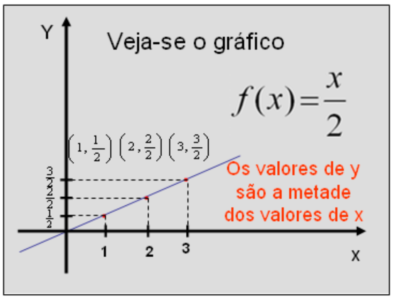
55

No *slide* 55, “Veja-se o gráfico”, questiona-se: “Qual a lei de formação?”.

No *slide*, mostra-se uma representação gráfica (plano cartesiano). Nela, há uma reta horizontal (em cor preta) com uma seta na extremidade direita nomeada de ‘x’ dividida em três partes iguais, onde cada divisão recebe, respectivamente, 1, 2 e 3; essa mesma reta é cortada por outra reta vertical (também em cor preta) que, juntas, formam um ângulo de 90º. O ponto de encontro dessas retas é chamado de origem. A reta vertical também é dividida em três partes iguais que, nesse caso, são respectivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$ e $\frac{3}{2}$. Nela também há uma seta, no entanto, na sua extremidade superior, que foi intitulada de ‘y’.

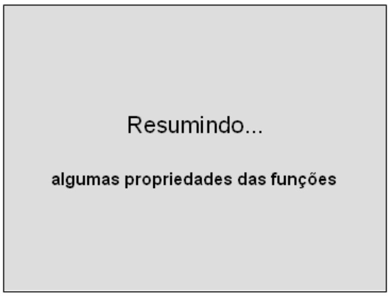
Cada ponto (em cor vermelha) no gráfico representa um par ordenado (1, $\frac{1}{2}$), (2, $\frac{2}{2}$) e (3, $\frac{3}{2}$), que são formados pela união de duas retas pontilhadas que ligam os valores da reta ‘x’ com os valores da reta ‘y’ que juntos formam o par. Além disso, há uma reta (em cor azul) que une todos os pontos.

O propósito desse *slide* é encontrar a lei de formação dos dados apresentados no gráfico, intuitivamente.



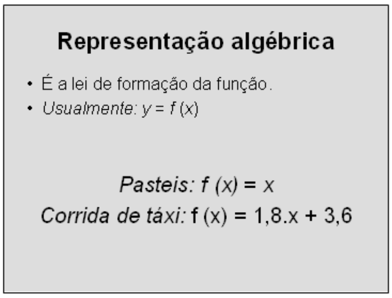
56

No *slide* 56, ocorre a resposta da questão anterior. No caso, a lei de formação é “f(x) = $\frac{x}{2}$ “, que se traduz em linguagem natural como: “Os valores de y são a metade dos valores de x”, em vermelho.



57

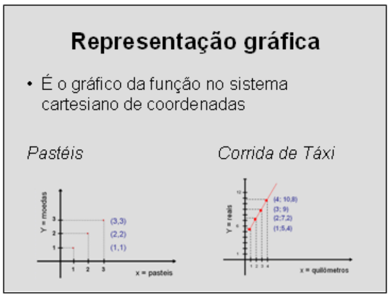
No *slide* 57, apresenta-se o texto: “Resumindo...” e “algumas propriedades das funções”.



58

No *slide* 58, “Representação algébrica”, apresenta-se o texto “É a lei de formação da função. Usualmente: y = f(x)”. Além disso, exemplificam-se: “Pasteis : f(x) = x” e “Corrida de táxi: f(x) = 1,8.x + 3,6”.

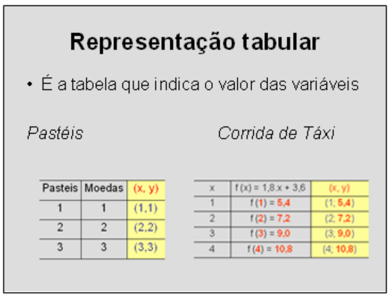
O objetivo desse *slide* é apresentar a ‘formação de uma representação identificável’ da representação algébrica.



59

No *slide* 59, “Representação gráfica”, apresenta-se o texto: “É o gráfico da função no sistema cartesiano de coordenadas”. Além disso, resgatam-se os gráficos das situações problemas dos ‘Pasteis’ e da ‘Corrida de Táxi’.

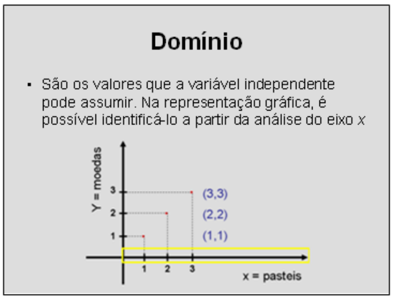
O propósito desse slide é apresentar a ‘formação de uma representação identificável’ em representação gráfica.



60

No *slide* 60, “Representação tabular”, mostra-se textualmente: “É a tabela que indica os valores das variáveis”. Além disso, resgatam-se as tabelas das situações dos ‘Pasteis’ e da ‘Corrida de Táxi’.

Nesse *slide*, objetiva-se apresentar a ‘formação de uma representação identificável’ em representação tabular.

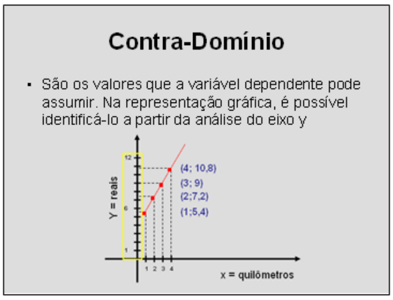


61

No *slide* 61, "Domínio", define-se domínio de uma função da seguinte maneira: "São os valores que a variável independente pode assumir no conjunto dos números naturais. Na representação gráfica, é possível identificá-lo a partir da análise do eixo x".

Além disso, representa-se num gráfico o domínio de uma função, destacando-se o eixo x (em cor amarela).

O objetivo desse *slide* é apresentar a 'formação de uma representação identificável' do domínio de uma função por meio da 'complementaridade de registro' (gráfico).

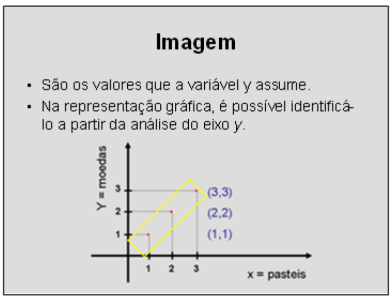


62

No *slide* 62, "Contra-Domínio", define-se contra-domínio de uma função da seguinte maneira: "São os valores que a variável dependente pode assumir no conjunto dos números reais positivos. Na representação gráfica, é possível identificá-lo a partir da análise do eixo y".

Além disso, representa-se num gráfico o contra-domínio de uma função, destacando-se o eixo y (em cor amarela).

Nesse *slide,* objetiva-se apresentar a 'formação de uma representação identificável' do contra-domínio de uma função por meio da 'complementaridade de registro' (gráfico).

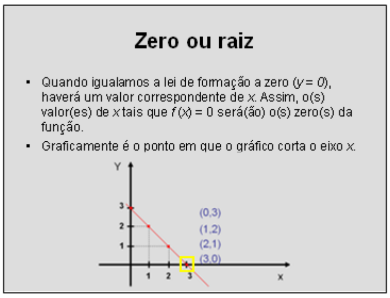


63

No *slide* 63, "Imagem", define-se imagem de uma função da seguinte maneira: "São os valores que a variável y assume". Mais adiante, diz-se: "Na representação gráfica, é possível identificá-lo a partir da análise do eixo y".

Além disso, representa-se a imagem num gráfico de uma função, destacando-se os pontos que representam os pares ordenados (em cor amarela).

O objetivo desse *slide* é mostrar a 'formação de uma representação identificável' da imagem de uma função por meio da 'complementaridade de registro' (gráfico).

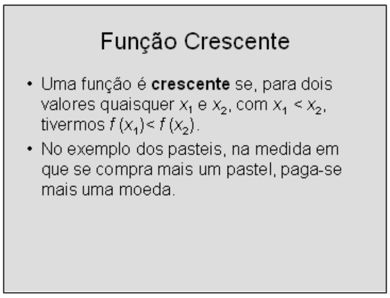


64

No *slide* 64, "Zero ou raiz", define-se zero ou raiz de uma função da seguinte maneira: "Quando igualamos a lei de formação a zero (y = 0), haverá um valor correspondente de x. Assim, o(s) valor(es) de x tais que f (x) = 0 será(ão) o(s) zero(s) da função". Mais adiante, diz-se: "Graficamente é o ponto em que o gráfico corta o eixo x".

Além disso, representa-se o zero ou raiz de uma função num gráfico, destacando-se o ponto que a reta (em cor vermelha) corta o eixo de x (em cor amarela). A reta que se trata aqui é aquela que une os pontos.

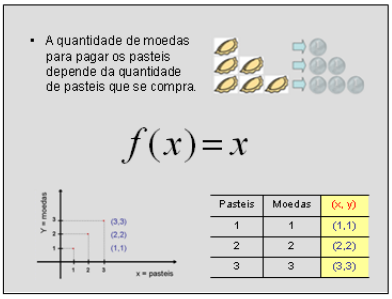
O propósito desse *slide* é apresentar a 'formação de uma representação identificável' de zero ou raiz de uma função.



65

No *slide* 65, "Função Crescente", define-se textualmente: "Uma função é **crescente** se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$". Mais adiante: "No exemplo dos pasteis, na medida em que se compra mais um pastel, paga-se mais uma moeda.".

O objetivo desse *slide* é apresentar a 'formação de uma representação identificável' de função crescente e exemplificá-la resgatando a situação dos pasteis.



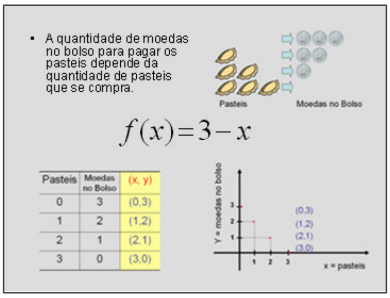
66

No *slide* 66, resgatam-se as várias representações semióticas da compra de pastéis: verbal, pictórica, algébrica, gráfica e tabelar. O objetivo, aqui, é o de exemplificar função crescente por meio da 'complementaridade de registro'.

67

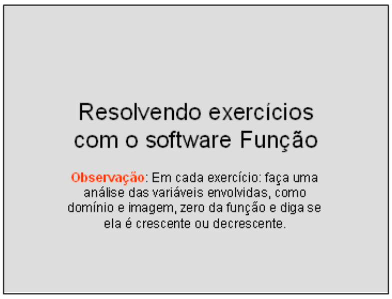
No *slide* 67, “Função Decrescente”, define-se “Uma função é **decrescente** se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2,com $x_1 < x_2$, tivermos f (x_1) > f (x_2)”. Mais adiante: “Imagine que João tem três reais no bolso. Ele compra 1 pastel e fica com 2 reais. Ele compra 2 pasteis e fica com 1 real. Ele compra três pasteis e fica sem dinheiro”.

Nesse *slide*, objetiva-se apresentar a ‘formação de uma representação identificável’ de função decrescente e exemplificá-la, alterando alguns dados da situação dos pasteis.



68

No *slide* 68, converte-se o exemplo do *slide* anterior em várias representações semióticas: verbal, pictórica, algébrica, gráfica e tabelar. O objetivo, aqui, é o de exemplificar função decrescente por meio da ‘complementaridade de registro’.

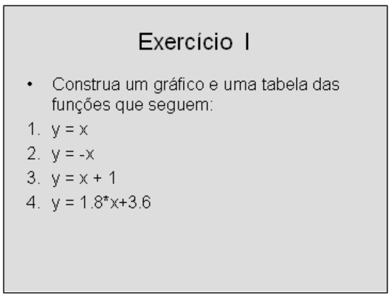


69

No *slide* 69, “Resolvendo exercícios com o *software* Função”, apresentam-se exercícios para serem resolvidos com o *software* “Função”.

Além disso, há uma observação que solicita que “em cada exercício: faça uma análise das variáveis envolvidas, como domínio e imagem, zero da função e diga se ela é crescente ou decrescente”.

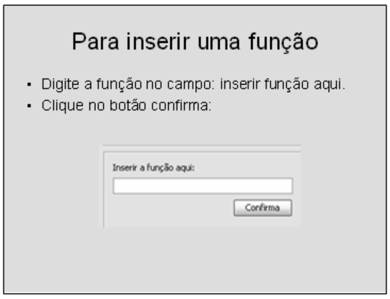
O objetivo desse *slide* é apresentar um *software* sobre função e solicitar que os alunos resolvam exercícios com base no conteúdo apresentado nos *slides* anteriores.



70

No *slide* 70, mostra-se o primeiro exercício e solicita-se que se construa um gráfico e uma tabela das funções: ‘y = x’, ‘y = -x’, ‘y = x + 1’ e ‘y = 1.8*x+3.6’.

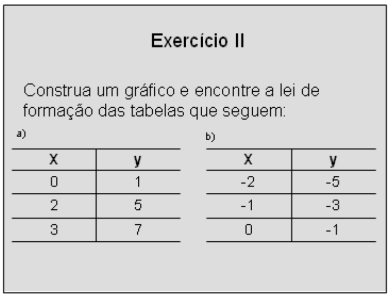
O propósito desse *slide* é solicitar que os alunos resolvam o exercício I para a fixação do conteúdo. Além disso, que observem os tratamentos e as conversões das representações apresentadas no *software*.



71

No *slide* 71, apresentam-se as instruções para inserir uma função. Textualmente: “Digite a função no campo: inserir função aqui” e “Clique no botão confirma”. Mais abaixo, há uma ilustração da figura do campo em questão no *software* “Função”.

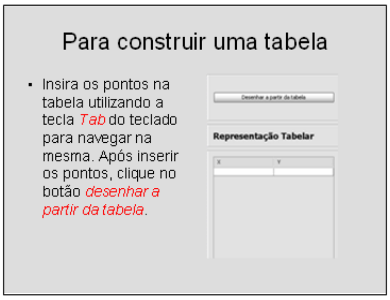
O objetivo desse *slide* é instruir os alunos a inserir as funções no *software*.



72

No *slide* 72, apresenta-se o segundo exercício. Nele, solicita-se que se construa um gráfico e encontre a lei de formação para cada gráfico, que podem ser observadas na figura ao lado.

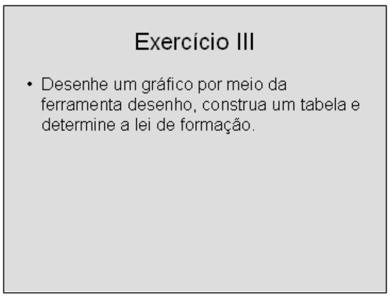
O propósito desse *slide* é solicitar que os alunos resolvam o exercício II para a fixação do conteúdo e que observem os tratamentos e as conversões das representações apresentadas no *software*.



73

No *slide* 73, “Para construir uma tabela”, apresentam-se instruções para essa atividade. Textualmente: “Insira os pontos na tabela utilizando a tecla **Tab** do teclado para navegar na mesma. Após inserir os pontos, clique no botão **desenhar a partir da tabela**. Além disso, ao lado dessa observação há uma imagem do campo que se refere à representação tabelar no *software*.

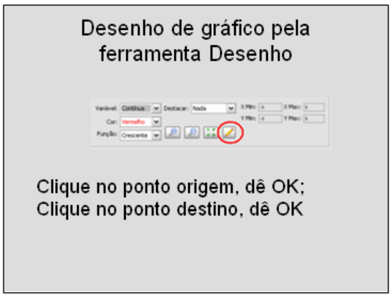
O objetivo desse *slide* é instruir os alunos a inserir os números, solicitados no *slide* anterior, no campo intitulado ‘representação tabelar’ do *software*.



74

No *slide* 74, apresenta-se o terceiro exercício que propõe: “Desenhe um gráfico por meio da ferramenta desenho, construa um tabela e determine a lei de formação”.

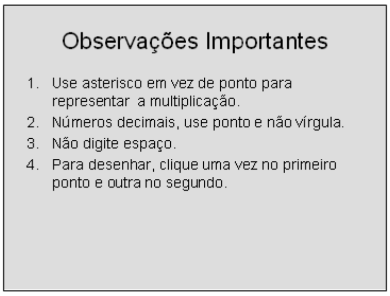
O propósito desse *slide* é solicitar que os alunos resolvam o exercício III para a fixação do conteúdo e que observem os tratamentos e as conversões das representações apresentadas no *software*.



75

No *slide* 75, "Desenho de gráfico pela ferramenta Desenho", apresenta-se a instrução para desenhar o gráfico. Mostra-se uma imagem do campo de desenho do *software* e destaca-se o ícone de um lápis (no círculo com cor vermelha). Na sequência, instrui-se: "Clique no ponto origem, dê OK" e "Clique no ponto destino, dê OK".

O objetivo desse *slide* é instruir os alunos a desenhar um gráfico, utilizando-se da ferramenta desenho que está no *menu* de 'representação gráfica' do *software*.



76

No *slide* 76, apresentam-se quatro observações importantes para a utilização do *software*. A primeira: "Use asterisco em vez de ponto para representar a multiplicação". A segunda: "Números decimais, use ponto e não vírgula". A terceira: "Não digite espaço". E, por fim, a quarta "Para desenhar, clique uma vez no primeiro ponto e outra no segundo".

O propósito desse *slide* é apresentar algumas informações importantes para a utilização do software.

77

No *slide* 77, apresenta-se o "fim da lição".

Diante desse cenário, destaque-se que o aplicativo instrucional é um instrumento de ensino-aprendizagem 'exploratório' que evidencia as conversões de representações semióticas e, em consequência disso, aborda questões no âmbito da semiose e noese existentes nos conceitos e definições do objeto função.

Para além do escopo do aplicativo instrucional, é importante apresentar o que, de imediato, necessita de revisões.

No exemplo dos pasteis, é possível mostrar a situação da compra, a relação de pasteis e moedas, por pictografias mais desenvolvidas, em sequência de quadrinhos. Por exemplo: o cenário de João numa padaria, João tirando as moedas do bolso e, para cada moeda tirada do bolso, um pastel sendo colocado num pacote.

O *slide* 21, que retoma a situação dos conjuntos de pasteis e moedas para exemplificar o conceito de produto cartesiano, é redundante. Esse conceito poderia ser apresentado diretamente na tabela do *slide* seguinte.

Além disso, o aplicativo poderia ser um pouco menor, tratar de menos conceitos e parar no *slide* 39. Desse modo, seria possível explorar uma quantidade maior de representações semióticas da situação de compra de pasteis.

A situação problema da corrida de táxi poderia ser mais bem apresentada por meio de pictografias, que deixassem evidentes o contexto do problema, por exemplo, uma sequência de quadrinhos.

Os *slides* 53-56, que tratam da construção da lei de formação, partindo de uma tabela e de um gráfico, seriam mais bem apresentados se estivessem inseridos numa situação-problema real. Além disso, o processo adotado para encontrar a lei de formação é intuitivo. Para dar conta disso, poderia ser considerado um processo algorítmico baseado na resolução de sistemas de equações do primeiro grau desenvolvidos por meio da substituição de dois valores de ‘x’ e de ‘y’ na notação da função do primeiro grau: ‘y = ax + b’.

Os *slides* 61-64, que dão conta das propriedades da função, poderiam explorar mais do que duas representações semióticas. Além das representações que são apresentadas nestes *slides*, poderiam ser apresentadas outras duas: tabelas e pictografias (em contexto).

Os *slides* de instrução, o ‘tutorial’ do *software ApliRFunction* 1.0, por terem sido alocados depois dos *slides* de exercícios, causou falhas na interação do aplicativo, porque os alunos do primeiro semestre do curso de licenciatura em Matemática da Unisul, invariavelmente, começavam a interagir com o software para depois se dar conta que precisavam de instruções mínimas. Ou seja, eles não leram as instruções, muito porque elas estavam apresentadas depois da proposição dos exercícios.

Vale mencionar que o tutorial apresentado para os alunos do primeiro semestre do curso de licenciatura em Matemática e os exercícios propostos não exploraram todas as funcionalidades do *software*. Por outro lado, percebe-se que as conversões exigidas no aplicativo não são congruentes e, em alguns casos, heterogêneas.

Na sequência, apresenta-se o protótipo *ApliRFunction* 1.0.

3.2 O PROTÓTIPO *APLIRFUNCTION* 1.0

Nessa seção apresenta-se a descrição do protótipo de aplicativo de representações sobre função *ApliRFunction* 1.0.

Para desenvolver esse protótipo, a pesquisadora assumiu três papéis no início da pesquisa: o de *designer*, o de analista de sistemas e o de programadora, recorrendo-se no decorrer do trabalho, a um programador para que o protótipo fosse concluído em tempo hábil para o teste exploratório.

O '*ApliRFunction* 1.0' é um protótico desenvolvido em linguagem de programação *Java* por meio das tecnologias *Java 2 Standard Edition* (J2SE) ou *Java SE* e *Java Web Start* (JWS). O *software* J2SE é uma ferramenta de desenvolvimento em *Java* que possui todo o ambiente indispensável para a criação e execução de aplicações *Java*. Posto isto, inclui-se a máquina virtual *Java* (JVM), o compilador, as *Application Programming Interface* (APIs) e outras ferramentas utilitárias do *Java*. [31]

O JWS é um *software* que admite ativar aplicativos com facilidade, simplesmente com um único clique, por meio de três modos diferentes: navegador *Web*, gerenciador de aplicativos integrado ou ícones na área de trabalho e do menu iniciar, exclusivamente para o sistema operacional *Microsoft Windows*. Além disso, o JWS aceita que os usuários façam *downloads* e executem aplicativos *Java* da *Web,* garantindo que sejam, continuamente, executada a versão mais atual do aplicativo, o que suprime complicados procedimentos de atualização ou instalação.

Essas tecnologias exercem funções distintas no desenvolvimento e execução do '*ApliRFunction* 1.0'. Todo o protótipo foi desenvolvido em J2SE, pois há APIs de desenho

---

[31] Interface de Programação de Aplicativos é um conjunto de rotinas e padrões estabelecidos por um software para a utilização das suas funcionalidades por programas aplicativos, isto é, programas que não querem envolver-se em detalhes da implementação do *software*, mas apenas usar seus serviços. De modo geral, a API é composta por uma série de funções acessíveis somente por programação, e que permitem utilizar características do software menos evidentes ao utilizador tradicional. Por exemplo, um sistema operacional possui uma grande quantidade de funções na API, que permitem ao programador criar janelas, acessar arquivos, criptografar dados, etc. Ou então programas de desenho geométrico que possuem uma API específica para criar automaticamente entidades de acordo com padrões definidos pelo utilizador. No caso de sistemas operacionais, a API costuma ser dissociada de tarefas mais essenciais, como manipulação de blocos de memória e acesso a dispositivos. Estas tarefas são atributos do *kernel* ou núcleo do sistema, e raramente são programáveis. Mais recentemente o uso de APIs tem-se generalizado nos *plugins*, acessórios que complementam a funcionalidade de um programa. Os autores do programa principal fornecem uma API específica para que outros autores criem *plugins*, estendendo as funcionalidades do programa para os utilizadores comuns (WIKIPÉDIA, 2009).

que proporcionam o desenvolvimento de suas funcionalidades gráficas. Entretanto, o JWS é o responsável pela execução do aplicativo, é ele quem faz o protótipo aparecer na tela do computador, quando *off-line* ao clicar sobre o ícone dele na área de trabalho (nome padrão do ícone *launch*) ou no menu iniciar, ou ainda, quando *online* ao clicar no ‘botão virtual’ que representa o aplicativo. Essas ferramentas foram escolhidas pelo fato de desenvolverem um produto que funcione tanto *online* quanto *off-line.*

Diante disso, o protótipo funciona tanto em *Desktop* (*off-line*) quanto em ambientes virtuais (*online*). Desenvolver um aplicativo desse porte era uma necessidade que existia no decorrer da pesquisa, pois era necessário prevenir os possíveis problemas tecnológicos.

A interface do ‘*ApliRFunction* 1.0’ pode ser vista na ilustração a seguir:

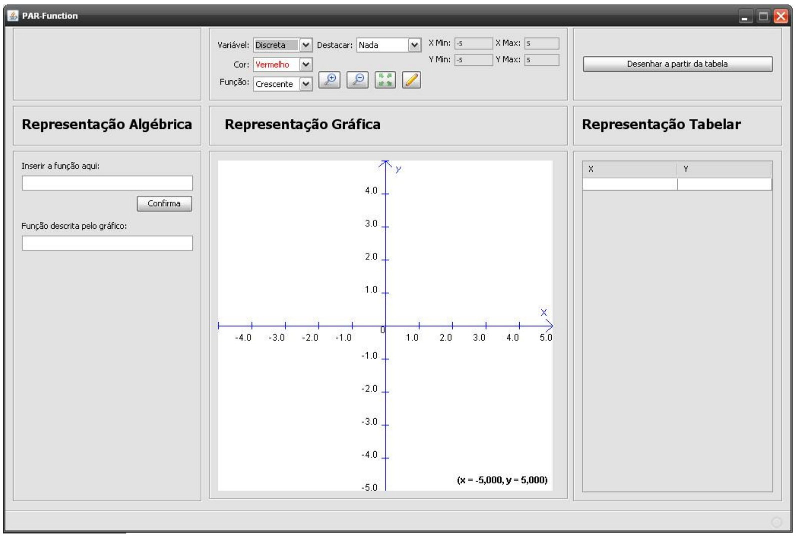


Ilustração 37 – Interface do *ApliRFunction* 1.0.

Observa-se, na interface do aplicativo, que suas funcionalidades estão separadas conforme o tipo de representação algébrica, gráfica e tabelar.

No setor ‘Representação Algébrica’ apresenta-se a expressão ‘Inserir a função aqui’ com respectivo campo, a expressão ‘Função descrita pelo gráfico’ com respectivo campo e o botão ‘confirma’. [32]

[32] Conforme avalia Saddo Ag Aumouloud, a rigor, o que se insere é uma das representações da função.

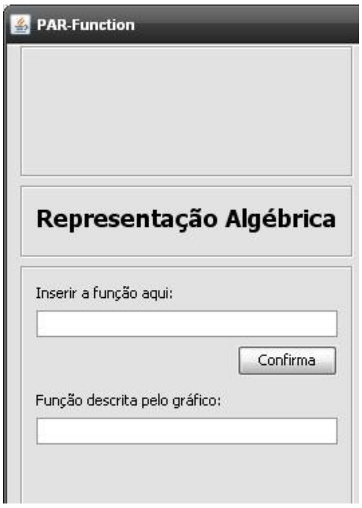


Ilustração 38 – *ApliRFunction* 1.0: setor para Representação algébrica.

No setor 'Representação Gráfica' mostra-se a área de menu, no cabeçalho, e a área de desenho. Na área de menu encontram-se 'variável', discreta ou contínua; 'cor', azul, cinza, laranja, preto, roxo, rosa, verde, vermelho; 'função', crescente ou decrescente; 'destacar', nada, domínio ou imagem; ícones, lupa com sinal de mais (+) *zoom in*, lupa com sinal de menos (-) *zoom out*, quatro setas direcionadas para as quatro quinas do botão (pan) que servem para arrastar o gráfico, lápis que serve para desenhar um gráfico a mão livre; 'X Min', 'X Max' e 'Y Min', 'Y Max', ou seja, menor valor para o eixo x, maior valor para o eixo x e menor valor para o eixo y, maior valor para o eixo y. Por sua vez, na área de desenho apresenta-se um plano cartesiano no centro e as coordenadas que aparecem ao mover o *mouse* no canto inferior direito.

Ilustração 39 – Menu da representação gráfica do *ApliRFunction* 1.0.

Por sua vez, na área de desenho apresenta-se um plano cartesiano no centro e as coordenadas que aparecem ao mover o *mouse* no canto inferior direito.

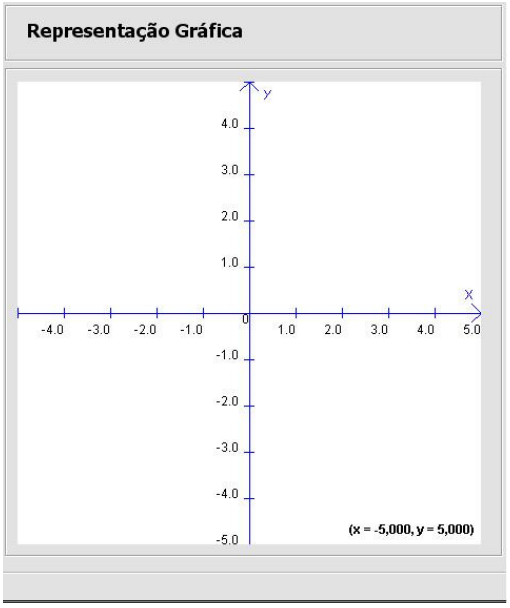


Ilustração 40 – Área de desenho da representação gráfica do *ApliRFunction* 1.0.

No setor ‘Representação Tabelar’, mostra-se a área de menu e a área tabelar. Na área de menu apresenta-se um botão ‘Desenhar a partir da tabela’. Na área tabelar expõe-se uma tabela, com apenas duas linhas e duas colunas; na primeira linha e primeira coluna mostra-se ‘x’ e na primeira linha e segunda coluna expõe-se ‘y’. O usuário poderá inserir mais linhas teclando a tecla ‘*Enter’* do seu teclado.

Ilustração 41 – Representação tabelar do *ApliRFunction* 1.0.

O ‘*ApliRFunction* 1.0’ mobiliza, simultaneamente, três representações de funções: a algébrica, a gráfica e a tabelar. Por exemplo, ao inserir a função definida por ‘y = x’ em ‘Inserir a função aqui’ e clicar no botão ‘Confirma’, o protótipo mostra um gráfico e uma tabela, conforme a ilustração a seguir:

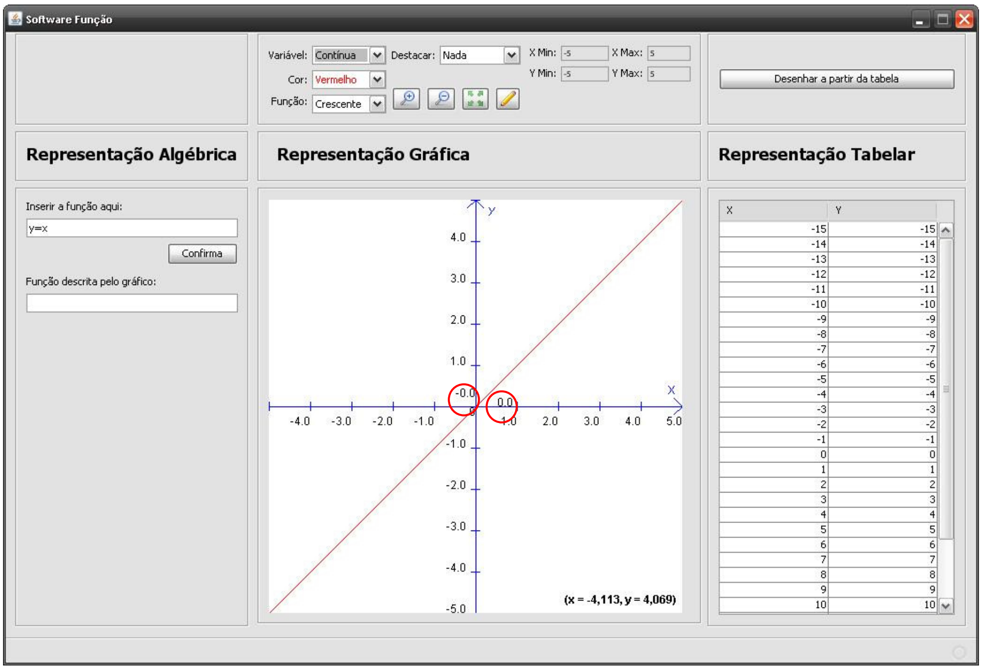


Ilustração 42 – Representações da função y = x no *ApliRFunction* 1.0.

Observa-se que, ao desenhar o gráfico, o aplicativo mostra o ponto em que o gráfico corta o eixo de x e o eixo y, conforme apresentado em destaque.

Ao desenhar um gráfico utilizando-se da ferramenta desenho (a que tem o ícone do lápis), aparece na interface do aplicativo uma lei de formação em ‘função descrita pelo gráfico’ e uma tabela. É importante ressaltar que essa ferramenta simula desenhos, a “mão livre”, de funções do tipo primeiro grau, basta o usuário clicar em dois pontos quaisquer na área de desenho.

Veja um exemplo a seguir:

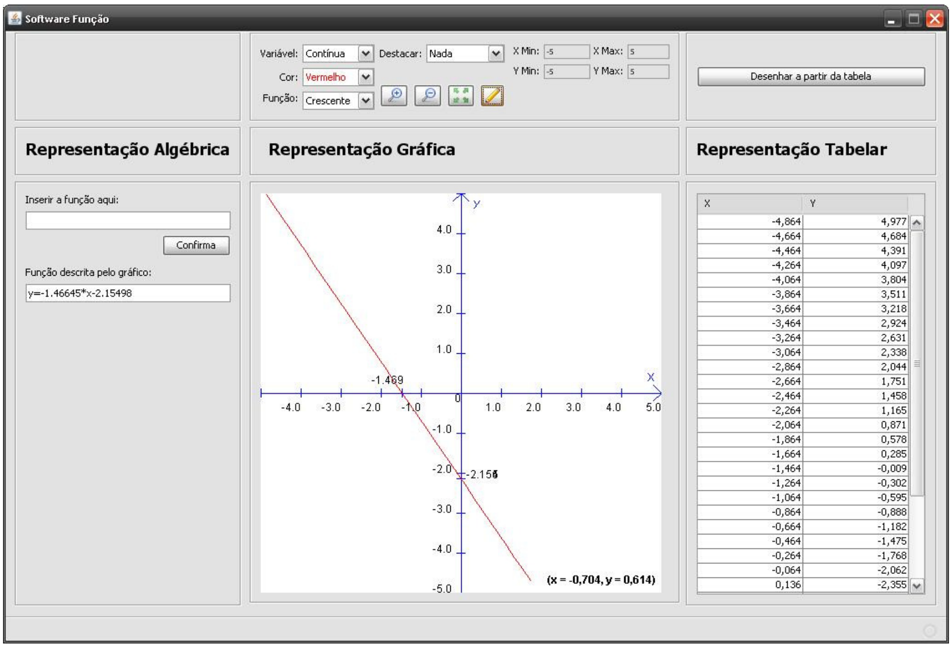


Ilustração 43 – *ApliRFunction* 1.0, gráfico desenhado a “mão livre”.

Além disso, ao atribuir valores para x e para y na tabela e clicar no botão ‘desenhar a partir da tabela’, também aparecerá na tela do protótipo uma lei de formação em ‘função descrita pelo gráfico’ e uma representação gráfica.

Observe as duas ilustrações a seguir:

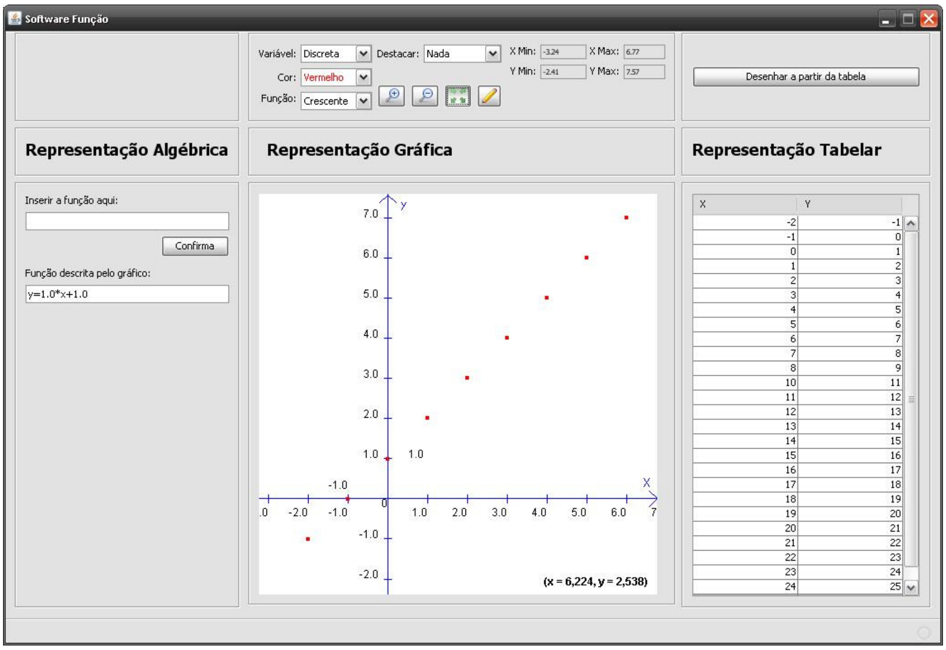


Ilustração 44 – Lei de formação e gráfico discreto desenhado por meio da tabela.

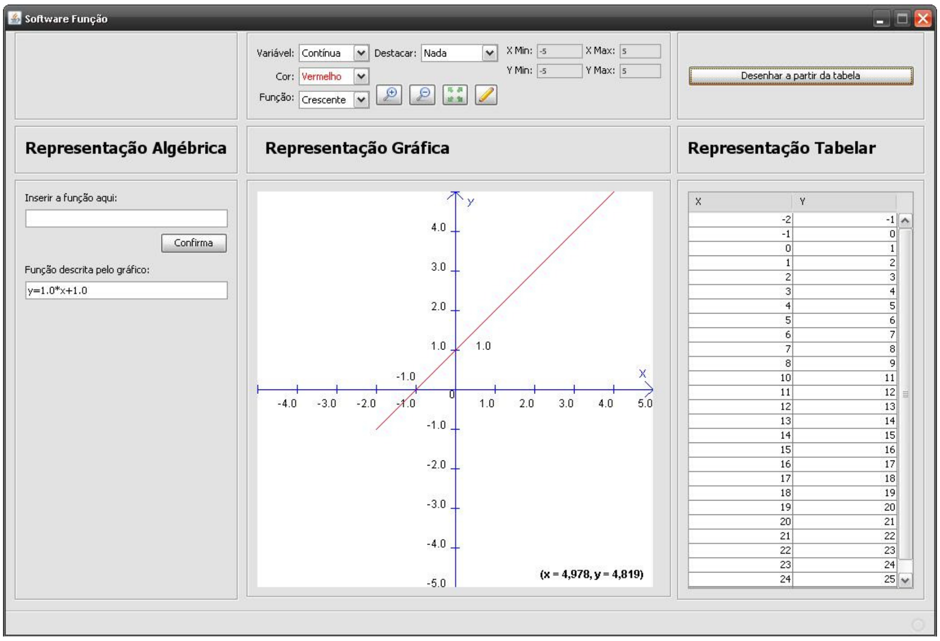


Ilustração 45 – Lei de formação e gráfico contínuo desenhado por meio da tabela.

Diante do apresentado, nota-se que é possível representar gráficos com variáveis discretas ou contínuas no '*ApliRFunction* 1.0'. Além disso, é importante salientar que a tabela recebe qualquer valor real. Assim, os gráficos desenhados a partir da tabela podem assumir qualquer formato. Para navegar nas células da tabela há duas formas: teclar a tecla 'Tab' do teclado ou clicar com o *mouse* na célula desejada.

A versão 1.0 do *ApliRFunction* 1.0 é um protótipo em desenvolvimento, que possui algumas limitações, como: aceitar funções de vários tipos e não representá-las corretamente no gráfico e na tabela, apresentar o número zero com sinal negativo, não possuir signos metalinguísticos, mensagens explicativas que aparecem ao parar o mouse sobre um ícone, não possuir um botão de limpar tabela, gráfico e expressão algébrica.

Esse sistema de aprendizagem é aparentemente livre, mas de fato não é. Nele, o professor ou tutor podem avaliar a necessidade de intervir quando o usuário ou aluno estiver utilizando? O *ApliRFunction* 1.0 pode parecer uma grande diretiva, ou um prescritivo tutor, mas de modo aparente, pois somente haverá interação quando o aluno quiser e até o instante que achar viável. Diante disso, esse protótipo é um sistema de descoberta guiada, conforme a classifica Nicolas Balacheff (1994a).

4 TESTE EXPLORATÓRIO

Este capítulo apresenta um estudo exploratório que se constituiu da aplicação de dois testes e de uma abordagem de ensino sobre conceitos e definições de função por meio de um aplicativo produzido em *slides* em *power point* e de um protótipo de aplicativo de função. Testes e abordagem foram aplicados com estudantes do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina – UNISUL em 2009/1.

O propósito desse teste exploratório foi de investigar a reação de estudantes a materiais instrucionais informatizados que enfatizam a mobilização de vários registros de representações semióticas e que não são tutelados por intervenção docente. Mais do que validar ou não em definitivo os protótipos, esse estudo visa subsidiar o seu desenvolvimento.

4.1 PROCEDIMENTOS DE COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Para coletar os dados do teste exploratório foi enviado um ofício (anexo A) ao coordenador do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Sul de Santa Cataria – UNISUL solicitando a autorização para a execução de coleta de dados. Na sequência, o tema foi apresentado para a turma do primeiro semestre do mesmo curso, na disciplina de Tópicos em Matemática Elementar I, com decisivo apoio da docente da disciplina. Para participar da pesquisa, os sujeitos preencheram o documento de Consentimento Livre e Esclarecido (anexo B)

A primeira fase da coleta dos dados consiste na aplicação de um pré-teste. O pré-teste (anexo C) possui 11 questões discursivas e de demonstração que tem o objetivo de analisar os conhecimentos prévios dos alunos sobre função.

Esse teste foi aplicado pela pesquisadora na quarta-feira do dia dezoito de março de dois mil e nove (18/03/2009), no período noturno, com quarenta (40) alunos na disciplina de Informática Aplicada à Educação com o auxilio da professora responsável por esta disciplina no laboratório de informática onde aconteciam às aulas.

A segunda fase consistiu-se de uma intervenção didática, composta pelo aplicativo produzido em *slides* do *power point* e pelo protótipo de aplicativo de função (*ApliRFunction*

1.0). Esta fase foi aplicada pela pesquisadora numa quinta-feira, dia dezenove de março de dois mil e nove (19/03/2009), no período noturno, no laboratório de informática da UNISUL com os 31 alunos presentes na disciplina de Geometria I.

A terceira fase consistiu num pós-teste e teve o propósito de analisar os conhecimentos posteriores ao pré-teste. O pós-teste foi composto pelas mesmas questões do pré-teste, 11 questões discursivas e de demonstração.

Esse teste foi aplicado pela pesquisadora numa segunda-feira, dia vinte e três de março de dois mil e nove (23/03/2009), no período noturno, na sala de aula número 317 do bloco 'B' da UNISUL com 32 alunos que estavam presentes na disciplina de História da Educação. A tarefa contou com apoio inicial da docente, mas não compôs a média da disciplina. O teste durou, ao todo, 4 horas/aula.

Para analisar os dados da pesquisa, foram consideradas as respostas de 20 alunos, selecionados segundos os seguintes critérios: preenchimento do termo de consentimento, descartes sucessivos das maiores e menores notas.

Os dados das respostas obtidas no pré-teste e no pós-teste apresentam-se em tabelas e gráficos.

As tabelas que apresentam os 'dados das respostas' são organizadas em quatro grandes colunas: respostas da questão, pré-teste, pós-teste e diferença pós menos pré. As colunas 'pré-teste' e 'pós-teste' subdividem-se em duas subcolunas nomeadas conforme os valores dessas variáveis sejam expressos em 'frequência (*f*)' e 'porcentagem (%)'. No que se referem às linhas, as tabelas são constituídas de uma linha de cabeçalho, onde se apresentam os títulos das colunas e das subcolunas; quatro linhas dedicadas às variáveis: 'corretas', 'parcialmente corretas', 'erradas' e respostas 'em branco'; e uma linha dedicada às totalizações. Estas tabelas estão apresentadas no item 4.3, denominado de análise de dados.

Os gráficos, por sua vez, apresentam em forma de barras os dados encontrados nas tabelas. Eles possuem título, eixo de valores, eixo de categorias (corretas, parcialmente corretas, erradas e respostas em branco) e uma tabela de dados na parte inferior. Seguem apresentados no item análise de dados.

A seguir apresenta-se a interação com os aplicativos.

4.2 INTERAÇÃO COM OS APLICATIVOS

Nessa seção busca-se apresentar como foram a interação dos estudantes com os aplicativos Instrucional e *ApliRFunction* 1.0 que aconteceram no laboratório de multimídia I da Universidade do Sul de Santa Catarina – Unisul.

O laboratório é composto de um *datashow*, um "telão", um quadro branco, um computador administrador e de dezesseis (16) computadores distribuídos em oito (8) mesas com dois (2) computadores cada uma, divididas igualmente em duas fileiras. O laboratório, portanto, tem a capacidade de atender (32) alunos dispostos em duplas. O laboratório conta com um técnico responsável (que administra o computador que gerencia o laboratório).

Vale destacar que constava do planejamento a instalação do *software CamStudio* para fins de gravar os movimentos dos usuários nos aplicativos instrucional e *ApliRFunction 1.0*. A instalação do software foi vetada, porque era necessário solicitação antecipada em 5 dias úteis. Isso prejudicou a prospecção das interações dos usuários com as máquinas.

Para descrever a interação, divide-se a intervenção didática em três momentos: início da intervenção, primeiro momento; meio da intervenção, segundo momento; e encerramento da intervenção, terceiro momento.

No primeiro momento, os alunos desconheciam os aplicativos, e a pesquisadora apresentou-o, enfatizando seu caráter auto-explicativo. Preocupada com as variáveis intervenientes e extrínsecas destacou aos estudantes haver três alternativas. [33] A primeira alternativa consistia na aplicação de um aplicativo instrucional apresentado com *interface* de um ambiente virtual desenvolvida em linguagem de programação *Java* disponibilizada em *site* da *Web*, conforme apresentado no capítulo anterior. Nesse aplicativo havia um protótipo de aplicativo (*ApliRFunction* 1.0). A segunda alternativa, a versão on-line seria replicada off-line. A terceira alternativa, consistia na aplicação de um aplicativo instrucional desenvolvido em *slides* do *Microsoft Power Point 2003* isolado do *ApliRFunction* 1.0.

---

[33] Por variável interveniente Rauen (2006, p. 126) define que "é aquela que, numa sequência causal, coloca-se entre a variável independente e a variável dependente, com a função ampliar, diminuir ou anular a influência de 'x' sobre 'y', vista como consequência da variável independente e determinante da variável dependente". Rauen (2006, p. 126) define variável extrínseca, por sua vez, como "um fenômeno que não pertence à relação 'x-y' e afeta tanto a variável independente quanto a dependente".

Todas as alternativas foram testadas previamente. Pôde-se constatar que não era possível utilizar a segunda alternativa no laboratório de multimídia I do prédio Sede do Campus de Tubarão, porque não foi possível colocar o ambiente virtual na rede local.

Restringida às demais alternativas, ambas até então viáveis previamente, a pesquisadora optou pela versão *on-line*. Assim, utilizando-se do *datashow*, demonstrou e solicitou que os alunos clicassem duas vezes no ícone de '*launch*' que estava na área de trabalho das máquinas disponíveis no laboratório. Ao executar a tarefa, percebeu-se que o servidor estava off-line, inviabilizando com essa variável extrínseca, a primeira alternativa.

Restou, então, a terceira alternativa. Para isso, a pesquisadora solicitou que os alunos dessem dois cliques sobre a pasta intitulada de 'PPGCL Função' que estava na área de trabalho das máquinas do laboratório. Na sequência, pediu para os alunos abrirem o documento em *Microsoft Power Point 2003* e passou prévias instruções de leitura, tais como: usar as setas para baixo ou para esquerda do teclado, para prosseguir os *slides;* e setas para cima ou para esquerda para retornar os *slides*. Além disso, alertou-os que em determinado *slide*, eles teriam que abrir outro aplicativo, que também estava disponível na pasta 'PPGCL Função'.

No segundo momento da intervenção didática, os alunos estavam inteirados do funcionamento dos aplicativos e começaram a interagir com os mesmos. Nesse instante, a pesquisadora procedeu às observações das atividades. Pôde-se constatar que alguns alunos estavam concentrados, lendo o conteúdo dos *slides* e discutindo sobre o assunto e tentando acessar o ambiente virtual em alguns momentos, checar se o servidor estava no ar. Porém, a pesquisadora observou também que havia alunos 'navegando' nos *slides* rapidamente, como se estivessem com pressa para terminar a interação, e que outros tantos conversavam entre si sobre assuntos fora do contexto em questão. Além disso, houve grupo de alunos que estavam navegando na internet e a pesquisadora teve que intervir, solicitando que retomassem as atividades.

Ressalte-se ter havido uma dupla de estudantes que conseguiram acessar o ambiente virtual. Eles relataram que a disposição das atividades on-line era mais atrativa, "Mais legal", tal como disseram, e mais organizada do que a versão em curso na tarefa.

Muitos alunos sentiram dificuldades em interagir com o protótipo *ApliRFunction* 1.0 e "navegar" nos *slides* simultaneamente. Por exemplos, eles precisavam minimizar a apresentação em *Microsoft Power Point* e maximizar o *ApliRFunction* 1.0 para inserir a função solicitada nos *slides.* Nesse processo, esqueciam dos dados que deviam digitar no protótipo de aplicativo, principalmente questões referentes às tabelas. Como isso era reiterado, prejudicou a atividade (variável interveniente).

Um dos alunos irritou-se, porque não conseguia apagar os valores que havia inserido no campo de representação tabelar do protótipo. Isso ocorreu porque não havia instruções no aplicativo instrucional de como apagar os números digitados na tabela. Além disso, no aplicativo *ApliRFunction 1.0* não há uma ferramenta específica para limpar os dados digitados no campo de representação tabelar.

Outros não exploraram o menu da representação gráfica e questionavam por que seus gráficos estavam aparecendo em linhas pontilhadas e o de seus colegas em linhas retas. Isso ocorreu porque não foi disponibilizado um manual de funcionamento dos aplicativos.

Além disso, observou-se que poucos alunos exploraram todos os menus do *ApliRFunction* 1.0, pois grande parte dos alunos interagiu apenas com o que foi solicitado nos *slides* do aplicativo instrucional. Assim, constata-se que faltaram atividades de exploração do protótipo de aplicativo.

Na sequência, muitos alunos solicitaram um intervalo, alegaram que como de costume, paravam as atividades durante dez minutos às vinte e uma horas e quinze minutos. Então, a pesquisadora liberou os alunos para um intervalo. Cinquenta por cento deles retornaram.

No momento final, os alunos que retornaram ao laboratório de multimídia continuaram a interagir com os aplicativos. Entretanto, assim que eles concluíram a interação, a pesquisadora comentou brevemente sobre a importância de se realizar uma pesquisa, como funcionava seu trabalho, sobre as teorias utilizadas e agradeceu a participação dos estudantes.

Na próxima seção, apresenta-se a análise dos resultados dessa interação.

4.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A seguir apresentam-se as questões que foram aplicadas no pré-teste e no pós-teste, as tabelas e os gráficos da análise, tais como descritos na seção anterior.

A questão 1 teve como objetivo verificar o que o estudante entende por grandezas variáveis, bem como se ele sabe identificar num gráfico como estão representadas estas grandezas.

Veja-se o gráfico que foi usado para essa questão:

Questão 1. O que você entende por grandezas variáveis? No gráfico abaixo estão representadas estas grandezas, identifique-as.

Gráfico "A epidemia das pedras" (retirado de [Veja 2008]).

Para dar conta dessa questão, o aluno precisaria mobilizar os conteúdos dos *slides* 4-9 do aplicativo instrucional. A resposta esperada deveria definir uma variável como elemento que muda de valor, e identificar tempo (em anos) e quantidade apreendida de *crack* no país (em quilos) como as variáveis envolvidas no gráfico desta questão. Se o estudante definisse variável e *não* as identificasse no gráfico, ou se ele *não* definisse variável e as identificasse no gráfico, a resposta seria considerada parcialmente correta.

A Tabela 6 apresenta a frequência de respostas (corretas, parcialmente corretas, erradas e em branco) para a Questão 1.

Tabela 6 – Frequência das Respostas da Questão 1:

Respostas da Questão 1	Pré-teste		Pós-teste		Diferença (pós menos pré)	
	f	%	F	%	f	%
Corretas	1	5,0	7	35,0	6	30,0
Parcialmente Corretas	12	60,0	12	60,0	0	0,0
Erradas	3	15,0	0	0,0	-3	-15,0
Em branco	4	20,0	1	5,0	-3	-15,0
Total	20	100,0	20	100,0	0,0	0,0

Na primeira questão, 15% dos estudantes que deixaram de responder o pré-teste tentaram responder esta questão no pós-teste (-3 respostas em branco). Dos que erraram esta questão, 15% deles deixaram de errar no pós-teste (-3 respostas erradas), o que corresponde a nenhuma resposta errada. Além disso, não houve variação em respostas parcialmente corretas. Entretanto, ocorreu um acréscimo de 30% de respostas corretas (+6 respostas) no pós-teste.

Na sequência, são apresentadas algumas respostas, resposta-alvo (respostas desejadas) e resposta-divergente (diferente das respostas desejadas), dadas pelos estudantes à Questão 1.

A resposta do Aluno 3 estava errada no pré-teste:

> Como variável entre 2005 e 2006; 2005 e 2007 é uma ligação entre um ponto é o espaço entre um ponto e outro. (Aluno 3)

Na situação apresentada pelo Aluno 3 no pré-teste, pode-se observar que ele não identifica o conceito de variável, não conhece o objeto variável, ou seja, não reconhece a formação de uma representação identificável de variável e, desta maneira, demonstrou que não atingiu a noese, a conceitualização de variável em séries anteriores, na sua formação básica. E foi por este motivo que não conseguiu identificar as variáveis envolvidas no gráfico no pré-teste. Entretanto, é possível considerar que ele considera como variável a noção de intervalos.

Porém, apesar de não ter usado uma linguagem muito precisa, podemos considerar a resposta do Aluno 3 no pós-teste como correta:

> No caso do gráfico é a relações de consumo de crack em relação aos anos, ou seja essa grandesa é variavel porque ela pode ser mais ou menos é indeterminado. (Aluno 3)

O Aluno 11 não havia respondido a Questão 1 no pré-teste e respondeu no pós-teste. A resposta foi:

> As grandezas são: a quantidade de crack apreendida em quilos e o tempo em anos. Grandezas variáveis são aquelas grandezas que estão em estudo que podem variar ou não de acordo com a lei de formação. (Aluno 11)

O Aluno 5 não respondeu a Questão 1 no pré-teste. No pós-teste, por sua vez, ele conseguiu definir parte do conceito solicitado na questão, conforme descrito abaixo:

Variáveis é um ponto onde tem variações entre si. 113 à 2005. (Aluno 5)

Diante disso, observa-se que o Aluno 5 acertou parcialmente o conceito, pois não conseguiu identificar as variáveis solicitadas no gráfico da questão, apesar de ter reconhecido a formação de uma representação identificável de variáveis. Conforme o que foi exposto por ele, é possível constatar que ele não conseguiu fazer a conversão, apresentar as variáveis do gráfico em linguagem natural. Ele não atingiu a conceitualização no pós-teste.

Diante deste cenário, pode-se considerar que os erros que os alunos cometeram na Questão 1 se devem ao fato desta atividade exigir do aluno conversões não-congruentes. Para Duval (2003, p. 22), “a não-congruência pode levar os alunos a verdadeiros bloqueios que eles não superam verdadeiramente”.

Na sequência, podem-se acompanhar as respostas e análises da questão 2.

Questão 2.	As grandezas variáveis apresentam uma relação de dependência entre si. No gráfico da questão anterior, identifique a variável dependente e a variável independente.

Na Questão 2, o estudante deveria identificar a variável dependente e a variável independente do gráfico; conforme apresentado nos *slides* 8-11 do aplicativo instrucional. Esperava-se que tempo (em anos) fosse identificado como variável independente e quantidade apreendida de *crack* no país (em quilos) como variável dependente. Se o estudante identificasse apenas uma das variáveis no gráfico, a resposta seria considerada parcialmente correta.

A Tabela 7 apresenta a frequência de respostas para a Questão 2.

Tabela 7 – Frequência das Respostas da Questão 2:

Respostas da Questão 2	Pré-teste		Pós-teste		Diferença (pós menos pré)	
	f	%	F	%	f	%
Corretas	7	35,0	15	75,0	8	40,0
Parcialmente Corretas	1	5,0	0	0,0	-1	-5,0
Erradas	4	20,0	5	25,0	1	5,0
Em branco	8	40,0	0	0,0	-8	-40,0
Total	20	100,0	20	100,0	0	0,0

Na Questão 2, não houve resposta em branco, o que corresponde a menos 8 respostas em branco (ou 40% dos estudantes que deixaram de responder a questão no pré-teste tentaram responder no pós-teste). Obteve-se mais uma resposta errada no pós-teste (ou mais 5% de erros). Também, ocorreu uma queda de 5% de respostas parcialmente corretas (-1 resposta) e um acréscimo de 40% de respostas corretas (+8 respostas) no pós-teste. Observa-se, portanto, que aumentou o número de respostas erradas no pós-teste.

Vejam-se algumas respostas-alvo e algumas respostas divergentes.

Os Alunos 8 e 12 não haviam respondido a Questão 2 no pré-teste. No pós-teste, por sua vez, eles conseguiram tratar dos conceitos abordados na questão. A resposta foi:

> A independente no gráfico são os anos e a dependente é a evolução do crack. (Aluno 8)

> Dependente independente
> 113, 145, 580 2005, 2006, 2007 (Aluno 12)

A resposta do Aluno 15 estava errada no pré-teste:

> dependente – 2006
> independente – 2007 (Aluno 15)

Nota-se que o Aluno 15 desconhecia os conceitos de variável, variável dependente e variável independente, pois não reconheceu a formação de uma representação identificável de variável, de variável dependente e independente. Além disso, observa-se que ele não conseguiu realizar conversão, demonstrando não conhecer o objeto matemático solicitado.

A Questão 2 é uma atividade cognitivamente não-congruente, pois o registro de partida, o gráfico em linguagem simbólica, não é transparente ao registro de chegada, em linguagem natural. Duval (2003, p. 21), argumenta que “no caso de as conversões requeridas serem não-congruentes, essas dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes”.

Todavia, apesar de ter errado a questão no pré-teste conseguiu tratar dos conceitos abordados no pós-teste. A resposta correta do Aluno 15 foi:

> Os quilos de crack dependem do ano. Exemplo → Em 2005 a apreenção foi de 113 quilos, em 2006 foi de 145 e em 2007 de 580. (Aluno 15)

Os Alunos 18 e 19 responderam corretamente a Questão 2 no pré-teste. Por sua vez, no pós-teste, eles erraram, pois trocaram os conceitos abordados nessa questão. As repostas dos alunos no pré-teste e no pós-teste foram:

dependente = peso
independente = ano (Aluno 18)

dependente = peso
independente = ano (Aluno 19)

variável dependente → o tempo, os anos (2005, 2006, e 2007)
|| independente →os quilo de crack (Aluno 18)

dependente = ano, independente = peso (Aluno 19)

Diante disso, pode-se ver que esses alunos contribuíram para o aumento de frequência das respostas erradas no pós-teste. Além disso, pode-se supor que eles desconheciam esses conceitos no pré-teste e que só acertaram porque copiaram a reposta de um colega, ou que "chutaram" a resposta no pré-teste. Por isso, não conseguiram realizar a conversão no pós-teste.

Na sequência, apresentam-se os dados e as análises referentes à questão 3.

Questão 3.	A relação entre variáveis pode representar uma função ou não. Assim, existem relações especiais que denominamos de função. O gráfico que você analisou representa uma função? Por quê?

Na Questão 3, o estudante deveria dizer se o gráfico analisado representa uma função e justificar sua resposta. A definição de função foi mostrada nos *slides* 13-17 e 24 do aplicativo instrucional. O gráfico apresentado é uma função porque para cada ano apresentado há uma única correspondência em quantidade de apreensão de *crack*, ou porque para cada elemento do eixo x há um único correspondente no eixo y. Se o estudante afirmasse que o gráfico apresentado é uma função e *não* justificasse sua opinião, ou se justificasse intuitivamente que função é uma relação entre variáveis, a resposta foi considerada parcialmente correta. [34]

A Tabela 8 apresenta a frequência de respostas para a Questão 3.

[34] Toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função. Exemplificando, João tem dois carros, carro A e carro B. Nessa situação temos a relação `Possui (p) = c`, onde p é uma variável que representa uma pessoa e c uma variável que representa um carro. Para esta relação ser uma função, cada elemento de p deve ter um único correspondente em c. A situação que envolve João é uma relação que não é uma função, pois João é uma pessoa que possui dois carros.

Tabela 8 – Frequência das Respostas da Questão 3.

Respostas da Questão 3	Pré-teste		Pós-teste		Diferença (pós menos pré)	
	f	%	f	%	f	%
Corretas	0	0,0	3	15,0	3	15,0
Parcialmente Corretas	11	55,0	12	60,0	1	5,0
Erradas	0	0,0	1	5,0	1	5,0
Em branco	9	45,0	4	20,0	-5	-25,0
Total	20	100,0	20	100,0	0,0	0,0

Na Questão 3, o pós-teste teve menos 5 respostas em branco (-25%), mais uma resposta errada (+5%), mais uma resposta parcialmente correta (+5%), e mais 3 respostas corretas (+15%). Neste caso, pode-se supor que 5 estudantes que não tinham respondido a Questão 3 no pré-teste, 3 acertaram no pós-teste, 1 acertou parcialmente e 1 errou.

Vejam-se algumas respostas-alvo e algumas respostas divergentes.

O Aluno 11 não havia respondido a Questão 3 no pré-teste. No pós-teste, por sua vez, ele conseguiu tratar dos conceitos abordados na questão. A resposta foi:

> Sim, pois todos os elementos do domínio estabelecem única relação com o contra-domínio. (Aluno 11)

O Aluno 4 respondeu parcialmente a Questão 3 no pré-teste. No pós-teste, por sua vez, ele errou, pois não conseguiu analisar a representação gráfica e conceituar os temas abordados nessa questão. A reposta do aluno no pré-teste e no pós-teste foi:

> Sim, pois nele indica uma mudança de um determinado espaço de tempo para outro. (Aluno 4)
> Não, pois os valores são de análises de tempo e de aumento de consumo. (Aluno 4)

Dessa maneira, observa-se que o Aluno 4, por ter respondido parcialmente correto no pré-teste e errado no pós-teste, demonstrou que não atingiu a conceitualização, pois não conseguiu reconhecer a formação de representação identificável de uma função e, por isso, não foi capaz de realizar a conversão solicitada na questão. Posto isto, é importante salientar que a conversão necessária na Questão 3, como analisar se o gráfico (linguagem simbólica) é uma função (linguagem natural) pode ser considerada não-congruente. Para Duval (2003, p. 21), “o sucesso, para grande parte dos alunos em matemática, ocorre no caso dos monorregistros”.

Na sequência, observe os dados e a análise da questão 4.

Questão 4.	O que você entende por função?

A Questão 4 teve por objetivo definir o que é função. Essa definição foi enunciada no *slide* 13-17 e 24 do aplicativo instrucional. Define-se por função f: A → B uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento do conjunto B. Se o estudante definisse intuitivamente que função é uma relação entre variáveis, ou que função são elementos que apresentam domínio, imagem e contradomínio, a resposta foi considerada parcialmente correta. A Tabela 9 apresenta a frequência de respostas para a Questão 4.

Tabela 9 – Frequência das Respostas da Questão 4.

Respostas da Questão 4	Pré-teste		Pós-teste		Diferença (pós menos pré)	
	f	%	f	%	f	%
Corretas	1	5,0	1	5,0	0	0,0
Parcialmente Corretas	7	35,0	6	30,0	-1	-5,0
Erradas	6	30,0	4	20,0	-2	-10,0
Em branco	6	30,0	9	45,0	3	15,0
Total	20	100,0	20	100,0	0,0	0,0

Na Questão 4, o pós-teste teve mais 15% de respostas em branco (3 respostas), menos 10% de erradas (-2 respostas), e menos 5% de respostas parcialmente corretas (-1 resposta). Além disso, não houve variação em respostas corretas. Posto isto, pode-se supor que os estudantes que deixaram de responder esta questão obtiveram menos 2 respostas erradas e menos uma resposta parcialmente correta.

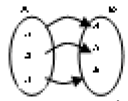
Vejam-se alguns casos. O Aluno 18 não havia respondido a Questão 4 corretamente no pré-teste. No pós-teste, por sua vez, ele conseguiu tratar parcialmente dos conceitos abordados na questão. A resposta foi:

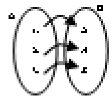
> determina algo. (Aluno 18)

> Função é quando algo depende de algo. (Aluno 18)

Observa-se que o Aluno 18 não reconhece a verdadeira formação de uma representação identificável de uma função.

O Aluno 11 respondeu a questão no pré-teste e no pós-teste corretamente.

Dada a expressão:  pode-se dizer que funções são conjuntos que estabelecer relações entre seus elementos através de uma lei de formação. Para ser função é necessário: todo elemento de A estabelecer única relação com os elementos de B, não sobrando elementos em A mas sobrando em B. Possui domínios que são: Domínio (A), contra-domínio (B), imagem (aqueles elementos que recebem as flechas em B. (Aluno 11)

Dada a representação: 

Pode-se dizer que função é a relação estabelecida entre dois conjuntos através da lei de formação. Porém, para ser função é necessário que todo elementos de A estabeleçam única relação com os elementos de B. Assim, podem sobrar elementos de B. Concluindo: f(x) = ax + b, com a $\neq 0$, é a relação entre variáveis que esta dentro destas condições. (Aluno 11)

Diante do caso exposto, nota-se que a resposta dada pelo Aluno 11 é semelhante ao que se encontra nos livros didáticos de matemática do ensino médio. Entretanto, é importante verificar se ele sabe realmente reconhecer a formação de uma representação identificável de uma função, ou se apenas decorou o conceito encontrado nos livros. Será que esse aluno é capaz de identificar uma função graficamente, ou por meio de uma expressão algébrica ou por uma tabela? Ou seja, utilizar-se de no mínimo duas representações para definir o objeto função.

O Aluno 8 respondeu parcialmente a Questão 4 no pré-teste, porém deixou em branco no pós-teste. A resposta no pré-teste foi:

É a relação entre uma variável e outra.. (Aluno 8)

Diante disso, nota-se que o Aluno 8 reconheceu parcialmente a formação de uma representação identificável de uma função no pré-teste.

A resposta do Aluno 15 estava parcialmente correta no pré-teste:

Função são relações entre dois objetos. (Aluno 15)

Porém, errada no pós-teste:

É a representação de 2 (dois) elementos. (Aluno 15)

Observa-se que o Aluno 15 não conseguiu definir o objeto matemático função na Questão 4 no pós-teste, ou seja, não reconheceu sua formação de representação identificável. Porém, reconheceu parcialmente no pré-teste. Diante disso, pode-se supor que ele copiou a resposta de um colega no pré-teste, ou não estava interessado em responder o pós-teste.

A seguir apresentam-se os dados e a análise da questão 5.

Questão 5. Uma função apresenta elementos que denominamos de domínio, imagem e contradomínio. Observe o gráfico abaixo e determine o domínio e a imagem:

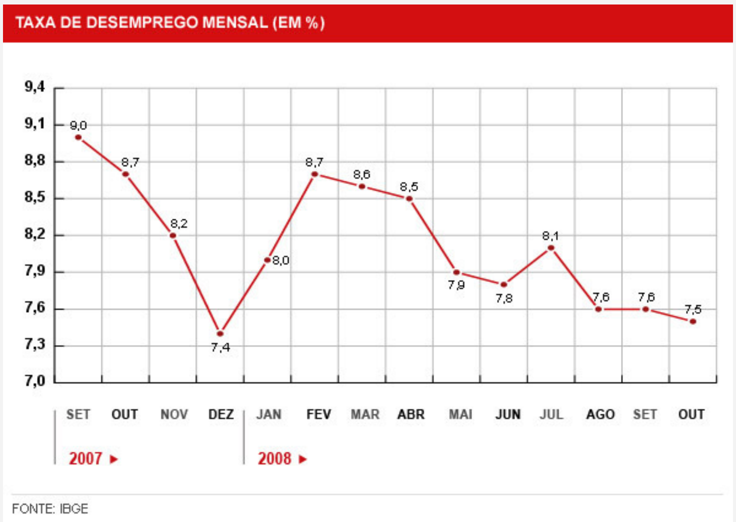


Gráfico "Taxa de desempenho mensal (em %)" (retirado de [G1 2009]).

Na Questão 5, o estudante deveria observar o gráfico e identificar o domínio e a imagem. Esse conteúdo foi apresentado nos *slides* 25-30 e 61-63 do aplicativo instrucional. Esperava-se que a variável tempo (em meses) fosse identificado como domínio e variável taxa de desempenho mensal (em %) como imagem, ou que o domínio fosse identificado como sendo o conjunto {set07, out07, nov07, dez07, jan08, fev08, mar08, abr08, mai08, jun08, jul08, ago08, set08, out08} e a imagem como sendo o conjunto {9,0; 8,7; 8,2; 7,4; 8,0; 8,7; 8,6; 8,5; 7,9; 7,8; 8,1; 7,6; 7,6; 7,5}. Se o estudante identificasse apenas a imagem ou o domínio, a resposta foi considerada parcialmente correta. A Tabela 10 apresenta a frequência de respostas para a Questão 5.

Tabela 10 – Frequência das Respostas da Questão 5:

Respostas da Questão 5	Pré-teste		Pós-teste		Diferença (pós menos pré)	
	f	%	f	%	f	%
Corretas	5	25,0	11	55,0	6	30,0
Parcialmente Corretas	2	10,0	2	10,0	0	0,0
Erradas	0	0,0	2	10,0	2	10,0
Em branco	13	65,0	5	25,0	-8	-40,0
Total	20	100,0	20	100,0	0,0	0,0

Na Questão 5, o pós-teste teve menos 40% de respostas em branco (-8 respostas), e 10% de repostas erradas (+2 respostas). Além disso, não ocorreu variação nas respostas parcialmente corretas e houve um acréscimo de 30% de respostas corretas no pós-teste (6 respostas). Diante disso, pode-se supor que os estudantes que deixaram de responder esta questão no pré-teste obtiveram no pós-teste 2 respostas erradas e 6 corretas.

O Aluno 6 não respondeu essa questão no pré-teste, mas respondeu no pós-teste da seguinte maneira:

> Domínio é os meses
> Imagem é a porcentagem (Aluno 6)

A resposta dada pelo Aluno 7 à Questão 5 foi correta tanto no pré-teste quanto no pós-teste, respectivamente:

> D = meses
> I = taxa desemprego
> CD = anos
> (Aluno 7)

> Domínio: os meses
> Contra-domínio → a taxa de desemprego
> Imagem → os pontos da taxa de desemprego
> (Aluno 7)

O Aluno 2 respondeu corretamente essa questão no pré-teste, conforme o conteúdo exposto no aplicativo. Entretanto, ele respondeu parcialmente correto no pós-teste, pois identificou apenas o domínio corretamente. Suas respostas foram:

> Domicios (Domínio) são os meses que mudam, imagem é a taxa de desemprego. (Aluno 2)

> Domínio – meses
> Imagem – anos (Aluno 2)

Observa-se que o Aluno 2 não realizou a atividade de conversão como era o esperado, ou seja, não representou corretamente o domínio e a imagem que apresenta-se no gráfico em linguagem natural.

Na sequência, apresentam-se os dados e a análise da questão 6.

Questão 6.	As funções, em geral, podem ser crescentes ou decrescentes. Identifique os intervalos crescentes e decrescentes no gráfico da questão anterior.

Na Questão 6, o estudante deveria identificar os intervalos crescentes e decrescentes no gráfico; conforme apresentado no *slide* 65-68 do aplicativo instrucional. Esperava-se como resposta a identificação dos seguintes intervalos: os intervalos crescentes, [7,4; 8,7] e [7,8; 8,1], os intervalos decrescentes, [9,0; 7,4], [8,7; 8,5], [8,5; 7,9], [7,9; 7,8], [8,1; 7,6] e [7,6; 7,5], e o intervalo constante, [7,6; 7,6]. Se o estudante deixasse de analisar algum intervalo ou se considerasse o intervalo constante como decrescente, a resposta foi considerada parcialmente correta.

A Tabela 11 apresenta a frequência de respostas para a Questão 6.

Tabela 11 – Frequência das Respostas da Questão 6:

Respostas da Questão 6	Pré-teste		Pós-teste		Diferença (pós menos pré)	
	f	%	f	%	f	%
Corretas	6	30,0	8	40,0	2	10,0
Parcialmente Corretas	4	20,0	8	40,0	4	20,0
Erradas	2	10,0	2	10,0	0	0,0
Em branco	8	40,0	2	10,0	-6	-30,0
Total	20	100,0	20	100,0	0,0	0,0

Na Questão 6, o pós-teste teve menos 30% de respostas em branco (-6 respostas) e não houve variação em respostas erradas. Também teve um acréscimo de 20% de respostas parcialmente corretas (+4 respostas) e um acréscimo de 10% de respostas corretas no pós-teste (+10 respostas). Posto isso, podemos supor que os estudantes que responderam o pós-teste, obtiveram 4 respostas parcialmente corretas e 2 respostas corretas.

O Aluno 5 deixou de responder a Questão 6 no pré-teste, mas respondeu parcialmente correto no pós-teste, pois não identificou todos os intervalos crescentes e decrescentes no gráfico. A resposta foi:

> Crescente Dez a Fev, Jun – Jul,
> Decrescente set – dez, Fev – Jun. (Aluno 5)

O Aluno 5 reconheceu a formação de uma representação identificável crescente e decrescente no gráfico, mas não converteu todos os intervalos do gráfico em linguagem natural.

O Aluno 13 não respondeu essa questão no pré-teste. Porém, respondeu corretamente no pós-teste. Sua resposta foi:

> Setembro a dezembro (2007) decrescente, dezembro a fevereiro (2008) crescente, fevereiro a junho (2008) decrescente, junho a julho (2008) crescente, julho a agosto (2008) decrescente, setembro a outubro (2008) decrescente. (Aluno 13)

O Aluno 3 deixou de responder a Questão 6 no pré-teste. Entretanto, tentou responder no pós-teste e errou, pois identificou os *pontos* crescentes e decrescentes em vez dos *intervalos* crescentes e decrescentes. Sua resposta foi:

> crescente: 9,0; 8,7; 8,1; 8,0.
> decrescente: os demais. (Aluno 3)

O Aluno 3 não reconheceu a formação de uma representação identificável de intervalos crescentes e decrescentes e não conseguiu realizar a conversão da Questão 3, pois não representou corretamente em linguagem natural os intervalos do gráfico.

O Aluno 18 respondeu parcialmente correto essa questão no pré-teste, pois identificou um intervalo constante como intervalo decrescente e outro como crescente e decrescente, simultaneamente. Porém, deixou de responder a questão no pós-teste. Sua resposta foi:

> SET à OUT = decrescente JAN à FEV = crescente
> OUT à NOV = decrescente FEV à MAR = crescente e decrescente
> NOV à DEZ = decrescente MAR à ABR – Decrescente
> DEZ à JAN = crescente ABR – MAI – Decrescente (Aluno 18)

Além disso, observa-se que o Aluno 18 reconheceu a formação de uma representação identificável de intervalos crescentes e decrescentes e não converteu todos os intervalos corretamente.

Na sequência, apresentam-se os dados e a análise da questão 7.

Questão 7.	Uma função pode assumir valores que dependem de seu campo de definição. Dada a função f (x) = 6x + 2, determine f (1).

A Questão 7 teve por objetivo determinar f(1) da função f(x) = 6x + 2. Esperava-se como resposta a operação completa, com resultado f(1) = 8. Esse conteúdo foi apresentado nos *slides* 46-49 do aplicativo instrucional. Se o estudante realizasse a operação pela metade, a resposta seria considerada parcialmente correta.

A Tabela 12 apresenta a frequência de respostas para a Questão 7.

Tabela 12 – Frequência das Respostas da Questão 7.

Respostas da Questão 7	Pré-teste		Pós-teste		Diferença (pós menos pré)	
	f	%	f	%	f	%
Corretas	15	75,0	15	75,0	0	0,0
Parcialmente Corretas	0	0,0	0	0,0	0	0,0
Erradas	4	20,0	3	15,0	-1	-5,0
Em branco	1	5,0	2	10,0	1	5,0
Total	20	100,0	20	100,0	0,0	0,0

Na Questão 7, obteve-se um acréscimo de 5% de respostas em branco (+1 resposta) e um decréscimo de 5% de respostas erradas (-1 resposta). Além disso, não ocorreu variação em repostas parcialmente corretas e corretas.

A resposta da Questão 7 do Aluno 6 está errada no pré-teste, pois trocou *f(x)* por *1* em vez de *x* por *1*. Porém, está correta no pós-teste. Suas respostas foram:

$$1 = 6x + 2$$
$$1 - 2 = 6x$$
$$x = -\frac{1}{6} \text{ (Aluno 6)}$$

$$f(1) = 6(1) + 2$$
$$f(1) = 6 + 2$$
$$f(1) = 8 \text{ (Aluno 6)}$$

O Aluno 6 não reconheceu a formação de uma representação identificável do enunciado da Questão 7 e não realizou corretamente a atividade de tratamento no pré-teste. Porém, reconheceu e realizou corretamente no pós-teste.

A resposta do Aluno 3 para essa questão está errada no pré-teste, porque trocou *f(x)* por *1* em vez de *x* por *1*. Ele deixou em branco no pós-teste. A resposta foi:

6x + 2 = 1
6x = 1 – 2
6x = 1
$x = -\frac{1}{6}$ (Aluno 3)

O Aluno 3 também não reconheceu a formação de uma representação identificável do enunciado da Questão 7 e não realizou corretamente os tratamentos no pré-teste.

O Aluno 13 respondeu essa questão corretamente no pré-teste e erradamente no pós-teste, pois trocou *f(x)* por *1* em vez de *x* por *1*. Suas repostas foram:

f(x) = 6x + 2
f(1) = 6. 1 + 2
1.f = 8
f = 8 (Aluno 13)

f(x) = 6x + 2
1 = 6x + 2
-6x = 2 – 1
-6x = 1 (-1)
$x = -\frac{1}{6}$ (Aluno 13)

O aluno 13 reconheceu a formação de uma representação identificável do enunciado da Questão 7 e realizou corretamente a atividade de tratamento no pré-teste. Contudo, não tratou devidamente no pós-teste.

Na sequência, apresentam-se os dados e a análise da questão 8.

Questão 8. Qual valor real de **x** na função f(x) = 2 – 4x quando f(x) = 5?

A Questão 8 teve por objetivo determinar o valor de x da função f(x) = 2 – 4x quando f(x) = 5. Esperava-se como resposta a operação completa com resultado $x = -\frac{3}{4}$ ou x = 0,75. Esse conteúdo foi mostrado, intuitivamente, nos *slides* 53-56 do aplicativo instrucional. Se o estudante realizasse a operação pela metade, a resposta foi considerada parcialmente correta. A Tabela 13 apresenta a frequência de respostas para a Questão 8.

Tabela 13 – Frequência das Respostas da Questão 8.

Respostas da Questão 8	Pré-teste		Pós-teste		Diferença (pós menos pré)	
	f	%	f	%	f	%
Corretas	12	60,0	12	60,0	0	0,0
Parcialmente Corretas	4	20,0	3	15,0	-1	-5,0
Erradas	4	20,0	5	25,0	1	5,0
Em branco	0	0,0	0	0,0	0	0,0
Total	20	100,0	20	100,0	0,0	0,0

Na Questão 8, tanto no pré-teste quanto no pós-teste não houve respostas em branco. Também houve um acréscimo de 5% de respostas erradas e um decréscimo de 5% de respostas parcialmente corretas. Além disso, não ocorreu variação em repostas corretas. Diante disso, podemos supor que o estudante que errou no pós-teste havia acertado parcialmente a questão no pré-teste.

A resposta do Aluno 4 está errada no pré-teste, pois ele substituiu 5 por *x* em vez de 5 por *f(x)*. Porém, está correta no pós-teste. As repostas foram:

$f(x) = 2 – 4x$
$f(5) = 2 – 4.5$
$f(5) = 2 – 20$
$f(5) = - 18$ (Aluno 4)

$f(x) = 2 – 4x$
$2 – 4x = 5$
$-4x = 5 – 2$
$-4x = 3$
$x = -\frac{3}{4}$ (Aluno 4)

O Aluno 3 respondeu corretamente a Questão 8 no pré-teste. Porém, respondeu parcialmente correto no pós-teste, pois esqueceu do sinal negativo em *-4x* e em $-\frac{3}{4}$. As respostas foram:

$2 – 4x = 5$
$-4x = 5 – 2$
$-4x = 3$

$x = -\frac{3}{4}$ (Aluno 3)

$5 = 2 – 4x$
$5 – 2 = 4x$

$x = \frac{3}{4}$ (Aluno 3)

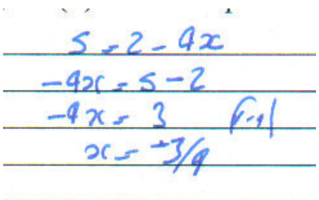
Observa-se que o Aluno 3, reconheceu a formação de uma representação identificável em questão tanto no pré-teste quanto no pós-teste. Porém, não efetuou corretamente a atividade de tratamento no pós-teste, pois se esqueceu de conservar o sinal negativo em 4x, que se encontra na segunda linha do cálculo, e consequentemente esqueceu de colocar o sinal negativo em $\frac{3}{4}$.

O Aluno 20 respondeu corretamente a Questão 8 no pré-teste. Entretanto, respondeu errado no pós-teste, pois substituiu 5 por *x* em vez de 5 por *f(x)*. As repostas foram:

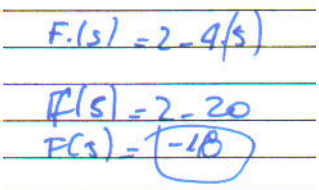
$f\,x = 2 - 4x$
$5 = 2 - 4x$
$5 - 2 = -4x$
$4x = -3$
$x = -\frac{3}{4}$ (Aluno 20)

$f(x) = 2 - 4x$
$f(5) = 2 - 4.5$
$f(5) = 2 - 20$
$f(5) = -18$ (Aluno 20)

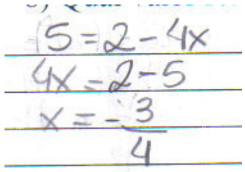
Além do Aluno 20, os alunos 6 e 12, fizeram o mesmo erro. O Aluno 12 respondeu essa questão utilizando-se de uma tabela, diferenciando-se dos demais estudantes.



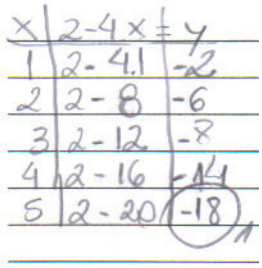
(Aluno 6)



(Aluno 6)



(Aluno 12)



(Aluno 12)

Teoricamente, nota-se que os alunos 6, 12 e 20 reconheceram a formação de uma representação identificável do enunciado da Questão 8 e realizaram corretamente a atividade de tratamento no pré-teste. Porém, não realizaram devidamente no pós-teste. Além disso, o aluno 12 utilizou um tratamento diferente dos demais alunos, usou tabelas, para responder a esta questão no pós-teste. Entretanto, é importante mencionar que a resposta dada ao pós-teste na Questão 8 pelo aluno 12 foi considerara incorreta, não por ter representado por meio de uma tabela, mas por ter substituído o ‘x’ pelo número 5, pois seria considerada correta se tivesse substituído o ‘y’ por 5. Diante disso, pode-se supor que para responder a esta questão no pós-teste o Aluno 12 tenha se baseado nas tabelas dos *slides* 46-49 do aplicativo.

Para Duval (2003, p. 27),

> do ponto de vista cognitivo, os acertos elementares não são determinados por cada item separadamente, mas por reagrupamentos de itens, porque esses acertos só podem ser definidos em termos de discriminação: é necessário ser capaz de reconhecer no que diferem duas representações cujas componentes significantes, salvo uma, são as mesmas, ou que superficialmente parecem diferir somente por uma única componente, a qual na realidade combina duas diferentes. [...] Um sucesso matemático não corresponde a um sucesso cognitivo. Muitos tratamentos estatísticos se baseiam em sucesso nos itens considerados separadamente e não em sucesso em toda uma sequência de itens; no entanto, este último é o único que possui um significado do ponto de vista de uma análise cognitiva.

Na sequência, apresentam-se os dados e a análise da questão 9.

Questão 9.	Uma função pode-se apresentar em diferentes sistemas de representação. Escreva uma tabela com alguns valores arbitrários para a função f(x) = x + 3, definida no campo dos reais.

Na Questão 9, o estudante deveria escrever uma tabela com valores arbitrários para a função f(x) = x + 3. Espera-se que o estudante construa uma tabela partindo da função f(x) = x + 3, substituindo os valores arbitrários em x e obtendo os valores de y ou f(x). Esse conteúdo foi apresentado nos *slides* 46-49 do aplicativo instrucional. Se o estudante apenas calculasse os valores de y por meio dos valores arbitrários de x e *não* escrevesse a tabela, a resposta foi considerada parcialmente correta. A Tabela 14 apresenta a frequência de respostas para a Questão 9.

Tabela 14 – Frequência das Respostas da Questão 9.

Respostas da Questão 9	Pré-teste		Pós-teste		Diferença (pós menos pré)	
	f	%	f	%	f	%
Corretas	11	55,0	13	65,0	2	10,0
Parcialmente Corretas	4	20,0	2	10,0	-2	-10,0
Erradas	0	0,0	1	5,0	1	5,0
Em branco	5	25,0	4	20,0	-1	-5,0
Total	20	100,0	20	100,0	0,0	0,0

Na Questão 9, o pós-teste teve menos 5% de respostas em branco (-1), mais 5% de respostas erradas (+1), menos 10 % de respostas parcialmente corretas (-2) e mais 10% de respostas corretas (+2). Diante disso, podemos supor que os estudantes que responderam esta questão erraram e os que acertaram parcialmente no pré-teste acertaram no pós-teste.

O Aluno 10 respondeu corretamente a Questão 9 no pré-teste, pois apenas calculou os valores arbitrários. E em um dos casos, determinou x = 6 e calculou f(5) = 9. Todavia, respondeu corretamente no pós-teste. Suas respostas foram:

x = 3 f(3) = 6
x = 4 f(4) = 7
x = 6 f(5) = 9 (Aluno 10)

x	y
3	6
2	5
1	4

f(3) = 3 + 3 → f(3) = 6
f(2) = 2 + 3 → f(2) = 5
f(1) = 1 + 3 → f(1) = 4 (Aluno 10)

Diante disso, mesmo o Aluno 10 ter se confundido na substituição da última linha de cálculo do pré-teste, ou seja, ter efetuado uma operação não consciente, no sentido de seguir a ordem crescente dos úmeros de 3 à 4 nas substituições de x, interno aos parênteses, a resposta foi considerada correta. Observa-se também, que no pré-teste o aluno não desenhou uma tabela, ou seja, não realizou a conversão, porém representou no pós-teste.

O Aluno 16 não respondeu essa questão no pré-teste. Entretanto, errou no pós-teste. A reposta foi:

$A = \{x \in R / 0 < x\}$ (Aluno 16)

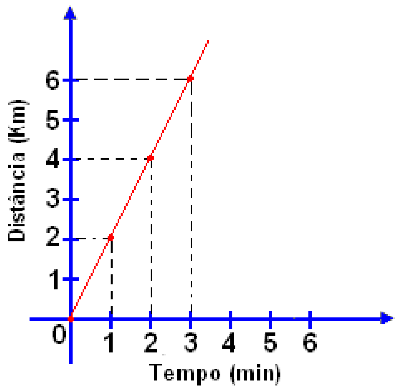
Diante da resposta apresentada pelo Aluno 16, observa-se que ele desconhece o objeto matemático solicitado na Questão 9. Pois a resposta apresentada por ele a esta questão é uma notação algébrica de conjuntos e não uma representação tabelar. Diante disso, constata-se que ele desconhece a formação de uma representação identificável de uma tabela, pois não arbitrou valores para x, de modo a criar elementos para compor uma tabela. Posto isto, supõe-se que se ele desconhece a formação de uma tabela, significa que ele não sabe tratá-la, ou seja, realizar mudanças nesse mesmo registro. Além disso, observa-se que ele não realizou a atividade de conversão, demonstrando não ter atingido a conceitualização.

Na sequência, apresentam-se os dados e a análise da questão 10.

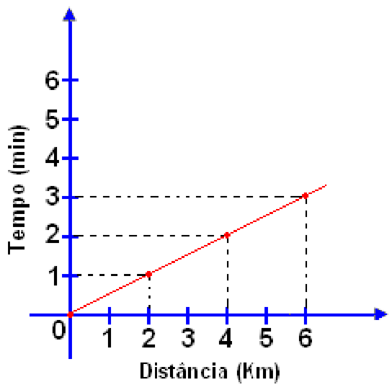
Questão 10. A tabela, a seguir, apresenta valores de uma função real. Represente graficamente e determine sua lei de formação.

Distância (km)	0	2	4	6
Tempo (min)	0	1	2	3

A Questão 10 teve por objetivo representar graficamente e determinar a lei de formação de uma tabela de valores de uma função real. Esperava-se como resposta o gráfico que segue abaixo e a seguinte lei de formação, $y = 2x$, ou $f(x) = 2x$, ou $D = 2t$, ou $T = 2d$.



ou



Esse conteúdo foi mostrado nos *slides* 53-56 do aplicativo instrucional. Se o estudante representasse graficamente os valores da tabela e não determinassem a lei de formação, ou se determinassem a lei de formação e não representasse graficamente os valores da tabela, a resposta foi considerada parcialmente correta.

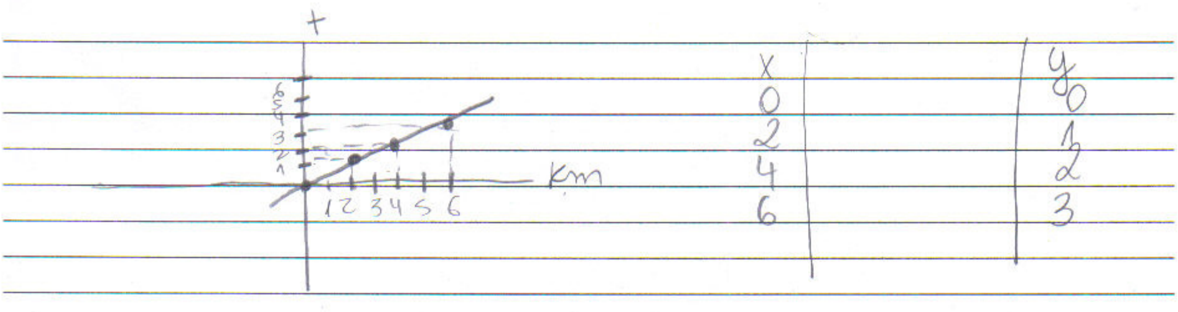
A Tabela 15 apresenta a frequência de respostas para a Questão 10.

Tabela 15 – Frequência das Respostas da Questão 10.

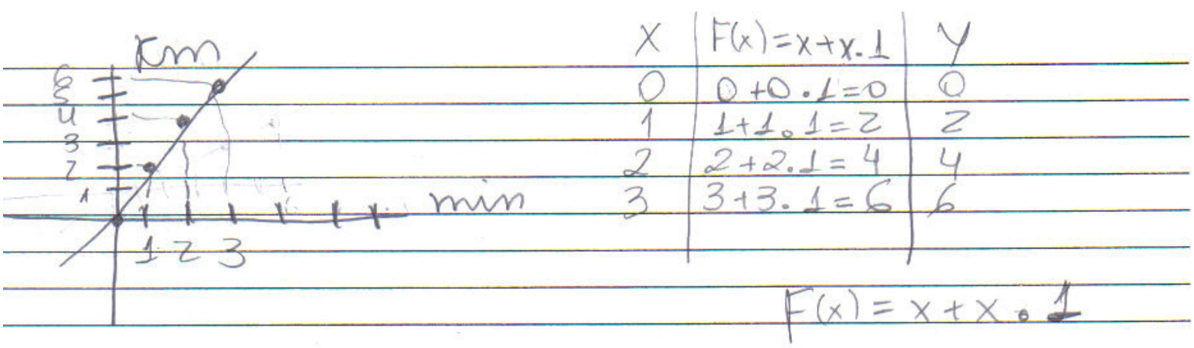
Respostas da Questão 10	Pré-teste		Pós-teste		Diferença (pós menos pré)	
	número	%	número	%	Número	%
Corretas	3	15,0	7	35,0	4	20,0
Parcialmente Corretas	13	65,0	11	55,0	-2	-10,0
Erradas	1	5,0	1	5,0	0	0,0
Em branco	3	15,0	1	5,0	-2	-10,0
Total	20	100,0	20	100,0	0,0	0,0

Na Questão 10, o pós-teste teve menos 10% de respostas em branco (-2 respostas) e não houve variação em repostas erradas. Além disso, ocorreu um decréscimo de 10% de repostas parcialmente corretas (-2 respostas) e um acréscimo de 20% de repostas corretas (+4 respostas). Posto isso, pode-se supor que os estudantes que deixaram de responder essa questão no pré-teste obtiveram respostas parcialmente corretas no pós-teste.

A resposta da Questão 10 do Aluno 9, por exemplo, está parcialmente correta no pré-teste, pois não determinou a lei de formação. Porém, respondeu corretamente no pós-teste. As respostas do aluno foram:



(Aluno 9)



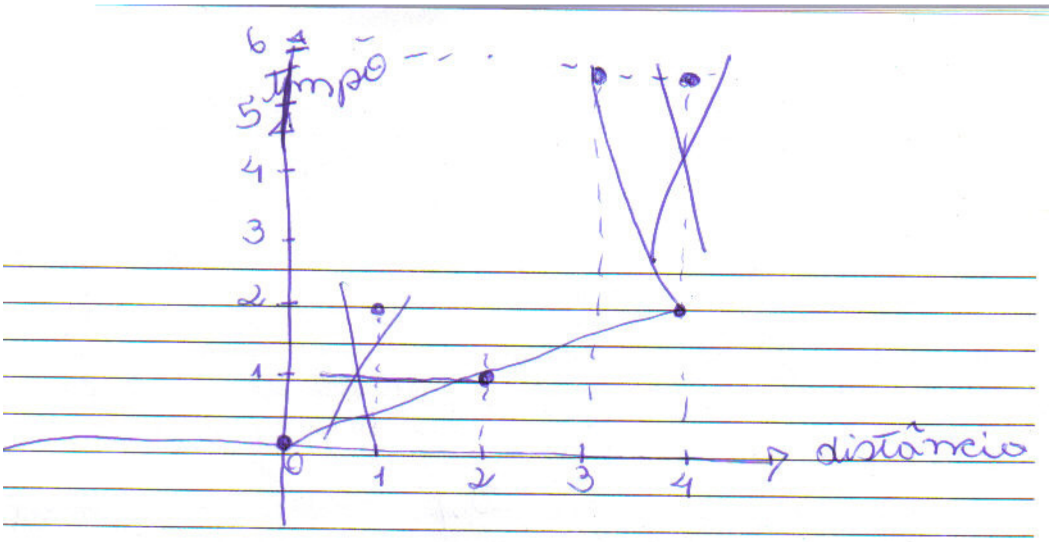
(Aluno 9)

Observa-se que o Aluno 9 não realizou completamente às atividades solicitadas no pré-teste, ou seja, não conseguiu mobilizar todas as representações exigidas, não converteu os dados da tabela e do gráfico em uma lei de formação. Porém, mobilizou todas as representações sugeridas na Questão 10 do pós-teste. Além disso, pode-se supor que o aluno atingiu o nível máximo da semiose e noese de Duval, ou seja, a conversão e a conceitualização. Além disso, observa-se que ele representou a lei de formação de modo ‘f(x) = x + x. 1’ em vez de ‘f(x) = 2. x’.

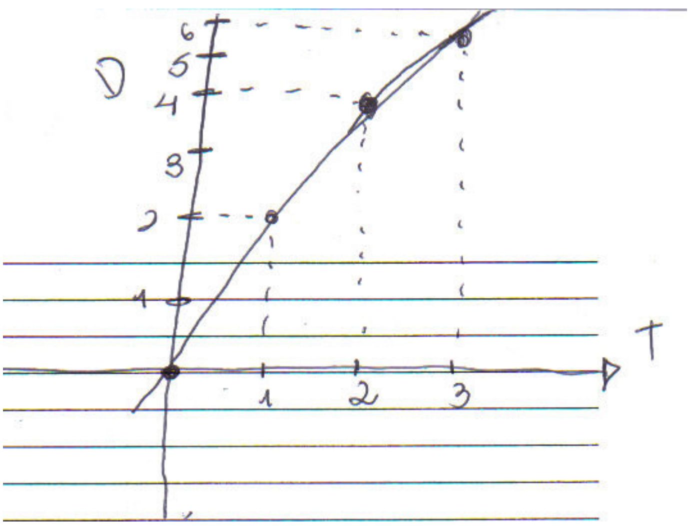
Para Duval (2003, p. 24),

> o objetivo da pesquisa é colocar em evidência os mecanismos próprios da compreensão em matemática, não se podem analisar as produções dos alunos unicamente por meio de critérios matemáticos, procurando reconstruir de maneira mais ou menos hipotética os procedimentos utilizados. Os mecanismos de compreensão não ressaltam somente justificações feitas pelos alunos – eles dependem de um funcionamento cognitivo que se deve poder descrever.

A Questão 10 do Aluno 15 está errada no pré-teste. Porém, está parcialmente correta no pós-teste, pois ele não determinou a lei de formação. As respostas foram:



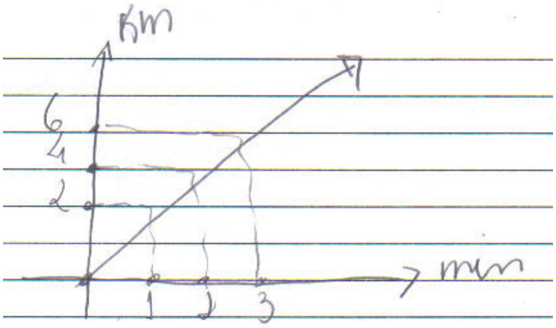
(Aluno 15)



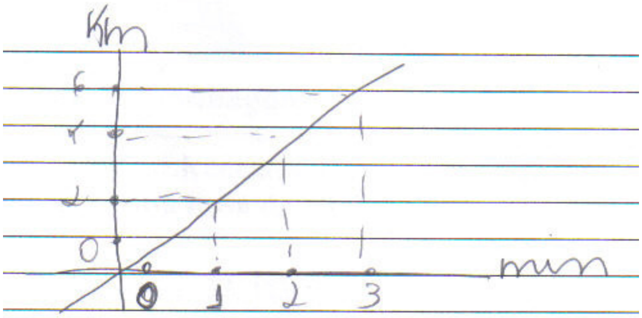
(Aluno 15)

Diante disso, nota-se que o Aluno 15 fez alguns rabiscos em sua representação gráfica no pré-teste e pode-se supor que ele errou e tentou anular o erro marcando um 'X' sobre as linhas indesejáveis. Entretanto, mesmo assim, a resposta foi considerada incorreta, pois essas atividades demonstram que o Aluno 15 não tratou corretamente a representação e não realizou a atividade de conversão, não representou a lei de formação desejada, no pré-teste. Porém, foi considerada parcialmente correta no pós-teste, porque o Aluno 15 realizou a atividade de tratamento do gráfico corretamente.

A resposta da Questão 10 do Aluno 5 está parcialmente correta no pré-teste, pois não determinou a lei de formação da função. Entretanto, está errada no pós-teste. As respostas foram:



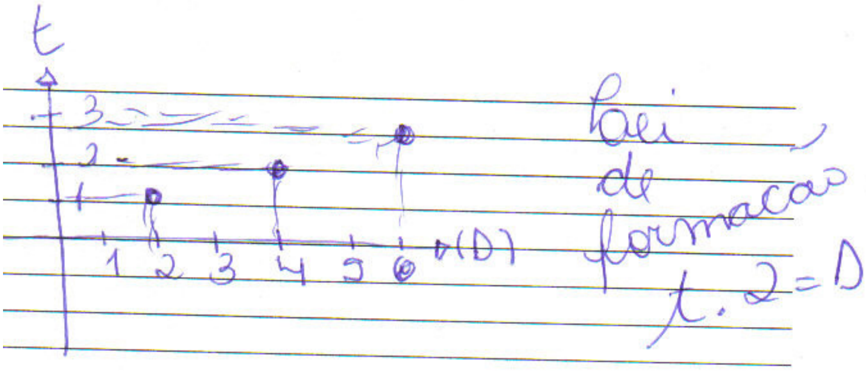
(Aluno 5)



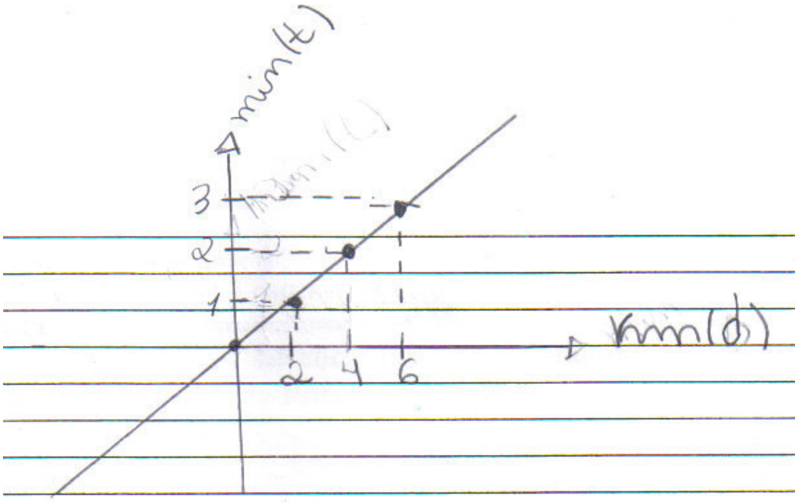
(Aluno 5)

O aluno 5 realizou a atividade de tratamento corretamente no pré-teste, porém não realizou a conversão desejada para questão, representar a situação apresentada também por meio de uma lei de formação. Entretanto, o mesmo aluno, não realizou a atividade de tratamento corretamente na representação gráfica e também não realizou a atividade de conversão no pós-teste. Desse modo, ele não mobilizou todos os registros solicitados na questão 10, e por este motivo essa questão foi considerada incorreta.

A resposta da Questão 10 do Aluno 19 está correta no pré-teste. Porém, está parcialmente correta no pós-teste, pois ele não determinou a lei de formação da função. As respostas foram:



(Aluno 19)

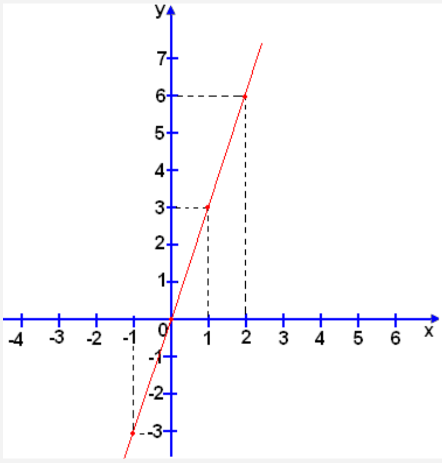


(Aluno 19)

O aluno 19 tratou corretamente a representação gráfica no pós-teste, porém não realizou a atividade de conversão e não representou a situação problema por meio de uma lei de formação.

Na sequência, apresentam-se os dados e a análise da questão 11.

Questão 11. O gráfico, a seguir, representa uma função definida no campo dos reais. A partir do gráfico, represente uma tabela de quatro valores da função e escreva a sua lei de formação:



A Questão 11 teve por objetivo representar uma tabela de quatro valores e escrever uma lei de formação do gráfico da função definida no campo dos reais. Esperava-se como resposta a representação das seguintes tabelas *abaixo* e lei de formação, y = 3x.

x	**y**
-1	-3
0	0
1	3
2	6

ou

x	**y = 3x**	**y**
-1	y = 3. (-1)	-3
0	y = 3. 0	0
1	y = 3. 1	3
2	y = 3. 2	6

ou

x	**y = 3x**	**Y**	**(x,y)**
-1	y = 3. (-1)	-3	(-1,-3)
0	y = 3. 0	0	(0,0)
1	y = 3. 1	3	(1,3)
2	y = 3. 2	6	(2,6)

Esse conteúdo foi apresentado nos *slides* 53-54 e 56 do aplicativo instrucional. Se os estudantes representassem a tabela e não determinassem a lei de formação, ou se determinassem a lei de formação e não representassem a tabela, a reposta seria considerada parcialmente correta.

A Tabela 16 apresenta a frequência de respostas para a Questão 11.

Tabela 16 – Frequência das Respostas da Questão 11.

Respostas da Questão 11	Pré-teste		Pós-teste		Diferença (pós menos pré)	
	f	%	f	%	f	%
Corretas	7	35,0	6	30,0	-1	-5,0
Parcialmente Corretas	7	35,0	10	50,0	3	15,0
Erradas	2	10,0	0	0,0	-2	-10,0
Em branco	4	20,0	4	20,0	0	0,0
Total	20	100,0	20	100,0	0,0	0,0

Na Questão 11, o pós-teste não apresentou variação de repostas em branco. Além disso, ocorreram menos 10% de respostas erradas (-2), mais 15% de respostas parcialmente corretas (+3) e menos 5% de repostas corretas (-5). Diante disso, podemos supor que os estudantes que deixaram de errar e de acertar no pós-teste obtiveram resposta parcialmente corretas.

Posto isto, podem-se analisar algumas respostas-alvo e algumas respostas divergentes.

O Aluno 2 respondeu corretamente a Questão 11 tanto no pré-teste quanto no pós-teste. As respostas foram:

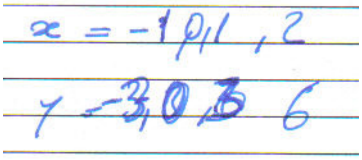
x	x + 2 . x	y
-1	-1 +2(-1)	-3
0	0 + 2 . 0	0
1	1 + 2 . 1	3
2	2 + 2 . 2	6

(Aluno 2)

x	Fx = x + x . 2	y
-1	Fx = -1+(-1). 2	-3
0	Fx = 0 + 0 . 2	0
1	Fx = 1+1 . 2	3
2	Fx = 2+2 . 2	6

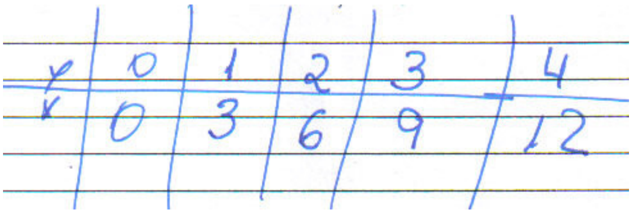
(Aluno 2)

A resposta da Questão 11 do Aluno 6 está errada no pré-teste. Entretanto, está parcialmente correta no pós-teste, pois ele não determinou a lei de formação da função. As respostas foram:



x = -1, 0, 1, 2
y = -3, 0, 3, 6

(Aluno 6)

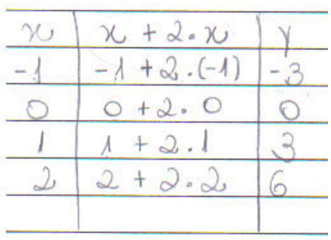


x	0	1	2	3	4
y	0	3	6	9	12

(Aluno 6)

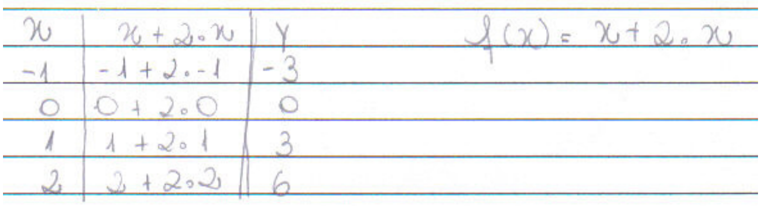
O aluno 6 não representou corretamente uma tabela no pré-teste, demonstrando que desconhecia a formação de representação identificável de uma tabela e que desconhecia os devidos tratamentos. Além disso, não mobilizou todos os registros de representação desejados, ou seja, não efetuou todas as atividades de conversão, pois não representou a lei de formação que descreve o gráfico e a tabela.

O Aluno 7 respondeu corretamente a Questão 11 tanto no pré-teste quanto no pós-teste. As respostas foram:



x	x + 2.x	y
-1	-1 + 2.(-1)	-3
0	0 + 2.0	0
1	1 + 2.1	3
2	2 + 2.2	6

(Aluno 7)

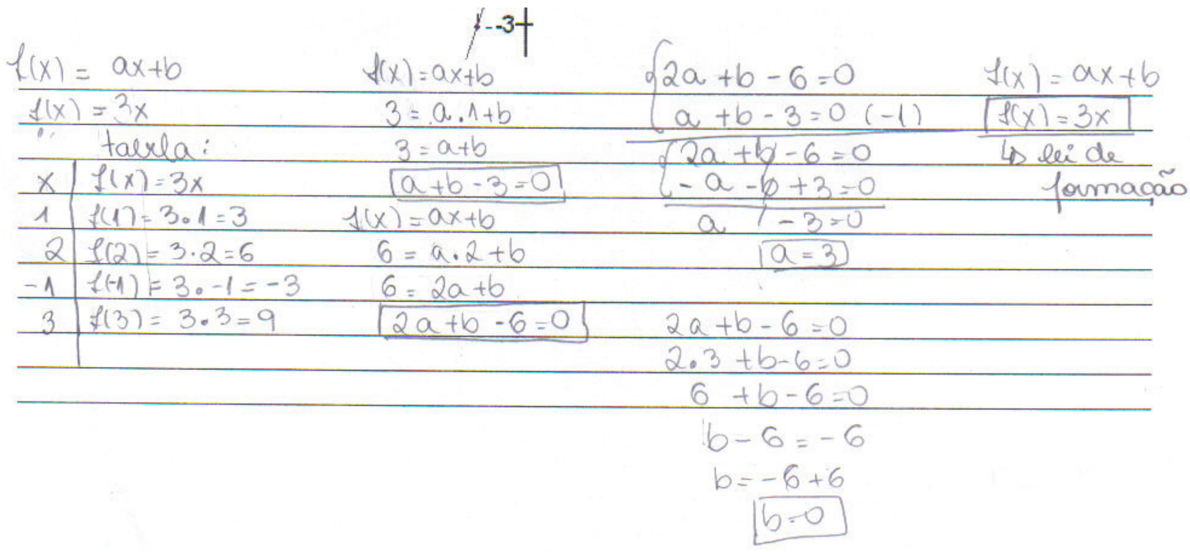


$f(x) = x + 2.x$

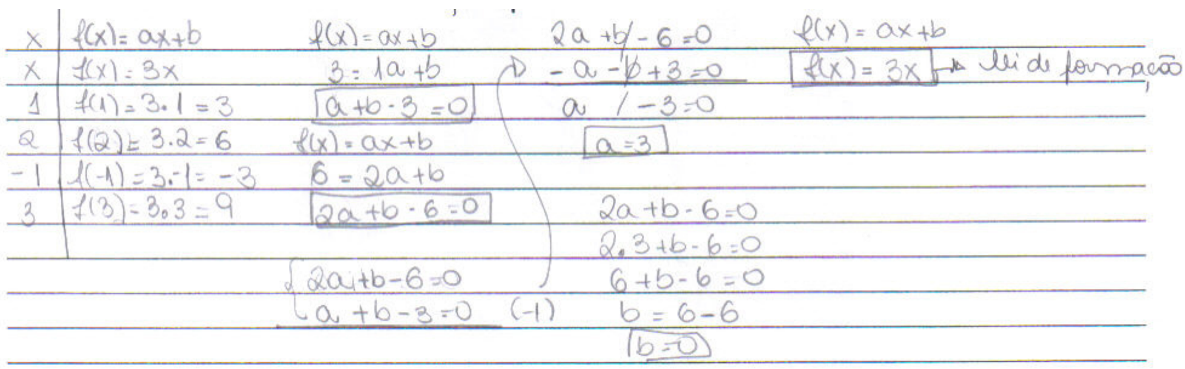
x	x + 2.x	y
-1	-1 + 2.-1	-3
0	0 + 2.0	0
1	1 + 2.1	3
2	2 + 2.2	6

(Aluno 7)

O Aluno 11 respondeu corretamente essa questão tanto no pré-teste quanto no pós-teste. As respostas foram:

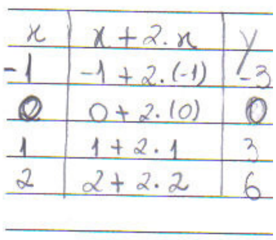


(Aluno 11)

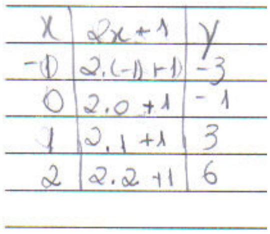


(Aluno 11)

A resposta da Questão 11 do Aluno 1 está correta no pré-teste. Porém, está parcialmente correta no pós-teste, pois a lei de formação não foi definida corretamente. As respostas foram:



(Aluno 1)

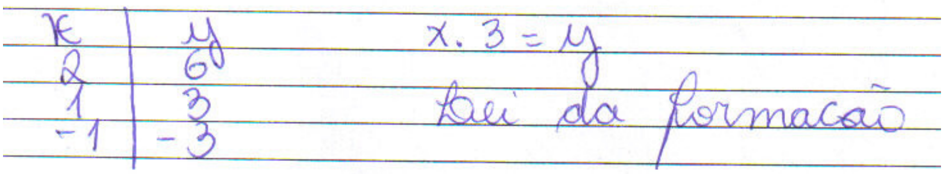


x	2x+1	y
-1	2.(-1)+1	-3
0	2.0+1	-1
1	2.1+1	3
2	2.2+1	6

(Aluno 1)

Observa-se que o Aluno 1 reconhece a formação de uma representação identificável de uma tabela e de uma função em linguagem algébrica, pois tentou mobilizar todos os registros de representação solicitados no pós-teste. Além disso, ele tentou realizar as conversões, porém não modelou corretamente a lei de formação da representação gráfica, do registro de partida.

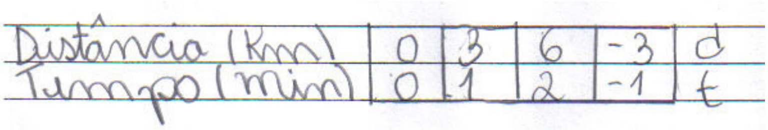
A resposta da Questão 11 do Aluno 19 está correta no pré-teste. Porém, está parcialmente correta no pós-teste, pois não determinou a lei de formação. As respostas foram:



x	y
2	6
1	3
-1	-3

x. 3 = y
Lei da formação

(Aluno 19)



Distância (Km)	0	3	6	-3	d
Tempo (min)	0	1	2	-1	t

(Aluno 19)

Diante disso, observa-se que o Aluno 19 também não conseguiu mobilizar todos os registros solicitados na Questão 11 do pós-teste, não realizou todas as conversões desejadas, além de ter tratado corretamente a representação tabelar.

De acordo com o que foi apresentado, pode-se supor que os alunos que erraram a Questão 11, tinham dificuldades de reconhecer a representação de partida, ou que desconheciam a representação de chegada. Além disso, isso pode ocorrer porque esta questão trata de conversões não congruentes e heterogêneas. As dificuldades apresentadas pelos alunos nessa questão podem ter ocorrido por não terem sanado suas dificuldades no ensino básico. É provável que em séries anteriores tenham estudado função por meio de um ‘enclausuramento’ de registros. Para tentar esclarecer melhor esse comentário, Duval (2003, p. 20) argumenta que, “geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido”.

Diante do que foi apresentado nessa seção de análise dos dados, pode-se ver que os aplicativos contribuíram para que os estudantes compreendessem o objeto função. No decorrer da análise, observou-se que os alunos tiveram dificuldades de realizar as atividades de conversão não congruentes e utilizar-se de tratamentos em algumas expressões algébricas, como substituir valores arbitrários para x em determinadas funções, e encontrar o valor de x substituindo y.

Para se ter uma ideia geral do desempenho dos alunos, observe a tabela e o gráfico que apresentam a diferença das notas obtidas por eles entre o pós-teste e o pré-teste.

Tabela 17 – Diferença das notas obtidas entre o pós-teste e o pré-teste:

Alunos	Notas		Diferença entre Pós e Pré-teste	
	Pré-teste	Pós-teste	Valor	%
Aluno 1	4,1	5,0	0,9	9
Aluno 2	7,7	7,3	-0,5	-5
Aluno 3	2,7	4,5	1,8	18
Aluno 4	6,4	7,3	0,9	9
Aluno 5	2,7	4,1	1,4	14
Aluno 6	2,3	4,5	2,3	23
Aluno 7	7,7	9,1	1,4	14
Aluno 8	3,6	5,0	1,4	14
Aluno 9	8,2	8,6	0,5	5
Aluno 10	4,5	7,3	2,7	27
Aluno 11	6,4	9,1	2,7	27
Aluno 12	3,6	6,4	2,7	27
Aluno 13	3,2	5,5	2,3	23
Aluno 14	3,2	3,6	0,5	5
Aluno 15	5,9	6,4	0,5	5
Aluno 16	1,8	2,7	0,9	9
Aluno 17	0,9	3,2	2,3	23
Aluno 18	5,9	6,8	0,9	9
Aluno 19	7,3	6,8	-0,5	-5
Aluno 20	3,2	5,9	2,7	27
Média da turma	4,6	6,0	1,4	14

No pós-teste, a média da turma foi nota seis (6,0) e no pré-teste foi média quatro vírgulas seis (4,6). Entretanto, isso equivale um acréscimo de 14% (1,4) das notas no pós-teste. Além disso, observa-se que as notas dos alunos 2 e 19 obtiveram diferença negativa, menos zero vírgula cinco (-0,5).

As médias dos estudantes podem ser apresentadas graficamente.

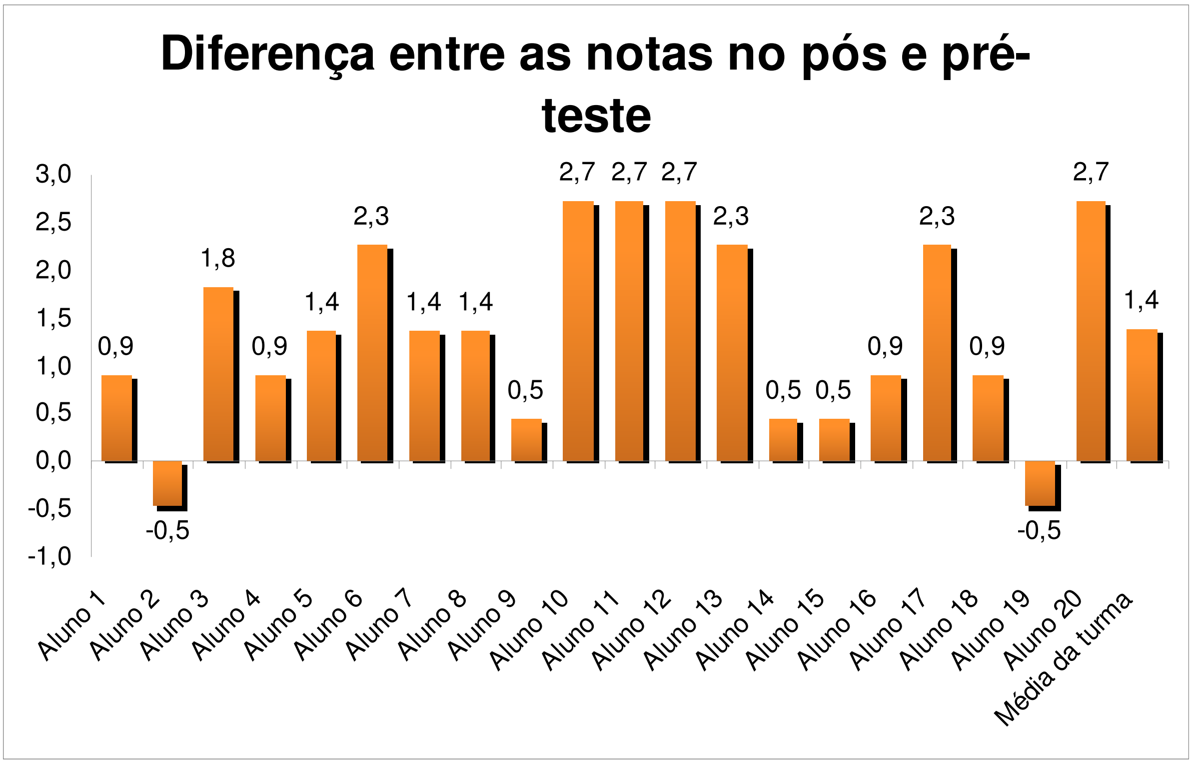


Ilustração 46 – Gráfico das notas no pré e pós-teste.

No gráfico que representa a diferença das notas obtidas pelos alunos no pós e no pré-teste, observa-se, de maneira geral, que a maioria dos alunos obteve um bom rendimento, com aproveitamento variando de zero vírgula cinco (0,5) à dois vírgula sete (2,7). Entretanto, observa-se também que apenas dois alunos (2 e 19) não obtiveram um bom rendimento no pós-teste.

Diante desse cenário, observa-se que os alunos obtiveram um desempenho numérico considerável no pós-teste, apesar das notas serem baixas e dois alunos terem rendimento menor que o esperado, nos casos dos alunos 2 e 19 onde a diferença foi negativa (-0,5).

Entretanto, para complementar as representações das diferenças dos rendimentos dos alunos no pós e pré-teste, pode-se apresentar a diferença dos totais de repostas corretas, parcialmente corretas, erradas e em brando obtidas pelos alunos entre o pós e pré-teste por meio de uma representação tabelar. Veja a tabela que segue:

Tabela 18 – Diferença do total de respostas entre pós e pré-teste.

Respostas	Total de Respostas		Diferença entre Pós e Pré-teste	
	Pré-teste	Pós-teste	Valor	%
Corretas	68	98	30	13,6
Parcialmente Corretas	65	66	1	0,5
Erradas	26	24	-2	-0,9
Em branco	61	32	-29	-13,2
Total	220,0	220,0	0,0	0

No pós-teste, ocorreram acréscimos de 13,6% de repostas corretas (30 respostas) e de 0,5% de repostas parcialmente corretas (1 resposta). Além disso, ocorreram menos 0,9% de respostas erradas (-2), e menos 13,2% de repostas em branco (-29).

Conforme mostrado na tabela, observa-se que apesar do baixo rendimento, o pós-teste obteve um saldo positivo.

Essa diferença pode ser vista no gráfico a seguir.

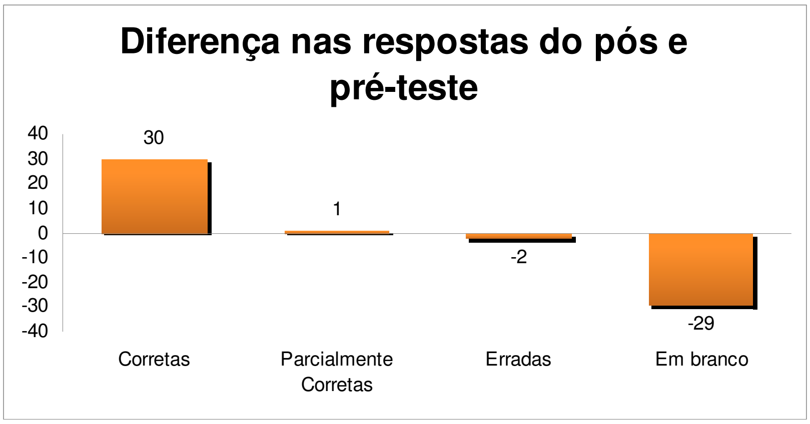


Ilustração 47 – Diferença nas respostas do pós-teste e pré-teste.

No gráfico que representa a diferença das respostas obtidas pelos alunos no pós e no pré-teste, observa-se, de maneira geral, no pós-teste, houve acréscimos de trinta (30) respostas corretas e de uma (1) resposta parcialmente corretas. Além disso, observa-se que ocorreram menos duas (-2) respostas erradas e menos vinte e nove (-29) respostas em branco no pós-teste.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação, desenvolveram-se dois aplicativos informatizados para o ensino-aprendizagem de funções matemáticas, baseados no conceito de conversão de registros de representação, bem como se testou exploratoriamente uma primeira versão desses aplicativos com alunos de graduação.

Raymond Duval argumenta que a distinção entre objeto e representação é estratégica na compreensão matemática. Se, por um lado, é o objeto matemático que interessa à aprendizagem; por outro, é essencial reconhecer que os próprios objetos matemáticos não são espontaneamente acessíveis, a não ser por suas representações. Segundo o autor, dado que as representações estão no lugar dos objetos matemáticos, os sujeitos supostamente não as confundiriam com os objetos matemáticos que elas representam. Todavia, muitas pessoas escolarizadas mostram-se incapazes de apreender que as várias formas de representar conceitos matemáticos estão em lugar desses conceitos, ainda que saibam lidar com alguma forma de representá-los. Considerando que esses indivíduos transitaram por educação formal em matemática, é de se interrogar como essa questão essencial permanece mal solucionada.

Para o autor, a aquisição do conhecimento humano é inseparável da existência de vários registros semióticos. Na matemática, a coordenação de múltiplos registros semióticos é essencial para uma apreensão conceptual dos objetos matemáticos, pois a apreensão desses objetos matemáticos apenas é possível por suas várias representações. Somente assim os alunos não confundiriam os referidos objetos com suas possíveis representações.

Para ele, um sistema semiótico é constituído em um registro de representação em matemática se propiciar três atividades cognitivas essenciais para semiose: *formação de uma representação identificável*, *tratamento* e *conversão*. Duval argumenta que, das três atividades cognitivas, apenas a formação de uma representação identificável e o tratamento são consideradas no ensino, quando exatamente é a conversão à atividade que torna hábil a divisão entre os objetos e as representações dos objetos matemáticos. Desse modo, uma pessoa pode ser capaz de representar e tratar determinado registro, isto é, reconhecer uma fórmula e proceder aos cálculos com relativa competência, mas não compreender, no exterior desse registro e algumas vezes nem mesmo no interior do registro, com que objeto matemático está trabalhando.

Se esse descuido com a conversão ocorre no ensino presencial, não menos dramático é para o ensino virtual. Contemporaneamente, com o crescimento dos meios informatizados, os recursos para ensino a distância foram incrementados, viabilizando o ensino de matemática pelo computador. Nesse caso, não se trata apenas de haver uma transposição didática de saberes científicos para a escola (CHEVALLARD, 1982), mas também de transpor esses saberes para o meio informatizado (BALACHEFF, 1994a, 1994b).

Consideradas essas balizas teóricas, foram elaborados nessa dissertação dois aplicativos: o primeiro, de caráter expositivo e instrucional, apresenta o conteúdo de função em setenta e sete *slides* da ferramenta *Microsoft Office Power Point 2003*; o segundo, de caráter funcional, o '*ApliRFunction* 1.0', permite, ao calcular funções, verificar *on-line* ou *off-line* várias conversões. Os aplicativos foram, então, formatados ao modo de um ambiente virtual de aprendizagem. Para isso, foi necessário migrar os *slides* do *Microsoft Office Power Point* para o *software Adobe Flash* de maneira a produzir animações em *Flash* compatíveis com a linguagem *Java* e tecnologias: JWS e J2SE.

O estudo exploratório constituiu-se da aplicação de dois testes (pré-teste e pós-teste) mediada pela intervenção com os aplicativos. Testes e intervenção foram aplicados com alunos do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina, Unisul, no Laboratório de Multimídia I.

Como a hospedagem do material em domínio web revelou-se instável, para testar os aplicativos, foram criadas três alternativas: *on-line*, *off-line* (réplica da versão on-line) e *off-line* (com *slides* em *Microsof Office Power Point* e aplicativo *ApliRFunction 1.0* disjuntos). Diante de inúmeros problemas tecnológicos e da interdição de cópia de *softwares*, a terceira alternativa foi executada.

Com base nesse cenário, os achados do estudo sugerem as seguintes conclusões:

a) Em média, houve incremento de um vírgula quatro (1,4) pontos nas notas no pós-teste em relação ao pré-teste, médias seis (6,0) e quatro vírgula seis (4,6), respectivamente. A despeito de dois alunos que diminuíram de desempenho, a maioria dos alunos apresentou melhoria em seu rendimento, com aproveitamento variando de zero vírgula cinco (0,5) à dois vírgula sete (2,7). Submeteu-se as notas do pré-teste e pós-teste ao teste T, obteve-se estaticamente $T = -6{,}00241$ (p – valor $< 0{,}01$), evidenciando que a diferença citada (1,4) é estatisticamente significativa. Todavia, embora esses resultados evidenciem do ponto de vista estatístico que os alunos compreenderam melhor o objeto matemático (estudo de funções do 1º grau), a análise qualitativa não sugere que isso tenha de fato acontecido;

b) No que se refere à interação com os aplicativos, percebeu-se que os alunos navegaram apressadamente no aplicativo instrucional, sugerindo que não deram a atenção devida. Essa conclusão se reforça na medida em que se perceberam conversas paralelas alheias aos objetivos de aprendizagem ou mesmo navegação em outros sites durante a tarefa. Metade dos estudantes não retornou do intervalo das atividades. Esse desempenho pode ter sido causado pelo fato de os professores dos alunos não terem considerado o teste como componente da avaliação das suas disciplinas. Vale destacar que a atividade ocorreu no início do semestre, onde espaço para revisão do conceito de função é parte da disciplina Tópicos de Matemática Elementar I;

c) Os alunos limitaram-se a explorar o aplicativo naquilo que os exercícios solicitaram, sugerindo que o aplicativo não gerou interesse ou mesmo que os alunos não sentiram a necessidade de explorá-lo. Por outro lado, faltaram atividades de exploração do protótipo de aplicativo como parte de um treinamento prévio;

d) Os alunos tiveram dificuldades de realizar as atividades de conversão não congruentes e utilizar-se de tratamentos em algumas expressões algébricas, como substituir valores arbitrários para ‘x’ em determinadas funções. Por descuido, a atividade de encontrar o valor de ‘x’ substituindo ‘y’ em um dos exercícios dos testes não foi contemplada nos *slides*;

e) O desempenho intermitente do servidor *on-line* prejudicou a verificação dos aplicativos em ambiente virtual, tal como planejado. Como a versão executada foi aquela em que os aplicativos estavam disjuntos e *off-line*, entre outros prejuízos, vários alunos sentiram dificuldades em interagir com o *ApliRFunction* 1.0 e de navegar nos *slides* ao mesmo tempo, prejudicando seu desempenho;

f) Outro aspecto tecnológico deficitário, diante da necessidade de realizar a pesquisa no início do semestre letivo (janela de aprendizagem) e da impossibilidade de avaliar *on-line* os aplicativos, há de se destacar também como variável que comprometeu a avaliação, a interdição de *softwares* como o *CamStudio* no Laboratório. Isso comprometeu uma avaliação mais precisa do processo de interação homem-máquina.

g) O contato com os aplicativos revelou uma série de problemas estruturais que precisam ser revistos em versões futuras. Entre os quais, destaca-se: a ausência de ferramenta para limpar dados de tabelas, que dificultou o desempenho nas atividades de cálculo; a ausência de manual de funcionamento dos aplicativos, que interveio no desempenho dos alunos, prejudicando a interação; a apresentação de instruções sobre o aplicativo depois da proposição de exercícios, levando-os a começar a atividade sem conhecer o *software*;

h) No que se refere a implementações no aplicativo instrucional, destacam-se: a melhoria dos cenários dos exemplos; a remoção do *slide* 21; a possibilidade de diminuição da quantidade de *slides* (do *slide* 1 ao 39) focando em menos aspectos do tema; a melhoria da contextualização de alguns dos tópicos; a exploração mais do que duas representações semióticas nos *slides* 61-64, que tratam das propriedades da função, como: tabelas e pictografias (em um contexto); a apresentação de 'tutorial' do *software ApliRFunction* 1.0 antes dos *slides* de exercícios; a elaboração de exercícios que explorem todos as funcionalidades do aplicativo; e a exploração de mais atividades que envolvam conversões congruentes e um pouco menos de conversões não congruentes e heterogêneas;

i) No que se refere ao *ApliRFunction* 1.0, por sua vez, os dados da pesquisa sugerem que o aplicativo deva ser capaz de: aceitar funções de vários tipos; apresentar o número zero sem sinal negativo; possuir signos metalinguísticos (mensagens explicativas que aparecem ao parar o mouse sobre um ícone); e possuir botão para limpar tabelas, gráficos e expressões algébricas.

Consideras essas conclusões, pode-se pensar nas sugestões para a realização de trabalhos futuros como corrigir as variáveis intervenientes e buscar formas de minimizar variáveis extrínsecas apresentadas nos aplicativos e na intervenção didática.

Outra possibilidade pode ser o de aprofundar a proposição de Duval a partir: da Semiótica de Peirce (1980), dos modelos mentais de Johonson-Laird (1983), da perspectiva da engenharia semiótica da interação homem-computador de Souza (2005).

Além disso, podem ser pensados, entre outros trabalhos: a) o teste dos aplicativos a distância por meio de ambientes de aprendizagem; b) o teste presencial dos aplicativos com a gravação em áudio e vídeo da interação dos alunos por meio do *software CamStudi*o ou por um outro que tenha funcionalidades semelhantes; c) a ampliação das funcionalidades dos aplicativos para todas as funções; d) a criação de "compilador" que corrija os exercícios dos alunos de maneira que simule a intervenção do professor; e) a criação de um banco de perguntas e repostas no ambiente virtual de forma onde os alunos possam tirar suas dúvidas sobre o conteúdo apresentado; e f) o teste com alunos do ensino médio.

Do ponto de vista mais restrito desse trabalho, resta dizer que essa pesquisa, antes de esperar que a pesquisa tenha feito uma avaliação definitiva dos aplicativos e apesar dos percalços, permitiu avaliar diversos aspectos da aplicação dos mesmos. O valor do trabalho, portanto, está menos pelo que conclui, mas pelo que provoca futuramente.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

BALACHEFF, N. Didatique et intelligence artificielle. **Recherches en didactique des mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994a.

______. La transposition informatique: note sur un nouveau problème pour la didactique. In: ARTIGUE M. *et alii* (Eds.). **Vingt ans de didactique des mathématiques en France**. Grenoble, La pensée Sauvage, 1994b, p. 364-370.

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. X. **Matemática aula por aula** : volume único. São Paulo: FTD, 2000.

CARDOSO, M. C. **Os estágios de desenvolvimento e as representações semióticas no contexto do processo ensino-aprendizagem da matemática.** 2003. 122f. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Ciências da Linguagem) – Universidade do Sul de Santa Catarina, SC. Ciências da Linguagem, UNISUL, Tubarão, 2003.

CHEVALLARD, Y. Les processus de transposition didatique et leur théorisation. In: MARTINAND, Andrée Tiberglien. et al (org). **La transposition didactique a l'epreuve**: la pensee sauvage. Grenoble: G. Arsac, 135-180, 1994.

______. Pourquoi la transposition didactique? **Atas do Seminário de Didática e Pedagogia de Matemática do IMAG** (Université Scientifique et Médicale), Grenoble, 1982.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008.

DANTE, L. R. **Matemática**: série novo ensino médio. São Paulo: Ática, 2005.

DUVAL, R. L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématique: cours sur les apprentissages intellectuals donné à la PUC-SP. São Paulo: Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 1999.

______. **Langages et représentation(s) dans l'enseignement des mathématiques: deux pratiques et une troisième**. Proceedings 3rd Colloquium on the Didactics of Mathematics, 13-33, University of Crete, Department of Education, 2003.

______. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences cognitives**, IREM de Starsbourg, n. 5, 37-65, 1993.

______. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática**: registros de representações semiótica. São Paulo: Papirus, 2003.

______. Sémiósis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuals. Suisse: Peter Lang, 1995.

______. **The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics**. In: Paper presented at the Semiotics Discussion Group of the 25th PME International Conference, Freudenthal Institute, The Netherlands, July, 2001.

______. Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. **Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM**. IREM: Strasbourg. p. 67-89, 2005b.

______. **Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et Registres**. In: Séminaire de Recherche de Diplôme Staf, Technologie de formation et apprentissage (TECFA), Lille, 2003.

FERRAZ. A. **Esboço do Gráfico de Função: um estudo semiótico**. 2008. 164f. Tese (Departamento de Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, CE. Educação, UFP, Recife, 2008.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; WAGNER, C. **Tópicos de Matemática Elementar I**: livro didático. Palhoça: UnisulVirtual, 2008.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR; J. R. **Matemática Fundamental**: uma nova abordagem. São Paulo: FTD, 2002.

______; ______ ; ______. **Matemática Completa**: ensino médio. São Paulo: FTD, 2002.

G1. GLOBO. **Desemprego em outubro tem a 2ª menor taxa da história, diz IBGE**. Disponível em: < http://g1.globo.com/Noticias/Economia_Negocios/0,,MUL867497-9356,00-DESEMPREGO+EM+OUTUBRO+TEM+A+MENOR+TAXA+DA+HISTORIA+DIZ+IBGE.html>. Acesso em: 14 fev. 2009.

JOHNSON-LAIRD, P. **Mental models**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1983.

MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática**: registros de representações semiótica. São Paulo: Papirus, 2003.

PAIVA, M. **Matemática**: volume único. São Paulo: Moderna, 2003.

PEIRCE, C. S. **The collected papers of Charles Sanders Peirce**. Charlotterville: Intelex Corporation, 1992. CD-ROM PAST MASTERS.

PEIRCE, C. S.; FREGE, G. **Escritos coligidos**. 2 ed. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

RAUEN, F. J. **Roteiros de pesquisa**. Rio do Sul: Nova Era, 2006.

SANTOS, C. A. M.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. **Matemática**: série novo ensino médio. São Paulo: Ática, 2003.

SOUZA, C. S. The semiotic engineering of human-computer interaction. Cambrige, MA: Cambrige Center, 2005.

VEJA, Editora Abril, edição 2087, ano 41, nº 46, 19 nov. 2008.

WIKIPÉDIA. **API**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/API>; Acesso em: 1 jul. 2009.

ANEXOS

ANEXO A – OFÍCIO À COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA

Programa de Pós-graduação em
Ciências da Linguagem

Universidade do Sul de Santa Catarina – Pró-reitoria Acadêmica
Diretoria de Ensino, Pesquisa e Extensão – Coordenação de Pós-graduação

Ofício CMesCL 32/2009

Tubarão, 16 de março de 2009

Ilmo. Sr. Dalmo Gomes de Carvalho
DD Coordenador do Curso de Matemática
Tubarão – SC

Prezado Senhor:

Por meio deste, solicitamos a Vossa Senhoria autorização para a execução de coleta de dados da Dissertação de Mestrado intitulada **"Arquiteturas de aulas *on-line* sobre função com base nos conceitos de modelos mentais, representações semióticas e transposição informática"** (título provisório) da mestranda **Cíntia Rosa da Silva** do Curso de Mestrado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina, cuja orientação está sendo elaborada por este Coordenador.

A pesquisa tem o objetivo de aplicar os referidos conceitos na elaboração de um curso *on-line* sobre funções do primeiro grau e verificar a influência da interação de estudantes do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Campus de Tubarão da Unisul com as ferramentas disponibilizadas na arquitetura das aulas *on-line* na aprendizagem de conteúdos de função.

O estudo possui três fases. Na primeira, será aplicado um pré-teste sobre os conhecimentos prévios dos estudantes sobre função. Em seguida, um curso *on-line* sobre os conteúdos de função, especialmente desenhado com base nos conceitos de modelos mentais, representações semióticas e transposição informática, será disponibilizado para franca utilização. Na terceira fase, será aplicado um pós-teste sobre os mesmos conteúdos.

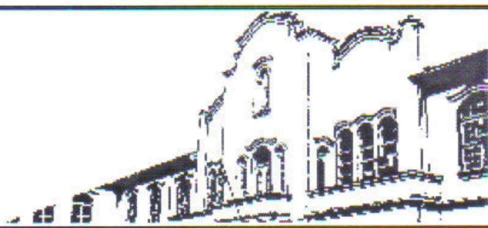
A pesquisadora se compromete a manter absoluto sigilo o nome do discente, assim como, qualquer pista que permita identificá-lo.

Sem mais para o momento, colocamo-nos à disposição para os esclarecimentos que se fizerem necessários.

Atenciosamente,

Prof. Dr. Fábio José Rauen
Coordenador do Programa de Pós-graduação em Ciências da Linguagem
Coordenador do Curso de Mestrado em Ciências da Linguagem

Campus Tubarão
Av. José Acácio Moreira, 787, Dehon
88.704-900 - Tubarão, SC - (55) (48) 3621-3369
Campus Grande Florianópolis
Avenida Pedra Branca, 25
Cidade Universitária Pedra Branca
88.132-000 - Palhoça, SC - (55) (48) 3279-1061



ANEXO B – CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Programa de Pós-graduação em
Ciências da Linguagem

Consentimento Livre e Esclarecido

A pesquisa "Arquiteturas de aulas *on-line* sobre função do primeiro grau com base nos conceitos de modelos mentais, representações semióticas e transposição informática" (título provisório), em nível de dissertação de mestrado, tem o objetivo de aplicar os referidos conceitos na elaboração de um curso *on-line* sobre funções do primeiro grau e verificar a influência da interação de estudantes do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Campus de Tubarão da Unisul com as ferramentas disponibilizadas na arquitetura das aulas *on-line* na aprendizagem de conteúdos de função do primeiro grau.

O estudo possui três fases. Na primeira, será aplicado um pré-teste sobre os conhecimentos prévios dos estudantes sobre função do primeiro grau. Em seguida, um curso *on-line* sobre os conteúdos de função do primeiro grau, especialmente desenhado com base nos conceitos de modelos mentais, representações semióticas e transposição informática, será disponibilizado para franca utilização. Na terceira fase, será aplicado um pós-teste sobre os mesmos conteúdos.

A pesquisadora se compromete a manter absoluto sigilo o nome do discente, assim como, qualquer pista que permita identificá-lo.

Dados da pesquisadora:
Cintia Rosa da Silva, CPF 008.881.459-93, CI 4.490.188
Dados do Orientador:
Prof. Dr. Fábio José Rauen, CPF 556726559-04, CI 4.420.659-5 PR
Programa de Pós-graduação em Ciências da Linguagem da Unisul.

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e que recebi, de forma clara e objetiva, todas as explicações pertinentes ao projeto e que todos os dados a meu respeito serão sigilosos. Declaro que fui informado que poderia ter-me recusado a participar da pesquisa antes da assinatura desse termo de consentimento.

Nome por extenso: ____

RG: ____

Local e Data: ____

Assinatura: ____

ANEXO C – TESTE

Programa de Pós-graduação em
Ciências da Linguagem

Apoio: Curso de Matemática – Licenciatura Semestre: 1º Turma: 2009/1
Mestranda/Pesquisadora: Cintia Rosa da Silva Data: ___/___/___

Aluno:

TESTE

Durante seus estudos na educação básica você teve contato com vários tipos de funções.

Vamos resgatar um pouco deste estudo respondendo a atividade proposta. Não esqueça, o objetivo desta pesquisa é resgatar seus conceitos em relação ao estudo das funções.

1) O que você entende por grandezas variáveis? No gráfico abaixo estão representadas estas grandezas, identifique-as.

Retirado da Revista Veja, Editora Abril – edição 2087 – ano 41 - nº 46 de 19 de novembro de 2008.

---

2) As grandezas variáveis apresentam uma relação de dependência entre si. No gráfico da questão anterior identifique a variável dependente e a variável independente.

---

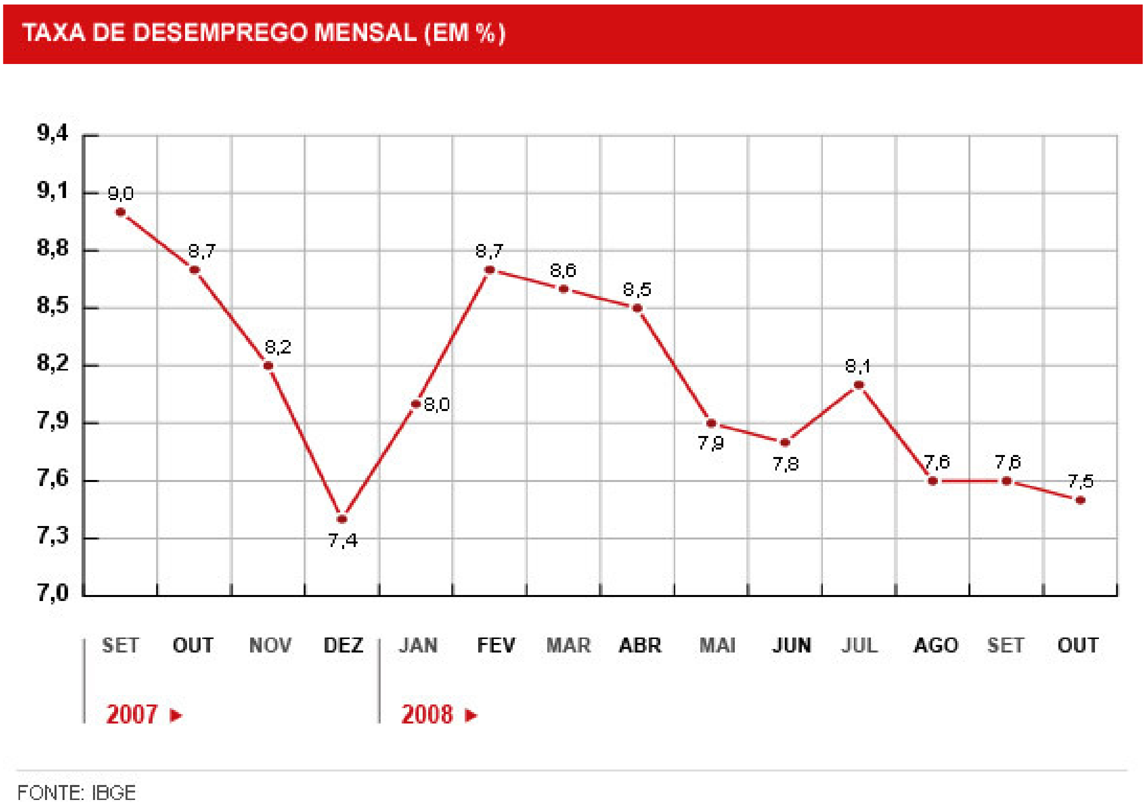
3) A relação entre variáveis pode representar uma função ou não. Assim existem relações especiais que denominamos de função. O gráfico que você analisou representa uma função? Por quê?

---

4)O que você entende por função?

---

5) Uma função apresenta elementos que denominamos de domínio, imagem e contradomínio. Observe o gráfico **abaixo** e determine o domínio e a imagem:



Retirado do site: http://g1.globo.com/Noticias/Economia_Negocios/0,,MUL867497-9356,00-DESEMPREGO+EM+OUTUBRO+TEM+A+MENOR+TAXA+DA+HISTORIA+DIZ+IBGE.html

6) As funções, em geral, podem ser crescentes ou decrescentes. Identifique os intervalos crescentes e decrescentes no gráfico anterior:

7) Uma função pode assumir valores que dependem de seu campo de definição. Dada a função f (x) = 6x + 2, determine f (1):

8) Qual valor real de **x** na função f(x) = 2 – 4x quando f(x) = 5?

9) Uma função pode-se apresentar em diferentes sistemas de representação. Escreva uma tabela com alguns valores arbitrários para a função f(x) = x + 3, definida no campo dos reais.

10) A tabela, a seguir, apresenta valores de uma função real. Represente graficamente e determine sua lei de formação.

Distância (km)	0	2	4	6
Tempo (min)	0	1	2	3

11) O gráfico, a seguir, representa uma função definida no campo dos reais. A partir do gráfico, represente uma tabela de quatro valores da função e escreva a sua lei de formação: