UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

MARCOS GONÇALVES DA SILVA

MODELAGEM DO POSICIONAMENTO DE SATÉLITE ARTIFICIAL TERRESTRE COM O AUXÍLIO DO SISTEMA DE POSICIONAMENTO NAVSTAR/GPS

Palhoça

2020

MARCOS GONÇALVES DA SILVA

MODELAGEM DO POSICIONAMENTO DE SATÉLITE ARTIFICAL TERRESTRE COM O AUXÍLIO DO SISTEMA DE POSICIONAMENTO NAVSTAR/GPS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática - Bacharelado da Universidade do Sul de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Oscar Ciro Lopez Vaca.

Palhoça

2020

MARCOS GONÇALVES DA SILVA

MODELAGEM DO POSICIONAMENTO DE SATÉLITE ARTIFICAL TERRESTRE COM O AUXÍLIO DO SISTEMA DE POSICIONAMENTO NAVSTAR/GPS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado à obtenção do título de Bacharel em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Palhoça, 10 de julho de 2020.

_____

Professor e orientador Oscar Ciro Lopez Vaca, Dr.
Universidade do Sul de Santa Catarina

_____

Professor Gabriel Oscar Cremona Parma, Dr.
Universidade do Sul de Santa Catarina

_____

Professor Christian Wagner, Ms.
Universidade do Sul de Santa Catarina

RESUMO

O posicionamento de um satélite artificial terrestre requer um controle preciso, dentro de uma faixa de tolerância, pois sua órbita foi previamente estabelecida para um determinado fim. Assim, os controles das órbitas podem ser executados pelo próprio sistema de processamento de dados nele embarcado, acionando os controles de posicionamento para possíveis correções necessárias. Um dos métodos que permitem ao satélite artificial verificar sua posição é o uso dos sinais e dados transmitidos pelo Sistema de Posicionamento NAVSTAR/GPS, que transmite com precisão os posicionamentos e dados da órbita dos satélites NAVSTAR/GPS. Através de conceitos matemáticos e físicos apresentados, o trabalho detalha uma modelagem matemática que os satélites utilizam na determinação de seu posicionamento de forma autônoma. Essa modelagem envolve conhecimentos das áreas de geometria analítica, álgebra linear, inferência estatística, além de conceitos físicos de propagação de sinal e referencial inercial. Os controles de órbitas também envolvem aspectos multidisciplinares como: astronomia, navegação, geodésia, física, eletrônica, computação e matemática, como se observa neste trabalho.

Palavras-chave: Satélite artificial, modelagem de órbita, leis de Kepler, NAVSTAR, GPS.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Constelação de satélites NAVSTAR-GPS 17
Figura 2 - Planos orbitais dos satélites NAVSTAR-GPS 18
Figura 3 - Elipse com centro em (0,0) e vetor posição do satélite 19
Figura 4 - Elipse com centro de referência em um dos focos 20
Figura 5 - Elipse inclinada: Terra como centro de referência 21
Figura 6 - Sistema geocêntrico e plano orbital 23
Figura 7 - Sistema geocêntrico e características da órbita 28
Figura 8 - Mensagem NAVSTAR-GPS - ilustração dos parâmetros nela contidos 34
Figura 9 – Recepção dos sinais de 4 satélites NAVSTAR-GPS 41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características do Sistema NAVSTAR-GPS 17
Tabela 2 - Grandezas que definem a elipse 19
Tabela 3 - Características da órbita elíptica inclinada 21
Tabela 4 - Elementos Keplerianos 29
Tabela 5 - Estrutura da mensagem de navegação 33
Tabela 6 - Informações transmitidas no Sistema NAVSTAR-GPS 35

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8
1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA 8
1.2 PROBLEMATIZAÇÃO 9
1.3 JUSTIFICATIVAS 9
1.4 OBJETIVOS 9
1.4.1 Objetivo Geral 10
1.4.2 Objetivos Específicos 10
1.5 TIPO DA PESQUISA 10
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO 11
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E SUA APLICAÇÃO 12
2.1 CONCEITO DE POSICIONAMENTO COM O USO DO SINAL NAVSTAR-GPS 12
2.2 O SISTEMA DE POSCIONAMENTO NAVSTAR-GPS 14
2.2.1 Controle do sistema NAVSTAR-GPS 15
2.2.2 Características do sistema NAVSTAR-GPS 16
2.3 CONCEITOS MATEMÁTICOS 18
2.3.1 A elipse e suas propriedades 18
2.3.2 Ângulo entre dois vetores 22
2.3.3 Equação de um plano no espaço 22
2.3.4 Sistema de coordenadas esféricas 22
2.3.5 Rotação do sistema tridimensional sobre um dos seus eixos 23
2.3.6 Filtro de Kalman 24
2.4 CONCEITOS DA FÍSICA RELATIVISTA 27
2.5 REFERENCIAL INERCIAL GEOCÊNTRICO 28
2.6 CONCEITOS DE ÓRBITAS KEPLERIANAS 29
2.6.1 Lei de Kepler 30
2.7 REFERENCIAL TEMPORAL 31
3 DETERMINAÇÃO DA POSIÇÃO DE UM SATÉLITE USUÁRIO 33
3.1 A MENSAGEM DOS SATÉLITES NAVSTAR-GPS 33
3.1.1 Parâmetros da órbita de um satélite NAVSTAR-GPS 34
3.1.2 Informações transmitidas pelo satélite NAVSTAR-GPS 34

3.1.3 Cálculo do horário Sistema - NAVSTAR-GPS da transmissão do sinal.....35
3.1.4 Cálculo da posição do satélite NAVSTAR-GPS no instante da transmissão do sinal 36
3.2 ESTIMATIVA DA POSIÇÃO DO SATÉLITE USUÁRIO 37
3.2.1 Cálculo do momento de recepção do sinal no Sistema Temporal NAVSTAR-GPS 37
3.2.2 Intervalo de tempo entre a transmissão e a recepção do sinal.....38
3.2.3 Modelagem da pseudodistância entre os satélites NAVSTAR-GPS e o satélite usuário 38
3.2.4 Modelagem final.....40
3.3 SÍNTESE SOBRE A POSIÇÃO DO SATÉLITE USUÁRIO 42
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....44
REFERÊNCIAS 46

1 INTRODUÇÃO

O posicionamento de um satélite artificial terrestre requer um controle dentro de um grau de precisão, pois sua órbita foi previamente estabelecida para um determinado fim, e deve ser mantida. Também, o aspecto de rotação em torno do seu eixo deve ser considerado, pois um satélite cuja finalidade é fotografar a Terra ou rastrear sua superfície deve manter sua câmara e/ou sensores sempre voltados para o planeta.

Estas condições mostram a importância do controle da órbita e da atitude de um satélite terrestre e, o próprio satélite deve ter condições de corrigir-se caso necessário. Para tanto, pode receber a instrução de correção de uma estação em Terra, ou usar sensores de posicionamento astronômico (estrelas, sol, etc.), ou ainda utilizar o sinal do Sistema de Posicionamento NAVSTAR-GPS para determinar sua posição em relação a um referencial terrestre.

Este trabalho apresenta os principais conceitos matemáticos e físicos que permitem ao satélite artificial terrestre, aqui denominado satélite usuário, determinar sua posição na sua órbita, e a modelagem matemática utilizada.

1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA

Existem inúmeras aplicações do uso do Sistema de Posicionamento NAVSTAR-GPS: no campo da topografia, análise de navegação terrestre e marítima, etc. Um vasto material técnico foi encontrado abrangendo diversos temas, tais como: os efeitos nos relógios atômicos dos satélites na determinação de atitude dos satélites, etc.

Na literatura pesquisada foram identificadas duas modelagens para o posicionamento de satélites: uma utiliza o intervalo de tempo referente à emissão do sinal e sua recepção; a outra utiliza a diferença de fase do sinal da portadora e calcula o número de ciclos ocorridos durante o percurso do sinal.

Para o desenvolvimento deste trabalho foi escolhido o modelo que utiliza o tempo de propagação do sinal entre os satélites, sempre com o enfoque na matemática e seus conceitos.

1.2 PROBLEMATIZAÇÃO

Quais os conhecimentos matemáticos e físicos envolvidos na determinação do posicionamento de um satélite artificial terrestre, em sua órbita, com o auxílio do sinal do Sistema de Posicionamento NAVSTAR-GPS?

1.3 JUSTIFICATIVAS

Segundo Fabri (1997, p.1) “a proliferação mundial de missões espaciais com fins tecnológicos, de telecomunicações, entre outros, confere relevância significativa às atividades de controle e determinação de órbita e atitude de satélites”.

Esta frase, e o conhecimento de que a solução de um controle autônomo passa pelos conceitos matemáticos e físicos, motivaram o autor a pesquisar sobre o posicionamento de satélites artificiais com o auxilio do Sistema de Posicionamento NAVSTAR-GPS. Sistema este, que é amplamente utilizado no nosso dia a dia, quer nos automóveis e celulares, como em navegação aérea, marítima e terrestre.

1.4 OBJETIVOS

Os objetivos: geral e específicos são apresentados a seguir e orientaram as pesquisa bibliográfica realizada.

1.4.1 Objetivo Geral

Entender os elementos matemáticos e físicos que permitem a obtenção do posicionamento de um satélite artificial terrestre, em sua órbita, a partir de dados do Sistema de Posicionamento NAVSTAR-GPS.

1.4.2 Objetivos Específicos

Identificar os seguintes conhecimentos:

a) O sistema de referência utilizado no posicionamento de um objeto no espaço;
b) Os elementos que definem a órbita de um corpo;
c) As leis físicas que regem o movimento de um corpo no espaço;
d) As leis que regem a transmissão de sinal eletromagnético no espaço;
e) Os elementos matemáticos que modelam uma órbita, seu referencial e o vetor-posição correspondentes;
f) Como se estima a posição de um satélite em órbita.

1.5 TIPO DA PESQUISA

Pesquisa bibliográfica que procurou expandir o conhecimento dos conceitos matemáticos e físicos envolvidos na determinação da órbita de um satélite artificial terrestre, a partir um uma constelação de satélites conhecidos e pertencentes ao Sistema de Posicionamento NAVSTAR-GPS.

Esta pesquisa foi realizada em mídia digital e na aquisição de livros sobre o tema. Dentre os artigos pesquisados temos: materiais didáticos de aulas em universidades, dissertações de mestrado, tese de doutorado e artigos de revistas especializadas.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta monografia está organizada em quatro seções, são elas:

A primeira é esta seção introdutória.

A segunda denominada Fundamentação Teórica e sua Aplicação, abordando:

a) O conceito de posicionamento com auxílio do sinal NAVSTAR-GPS;
b) Descrição do Sistema de Posicionamento NAVSTAR-GPS;
c) Conceitos matemáticos com as características das elipses, vetores, sistemas de coordenadas, filtro de Kalman;
d) Conceitos da física relativista: referencial inercial geocêntrico, órbitas Keplerianas, e referenciais temporais.

A terceira desenvolve estes conceitos para a obtenção de uma modelagem matemática, que usa as informações dos sinais recebidos dos Satélites NAVSTAR-GPS, as quais também são detalhadas nesta seção.

A quarta seção apresenta a conclusão do autor e suas considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E SUA APLICAÇÃO

O trabalho apresenta diversos conceitos que fundamentam a modelagem do posicionamento de um satélite artificial terrestre. Estes fundamentos se acumulam de tal forma, que o autor optou por, a cada fundamentação teórica, apresentar sua aplicação na modelagem desejada, permitindo assim um gradual e específico desenvolvimento do objetivo deste trabalho.

Conforme Timbó (2000, p. 4) "O trabalho com levantamentos GPS requer a compreensão integrada de várias disciplinas, notadamente estatística, astronomia, geodésia e eletrônica".

2.1 CONCEITO DE POSICIONAMENTO COM O USO DO SINAL NAVSTAR-GPS

Um satélite usuário, quando colocado em órbita, tem uma finalidade e uma órbita definida para cumprir esta finalidade. Como existem milhares de satélites orbitando a Terra, o satélite usuário precisa avaliar sua posição para verificar se está na órbita correta, caso contrário, fazer as correções necessárias. Para esse fim é embarcado no satélite usuário um conjunto de processamentos eletrônicos (computadorizados), incluindo um relógio de baixa precisão, que são encarregados de processar as informações recebidas e estimar sua posição atual.

Para que esse processamento ocorra pelo satélite usuário, é necessário que ele receba o sinal de no mínimo quatro satélites NAVSTAR-GPS; sinal este que contém todas as informações com alto grau de precisão das órbitas e posições na órbita, destes satélites.

Conforme Monico (2007, p. 32):

> O princípio básico de navegação pelo GPS consiste na medida de distâncias entre o usuário e quatro satélites. Conhecendo as coordenadas dos satélites em um sistema de referência apropriado, é possível calcular as coordenadas da antena do usuário no mesmo sistema de referência dos satélites. Do ponto de vista geométrico, apenas três distâncias, desde que não pertencentes ao mesmo plano, seriam suficientes. Nesse caso, o problema se reduziria à solução de um sistema de

> três equações com três incógnitas. A quarta medida é necessária por causa do não sincronismo entre os relógios dos satélites e o do usuário, que adiciona uma incógnita ao problema.
>
> A concepção do sistema GPS permite que um usuário, em qualquer lugar da superfície terrestre, ou próximo a esta, tenha à sua disposição no mínimo quatro satélites para serem rastreados. Esse número de satélites permite que se realize o posicionamento em tempo real.

Conforme apresentado por Pardal et al (2011).

> O problema da órbita consiste essencialmente nos valores dos parâmetros estimados que definam a trajetória de um corpo no espaço, processando um conjunto de informações (medições) neste corpo.
>
> O Sistema de Posicionamento GPS é um meio potente e de baixo custo que permite calcular a órbita de satélites artificiais terrestres.
>
> A determinação da órbita de satélites artificiais é um problema não linear e está sujeito a forças que não são fáceis de modelar, como geopotencial e potência da radiação solar. Mesmo assim, o receptor GPS embarcado nos satélites usuários permite obter medições (pseudodistância) que podem ser utilizadas para estimar o vetor estado da sua órbita (PARDAL et al, 2011, p. 79, tradução livre do autor).

Ressaltando a importância da implementação deste sistema, Fabri (1997, p. 1) cita: que o projeto inicial denominado *Navigation System with Time and Ranging – NAVSTAR* do governo americano, comercialmente designado de *Global Positioning System GPS* tornou-se uma ferramenta útil para a determinação de órbita de satélites artificiais e suas atitudes.

> A proliferação mundial de missões espaciais com fins meteorológicos, de telecomunicações, do sensoriamento remoto e científico, entre outros, confere relevância significativa às atividades de controle e determinação de órbita e atitude de satélites (FABRI, 1997, p. 1).

Sobre o sistema NAVSTAR-GPS, Gomes ressalta sua importância:

> O Sistema de Posicionamento Global GPS é um sistema de navegação por satélites que permite determinar o posicionamento tridimensional e tempo com alta precisão. Seus principais objetivos são: auxílio à radionavegação, navegação em

> tempo real, cobertura global e rápida aquisição de dados enviados pelos satélites NAVSTAR-NAVSTAR-GPS (GOMES, 2008, resumo).

2.2 O SISTEMA DE POSCIONAMENTO NAVSTAR-GPS

O sistema NAVSTAR-GPS funciona como verdadeiro indicador (farol) para a navegação e posicionamento na superfície terrestre, marítima, aérea e para os satélites terrestres que possuem órbita inferior às suas (mais próxima da Terra).

Quanto à qualidade do uso deste sistema, Fabri (1997, p.4) comenta: "O sistema de posicionamento Global NAVSTAR-GPS oferece um meio moderno, preciso, praticamente instantâneo e ininterrupto de posicionamento na superfície ou no espaço ao redor da Terra".

Quanto à finalidade do sistema e a metodologia utilizada por este, Monico (2007, p. 39) esclarece:

> O objetivo original do sistema era a determinação instantânea da posição, velocidade e tempo de um usuário, em qualquer lugar da Terra ou próximo a esta, independentemente das condições atmosféricas, em um referencial global e homogêneo, com base em medidas de distâncias. Essas distâncias são denominadas pseudodistâncias, em razão do não sincronismo entre o relógio do usuário e o dos satélites, o qual comparece como uma incógnita adicional no problema a ser resolvido.

Gomes esclarece que o Sistema iniciou sua operação na década de 90, para uso não militar.

> O princípio básico do GPS é determinar a posição e a velocidade tridimensionais de qualquer corpo que possua um receptor adequado, além de especificar o tempo com alta precisão. O sistema GPS permite ao receptor determinar sua posição e tempo em qualquer lugar da superfície terrestre e a qualquer hora utilizando dados de apenas 4 satélites. O sistema pode ter um número ilimitado de usuários simultaneamente (GOMES, 2008, p. 27).

O Sistema NAVSTAR-GPS é o sistema desenvolvido pelos Estados Unidos da América e hoje faz parte do GNSS – Sistema Global de Navegação por Satélite. Também existem os sistemas: europeu, russo, chinês, japonês e indiano que compõem a constelação de satélites para esse fim, alguns deles na sua fase inicial.

2.2.1 Controle do sistema NAVSTAR-GPS

A Área de Controle do sistema NAVSTAR-GPS é responsável por averiguar as condições de cada satélite através de estações de rastreamento localizadas na superfície terrestre, por receber estas informações no Controle central que as avalia conjuntamente com as informações das efemérides previstas, e gera as informações atualizadas que são retransmitidas ao respectivo satélite. Assim cada satélite tem informações precisas sobre a sua órbita e os eventos que podem ocorrer na próxima semana. Tais informações passam a fazer parte da mensagem que cada satélite transmite para os seus usuários.

Fabri (1997, p. 1) esclarece a importância do uso do sistema para minimizar as operações e custos de estações de controle terrestres para os usuários.

Quanto ao controle sobre a órbita de um satélite artificial, Fabri apresenta os seguintes comentários:

> Por controle de veículos (espaciais ou não) entende-se a alteração propositada dos parâmetros do movimento do centro de massa (do veículo) e do movimento em torno do centro de massa. O controle em voo pode incluir: a escolha de uma trajetória ótima, a estabilização de sua posição na rota desejada e sua orientação segundo uma direção especificada (FABRI, 1997, p. 2).
>
> O controle pode ser executado inteiramente por equipamentos automáticos a bordo do veículo (carro, navio, avião, satélite, etc.). Quando a operação de tais equipamentos não depende de informações externa, convenciona-se denominá-lo de controle autônomo (FABRI, 1997, p. 2).
>
> O sistema de controle é responsável por manobras de atitude e pela estabilização angular do veículo em sua trajetória, com a precisão estabelecida. Nas manobras o satélite adquire uma dada atitude a partir de outra inicial, enquanto que na estabilização espera-se a manutenção de uma dada posição, impassível à ação de torques perturbadores (FABRI, 1997, p. 2).

2.2.2 Características do sistema NAVSTAR-GPS

Principais aspectos do sistema NAVSTAR-GPS, conforme Fabri (1997, p. 23) são apresentados a seguir:

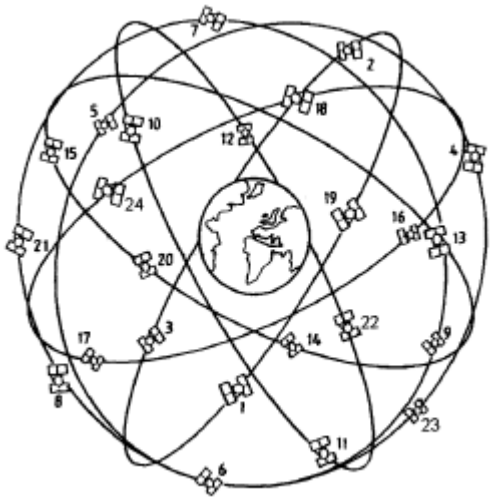
a) Precisão para posicionamento, da ordem de centímetros;
b) Exata determinação de velocidade e tempo;
c) Disponibilidade contínua de dados de navegação;
d) Base para o estabelecimento de um referencial global;
e) Cobertura global e regional;
f) Potencial generalizado de navegação para minimizar a proliferação de sistemas para fins especiais ou de cobertura regional;
g) Independência das condições meteorológicas;
h) Observação simultânea de pelo menos quatro satélites visíveis acima do horizonte, em qualquer região e a qualquer instante.

Estas características são aquelas originais para uso militar, que até pouco tempo não estavam presentes nos sinais liberados para uso civil.

De tempos em tempos, os satélites NAVSTAR-GPS são desativados e substituídos por versões mais modernas, fazendo que ocorra um aprimoramento dos seus dados tanto na qualidade, como em quantidade de informações.

A figura 1 ilustra como é formada a constelação de satélites do sistema NAVSTAR-GPS em relação à Terra.

Figura 1 - Constelação de satélites



Fonte: Fabri (1997, p. 24)

As características do sistema de posicionamento NAVSTAR-GPS, definidas na sua criação são apresentadas na tabela 1.

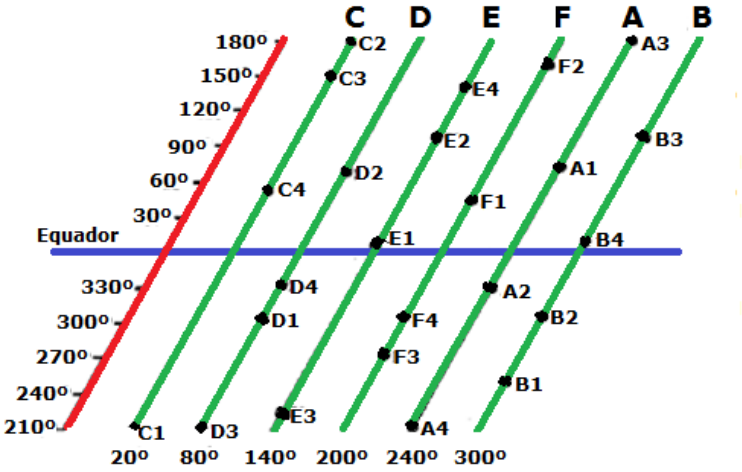
Tabela 1 – Características do Sistema NAVSTAR-GPS

Descrição	Detalhe
Número de satélites em órbita.	24
Número de planos orbitais.	6
Altitude aproximada da órbita.	20.200 Km.
Período orbital.	12 horas.
Excentricidade da órbita.	0,05, quase circular.
Inclinação dos planos orbitais em relação ao equador terrestre.	55 graus.
Precisão do relógio atômico a bordo.	10^{-13}.
Frequência de transmissão dos sinais (2).	1.228 MHz e 1.575 MHz.
Potência da transmissão.	450 W.
Visibilidade do sinal (visada do satélite).	Contínua de pelo menos 4 satélites.
Semieixo maior da órbita aproximado.	26.600 Km.
Número de satélites em cada plano.	6 satélites, planos de A..F.
Distância da ascensão reta entre planos.	60 graus.
A posição de um satélite na sua órbita.	Definida pela anomalia média M.

Fonte: Fabri (1997, p. 24), adaptado pelo autor.

Os planos e os satélites são apresentados na figura 2.

Figura 2 - Planos orbitais dos satélites NAVSTAR-GPS



Fonte: Fabri (1997, p. 25), adaptada pelo autor.

2.3 CONCEITOS MATEMÁTICOS

A seguir são apresentadas as características da elipse e do referencial colocado em um dos seus focos; e conceitos para o entendimento de planos, de ângulos e de rotação de referenciais.

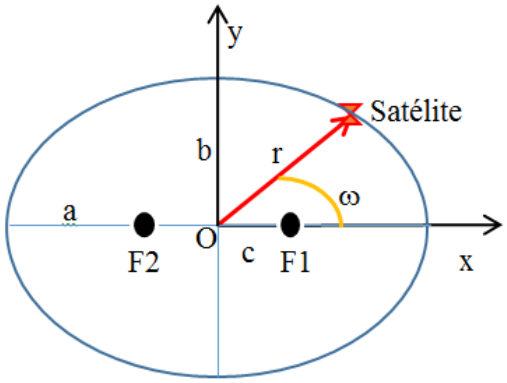
2.3.1 A elipse e suas propriedades

A órbita de um satélite artificial em torno da Terra tem o formato elíptico e por isso as propriedades de uma elipse devem ser consideradas, pois compõem o desenvolvimento da modelagem desejada.

Selhorst (2011, p. 145) apresenta a definição de elipse: “Elipse é uma curva fechada, determinada pela intercepção de um plano com uma superfície cônica”.

As grandezas envolvidas e suas formulações são apresentadas por Spiegel (1968, p. 38), na tabela 2 e ilustradas pela figura 3.

Figura 3 - Elipse com centro em (0,0) e vetor posição do satélite



Fonte: Spiegel (1968, p. 38), adaptada pelo autor.

Tabela 2 - Grandezas que definem a elipse

Símbolo	Descrição
a	semieixo maior.
b	semieixo menor.
x_o e y_o	centro da elipse, na figura acima $x_0 = y_0 = 0$.
F1 e F2	focos da Elipse.
r	vetor posição do satélite em estudo.
e	excentricidade da elipse.
ω	o ângulo entre o semieixo positivo na direção x e o vetor posição (r).
O	origem do sistema de coordenadas

Fonte: elaborada pelo autor.

Equação da elipse em coordenadas retangulares, centro em (x_0 e y_0)

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (2.1)$$

Distância do centro ao foco F1 ou F2.

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad (2.2)$$

Excentricidade.

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \qquad (2.3)$$

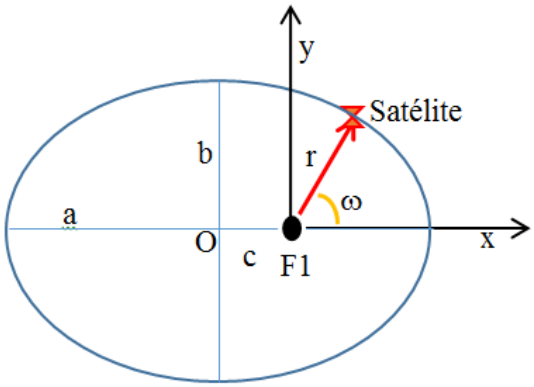
Equação em coordenadas polares, com origem centrada em (0,0).

$$r^2=\frac{a^2+b^2}{a^2\,sen^2(\omega)+b^2\,cos^2(\omega)} \qquad (2.4)$$

Para o presente trabalho as coordenadas elípticas devem ser referenciadas a um dos focos pois, para a modelação de uma órbita, do satélite artificial, a Terra é considerada o foco de uma elipse. Assim, a origem do sistema de referência é deslocada para um dos focos, e a Terra ocupa esta posição, transformando em um sistema inercial geocêntrico.

Assim as formulações passam a ser (SPIEGEL, 1968, p. 38):

Figura 4 - Elipse com centro de referência em um dos focos



Fonte: elaborada pelo autor.

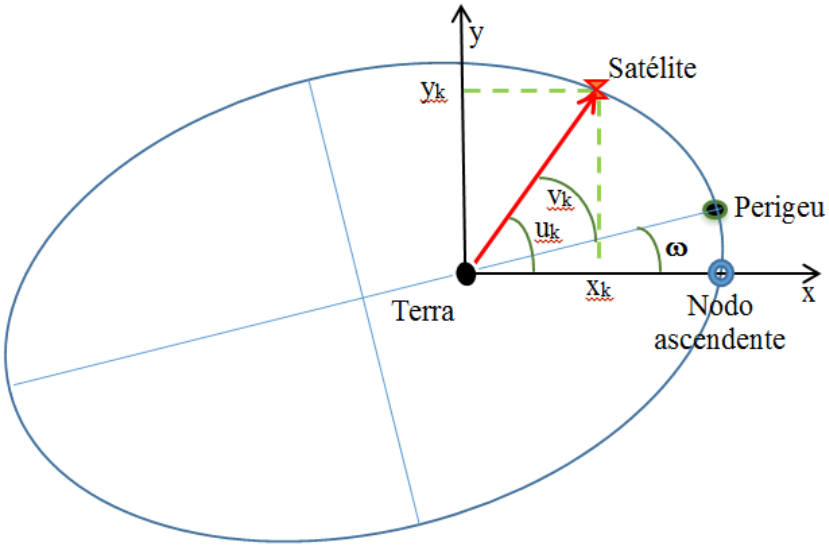
Equação em coordenadas polares, com origem centrada em F1, sobre o eixo x (Spiegel, 1968, p. 38).

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\,cos(\omega)} \tag{2.5}$$

Onde: a, e, ω definidos na tabela de grandezas envolvidas.

A órbita de um satélite artificial está inclinada em relação aos eixos x e y colocados sobre o seu foco, assim teremos a seguinte configuração:

Figura 5 - Elipse inclinada: Terra como centro de referência



Fonte: elaborado pelo autor.

As seguintes características devem ser consideradas pela inclinação da elipse:

Tabela 3 - Características da órbita elíptica inclinada

Grandeza	Descrição
Perigeu	Ponto da órbita em que o satélite está mais próximo da Terra.
Nodo Ascendente	Ponto em que a elipse corta o eixo x.
ω	Ângulo entre nodo ascendente e o perigeu.
υ_k	Ângulo entre a direção do perigeu e a posição do satélite em sua órbita.
u_k	Ângulo entre a direção do nodo ascendente e a posição do satélite em sua órbita.
X_k e Y_k	Coordenadas do satélite no sistema referencial X e Y de seu plano orbital.

Fonte: elaborada pelo autor

Projetando a posição do satélite nos eixos do sistema de referência, obtém-se:

$$x_k = r_k\, cos(u_k)$$
$$y_k = r_k\, sen(u_k) \qquad (2.6)$$
$$u_k = v_k + \omega$$

Alguns conceitos matemáticos para o entendimento de planos, ângulos e rotação de referenciais são apresentados.

2.3.2 Ângulo entre dois vetores

Dados dois vetores a e b o ângulo entre eles é (SELHORST, 2011, p. 78):

$$cos\,\alpha = \frac{a_1\,a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|u||v|} \tag{2.7}$$

2.3.3 Equação de um plano no espaço

A equação que define um plano no espaço tridimensional, como é o caso do plano orbital de um satélite, é expressa por (SELHORST, 2011, p. 195):

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{2.8}$$

Ou, na forma de determinante:

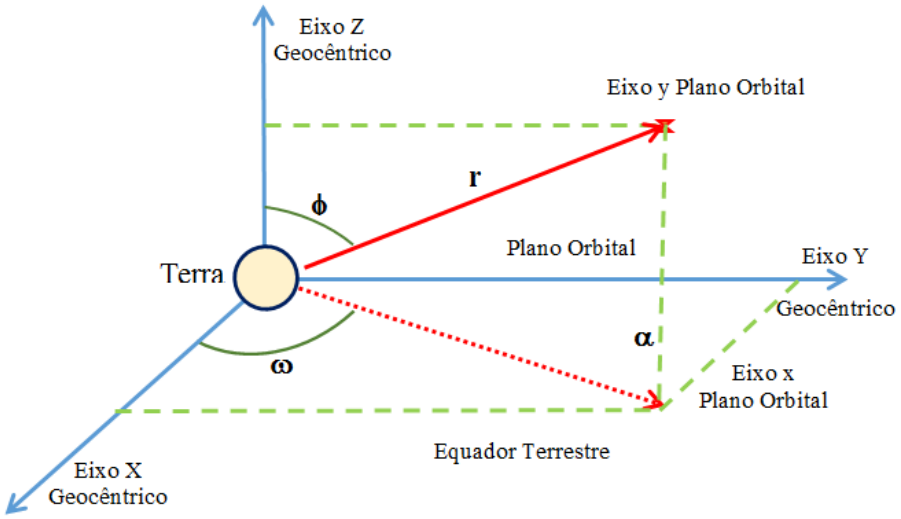
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.9}$$

2.3.4 Sistema de coordenadas esféricas

As órbitas dos satélites são representadas por um sistema Kleperiano que possuem esse tipo de coordenadas esféricas, que são apresentadas por Selhorst (2011, p. 222).

Note que se tem os eixos x e y do plano orbital como apresentado na seção 2.3 figura 5, dentro do sistema tridimensional com centro na intersecção do eixo de rotação terrestre e seu plano equatorial, e com os seus eixos X, Y, Z geocêntricos.

Figura 6 - Sistema geocêntrico e plano orbital



Fonte: elaborado pelo autor.

As coordenadas x, y e z são obtidas a partir do vetor r, com as seguintes relações.

$$x = r\ sen\ \phi \cos \omega$$
$$y = r\ sen\ \phi\ sen\ \omega \qquad (2.10)$$
$$z = r \cos \phi$$

2.3.5 Rotação do sistema tridimensional sobre um dos seus eixos

Um sistema tridimensional pode sofrer a rotação em torno de um dos seus eixos, conforme Silva (2016, p. 164) apresenta.

a) Rotação anti-horária sobre o eixo X, para um ângulo θ.

Aplica-se a matriz rotação ao vetor (x, y, z) como se seque, para obter a função rotação T.

T: R3 -> R3

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \theta & -sen\ \theta \\ 0 & sen\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x,\ \ y\cos\theta - z\ sen\ \theta,\ \ y\ sen\ \theta + z\cos\theta)$$

$$x = x$$
$$y = y\cos(\theta) - z\ sen(\theta) \qquad (2.11)$$
$$z = y\ sen(\theta) + z\cos(\theta)$$

b) Rotação anti-horária sobre o eixo Y, para um ângulo θ.

Aplica-se a matriz rotação ao vetor (x, y, z) como se seque, para obter a função rotação T.

T: R3 -> R3

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} cos\ \theta & 0 & sen\ \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\ \theta & 0 & cos\ \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x\ cos\ \theta + z\ sen\ \theta,\ \ y,\ \ -x\ sen\ \theta + z\ cos\ \theta)$$

$$\begin{aligned} x &= x\ cos(\theta) + z\ sen(\theta) \\ y &= y \\ z &= -x\ sen(\theta) + z\ cos(\theta) \end{aligned} \qquad (2.12)$$

c) Rotação anti-horária sobre o eixo Z, para um ângulo θ.

Aplica-se a matriz rotação ao vetor (x, y, z) como se seque, para obter a função rotação T.

T: R3 -> R3

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} cos\ \theta & -sen\ \theta & 0 \\ sen\ \theta & cos\ \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x\ cos\ \theta - y\ sen\ \theta,\ \ x\ sen\ \theta + y\ cos\ \theta,\ \ z)$$

$$\begin{aligned} x &= x\ cos(\theta) - y\ sen(\theta) \\ y &= x\ sen(\theta) + y\ cos(\theta) \\ z &= z \end{aligned} \qquad (2.13)$$

2.3.6 Filtro de Kalman

As informações recebidas do satélite NAVSTAR-GPS constituem um conjunto de dados discretos em intervalos de tempos de segundos, e por isso é possível a utilização de um estimador para solução de um sistema de equações.

Dentre os estimadores citados na literatura estão: o método dos mínimos quadrados e o filtro de Kalman. O primeiro, mais indicado para análise de dados acumulados durante um período, caso de estações de controle terrestres; o segundo, no caso de análise dinâmica, em tempo real, quando os dados são processados à medida que são recebidos.

Almeida (2011, p. 11) explica o processo de estimação dizendo que são de difícil solução, tanto numericamente, como analiticamente. “Isto porque há diversas estimativas para o problema e, consequentemente, não existe uma única solução. Desta forma a solução depende do critério adotado”.

Almeida continua: “A estimação geralmente implica em um erro entre o valor verdadeiro (nominal) e os valores decorrentes do processo de estimação, sendo necessário minimizar tal erro” (ALMEIDA, 2011, p. 11).

Parma (2015, p.16) conceitua o “estimador como uma função probabilística dos elementos da amostra que se utiliza para estimar os parâmetros”.

O primeiro passo é determinar qual o modelo teórico que se ajusta à distribuição do fenômeno em análise (PARMA, 2015, p. 38).

Em seu artigo Pardal (2013, p. 397, tradução livre do autor) apresenta o Filtro de Kalman *Unscented* com detalhes. A seguir um resumo dos passos para sua aplicação:

a) O valor médio e a matriz de covariância do vetor de estado (x) são calculados, referindo-se ao instante anterior t_{K-1}.

$$\hat{x}_{k-1} = E[\hat{x}_{k-1}] = E[x_{k-1}^T W_{k-1}^T]^T \epsilon R^n$$

$$\hat{P}_{k-1} = E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})^T]$$

b) Gerar os pontos-sigma a partir das médias e matriz covariância do passo anterior.

$$x_{0,k-1} = \hat{x}_{k-1}$$

$$x_{i,k-1} = \hat{x}_{k-1} + (\sqrt{(n+\lambda)\hat{P}_{k-1}})_i$$

$$x_{i+n,k-1} = \hat{x}_{k-1} - (\sqrt{(n+\lambda)\hat{P}_{k-1}})_i$$

c) Gerar os pontos-sigma para a propagação para o valor no instante t_k, usando a equação dinâmica não linear, y = f(x) aplicada à média e matriz de covariância calculada.

$$x_{0,k} = f[\, x_{0,k-1}]$$

$$x_{i,k} = f\big[\, x_{i,k-1}\big], \qquad i = 1, \ldots\ldots, 2n$$

$$\bar{x}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i \, X_{i,k}$$

$$\bar{P}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i [\, x_{i,k} - \bar{x}_k] \left[x_{i,k} - \bar{x}_k\right]^T + Q_k$$

d) Nessa fase, que é o ciclo de atualização, as matrizes de inovação com valores previstos $P^{vv}{}_k$ e as correlações $P^{xy}{}_k$, são calculados, e finalmente o ganho de Kalman é calculado, para atualizar o valor de estado x e a matriz de covariância; e serão utilizados como valores de entrada (item a) para o tempo T_{k+1}. Assim, a função é recursiva para cada novo dado recebido.

$$x_{o,k} = \bar{x}_k$$

$$x_{i,k} = \bar{x}_k + (\sqrt{(n+\lambda)\bar{P}_k})_i$$

$$x_{i+n,k} = \bar{x}_k - (\sqrt{(n+\lambda)\bar{P}_k})_i$$

$$y_{0,k} = f[x_{o,k}]$$

$$y_{i,k} = f\left[x_{i,k}\right], \quad i = 1, \ldots, 2n$$

$$\bar{y}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i y_{i,k}$$

$$P_k^{vv} = \sum_{i=0}^{2n} W_i \left[y_{i,k} - \bar{y}_k\right] \left[y_{i,k} - \bar{y}_k\right]^T + R_k$$

$$P_k^{xy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i \left[x_{i,k} - \bar{x}_k\right] \left[y_{i,k} - \bar{y}_k\right]^T$$

e) Cálculo do ganho de Kalman.

$$K_k = P_k^{xy} (P_k^{vv})^{-1}$$

f) Novos valores calculados a partir do ganho de Kalman.

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k (y_k - \bar{y}_k)$$

$$\hat{P}_k = \bar{P}_k - K_k P_k^{vv} K_k^T$$

2.4 CONCEITOS DA FÍSICA RELATIVISTA

Os conceitos necessários para o presente trabalho são: o conceito de referencial inercial e os dois postulados de Einstein na sua teoria da relatividade restrita.

Conforme apresentado por Kock (2016, p. 40):

> Um referencial é inercial se nele vale a lei da inércia, ou seja, quando um objeto não sujeito a forças permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Além disso, apresenta a propriedade de ser invariante, conservando a mesma forma em qualquer referencial que esteja se movendo com velocidade constante em relação a esse referencial, desde que inercial.

No caso deste trabalho, considera-se o referencial tridimensional centrado na Terra, intersecção do eixo de rotação terrestre e o plano equatorial, como um referencial inercial, porquanto os tempos de medição são feitos em segundos, ou seja, não ocorre, neste período, uma mudança significativa no movimento de translação da Terra ao redor do Sol. Para períodos mais longos, os satélites NAVSTAR-GPS têm suas órbitas e efemérides atualizadas pelos controles na Terra dentro do mesmo referencial, que permite assumir o exposto.

No mesmo livro Kock (2016, p. 43) apresenta os dois postulados de Einstein:

a) Postulado 1: As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.
b) Postulado 2: A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c, qualquer que seja o movimento da fonte.

O segundo postulado tem grande aplicação neste trabalho, pois independente da velocidade (valor e direção) de um satélite da constelação NAVSTAR-GPS, o sinal emitido por ele terá a mesma velocidade de propagação, aproximadamente a velocidade da luz no vácuo.

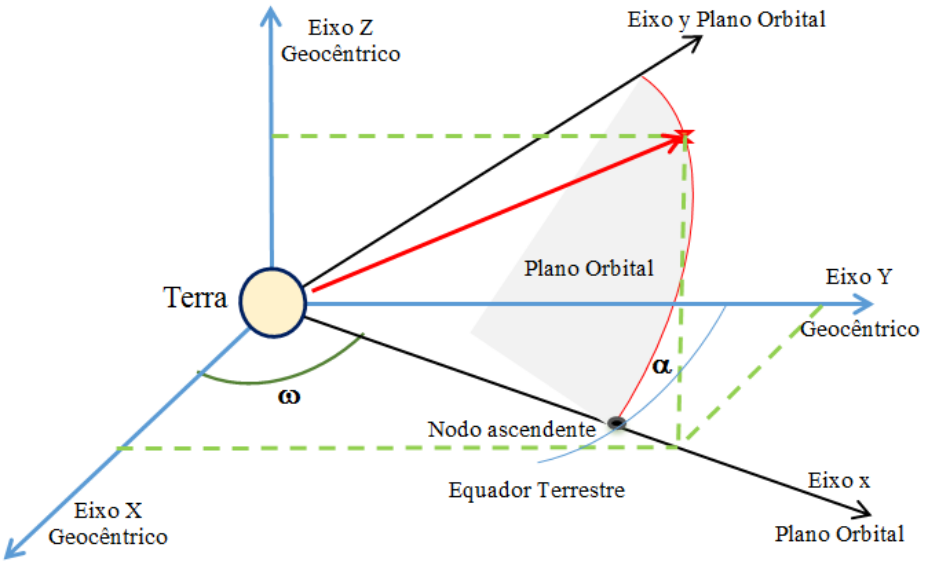
Assim, a velocidade de propagação do sinal transmitido não sofre influência do movimento do satélite NAVSTAR-GPS emissor.

2.5 REFERENCIAL INERCIAL GEOCÊNTRICO

Para determinar a posição de um satélite artificial terrestre deve-se construir um referencial geocêntrico, ou seja, a Terra (intersecção do eixo de rotação e o plano equatorial) corresponde à origem do sistema cartesiano de coordenadas tridimensionais.

O referencial utilizado pelo Sistema de Posicionamento NAVSTAR-GPS é denominado WGS84 ilustrado na figura 7.

Figura 7 - Sistema geocêntrico e características da órbita



Fonte: Monico (2007, p.164), adaptado pelo autor.

Onde:

α - ângulo de inclinação do plano orbital

ω - ângulo da direção do nodo ascendente, que é o eixo x no plano orbital.

As coordenadas do satélite no Sistema Geocêntrico corresponde a uma rotação de eixos pelo ângulo α, com indica a equação 2.11, além da projeção do vetor posição sobre o eixo z.

Monico (2007, p. 169) apresenta a equação de obtenção dos valores das coordenadas do satélite no sistema geocêntrico, partindo dos valores x_k e y_k do sistema do

plano orbital. Esclarece que “o conjunto de expressões é resultado da aplicação das rotações do vetor posição pelo ângulo (-ω) para o eixo z, e da rotação (-α) para as coordenadas x e y”.

$$\begin{aligned} x_s &= x_k\, cos(\omega) - y_k\, sin(\omega)\, cos(\alpha) \\ y_s &= x_k\, sin(\omega) + y_k\, cos(\omega)\, cos(\alpha) \\ z_s &= y_k\, sin(\alpha) \end{aligned} \qquad (2.16)$$

2.6 CONCEITOS DE ÓRBITAS KEPLERIANAS

Kepler fez o estudo das órbitas de corpos que resultaram nas leis de Kepler, que explicam as órbitas de astros pela forma elíptica. Esses mesmos conceitos são aplicados nos dias de hoje aos satélites artificiais terrestres.

Gemael (2003, p. 26) apresenta essas leis como se seguem:

Lei das órbitas (1609): Os planetas descrevem órbitas elípticas das quais o Sol (supondo fixo), ocupa um dos focos.

Lei das áreas (1609): O raio vetor descreve áreas iguais em tempos iguais.

Lei dos períodos (1619): Os quadrados dos períodos (P) das revoluções planetárias são proporcionais aos cubos dos semieixos maiores (a) de suas órbitas.

Os elementos Keplerianos de uma órbita são:

Tabela 4 - Elementos Keplerianos

Elemento	Descrição
Época	Corresponde à data na qual os elementos keplerianos foram definidos
Inclinação orbital (i)	Indica o ângulo entre o equador terrestre e o plano orbital visto do centro da Terra. Seu valor varia de 0 a 180 graus.
Ascensão reta do nodo ascendente (ω)	É o ponto em que a órbita do satélite cruza o plano equatorial terrestre (plano XY). Mede-se o ângulo entre o eixo X e a direção desse ponto.
a	Semieixo maior da órbita.
e	Excentricidade da órbita.
Argumento do Perigeu	Ângulo formado pelo plano XY e o ponto da órbita em que o satélite mais se aproxima da Terra.
Movimentação Média	Indica a velocidade do satélite de acordo com a lei de Kepler.
Anomalia média da época	Indica a localização do satélite em sua órbita, com referência ao perigeu. Seu valor varia de 0 a 360 graus.
Arrasto (opcional)	Efeito produzido pela atmosfera quando o satélite se encontra uma altitude mais baixa.

fonte: https://marine.rutgers.edu/cool/education/class/paul/orbits.html, acesso em 08/05/2019

2.6.1 Lei de Kepler

Partindo das leis gravitacionais de Newton, deduz-se a lei de Kepler que é apresentada por Tipler (2016, p. 381), como sendo:

$$v = \frac{GM}{r} \tag{2.17}$$

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{GM}\,r^3 \tag{2.18}$$

Onde v é a velocidade do satélite, G a constante gravitacional, M a massa da Terra, r a posição do satélite e T tempo transcorrido.

Gemael (2003, p. 38), indica a equação que relaciona a posição do satélite na sua órbita com relação à anomalia E.

$$M = E - e\ sen(E) \tag{2.19}$$

A descrição cinemática do movimento elíptico fica completa com a equação 2.19, sendo M a anomalia média correspondente a um astro imaginário dotado de velocidade angular uniforme (GEMAEL, 2003, p.38). E complementa:

$$M = n(t - t_0) \tag{2.20}$$

Onde: t_0 é época da passagem pelo perigeu, t é a época considerada, e n movimento angular médio.

2.7 REFERENCIAL TEMPORAL

Para ser capaz de determinar o posicionamento de um satélite usuário em relação ao sinal recebido de um satélite NAVSTAR-GPS, é necessário que haja uma comparação entre o momento de sua transmissão e o da sua recepção.

Como são necessários 4 sinais de satélites NAVSTAR-GPS, então, devem estar sincronizados com o mesmo referencial temporal. Os satélites NAVSTAR-GPS possuem relógios atômicos com alta precisão que podem apresentar desvios desde o instante do lançamento até o momento da transmissão do seu posicionamento.

Para que haja perfeito sincronismo de tempo, o controle central do Sistema de Posicionamento NAVSTAR-GPS possui um padrão de tempo de sincronismo que é transmitido para cada um dos satélites de sua constelação uma correção do relógio embarcado.

> O sistema de tempo GPS, como outros sistemas envolvidos em Geodésia Espacial, mede essencialmente o intervalo de tempo da propagação dos sinais e a realização das observações (MONICO, 2007, p. 77).
>
> A escala de tempo fundamental é o TAI (Tempo Atômico Internacional), baseado em relógios atômicos por várias agências. Os sinais transmitidos pelos satélites NAVSTAR-GPS são sincronizados com o relógio atômico da Estação de Controle Central, no Colorado, Estados Unidos (MONICO, 2007, p. 77).

Mansur (2019, p. 2) comenta sobre o relógio e o horário dos satélites NAVSTAR-GPS.

> O posicionamento usando os satélites GPS depende do tempo de propagação do sinal entre o satélite GPS e o receptor do usuário. Consequentemente, um erro no relógio implica em um erro de posicionamento. Portanto, o sistema de navegação depende do desempenho do relógio e de sua habilidade em estimar seus comportamentos. Relógios atômicos são utilizados nos satélites GPS e também nas estações de controle terrestres, que permanecem sincronizados, determinando o Tempo do Sistema GPS (MANSUR, 2019, p.2, tradução livre do autor).
>
> Os relógios atômicos embarcados estão sujeitos a anormalidades tais como: radiação, temperatura, envelhecimento, efeitos relativísticos e até paradas

> repentinas. Entender as anormalidades que influenciam os relógios atômicos embarcados é essencial para aplicar as correções adequadas no cálculo do posicionamento (MANSUR, 2019, p. 2, tradução livre do autor).

A escala de tempo NAVSTAR-GPS tem seu tempo zero (inicial) estabelecido à zero hora de 06/01/1980, sendo zerada à cada 1023 semanas.

Essa escala de tempo é composta, conforme Monico (2007, p. 77), pelo número da semana (*NAVSTAR-GPS Week Number*) contado a partir de cada início de ciclo, que varia de 0 a 1023 semanas; e pelo número de segundos da semana (início a meia-noite de sábado para domingo) designado TOW (*Time of Week*), variando de 0 a 604.800 segundos.

Assim, as estações terrestres de controle recebem o sinal dos satélites NAVSTAR-GPS, transmitem para o controle central para análise e este envia para o satélite uma mensagem que contém os parâmetros de correção do valor do seu relógio atômico.

Quando o satélite NAVSTAR-GPS transmite sua informação para os usuários, inclui o valor do seu relógio atômico e os valores dos parâmetros de correção deste relógio. O cálculo do horário NAVSTAR-GPS fica a cargo do sistema de processamento do satélite usuário

3 DETERMINAÇÃO DA POSIÇÃO DE UM SATÉLITE USUÁRIO

A constelação de satélites NAVSTAR-GPS estão constantemente transmitindo suas posições, horários e efemérides que podem ser recebidos pelos satélites usuários que, ao recebê-las, processará essas informações para verificar primeiramente as posições dos satélites NAVSTAR-GPS, em um total de 4 satélites, e posterior estimar sua posição no mesmo referencial geocêntrico.

Para que isso ocorra, alguns conceitos devem ser apresentados já com a objetivação do cálculo final.

3.1 A MENSAGEM DOS SATÉLITES NAVSTAR-GPS

Conforme apresenta Monico (2007, p. 46), a mensagem de navegação, que fornece as informações básicas para o cálculo das posições dos satélites, contém parâmetros orbitais (elementos keplerianos e suas variações), dados sobre a correção da propagação na atmosfera, parâmetros para a correção do erro dos relógios dos satélites NAVSTAR-GPS, saúde dos satélites, etc.

A estrutura da mensagem de navegação, com duração de 30 segundos, contém 1500 bits, divididos em 5 subquadros, de 6s de duração, contendo palavras de 30 bits.

Tabela 5 - Estrutura da mensagem de navegação

Subquadro	Conteúdo
Subquadro 1	Coeficientes para correção do relógio do satélite. Número da semana NAVSTAR-GPS e saúde do satélite. Idade dos dados.
Subquadro 2	Parâmetros orbitais.
Subquadro 3	Parâmetros orbitais continuação.
Subquadro 4	Almanaque para satélites. Modelo da ionosfera e diferença de tempo NAVSTAR-GPS-UTC Informação do AS (Anti-spoof flag) e configuração de 32 satélites. Saúde dos satélites. Mensagens especiais.
Subquadro 5	Almanaque dos satélites. Saúde dos satélites.

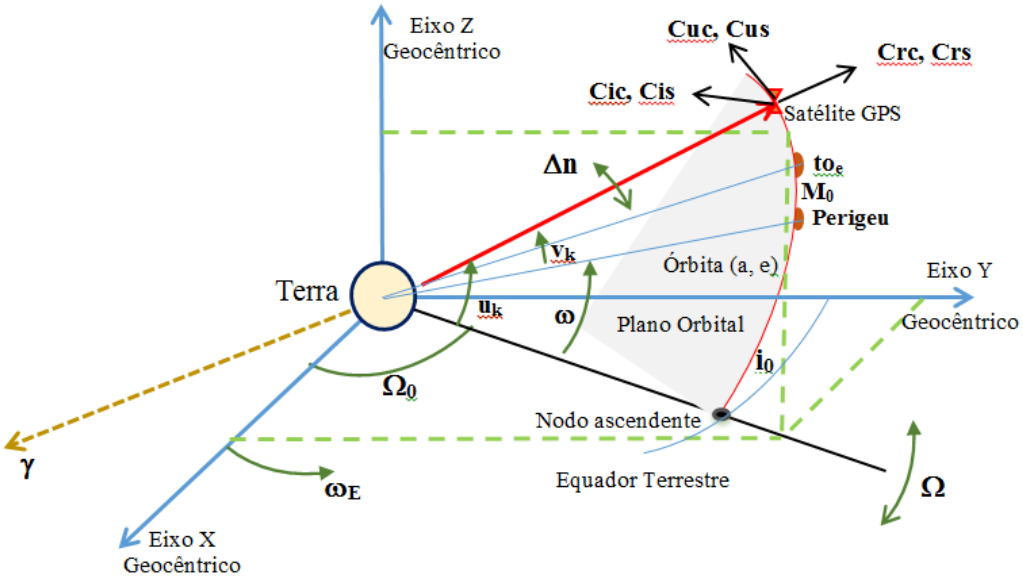
Fonte: Monico, 2007, p. 50, adaptada pelo autor.

Monico esclarece: “O almanaque dos satélites proporciona as informações necessárias para calcular posições aproximadas dos satélites, mesmo daqueles que não estão sendo rastreados” (MONICO, 2007, p. 51).

3.1.1 Parâmetros da órbita de um satélite NAVSTAR-GPS

A figura 8 apresenta a órbita de um satélite em um sistema geocêntrico, apresentando as informações pertinentes da mensagem NAVSTAR-GPS.

Figura 8 - Mensagem NAVSTAR-GPS - ilustração dos parâmetros nela contidos



Fonte: Imagem de Monico (2007, p. 164), adaptada pelo autor.

3.1.2 Informações transmitidas pelo satélite NAVSTAR-GPS

A tabela 6 apresenta as informações transmitidas por um satélite NAVSTAR-GPS sobre sua posição e condições.

Tabela 6 - Informações transmitidas no Sistema NAVSTAR-GPS

Referência	Símbolo	Unidade	Descrição
Parâmetros de Tempo	to_e	s	Tempo de origem das efemérides.
	to_c	s	Tempo de origem do relógio.
	a_0, a_1, a_2	s, s/s, s/s^2	Coeficientes do polinômio para correção dos relógios dos satélites.
Elementos Keplerianos	$(a)^{1/2}$	$m^{1/2}$	Raiz quadrada do semieixo maior.
	e	Sem unidade	Excentricidade da órbita.
	i_0	radianos	Inclinação da órbita do to_e.
	Ω_0	radianos	Ascensão reta do nodo ascendente ao to_e.
	ω	radianos	Argumento do perigeu.
	M_0	radianos	Anomalia média no to_e.
Parâmetros perturbadores	Δn	radianos/s	Correção ao movimento médio calculado.
	Ω	radianos/s	Variação temporal da ascensão reta.
	i	radianos/s	Variação temporal da inclinação.
	C_{us}	radianos	Amplitude do termo harmônico seno de correção do argumento de latitude.
	C_{uc}	radianos	Amplitude do termo harmônico cosseno de correção do argumento de latitude.
	C_{is}	radianos	Amplitude do termo harmônico seno de correção da inclinação da órbita.
	C_{ic}	radianos	Amplitude do termo harmônico cosseno de correção da inclinação da órbita.
	C_{rs}	m	Amplitude do termo harmônico seno de correção do raio vetor.
	C_{rc}	m	Amplitude do termo harmônico cosseno de correção do raio vetor.

Fonte: Silva, 2008, p. 24, adaptada pelo autor.

3.1.3 Cálculo do horário Sistema - NAVSTAR-GPS da transmissão do sinal

A informação do horário de transmissão do sinal por um satélite NAVSTAR-GPS deve ser ajustada para o Sistema Temporal TAI ou tempo do Sistema NAVSTAR-GPS (t_{GPS}) , ocorrendo esse cálculo no sistema de processamento do satélite usuário.

Os passos para este cálculo são apresentados por Monico (2007, p. 165)

$$t_{GPS}^{s} = t_s - dt_s \quad (3.1)$$

Onde:

t_s – é o valor indicado pelo relógio atômico embarcado no satélite.

dt_s – erro do relógio em relação ao tempo NAVSTAR-GPS.

Os parâmetros para correção deste valor são a_0, a_1, a_2 e to_c, também informados pelo satélite, portanto:

$$dt^s = a_0 + a_1\left(t_s^t - t_{0_c}\right) + a_2\left(t_s^t - t_{0_c}\right)^2 \quad (3.2)$$

Os parâmetros são calculados pelo centro de controle NAVSTAR-GPS e transmitidos a cada satélite, permitindo o cálculo do tempo NAVSTAR-GPS de transmissão do sinal.

3.1.4 Cálculo da posição do satélite NAVSTAR-GPS no instante da transmissão do sinal

O satélite usuário calcula a posição do satélite NAVSTAR-GPS (x^k, y^k, z^k) no sistema de coordenadas WGS 84, para um determinado instante de tempo NAVSTAR-GPS.

Conforme Monico (2007, p. 165), para este cálculo deve-se obter o tempo Δt_k, que representa o intervalo de tempo transcorrido desde a época de origem das efemérides to_e, isto é:

$$\Delta t_k = t_{GPS}^t - t_{o_e} \quad (3.3)$$

A posição do satélite NAVSTAR-GPS utilizada pelo plano orbital, ou seja, pelas coordenadas x_k e y_k, conforme apresentado na figura 8;

$$\begin{aligned} x_k &= r_k\, cos(u_k) \\ y_k &= r_k\, sen(u_k) \\ u_k &= v_k + \omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

Onde ω é conhecido, faltando calcular v_k.

Monico (2007, p. 167) continua. Pela terceira lei de Kepler:

$$cos(v_k) = \frac{cos(E_k) - e)}{1 - e\, cos(E_k)} \quad (3.5)$$

$$sen(v_k) = \frac{sen(E_k)\sqrt{1 - e^2}}{1 - e\, cos(E_k)} \quad (3.6)$$

Onde:

$$E_k = \bar{M}_k + e\, sen(E_k) \tag{3.7}$$

O valor de E_k, como explica Monico (2007), deve ser solucionada interativamente. Em geral apenas uma repetição é necessária, com valores entre 0 e 360 graus.

Calculado pelo conhecimento da anormalidade E_0 e o tempo transcorrido deste to_e, como apresentado na literatura citada, a solução deve ser feita por interação.

Pode-se então calcular u_k e obter a posição do satélite NAVSTAR-GPS no seu plano orbital pelas equações 3.4.

E finalmente, pela equação da seção 2.4.4, temos as coordenadas do satélite NAVSTAR-GPS no sistema geocêntrico (MONICO, 2007, p. 169).

$$\begin{aligned} x^s &= x_k\, cos(\omega) - y_k sen(\omega)\, cos(\alpha) \\ y^s &= x_k\, sen(\omega) + y_k\, cos(\omega)\, cos(\alpha) \\ z^s &= y_k\, sen(\alpha) \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2 ESTIMATIVA DA POSIÇÃO DO SATÉLITE USUÁRIO

A determinação da posição do satélite usuário, objeto deste trabalho, é um processo estocástico pelas incertezas envolvendo as medições e por representar um conjunto de dados não contínuos, necessitando o uso de um estimador.

Mog (1995, p. 2) explica que "os resultados de determinação de órbitas são apresentados em vetor de estado e elementos keplerianos, juntamente com suas matrizes de covariâncias".

3.2.1 Cálculo do momento de recepção do sinal no Sistema Temporal NAVSTAR-GPS

O relógio do satélite usuário não tem qualquer sincronismo com o tempo NAVSTAR-GPS, assim haverá um ajuste necessário para determinar o tempo NAVSTAR-

GPS que ocorreu a recepção do sinal e compará-lo com o tempo de transmissão do satélite NAVSTAR-GPS.

$$t_{GPS}^{r} = t_r - dt_r \quad (3.9)$$

Onde:

t_r – horário do relógio do satélite usuário.

dt_r – erro do relógio do satélite usuário.

3.2.2 Intervalo de tempo entre a transmissão e a recepção do sinal

O intervalo de tempo transcorrido é igual o momento da recepção, menos o da transmissão, assim:

$$\Delta t_r^t = t_{GPS}^{r} - t_{GPS}^{t} \quad (3.10)$$

O tempo NAVSTAR-GPS do instante da transmissão é conhecido, ver seção 3.1.3, portanto:

$$\Delta t_r^t = t_r - dt_r - t_{GPS}^{t} \quad (3.11)$$

Onde:

t_r – tempo no relógio do receptor, conhecido.

dt_r – incógnita a ser estimada, juntamente com as coordenadas do satélite usuário.

3.2.3 Modelagem da pseudodistância entre os satélites NAVSTAR-GPS e o satélite usuário

Conhecido o intervalo de tempo, pela seção anterior, e multiplicando-o pela velocidade da luz, encontrar-se-ia a distância entre os dois satélites, porém, existe uma

incerteza que é a diferença do relógio do satélite usuário em relação ao tempo NAVSTAR-GPS.

Assim, denomina-se pseudodistância à distância calculada desta forma.

Silva (2015, p. 34) apresenta o conceito de pseudodistância e a equação completa que permite sua determinação.

Adaptando aos termos usados neste trabalho "a medida da pseudodistância é obtida a partir da correlação entre o código gerado pelo satélite NAVSTAR-GPS no instante da transmissão (t_t) e sua réplica gerada no receptor, no satélite usuário, no instante da recepção (t_r)".

$$PD = \rho_{real} + c(\delta t_r - \delta t_t) + I_r + T_r + Orb_{GPS} + b_r + b_{GPS} + \upsilon_{PD} \quad (3.12)$$

Onde:

PD - pseudodistância.

ρ_{real} – distância geométrica entre os satélites.

$c(\delta t_r - \delta t_t)$ – erro da distância produzida pelo erro dos relógios.

I_r – atraso do sinal devido ao efeito ionosférico.

T_r – atraso do sinal devido ao efeito troposférico.

$Orb_{NAVSTAR\text{-}GPS}$ – erro da órbita do satélite NAVSTAR-GPS.

br – atraso devido ao hardware do receptor do satélite usuário.

$b_{NAVSTAR\text{-}GPS}$ – atraso devido ao hardware do transmissor.

υ_{PD} – efeitos aleatórios e não modelados.

Como observado acima, podem ocorrer efeitos que alteram o tempo de propagação do sinal que, por conseguinte, causam erros no cálculo da pseudodistância.

Os efeitos troposféricos podem ser considerados desprezíveis, pois os satélites estão em órbita acima da troposfera.

Os erros na órbita dos satélites NAVSTAR-GPS são analisados e seus parâmetros enviados para o satélite NAVSTAR-GPS, que os retransmite ao satélite usuário e pode compensá-los, são os parâmetros Cus, Cuc, Cis, Cic, Crs e Crc apresentados na seção 3.1.2.

O erro devido ao hardware do transmissor também é contemplado pelos parâmetros de correção do relógio do satélite NAVSTAR-GPS a_0, a_1 e a_2 vistos na seção 3.1.2.

Os efeitos da ionosfera são função da ionização desta pelos raios solares, principalmente, que podem também ser calculados a partir das informações das efemérides.

MOG (1195, p. 44) explica: “a mensagem de navegação do satélite NAVSTAR-GPS contém oito coeficientes (α_1....α_4, β_1 .. β_4), os quais são utilizados em um polinômio de terceiro grau para o cálculo da correção ionosférica da pseudodistância”.

Podemos também desprezar o υ_{PD} que é pequeno e será incorporado ao desvio do relógio, assim como o erro do hardware do satélite usuário.

Finalizamos com a seguinte equação.

$$PD = \rho_{real} + c(\delta t_r - \delta t_t) + I_r + Orb_{GPS} + b_{GPS} \quad (3.13)$$

E para a equação da distância real temos:

$$\rho_{real} = \sqrt{(x^s - X_r)^2 + (y^s - Y_r)^2 + (z^s - Z_r)^2} \quad (3,14)$$

Substituindo na equação (3.13).

$$PD = \sqrt{(x^s - X_r)^2 + (y^s - Y_r)^2 + (z^s - Z_r)^2} + c(\delta t_r - \delta t_t) + I_r + Orb_{GPS} + b_{GPS} \quad (3.15)$$

Onde as incógnitas são:

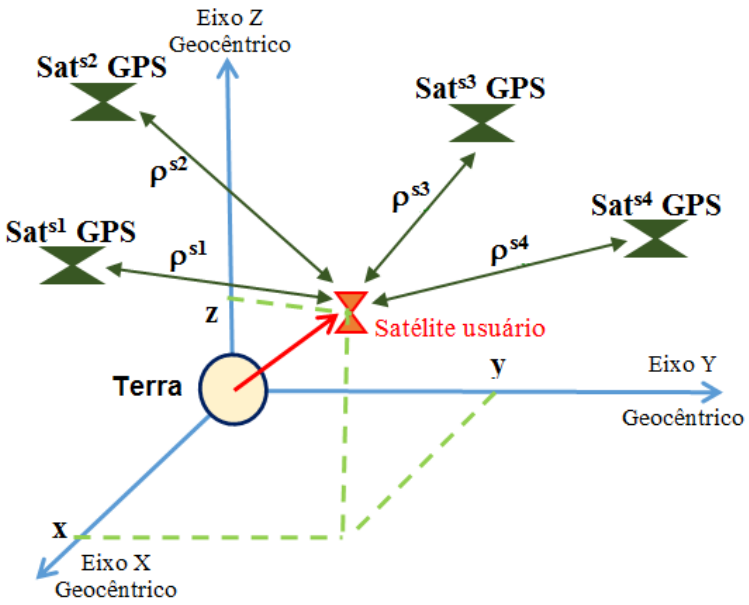
a) Coordenadas do satélite usuário X_r, Y_r e Z_r.
b) Erro do relógio do satélite usuário e demais pequenos erros δt_r.

3.2.4 Modelagem final

Para resolver o posicionamento e erro do relógio do satélite usuário, são necessários os sinais de 4 satélites NAVSTAR-GPS, conforme mostra a figura 9.

Quando mais de 4 satélites estão no horizonte do receptor, todos são utilizados para definir o melhor conjunto de 4 equações possíveis.

Figura 9 – Recepção dos sinais de 4 satélites NAVSTAR-GPS



Fonte: Almeida (2011, p. 13), adaptada pelo autor.

Conforme Monico (2007, p. 186), tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} PD_r^{s1} &= \rho_r^{s1} + c(dt_r - dt^{s1}) + I_r^{s1} \\ PD_r^{s2} &= \rho_r^{s2} + c(dt_r - dt^{s2}) + I_r^{s2} \\ PD_r^{s3} &= \rho_r^{s3} + c(dt_r - dt^{s3}) + I_r^{s3} \\ PD_r^{s4} &= \rho_r^{s4} + c(dt_r - dt^{s4}) + I_r^{s4} \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Onde:

$$\begin{aligned} (\rho_r^{s1})^2 &= (x^{s1} - x)^2 + (y^{s1} - y)^2 + (z^{s1} - z)^2 \\ (\rho_r^{s2})^2 &= (x^{s2} - x)^2 + (y^{s2} - y)^2 + (z^{s2} - z)^2 \\ (\rho_r^{s3})^2 &= (x^{s3} - x)^2 + (y^{s3} - y)^2 + (z^{s3} - z)^2 \end{aligned} \qquad (3,17)$$

A solução é realizada pelo sistema de processamento embarcado no satélite usuário com auxílio de um estimador dinâmico, que processa as informações à medida que são recebidas, a literatura pesquisada indica o uso do Filtro de Kalman *Uscented* (PARDAL, 2013).

O filtro de Kalman *Uscented* ajusta os dados recebidos para uma função de estimação especificada a cada recepção de um novo dado. O valor encontrado passa a ser o

valor inicial para o próximo dado, assim, acelera o processamento e reduz a necessidade de armazenamento dos dados.

Pardal (2013, p.398) apresenta com detalhes esse estimador, ver seção 2.4.5, que resulta no seguinte cálculo, indicando somente o cálculo de uma variável, pois as demais seguem o mesmo raciocínio:

Primeiro define-se a função que será usada: u = f(x)

Calcula-se o ganho de Kalman.

$$K = P^{xu}(P^{vv})^{-1}$$

$$x_{t+1} = x_t + K(u_t - \bar{u}_{t)}$$

Onde:

x_{t+1}= novo valor de x.

x_t – valor obtido na interação anterior.

u_t – valor da função de aproximação para a interação anterior.

$\bar{u}$ – valor médio anterior da função de aproximação.

P^{vv} – matriz inovação.

P^{uv} – matriz correlação.

As interações se sucedem, permitindo que o satélite avalie sua posição em relação à sua órbita, bem como seu vetor velocidade, pois tem o vetor posição entre intervalos de tempo; da mesma forma, se necessário, a sua aceleração.

3.3 SÍNTESE SOBRE A POSIÇÃO DO SATÉLITE USUÁRIO

O posicionamento do satélite usuário decorre do recebimento das informações dos Satélites NAVSTAR-GPS, são necessárias as informações de quatro satélites NAVSTAR-GPS.

Tais informações são recebidas em um formato de dados “crus”, ou seja, dados que necessitam de correções. Essas correções também são enviadas pelos satélites NAVSTAR-GPS. O satélite usuário recebe a informação da data/horário e os parâmetros de correção; os dados da órbita e suas correções, os dados das efemérides astronômicas semanais e dados da ionosfera.

Tendo todas as informações que precisa, o computador embarcado calcula o horário e posicionamento de cada satélite NAVSTAR-GPS e, na sequência aplica a modelagem apresentada nas equações 3.16 e 3.17 para estimar sua posição e “erro” do seu relógio. Para isto, utiliza um estimador como o filtro de Kalman de forma interativa, ou seja, em tempo real sendo que cada posição calculada passa a ser a condição inicial para a próxima interação.

Importante acrescentar que os cálculos seguem uma programação (algoritmo) pré-carregado nos computadores do satélite usuário, e são enviados para os controles de aeronavegação para eventuais correções na sua órbita, se necessária.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização do Sistema de Posicionamento NAVSTAR-GPS é uma forma segura e viável no controle do posicionamento e atitude dos satélites artificiais terrestres.

A modelagem desta questão envolve várias áreas do conhecimento como astronomia, navegação, geodésia, física, eletrônica, computação e matemática. Sendo assim, pessoas com formação em matemática, podem compor uma equipe multidisciplinar envolvida no controle de órbitas e atitudes de satélites artificiais terrestres, tanto para o desenvolvimento de algoritmos de navegação, como para análise de dados recebidos e processados, ou ainda, para pesquisa dos efeitos produzidos pelas efemérides astronômicas.

Na literatura pesquisada, verificou-se que a modelagem das órbitas contém elementos matemáticos e físicos básicos, que são o objeto deste trabalho, e que as áreas principais da matemática envolvidas são a geometria analítica, a álgebra linear, a inferência estatística e a análise estocástica.

O sistema de referência utilizado tem origem em um dos focos da elipse – que representa a órbita do satélite – com coordenadas x, y, z. A origem do sistema é a intersecção do eixo de rotação terrestre e o plano equatorial; a direção do eixo X é o equinócio de primavera no hemisfério norte; o eixo Y forma com o eixo X um ângulo de 90 graus a leste, no mesmo plano equatorial. O eixo Z equivale ao eixo de rotação da Terra no sentido do Polo Norte.

A órbita de um corpo é definida pelos elementos Keplerianos, que contém as características da elipse e da intersecção do plano orbital com o plano equatorial.

As principais leis da física aplicadas neste trabalho são a Lei Gravitacional de Newton e os postulados de Einstein na Teoria da Relatividade Restrita, onde a velocidade de transmissão da luz independe do movimento da sua fonte e, o conceito de sistema referencial inercial.

A identificação da posição do satélite é feita através da obtenção da distância entre a sua posição no sistema referencial inercial, em relação a três outras posições conhecidas (Satélites NAVSTAR-GPS), formando um sistema de três equações e três incógnitas.

Para a definição das distâncias, utiliza-se o tempo de propagação do sinal entre o satélite NAVSTAR-GPS e o satélite usuário, multiplicando-o pela velocidade da luz. No entanto, o tempo de propagação corresponde ao intervalo entre a emissão, data/horário

conhecido, e a recepção horário/tempo do relógio embarcado no satélite usuário. Porém, os relógios dos satélites NAVSTAR-GPS e do satélite usuário não são sincronizados, sendo necessária a introdução de uma quarta variável à modelagem – um quarto satélite NAVSTAR-GPS –, na determinação das distâncias, agora denominadas pseudodistâncias, resolvendo assim o sistema de equações.

Para a modelagem apresentada, todos os objetivos propostos foram atingidos, possibilitando ao leitor uma ampliação dos elementos matemáticos e físicos envolvidos, bem como, fornecendo uma base para a ampliação do conhecimento sobre as órbitas e atitudes dos satélites artificiais terrestres, no atendimento das suas finalidades.

Conforme pesquisas realizadas, o posicionamento e controle de satélites artificiais terrestres e o Sistema de Posicionamento Global – NAVSTAR-GPS se desmembram em diversos ramos, iniciando com a modelagem aqui apresentada, até a análise de posicionamento rotacional dos satélites e o estudo das diversas influências astronômicas como atração gravitacional luni-solar, movimento orbital da Terra, etc.

Futuros trabalhos poderão ampliar a modelagem apresentada com a inclusão de outras influências, como indicadas no parágrafo anterior; bem como para os outros sistemas de posicionamento que forma o *GNSS - Global Navigation Satellite System*, como os sistemas Europeu, Russo, Indiano, Chinês.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Jorge Virgilio de, Oliveira Vitor N Braz. **Algoritmo de localização assistida por GPS.** 2011: 19f. Relatório Final de Iniciação Científica. CNPq- 2011.

EDISON, Darvin. Determinação de órbita dos satélites Navstar – GPS. 1195. 73f**. Dissertação para obtenção Grau de Mestre** – Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 1995.

FABRI, Sergio Mauri. **Determinação de atitude de satélites artificiais estabilizados por rotação com o uso do GPS**. 1997, 162f. Tese requisito para obtenção do Título de Doutor em Ciências Geodésicas – Departamento de Geociências da Universidade Federal do Paraná. Curitiba 1997.

GEMAEL, Camil; ANDRADE, José Bittencourt de. **Geodésia Celeste**. Curitiba: Editora UFPR. 2003.

GEMAEL, Camil, MACHADO, Álvaro M L, WANDRESEN, Romualdo. **Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas** 2ª Edição. Curitiba:Editora UFPR. 2015.

GOMES, Vivian Martins. **Determinação de órbita de satélites artificiais em tempo real através da solução de navegação do GPS**. 2008. 118f. Dissertação de Mestrado – Curso de Pós-graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais INPE, São José dos Campos, SP 2008.

KOCK, Kelser de Souza. **Tópicos de Física Moderna: livro didático**. – Universidade do Sul de Santa Catarina, Palhoça: Unisul Virtual 2016.

MANSUR, Gustavo B; FERREIRA, Luiz D D. **Error behavior of atomic clocks aboard GPS satellites.** Boletim de Ciências Geodésicas, vol. 25 nr 4 Dezembro 2019 – Curitiba. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1982-21702019000400204&tlng=en>. Acesso em 17/02/2020.

MOG, Darvin Edison. **Determinação de Órbita dos Satélites NAVSTAR-GPS**. Dissertação para obtenção do Grau de Mestre no curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1995. Universidade Federal do Paraná. Curitiba – PR. Endereço eletrônico <https://www.acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/34653/D%20-%20DARVIN%20EDISON%20MOG.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 10/09/2019.

MONICO, João F. Galera. **Posicionamento pelo GNSS: Descrição, fundamentos e aplicações** 2ª. Edição. São Paulo: Fundação Editora da UNESP. 2007

PARDAL, Paula C P M; Kuga, Helio K; Moraes, Rodolpho V. **Analyzing the unscented Kalman filter robustness for orbit determination through Global Positioning System signals**. Journal Aerospace Technology and Management vol. 5 nr. 4 2013. Disponível em < http://www.jatm.com.br/ojs/index.php/jatm/article/view/252>. Acesso em 17/02/2020.

PARDAL, Paula C P M; Kuga, Helio K; Moraes, Rodolpho V. **Orbit determination modeling analysis by GPS including pertubations due to geopotential coefficients of high degree and order, solar radiation pressure and luni-solar attractions.** Journal Aerospace Technology and Management vol. 4 nr. 4 Outubro-Dezembro 2012. Disponível em < http://www.jatm.com.br/papers/vol3_n1/JATMv3n1_p79-86_Orbit_determination_modeling_analysis_by_GPS_including_perturbations_due_to_geopotential_coefficients_of_high_degree_and_order_solar_radiation_pressure_and_luni-solar_attraction.html>. Acesso em 17/02/2020.

PARMA, Gabriel O C. **Inferência Estatística** – Universidade do Sul de Santa Catarina, Palhoça: Unisul Virtual, 2015.

PRADO, Antônio F B Almeida. **Orbital maneuvers between the Lagragian points and the primaries in the Earth-Sun System**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Enginnering vol. 28 nr. 2. Rio de Janeiro Abril/Junho de 2006. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-58782006000200001&lng=en&nrm=iso&tlng=en>. Acesso em 17/02/2020.

SCHULZ, Walkiria. **Optimal space maneuvers in three dimensions**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering volume 28 nr. 4 – Rio de Janeiro Outubro/Dezembro de 2006. Disponível em

<http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-58782006000400001&lng=en&nrm=iso&tlng=en>. Acesso em 17/02/2020.

SELHORST, Mário; HOBOLD, Carlos Henrique**. Geometria Analítica** 4ª Edição – Universidade do Sul de Santa Catarina, Palhoça: Unisul Virtual, 2011.

SILVA, Emanoel Gomes de Souza. **Avaliação da qualidade do posicionamento por satélite com integração GPS/GLONASS. 2015**. 119f. Dissertação de Mestrado – Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife 2015.

SILVA, Kelen R S; WAGNER, Christian**. Noções de Álgebra Linear** – Universidade do Sul de Santa Catarina, 2016.

SPIEGEL, Murray R. **Mathematical Handbook of Formulas and Tables**. McGraw-Hill Book Company. 1968.

TIMBÓ, Marcos A. **Levantamentos através do sistema GPS**, Material didático. Departamento de Cartografia da UFMG, 2000. Disponível em <http://www.csr.ufmg.br/geoprocessamento/publicacoes/Lev_gps.pdf>. Acesso em 02/03/2020.

TIPLER, Paul A. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Rio de Janeiro – RJ: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2016.