UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

FERNANDA MEDEIROS ALVES BESOUCHET MARTINS

O NÚMERO COMO SIGNO
RELATOS DE UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DE FRAÇÕES A PARTIR DAS TEORIAS SÓCIO-INTERACIONISTA E DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

PALHOÇA

2012

FERNANDA MEDEIROS ALVES BESOUCHET MARTINS

O NÚMERO COMO SIGNO
RELATOS DE UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DE FRAÇÕES A PARTIR DAS TEORIAS SÓCIO-INTERACIONISTA E DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciências da Linguagem.

Orientador: Prof. Aldo Litaiff, Dr.

Palhoça

2012

FERNANDA MEDEIROS ALVES BESOUCHET MARTINS

O NÚMERO COMO SIGNO: RELATOS DE UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DE FRAÇÕES A PARTIR DAS TEORIAS SÓCIO-INTERACIONISTA E DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Esta dissertação foi julgada adequada à obtenção do título de Mestre em Ciências da Linguagem e aprovada em sua forma final pelo Curso de Mestrado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Palhoça, 11 de dezembro de 2012.

Aldo Litaiff

Professor e orientador Aldo Litaiff, Doutor

Universidade do Sul de Santa Catarina

Cassiano Ogliari

Professor Cassiano Roberto Nascimento Ogliari, Doutor

Secretaria de Estado da Educação do Paraná

Professora Nádia Régia Maffi Neckel, Doutora

Universidade do Sul de Santa Catarina

M34 Martins, Fernanda Medeiros Alves Besouchet, 1974-
O número como signo: relatos de uma experiência de ensino de frações a partir das teorias sócio-interacionista e dos registros de representações semióticas. – 2012.
155 f. : il. Color. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Pós-graduação em Ciências da Linguagem.
Orientação: Prof. Dr. Aldo Litaiff

1. Semiótica - Matemática. 2. Matemática (Primeiro Grau). 3. Frações. I. Litaiff, Aldo. II. Universidade do Sul de Santa Catarina. III. Título.

CDD (21. ed.) 372.7

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária da Unisul

Aos meus amados pais, por confiarem em mim, por terem me dado a vida que eu tive, o apoio durante os meus estudos e pelos valores ensinados que me possibilitaram ser quem sou.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer a essa força da natureza que muitos chamam de Deus, por ter me feito forte em vários momentos desta caminhada, nos momentos em que mais precisei, quando tudo parecia estar regredindo. Aprendi muito mais do que fui capaz de imaginar. Obrigada!

Aos meus pais, Chicão e Glória, queridos, amados, minha força motriz, por se esforçarem tanto em me ajudar, por tentarem compreender os momentos pelos quais minha presença foi ausente, pelos dias em que não pude me sentar no sofá da sala para conversar sobre coisas do dia-a-dia, por cuidarem de mim e da minha família com tanta dedicação e tanto carinho, por me fazerem sentir menos culpada, por me protegerem, por me fazerem companhia sempre. Esse trabalho tem a marca das mãos e do coração de vocês. Sem vocês não teria sido possível. Obrigada, muito obrigada, do fundo do meu coração.!

Minha família: Ao meu marido e companheiro Alex, minha gratidão plena! Ao seu modo, sempre me apoiou, em todos os sentidos. Foram anos difíceis, sob vários aspectos, mas a nossa determinação e o nosso amor falaram mais alto. Muito obrigada, meu amor! À minha filha Luisa, minha menina companheira, minha parceira amada, que passou dois anos de sua vida entendendo as necessidades da mamãe. Linda, querida, carinhosa, responsável, paciente e madura. Com seus oito aninhos de idade me deu muitas lições de vida. Muito obrigada, minha filha, meu grande amor. Ao João Pedro, por seu sorriso lindo e contagiante, que com apenas um aninho de vida me fez rir e brincar em momentos que eu jamais conseguiria. Obrigada meu neneco lindo, amor da mamãe.

À Nelma Besouchet Martins, minha sogra e grande admiradora do meu trabalho, por todo o seu carinho e colaboração. Obrigada!

Ao meu orientador, professor Aldo Litaiff, por me acolher quando perdi minha orientadora, por ter sido tão paciente nos momentos em que eu me encontrava ansiosa e querendo abraçar o mundo, falar de tudo e ao mesmo tempo não conseguir falar de nada, por me ajudar a compreender o conhecimento matemático por um viés até então desconhecido, por me ter feito viajar através da Filosofia da Linguagem, por ter me ensinado a ver um pouco do que há por trás da Semiótica peirceana, por ter me desafiado quanto ao que eu acreditava conhecer sobre representações semióticas, por ter dito o momento em que eu havia encontrado luz

no fim do túnel – o *número como signo*, por ter acreditado no meu potencial, pelo seu esforço em me ajudar a realizar minha defesa em tempo hábil, por me incentivar à seguir em frente. Minha eterna gratidão!

Agradeço à professora Rosângela Morello, minha primeira orientadora, grande amiga, por ter acreditado em mim e me acolhido tão docemente. Por valorizar minha paixão por ensinar matemática e meu desejo por mudanças. Minha admiração! Muito obrigada!

Agradeço imensamente ao professor Cassiano Ogliari, meu orientador da pós-graduação, pessoa na qual me espelho muito, por ter gentilmente aceitado o convite para participar da banca de defesa da minha dissertação.

À minha grande e querida amiga e irmã, Karine Ramos, por ter me incentivado a começar tudo isso e acompanhar a minha jornada, por sua amizade e seus conselhos, por cuidar do meu filho como se fosse seu e dar a ele tanto carinho, especialmente nos momentos em que estive mais ausente. Kaká, muito obrigada, querida!

Aos alunos da turma 2010/2 do curso de Mestrado em Ciências da Linguagem, obrigada pelo carinho e pela parceria nas aulas, no CELSUL, no SIMFOP e em todos os momentos que passamos juntos, em especial minha querida amiga Mary Neusa, companheira inseparável nos estudos semióticos.

À equipe do curso de Pedagogia da UDESC/CEAD, em especial meus amigos Jussara Brigo, André Ary Leonel e Carla Peres pela compreensão, pela colaboração e pelo apoio que me deram em todos os momentos. Vocês foram simplesmente maravilhosos e contribuíram muito para essa conquista.

Aos meus alunos do 5º ano da Escola Dinâmica Ambiental, por me proporcionarem momentos maravilhosos de ensinar e aprender a cada aula, por serem tão maduros e dedicados, por terem participado ativamente como sujeitos da minha pesquisa. Meus alunos, minha grande inspiração. A existência desse trabalho se deve a vocês. Queridos, vocês foram sensacionais! Muito obrigada, galerinha!

Agradeço a todos os professores do Programa de Pós Graduação em Ciências da Linguagem da Unisul Campus Pedra Branca, pelos conhecimentos compartilhados e por terem me dado abertura para a realização da minha pesquisa.

À secretaria do PPGCL da Pedra Branca, Edna Mazon, por sempre me enviar e-mails relembrando os meus prazos, me ajudando a dar conta da minha agenda acadêmica.

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”
(Albert Einstein)

“O saber que não vem da experiência não é realmente saber”
(Liev S. Vigotskii)

“A linguagem é a característica mais importante da humanidade.”
(Aldo Litaiff)

RESUMO

Essa dissertação busca aplicar e avaliar os resultados de estratégias e atividades lúdicas e significativas desenvolvidas para o ensino-aprendizagem de frações, baseadas na teoria sócio-interacionista de Liev Vigotskii e na teoria das conversões de registros de representações semióticas de Raymond Duval. Para dar conta desses objetivos, essa dissertação discorre, num primeiro momento, sobre as minhas trajetórias escolar, acadêmica e profissional que justificam a motivação para a realização da mesma. Em seguida é apresentada uma análise sobre o saber matemático e o ensino de matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Posteriormente são apresentados estudos sobre as teorias supracitadas. A partir daí descrevem-se as estratégias destinadas ao ensino de frações sob as perspectivas destas teorias. Por fim, todas as estratégias foram aplicadas de forma exploratória com duas turmas de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental da Escola Dinâmica, em Florianópolis, Santa Catarina. Os resultados da aplicação das estratégias desenvolvidas apontam para a conclusão de que o ensino de matemática, em especial de frações, baseado nas teorias apresentadas é mais significativo do que o ensino tradicional de conceitos e aplicações, pois possibilita que a criança compreenda todos os possíveis significados do objeto estudado, construindo assim o seu verdadeiro conhecimento.

Palavras-chave: Matemática. Sócio-interacionismo. Registros de representações semióticas. Ensino de Frações.

ABSTRACT

This dissertation aims to emplament and evaluate the results of strategies and play activities and significant developed for teaching and learning fractions, based on the theory of social interaction Lev Vigotskii and theory of conversions from records of semiotic representations of Raymond Duval. To realize these goals, this dissertation discusses, at first, about my school careers, academic and professional justifying the motivation to perform the same. Then an analysis is presented on the mathematical knowledge and teaching of mathematics in the early grades of elementary school. Later studies are presented on the above theories. From then describe the strategies for teaching fractions from the perspectives of these theories. Finally, all strategies were applied in an exploratory way with two classes of students in the 5th grade of elementary school, Escola Dinâmica, in Florianópolis, Santa Catarina. The results of applying the strategies developed point to the conclusion that the teaching of math, especially fractions, based on the theories presented is more significant than the traditional teaching of concepts and applications, as it allows the child to understand all the possible meanings the studied object, thereby building your real knowledge.

Keywords: Math. Socio-interactionism. Records of semiotic representations. Teaching Fractions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Quando cheguei na 5ª série do então 1º grau, minha relação com meu professor de matemática não foi das melhores, justo no ano em que comecei a aprender frações (ou pelo menos tentar), além de ser uma série que marca uma importante passagem na vida de qualquer adolescente. Fiquei em recuperação no primeiro bimestre. Sem ter como me ajudar, meus pais logo trataram de conseguir uma professora particular para me acompanhar por um tempo, que simplesmente me acompanhou durante os quatro anos do 1º grau.

Não consigo precisar exatamente a data, mas acredito que só por volta do ano de 1994, quando já era aluna do curso de licenciatura plena em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro e também já lecionava, comecei a perceber que a matemática é um tipo de mundo à parte, onde vivem formas retas e curvas que se combinam ou não, entidades que separadas são umas e juntas são outras completamente diferentes, de coisas que vistas bem de perto nos dão uma impressão e quando vistas bem de longe nos dão outra impressão. É um universo paralelo onde as ações ocorrem e perpassam em espaços muito amplos, se pensarmos, por exemplo, que entre 1 e 2 existem infinitos números, o que faz parecer um mundo muito louco. Entretanto é um mundo que tem uma beleza especial, acessível a qualquer pessoa.

Mas esse universo tem algumas características fantásticas. Uma delas é que não conseguimos ver nada quando entramos nele pela primeira vez. E quando conseguimos ver alguma coisa, é sinal que nós mesmos a construímos. Outra característica interessante é que vivemos paralelamente com esse universo à parte e, convenhamos, não é possível viver sem ele. Mas muitos entraram tão profundamente nesse universo que enlouqueceram e até perderam a vida por ele. Por não conseguir construir um triângulo retângulo com três lados inteiros e iguais, Pitágoras viu sua teoria dos números inteiros cair por terra e enlouqueceu. Na tentativa de finalizar um raciocínio matemático, Arquimedes desobedeceu uma ordem dos soldados romanos e foi decaptado antes de terminar. Felizmente, nenhum destes foi o meu caso, pois fui levada a perceber que à medida que vamos construindo conhecimentos para preencher esse mundo matemático, mais claro ele vai se tornando. E como num passe de mágica, passamos a entender como é possível ver esse mundo tão claramente.

Foi assim que me tornei professora de matemática. Porque muitos anos depois desse período obscuro pelo qual passei na adolescência e na juventude, consegui perceber e entender que, apesar de ser um universo à parte, a matemática é um universo possível de se conhecer e conviver, necessário, que é possível entrar e sair dele, construir coisas e transformá-las em coisas úteis e, por vezes, divertidas.

Espero que esse trabalho consiga atingir o maior número de leitores possível, em especial professores que ensinam matemática, ou mesmo pais e outros interessados, de modo que eles possam entender e mostrar às crianças com quem convivem a ideia de que apesar de ser a matemática um universo à parte, ele é um universo vivo e real.

1. INTRODUÇÃO

> "Sabe-se que a criança chega à escola com muitas ideias e familiaridade com inúmeros conceitos que serão seus objetos de estudos. Mas conhecemos quase nada sobre o que se passa com a aquisição da linguagem matemática antes de a criança ser iniciada na Matemática. O que normalmente o professor de Matemática faz é ensinar a Matemática como se estivesse alfabetizando em outra língua. Não leva em conta os passos já dados pela criança antes da alfabetização formal." DANILUK (1998, p. 11-12)

Uma das características inerentes à espécie humana é a leitura matemática de mundo. O sistema de numeração decimal é a linguagem matemática que usamos para nos comunicar em situações do cotidiano. Durante a evolução da humanidade essa linguagem foi sendo organizada em uma estrutura lógica e formalizada com o objetivo de expressar ideias de quantidades, medidas, etc.

Segundo Danyluk (1998, p. 22),

> Antes de o homem envolver-se com o simbolismo matemático, ele faz cálculos mentais realizando a sua possibilidade de pensar matematicamente. Isso é visto no cotidiano e mostra que o homem consegue desenvolver a sua compreensão, interpretação e comunicação mediante as relações que estabelece no seu mundo-vida.

De acordo com registros pré-históricos (GARBI, 2007, p. 5 e 6), por volta de 9.000 a.C, aconteceu um grande marco na história da humanidade: o homem começou a desenvolver a agricultura e assim, revolucionou sua maneira de viver. Com esse advento, o homem se fixou, ocasionando um aumento da população, o que o obrigou a elaborar uma forma de organização mais estruturada, sendo preciso aprender a planejar e compartilhar trabalho e os frutos deste. Além disso, ele também precisou entender melhor o tempo e as estações do ano e a controlar o tempo por meio de calendários. Essa observação levou o homem a aprimorar sua percepção sobre o que hoje chamamos de número. Por esse motivo, considera-se que os primeiros números a serem pensados pelo homem foram os naturais, pelo fato de serem suficientes para resolver problemas de contagens simples.

Mas só por volta de 3.500 a.C. começaram a ser desenvolvidos os primeiros sistemas simbólicos com o objetivo de registrar quantidades. Foram os sumérios os primeiros a desenvolver um sistema simbólico escrito, uma escrita cuneiforme.

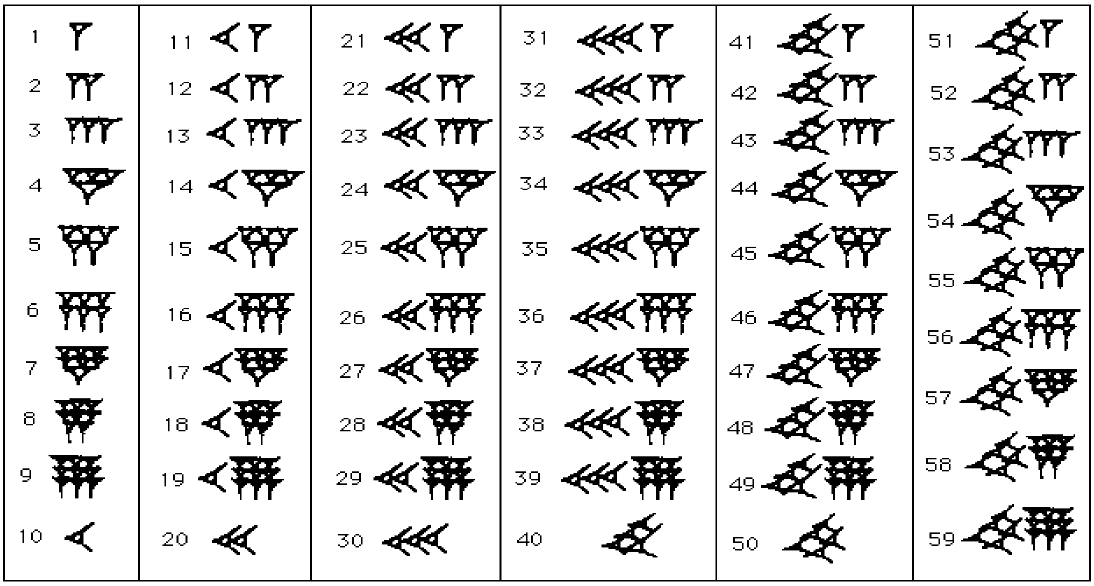


Ilustração 1 - Representações escritas dos números babilônios, cuja base era sexagesimal.
Fonte: www.mundoeducacao.com.br

Séculos mais tarde era a vez dos egípcios também criarem seu próprio sistema simbólico de escrita, os hieróglifos.

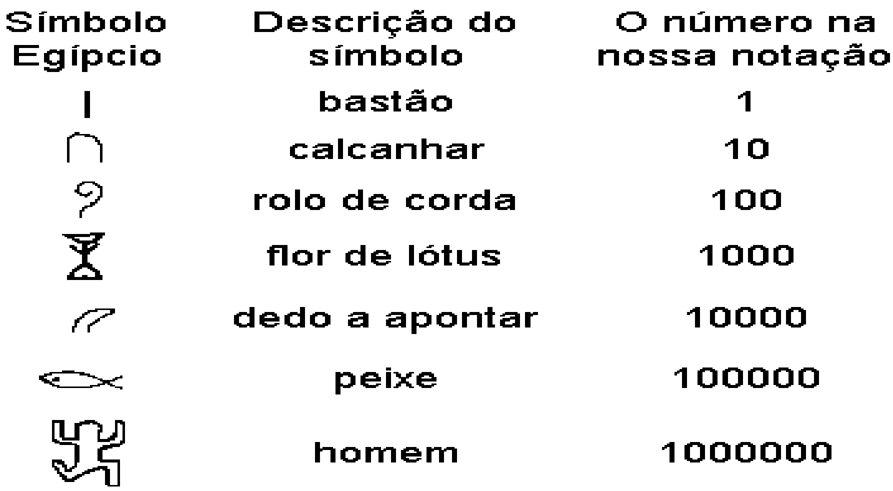


Ilustração 2 - Representações pictóricas e escritas dos números egípcios e suas correspondências com o sistema de numeração decimal.
Fonte: www.sempretops.com

Os gregos também possuíam uma forma de representar quantidades, mas utilizavam símbolos da própria escrita, assim como anos mais tarde fizeram os romanos.

UNIDADES				DEZENAS				CENTENAS			
Α	α	alfa	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rô	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	kapa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gama	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	mu	40	Υ	υ	upsilon	400
Ε	ϵ	epsilon	5	Ν	ν	nu	50	Φ	ϕ	phi	500
Ϛ	ϛ	digama	6	Ξ	ξ	ksi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	zeta	7	Ο	ο	ômicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	ômega	800
Θ	θ	teta	9	Ϟ	ϙ	kopa	90	Ϡ	ϡ	san	900

Ilustração 3 - Representações escritas dos números gregos, cuja base era decimal.
Fonte: www.invivo.fiocruz.br

Os gregos marcaram o descrédito da capacidade de cada indivíduo perceber o mundo. A partir do segundo milênio a.C., com a invasão dos aqueus e jônicos, entre outras civilizações, a Grécia foi sendo povoada, organizada em classes, a partir do sistema de produção escrava. A baixa produtividade agrícola aliada à proximidade do mar obrigou os gregos a buscarem alimentos em outras regiões, utilizando o escambo e a navegação como solução para a escassez de alimentos em sua região.

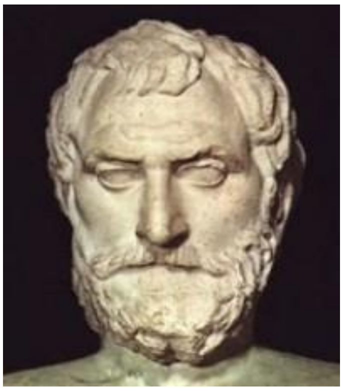
Foi nesse ambiente de reorganização econômica e social que surgiram os pensadores, com suas investigações filosóficas e científicas. Esses pensadores gregos deram origem à uma nova maneira de questionamento da realidade ao seu redor. Um dos principais assuntos em suas especulações, diálogos e debates era a formação do universo. Foi o início do "*porquê ?*". A Matemática grega nasceu nessa realidade, no racionalismo jônico, no século VI a.C, onde também nasceram as bases do materialismo espontâneo, também conhecido como Filosofia da natureza.

> Para os gregos, uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo (EVES, 1997, p.384)

A Grécia foi o berço da Geometria como ciência dedutiva, tendo como ícones os matemáticos gregos Tales e Pitágoras, entre outros, que para dar início aos seus estudos sobre tal ciência, se deslocaram até o Egito. Tales de Mileto, na época um mercador, ao visitar o Egito e a Babilônia, deu à Geometria um tratamento racional, ao considerar que o conhecimento partia da generalização de um pensamento.

> "[...] figuras geométricas eram consideradas como genéricas, e não havia aí representação de números 'quaisquer`". Pode-se mesmo dizer que não havia nenhum sistema geral de representação, uma vez que nada foi publicado nesta época, pelo menos até meados do século XVII, que permitisse uma análise geral do uso de representações em matemática (SERFATI, 1997, p.139).

O caso da soma dos ângulos internos de um triângulo ilustra bem essa situação. Era de conhecimento de Tales que os triângulos podem assumir formas variadas, o que gerava medidas dos ângulos internos também variadas. Entretanto, apesar dessas diferenças, uma situação era recorrente: em qualquer triângulo, independente do tamanho de seus lados, o resultado da soma dos ângulos internos era sempre igual a 180º. Na tentativa de justificar esse acontecimento, Tales deixou de usar o procedimento de desenhar triângulos de diversos tamanhos, como forma de comprovação empírica, dando lugar à especulações sobre essa questão, demonstrando, através do que chamavam de teoremas, sem fazer uma medida sequer, as propriedades geométricas já determinadas.



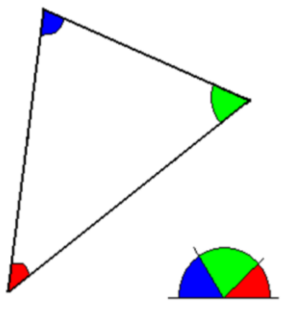


Ilustração 4 – Tales de Mileto e a representação gráfica de um dos seus mais famosos teoremas: "*A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180º.*"
Fonte: www.infoescola.com; www.formatematica.blogspot.com

Influenciado filosoficamente e cientificamente pelas ideias de Tales, já na segunda metade do século VI a.C, Pitágoras, em uma de suas visitas ao Egito, desenvolveu o famoso Teorema de Pitágoras. Este afirmava que, em qualquer triângulo retângulo, é possível calcular o valor de um dos lados caso os outros dois sejam conhecidos. Desta forma ele conseguiu demonstrar e provar que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Surge, então, um grupo denominado “Os pitagóricos”, escola fundada por Pitágoras, cujos principais preceitos eram, entre outros, a transmissão oral do conhecimento e o poder comum sobre as coisas. Mas o que diferenciava os Pitagóricos das demais escolas era a importância atribuída aos números. Para Pitágoras, tudo se explicava através dos números e da harmonia entre eles. Todavia, a doutrina do atomismo numérico se tornou insustentável quando, dentro da própria escola, foi descoberta a incomensurabilidade. Ao aplicar seu teorema em um triângulo retângulo isósceles, Pitágoras percebeu que não era possível conseguir tal resultado com os números inteiros (hoje conhecidos como números naturais). Percebendo que para representar relações entre quantidades contínuas esses números nem sempre os números inteiros eram suficientes, desfez-se a concepção inicial de número e a ideia de que o espaço e o tempo poderiam ser pensados como elementos separados.

> Enfim, o que quero trazer à reflexão é que o sistema de signos até meados do Renascimento ocidental era imerso no “jogo da semelhança”, como diz Foucault (1992). Isso significa que o signo, a visibilidade do signo, está na própria coisa, não havendo nada de oculto. Portanto, a relação do signo com seu conteúdo era assegurada na ordem das próprias coisas. De modo que a operação de representação era baseada na imitação, mantendo uma correspondência analógica com o mundo estável preexistente. Nessa concepção epistemológica, as coisas trazem consigo sua própria marca e, além disso, cada uma se aparelha com a outra na medida em que se relacionam. Daí, o número, por exemplo, pode ser uma grandeza quadrada, ou um segmento de reta, ou ainda, uma grandeza não conhecida, cada qual trazendo consigo sua própria marca, em analogia com o mundo natural – as formas geométricas estão na natureza, assim como os números. Tudo tem sua finalidade na natureza. Logo tudo se aproxima e se enrola sobre si mesmo. (FLORES et al, 2006, p. 82)

Tales e Pitágoras influenciaram imensamente o desenvolvimento da Matemática, por terem sido grandes construtores da base dos conhecimentos matemáticos e filosóficos, como o racionalismo, onde o conhecimento parte de uma generalização, de um pensamento. Pitágoras poetizou, dizendo que "A matemática é o alfabeto com o qual Deus criou o universo” Pitágoras (570 a.C /496 a.C.)

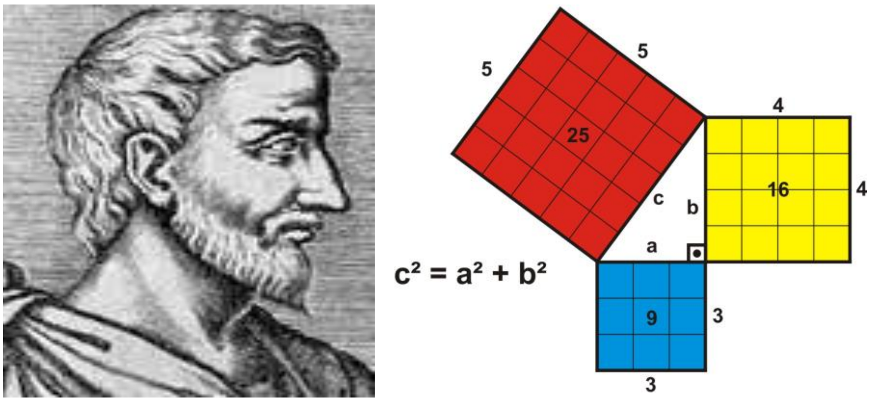


Ilustração 5 – Pitágoras de Samos e a representação gráfica do seu mais famoso teorema: "*A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*"
Fonte: www.gustavussilverius.blogspot.com; www.fisicaempratica.wordpress.com

Números Romanos	I	V	X	L	C	D	M
Números Árabes	1	5	10	50	100	500	1000

Ilustração 6 - Representações escritas dos números romanos, cuja base era decimal.
Fonte: www.agesntesdahistoria.blogspot.com

Assim como os sumérios, os egípcios, os gregos e os romanos, diversos outros povos, como os babilônios e chineses também desenvolveram seus próprios sistemas de numeração, de acordo com critérios diversos. Independente disso, todas essas escritas são as raízes dos registros de ideias de quantidades, que sempre mostravam a necessidade de resolver situações de contagem, especialmente no que se refere ao controle de produção, estoques, da arrecadação de impostos e de transações comerciais. De acordo com Garbi (2007, p. 7)

> [...] a escrita foi criada primordialmente para tornar possíveis os registros numéricos, somente mais tarde passando a ser utilizada para os relatos históricos dos povos e seus soberanos.

O fato é que a invenção da escrita deu o pontapé inicial para uma grande evolução da matemática. Os escribas, um pequeno grupo de funcionários privilegiados por deterem o conhecimento das grafias, eram procurados quando as pessoas se deparavam com alguma situação de resolução mais complicada. Talvez por esse motivo tenham sido os primeiros a desenvolver e aprimorar o conhecimento sobre os números. Já as situações que envolviam conhecimentos básicos de geometria, ficavam a cargo dos arquitetos e construtores.

Ao contrário dos demais povos, os indianos desenvolveram um sistema capaz de lidar com números enormes, conseguindo esse feito com apenas um símbolo diferente para cada quantidade de 1 a 9. Anos mais tarde, o zero foi inventado, pois era preciso um símbolo para representar a ausência de quantidades. Nascia, então, o sistema de numeração decimal que foi divulgado pelos árabes e conquistou o mundo. A seguir apresenta-se uma tabela na qual pode-se observar a evolução dos símbolos, desde os primeiros até os que usamos atualmente.

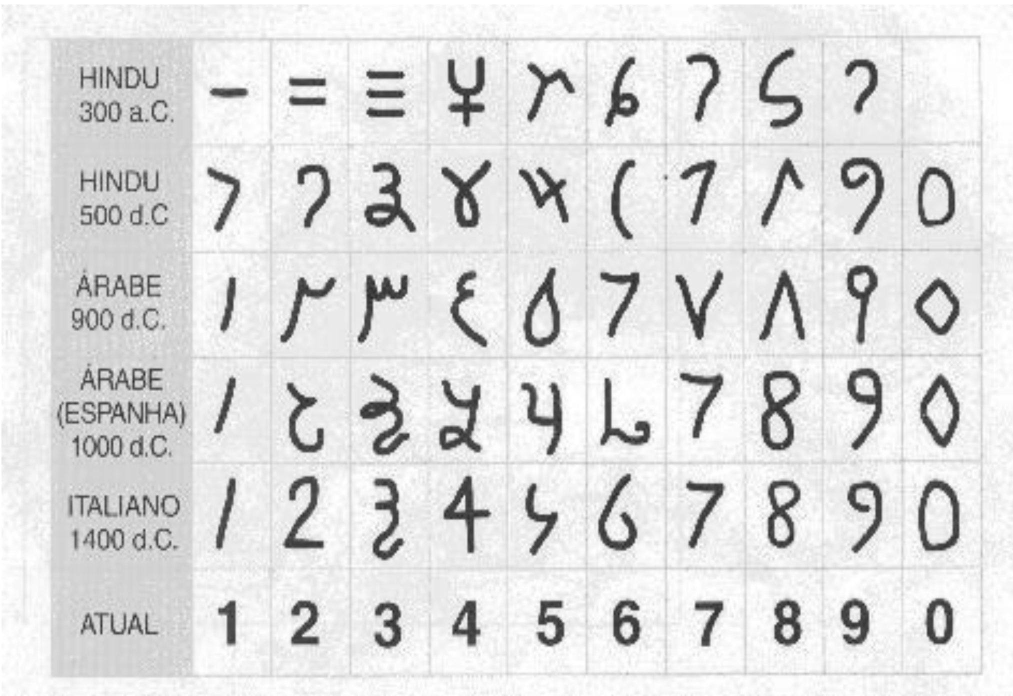


Ilustração 7 - Possível evolução das representações escritas dos números indo-arábicos, cuja base era decimal.
Fonte: www.azevedomarquesmat.blogspot.com

Por esses motivos fica fácil compreender que as primeiras ideias matemáticas e as primeiras soluções de problemas tanto aritméticos quanto geométricos aconteceram pela necessidade de resolver situações práticas, sem formalidades ou teorias que fundamentassem essas soluções. Dessa forma o aprendizado era empírico, por meio de experimentações, tentativas e erros. Garbi (2007, p. 10) afirma que "*Foi assim, por experimentação, indução e algum raciocínio que a matemática começou.*"

E quando as quantidades inteiras não eram mais suficientes para satisfazer as necessidades do homem, foi necessário criar um outro tipo de número, responsável por representar partes de uma quantidade inteira: o número fracionário. Um exemplo dessa necessidade foi desenvolvido pelos antigos egípcios. Eles usavam uma corda para medir comprimentos. Mas quando o tamanho do que se queria medir não era um número exato de cordas, eles resolveram marcá-la com nós. Assim, a medida desejada podia ser expressa em um número qualquer de cordas mais algumas subdivisões entre os nós. Mas quando o resultado ainda podia não envolver um número inteiro de intervalos entre os nós, surgiu a necessidade de mais subdivisões.

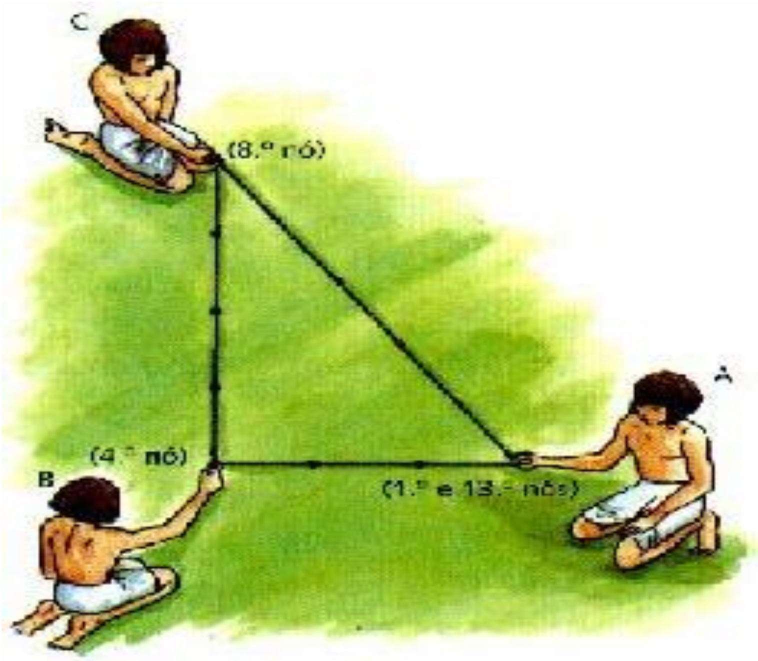


Ilustração 8 - Possível medição utilizada pelos egípcios, no Antigo Egito.
Fonte: www.blogsmatematicos.blogspot.com

Ao longo da história, o conjunto dos números fracionários foi ganhando significado no cotidiano humano, por envolver números naturais e as frações, e, futuramente, os números decimais. Dessa forma, as diferentes culturas foram organizando em seus esquemas lógicos maneiras diferenciadas de fazer relações entre as quantidades e, consequentemente, entre números e medidas, maneiras essas que precisavam atender às necessidades cotidianas desses grupos específicos. Até hoje ainda encontra-se muitas sociedades com suas formas particulares de matematizar.

Independente da idade em que nos encontremos, agimos matematicamente, ainda que sem explicações científicas satisfatórias. Pode-se dizer que da mesma forma que falamos, também *matematizamos*. A linguagem é a capacidade de expressar nossas ações de maneira organizada. Ao falar, possibilitamos a manifestação de nossa criatividade, organizando e transmitindo o que pensamos. E isso não é diferente quando se trata de *falar* em Matemática.

Segundo Danyluk (1998, p.19):

> A matemática tem uma linguagem de abstração completa. Como qualquer sistema linguístico, a ciência matemática utiliza-se de signos para comunicar significados matemáticos. Assim, a leitura da linguagem matemática ocorre a partir da compreensão e da interpretação dos signos e das relações implícitas naquilo que é dito de matemática.

Nessa perspectiva, aponta-se a necessidade de contemplar experiências conceituais capazes de promover um ensino de frações significativo para o aluno. Sabe-se que por mais que se tenha um discurso inovador na área da Educação, constata-se que há uma lacuna entre o que é dito (a teoria) e o que é feito (a prática pedagógica).

Para Lopes e Viana (2005, p. 4 e 5):

> A que se deve o fato de uma criança ser admitida no Ensino Infantil gostando de Matemática e deixar o Ensino Fundamental tendo a Matemática como uma disciplina difícil e, muitas vezes, sem sentido? Se o professor identificar na Matemática a ferramenta básica e universal para o entendimento deste nosso mundo, não só será capaz de lecionar melhor como compartilhará com seus alunos todas as descobertas obtidas por eles em cada instante de aula.

Pesquisas a respeito da aprendizagem dos alunos apontam a existência de diversos problemas referentes à apreensão conceitual de conteúdos matemáticos. Avaliações de grande porte, como o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) têm nos mostrado que os alunos avançam muito pouco na aprendizagem dos números racionais, especialmente na sua representação fracionária (CAMPOS et al, 2009).

Diante dos fatos elencados, o problema em questão está em desenvolver estratégias significativas para trabalhar os conceitos de fração. Mas outras perguntas acompanham esse problema norteador: Como relacionar os diversos registros de representação dos objetos matemáticos? Como possibilitar um espaço que privilegie a criação, a compreensão e a expressão da linguagem matemática e dos conceitos matemáticos? Como desenvolver a compreensão dos diversos registros de representação do conhecimento matemático? Como sistematizar o conhecimento matemático enquanto linguagem?

Para responder a essas perguntas e por perceber que o ensino de frações está fragmentado e dificultado devido às condições de produção (históricas e políticas) e à forma como o ensino da matemática vem sendo desenvolvido, o presente estudo e as estratégias desenvolvidas foram baseadas na teoria sócio-interacionista e na teoria dos registros de representações semióticas.

Em relação à teoria sócio-interacionista, Lev Vigotskii forneceu um terreno rico que fundamentou as condições de produção do conhecimento matemático nas atividades desenvolvidas.

A teoria de Vigotskii deixou importantes contribuições para o processo de ensinar e aprender. Sua teoria desenvolvimentista teve como cerne o conceito de zona de desenvolvimento proximal, que em resumo é o espaço entre o nível de desenvolvimento atual da criança e o nível de desenvolvimento que ela atinge quando resolve problemas com auxílio. Partindo dessa conjectura ele considera que qualquer criança é muito mais capaz de realizar qualquer problema quando auxiliada do que quando tenta fazê-lo sozinha. Para Vigotskii, a cultura e as interações sociais são fundamentais no desenvolvimento da criança, pois, conforme Sutherland (1996, p. 73), "*Vigotskii defendeu a utilização de uma criança mais desenvolvida para ajudar a outra menos desenvolta"*, auxílio esse que é proveitoso para ambas, visto que, do ponto de vista metacognitivo, a criança mais desenvolvida tem a oportunidade de adquirir uma compreensão maior e uma consequente consolidação de sua própria aprendizagem.

Para Vigotskii, o processo de ensinar e aprender pode se resumir na seguinte tríade: o indivíduo que aprende, o que ensina e a relação entre os indivíduos e entre estes e o conhecimento. E ressalta que tudo isso é gerado por uma grande influência das experiências de cada indivíduo. Para ele o desenvolvimento cultural da criança acontece em duas instâncias: primeiramente no nível social (interpsicológico) e depois no nível individual (intrapsicológico).

Das colocações anteriores, pode-se observar que Vigotskii considera a construção das operações mentais como algo que ocorre a partir de uma triangulação entre o indivíduo, o objeto e o meio, enfatizando a interação com o meio sócio-cultural e entendendo o indivíduo como um ser ativo e responsável pela construção e reconstrução do seu próprio conhecimento.

Dessa forma, Vigotskii sugere que, durante o processo de ensino-aprendizagem, deve ser considerada toda e qualquer potencialidade da criança, uma vez que a aprendizagem é a mola propulsora do conhecimento. Nesse sentido o papel da escola é fundamental, deixando de direcionar o processo do ensino para etapas intelectuais já atingidas e voltando-se para as etapas que a criança ainda não atingiu, incentivando assim o desenvolvimento potencial do aluno.

Em relação à semiótica, mais especificamente à teoria dos registros de representações semióticas, Raymond Duval forneceu uma fértil e adequada sustentação teórica acerca do ensino de matemática. Segundo Machado (2003, p.8), na perspectiva de Duval, uma análise do conhecimento matemático é, essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento. O modo como raciocinamos matematicamente e visualizamos o conhecimento matemático tem relação direta com a diversidade de representações semióticas, base de toda comunicação.

Segundo Duval (1993, p. 37), o termo *representação* apresenta, ao mesmo tempo, aspectos importantes e marginais quando se trata do conhecimento matemático. Nessa área do conhecimento humano, muitas podem ser as representações de um mesmo objeto matemático: um número, uma letra, um traço, uma forma, um símbolo, um desenho, entre outros. O conceito de "dois", por exemplo, define um objeto matemático, mas não as suas formas de representação. Inúmeras são as representações desse conceito ou objeto: na linguagem natural: 'dois' na língua portuguesa, 'dos' na língua espanhola, 'two' na língua inglesa, 'deux' na língua francesa etc.; nos sistemas de numeração: '2' no sistema hindu-arábico, 'II' no sistema romano, '• •' no sistema maia, 'II ' no sistema egípcio, '0 1' no sistema binário etc.; ou mesmo por imagens que representem dois objetos quaisquer.

Diante desse contexto, faz-se necessário distinguir dois aspectos fundamentais no processo de compreensão em matemática: noese e semiose. Em termos gerais, noese (*noésis)* é o processo em que o cérebro trabalha conscientemente e semiose (*semiósis)* é o ato de compreender o signo a partir do contexto. Dessa forma, um objeto matemático pertence ao conhecimento noético, já as suas múltiplas representações pertencem ao conhecimento semiótico.

Doravante, a ideia de que as representações estão no lugar dos objetos matemáticos nos leva a crer que os indivíduos não confundem as representações com os objetos matemáticos que elas representam. E para Duval é muito importante que os objetos matemáticos realmente não sejam confundidos com suas representações.

Apesar disso, muitos indivíduos, até mesmo os escolarizados, sabem lidar com uma ou outra forma de representação de um objeto matemático, mas mostram-se incapazes de compreender que essas formas de representar estão apenas no lugar desses objetos. É uma situação compreensível, visto que essas pessoas tiveram uma educação matemática formal, que impossibilita esse tipo de compreensão.

Nesse cenário, mais dois problemas completam o rol de questionamentos: por que são necessários tantos registros de representação de um mesmo objeto? E por que há a necessidade de uma coordenação entre eles? Duval coloca que o pensamento humano é caracterizado pelo uso de múltiplos registros e que o desenvolvimento do pensamento e do conhecimento humano é acompanhado da criação, do desenvolvimento e do convívio de novos sistemas semióticos com os anteriores. Para ele, os diferentes tipos de tratamento e as limitações específicas de cada registro levam à necessidade de uma existência simultânea de sistemas semióticos. E a coordenação entre eles se faz necessária pela possibilidade que essa variedade de formas de representação dá ao ser humano condições de diferenciar noese de semiose.

Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivos apresentar o conhecimento matemático, em especial o estudo de frações, enquanto ciência e linguagem e como ele é desenvolvido nas séries iniciais do ensino fundamental. A partir disso, apresentar as contribuições das teorias de Vigotskii e Duval para o ensino de matemática. E por fim apresentar estratégias desenvolvidas no ensino de frações baseados nas teorias citadas anteriormente, finalizando com os relatos das atividades desenvolvidas com os alunos[1].

Tendo em vista o contexto apresentado, esta dissertação apresenta mais seis capítulos. No capítulo 2, apresenta-se, quase como uma crônica, a trajetória acadêmica e profissional que me levou ao ensino de matemática e ao encontro das teorias que fundamentam esse trabalho.

No capítulo 3 apresentam-se considerações sobre o saber matemático e o ensino de Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Os capítulos 4 e 5 abordam as teorias de Vigotskii e Duval e suas contribuições para o ensino de matemática. O capítulo 6 traz uma análise sobre o ensino de frações nas séries iniciais do Ensino Fundamental, com ênfase na abordagem enquanto ciência e linguagem, além de um relato sobre estratégias e atividades desenvolvidas com os alunos do 5º ano, onde foi promovido um ensino de frações consistente, possibilitando aos alunos, diante da maioria das situações cotidianas, agir, reagir e tomar decisões com criticidade e consciência, ações fortemente sustentadas pelas teorias de Vigotskii e Duval, seguido das considerações finais desta dissertação.

[1] Foram realizadas atividades práticas (lúdicas) e de registro escrito. As atividades lúdicas estão apresentadas e detalhadas nos itens 6.2 e 6.3. As atividades de registro escrito estão apresentadas nos anexos C (Atividades sobre o Tangram, as frações entre suas partes e seu todo), D (Atividades sobre o conceito de fração e seu registro a partir de números), E (Atividades sobre os elementos de uma fração, sua leitura e escrita na linguagem numérica), F (Atividades sobre classificação de frações a partir do critério relação com o todo), G (Atividades sobre relações entre partes de fração e seu todo), H (Atividades sobre diferentes formas de representar uma fração igual ou maior que um inteiro usando números), I (Atividades sobre o conceito de frações equivalentes e as relações entre seus elementos numéricos), J (Atividades sobre frações de quantidades discretas), K (Tabela de frações equivalentes), L (Calculadora de frações) e M (Manual prático de frações para pais e alunos). Além dessas atividades, diversas outras foram realizadas no livro didático da Editora Positivo, adotado pela Escola Dinâmica para as turmas do Ensino Fundamental e Médio.

2. DA EDUCAÇÃO BÁSICA ÀS CIÊNCIAS DA LINGUAGEM: UMA TRAJETÓRIA PESSOAL DE APRENDIZAGEM

Para explicar os motivos que me levaram a escrever esta dissertação, preciso me remeter aos anos 80. Tudo começou quando eu cursava o então 1º grau, mais exatamente a antiga 5ª série, em 1984. Eu tive sérios problemas com o professor de matemática, que resultaram em problemas no meu aprendizado nessa disciplina. Tão sérios que me acompanharam por toda a vida escolar. Tive aulas particulares por quatro anos seguidos (da 5ª à 8ª série), pois eu e minha família havíamos chegado à conclusão de que eu não tinha condições de conseguir entender a Matemática na escola, muito menos estudando sozinha em casa. Foi assim que cursei todo o meu 1º grau, com uma professora particular chamada Rosane (não me recordo o sobrenome dela), que me atendia todos os dias, das 18h às 19h, para tentar me fazer entender o que não havia compreendido em aula.

No final da 8ª série a referida professora nos comunicou que não poderia mais me ajudar a partir do ano seguinte, pois também não dominava o conteúdo do 2º grau. Qual não foi meu sentimento, ao constatar que se ela, a professora responsável pelo meu bom desempenho em Matemática até então, dizia não ter condições por também não dominar aquele conhecimento, meu futuro em relação à matemática era bem menos promissor do que eu esperava.

Os três anos do 2º grau não foram fáceis e exigiram o máximo de mim, mas consegui terminar com êxito, com auxílios esporádicos de meu tio Fernando Nóbrega, na época estudante de Engenharia Civil na UFF, e de Remo Noronha, um jovem amigo do meu pai, estudante de Física também na UFF. Em 1990 prestei vestibular para Administração na Universidade Federal Fluminense (UFF) e Economia na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Passei, mas não fui classificada. Diante disso, no ano seguinte, meus pais me matricularam no pré-vestibular do Colégio Assunção, onde meu pai lecionava geografia para turmas do 2º grau, inclusive para a última série do 2º grau, o chamado “terceirão”, turma da qual eu seria aluna. E foi nesse ano, em 1991, que, sem imaginar, dois acontecimentos seriam decisivos na minha vida profissional: fui aluna do meu pai, professor Chicão, e do professor Petersen, que lecionava matemática. Com meu pai me encantei pela docência e aprendi, ainda que superficialmente, que é muito bom ser professor, mas que o aluno só aprende se houver significado no que se ensina e afetividade por parte do professor. E com o professor Petersen, descobri que era possível fazer as pessoas entenderem matemática. Seguramente foi o ano mais produtivo em minha vida escolar, pois eu compreendia perfeitamente o que era ensinado nas aulas de Matemática. E eu simplesmente adorava essas aulas. Meu interesse foi tanto que comecei a ajudar meus irmãos mais novos e filhos de amigas da minha mãe em suas dúvidas de Matemática. Ao final desse ano, fui novamente me inscrever nos vestibulares do Rio de Janeiro: Economia na UFRJ, Ciências Contábeis na UFF e, pasmem, Licenciatura em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Qual não foi a surpresa quando saíram os resultados: fui aprovada e classificada em todos os vestibulares. Mas a surpresa maior ainda estava por vir. Era preciso escolher uma delas, pois naquela época não era possível acumular matrículas em universidades públicas. Escolhi fazer faculdade de... Matemática! Sim, pensei que se eu tentasse ser um pouco parecida com meus professores Chicão e Petersen, talvez eu conseguisse ajudar mais pessoas a entenderem a Matemática assim como aconteceu comigo.

Decidida e formalmente matriculada, iniciei o curso. Era agosto de 1992. Entretanto, o inesperado aconteceu: me decepcionei no primeiro semestre, especialmente com as disciplinas Álgebra 1 e Cálculo Diferencial e Integral 1. Acreditava que, além de me ensinarem o conteúdo, me ensinariam estratégias de como ensiná-los. Mas não conseguiram me fazer aprender, nem tampouco como ensinar. Tive sérias dificuldades, mas não reprovei. E esse foi só o começo. De todos os professores que tive, poucos me fizeram ver a Matemática como o professor Petersen. Refleti e concluí: o que serão mais quatro anos de sofrimento para quem padeceu por sete anos, sem maturidade emocional? Como já sou adulta, pensava, tenho plenas condições de passar por essa situação. Portanto, decidi prosseguir.

E assim iniciei minha licenciatura plena em Matemática. Mas não foi tão simples assim. Minha vida profissional começou bem antes do que eu esperava, quase simultaneamente com a vida acadêmica, fator também determinante para minha relação com a docência. Em março de 1993, meu professor de Desenho Geométrico, Lédio José Martins, me ofereceu uma oportunidade de assumir por três meses duas turmas de 1ª série do 2º grau no Colégio Liceu Nilo Peçanha, em Niterói. Era para substituí-lo, pois ele iria viajar. Em março de 1993 eu ainda não havia completado 19 anos, ou seja, tinha a mesma idade que a maioria dos alunos da turma, os mesmos anseios e as mesmas expectativas. Meus pais me apoiaram, dizendo que eu deveria aproveitar a oportunidade de começar a praticar meu ofício enquanto ainda era aluna da graduação. Praticar... Recém havia começado a faculdade, estava iniciando o segundo semestre, sabia tanta matemática quanto eles, talvez um pouco mais, mas era muito pouco para enfrentar uma turma ávida por saberes. Nessa hora me lembrei muito do professor Petersen e, na tentativa de ajudar aqueles jovens, procurei reproduzir à risca o que ele fazia em aula. Até que deu certo. Tão certo que poucos meses depois eu fui indicada por um colega da faculdade, Carlos Henrique “Menudo”, para substituí-lo em uma escola particular localizada perto da minha faculdade, o Centro Educacional José do Patrocínio (CEJOP). Lá eu ministrava aulas para todo o 2º grau, inclusive para os cursos técnicos em Administração, Contabilidade etc. A partir desse momento minha rotina nunca mais foi a mesma. Eu dava aulas todas as manhãs e assistia as aulas na faculdade nos períodos vespertino e noturno, pois o curso era semi-integral. Foi um ano exigente, pois só tinha os finais de semana para estudar e planejar as aulas que ministrava.

Durante esse tempo, comecei a perceber que quanto mais eu justificava os porquês dos conceitos matemáticos e dava significado ao comportamento de certas ideias matemáticas, mais os alunos entendiam, e eu só fazia dessa forma por simples crença, sem nenhum embasamento teórico.

No início de 1994, o mesmo colega citado anteriormente me indicou no Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial, o SENAI, em Niterói/RJ, para ministrar aulas de matemática para turmas de cursos profissionalizantes nas áreas mecânica, elétrica, naval e automotiva. Imediatamente pensei nas minhas turmas do CEJOP, pois instintivamente eu já havia me tornado professora e não gostaria de deixa-los no meio do caminho. Afinal, uma vez professor, sempre professor. Não me animei em deixá-los, logo agora que havia me adaptado. Mas ele me sugeriu que, na faculdade, eu cursasse apenas as disciplinas noturnas e trabalhasse durante o dia, como muitas pessoas faziam. Isso me atrasaria duas ou três fases na faculdade, mas a oportunidade era tentadora, tanto profissionalmente quanto financeiramente. Mais uma vez acertei na decisão. Nessa época a Educação Matemática estava fervilhando de novidades, em plena véspera da nova LDB, a lei de diretrizes e bases da educação nacional. No ano seguinte participei da implantação de um projeto inovador no SENAI, chamado *Logos*, que possibilitou um trabalho de Matemática bem mais significativo que o anterior. Esse foi um dos meus primeiros encontros com o que, na época, entendi como sendo uma “pedagogia da Matemática”.

Daí por diante, com os resultados que eu vinha alcançando com meus alunos, apenas aumentavam minha paixão por lecionar Matemática e minha busca por encontrar (e às vezes desenvolver) estratégias para facilitar o ensino de conteúdos que muitas vezes não tinham significado para meus alunos (e muitas vezes para mim mesma). E foi aprendendo a ensinar que aprendi a aprender.

Passei a me interessar cada vez mais pela educação matemática e sobre como as pessoas aprendem e ensinam Matemática. Fui monitora de Geometria Analítica na faculdade e os colegas diziam que eu conseguia traduzir o que o professor ensinava nas aulas regulares. Cada vez mais eu acreditava que as dificuldades de aprendizagem em Matemática iam além de dificuldades com os conteúdos. Tratava-se também, de um problema de comunicação, de linguagem. Foi a primeira vez que relacionei a matemática com linguagem. Curiosa e ávida por novas ideias, passei a frequentar congressos e demais eventos de Matemática e educação matemática até me formar.

Em 1997, recém formada, me casei e fui morar em Florianópolis, onde tive a grata satisfação de trabalhar em instituições sérias e realmente preocupadas com um ensino significativo de Matemática. Foi quando comecei a lecionar para turmas de 5ª a 8ª séries. E comecei a perceber que esses alunos apresentavam alguns equívocos no que diz respeito aos conceitos básicos. Comecei a observar que, por falta de orientação e conhecimento, as professoras de 1ª a 4ª série não trabalhavam de forma adequada os conteúdos fundamentais da Matemática. Decidi que eu precisava entender como se dava o ensino de Matemática na formação docente. Fiz uma especialização em Docência do Ensino Superior na Universidade Federal do Rio de Janeiro, interrompida por motivos de saúde. Mas em 2006 cursei uma especialização em Metodologia do Ensino de Matemática na Faculdade Internacional de Curitiba, onde meus horizontes foram se abrindo cada vez mais em relação à educação matemática. Um dos professores, que no final foi meu orientador na monografia de conclusão, o professor Dr. Cassiano Ogliari, foi um grande incentivador nesse sentido. Eu estava decidida a investir num trabalho de formação docente, onde eu tinha como grande objetivo ajudar as futuras professoras de 1ª a 4ª série a entenderem a Matemática e aprenderem como ensiná-la de forma adequada, para desfazer os equívocos pelos quais elas passaram, assim como eu mesma havia passado.

Além de continuar lecionando na educação básica, passei a realizar uma assessoria pedagógica para as professoras da educação infantil e das séries iniciais do ensino fundamental da Escola Dinâmica, na qual trabalho desde 1999. Foi nesse período que percebi mais claramente que o problema ia além dos conteúdos e alcançava os limites da linguagem. A linguagem usada por essas professoras era de longe muito diferente da linguagem usada pelos professores especialistas da 5ª série em diante, onde eu me incluía. Percebi que a linguagem delas era mais adequada, mais clara, o que permitia às crianças uma compreensão muito maior, mas o conhecimento teórico superficial era o grande fator que atrapalhava um avanço maior. Sim, pois elas não eram professoras especialistas, cujo conhecimento era, obviamente, mais fundamentado. Mas por questões também formativas, os professores especialistas não conseguiam desenvolver o conteúdo de maneira mais significativa por não entenderem que a linguagem matemática precisa ser trabalhada de forma diferenciada. Foi quando pensei que se eu conseguisse uma maneira de unir a linguagem adequada das pedagogas com o conhecimento teórico dos especialistas, chegaria à uma solução para um ensino de Matemática mais eficiente.

E comecei a procurar cursos de mestrado onde eu pudesse desenvolver esses estudos; aliar a linguagem matemática ao conhecimento matemático para a construção desse ensino. Foram anos de busca. Encontrava muitos cursos voltados para a Matemática pura, outros tantos voltados para a educação, mas nenhum que me permitisse transitar com segurança entre esses dois universos.

Sabendo da minha busca por um programa inovador que me possibilitasse desenvolver meus estudos, uma grande amiga, Karine Ramos, me apresentou o Programa de Pós-graduação em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina, da UNISUL. Ao visitar e estudar o site e conversar com alguns alunos do curso, percebi que havia encontrado o lugar perfeito para desenvolver e aprofundar meus estudos. Havia encontrado a possibilidade de fazer o encontro da matemática ciência com a matemática linguagem.

Mas não foi tão simples assim. Para participar da seleção, escrevi um projeto cujo título era “Investigações sobre o processo de alfabetização matemática” e enviei para o programa, me inscrevendo na linha de pesquisa linguagem e cultura. Ele foi reprovado para essa linha de pesquisa, mas foi aprovado para a linha texto e discurso. Mesmo contrariada, cursei, no primeiro trimestre, as disciplinas obrigatórias para ambas as linhas de pesquisa, das quais a disciplina de Filosofia da Linguagem, ministrada pelo prof. Dr. Aldo Litaiff, me possibilitou compreender o conhecimento, em especial o matemático, com outros olhos. No segundo trimestre cursei as disciplinas obrigatórias para a linha de texto e discurso. Foram aulas maravilhosas, mas no meu íntimo não conseguia encaixar meu projeto nessa linha. No primeiro ano do mestrado tive uma orientadora excepcional, a professora Dra. Rosângela Morello, que me ajudou muito a nortear meu projeto que, a essa altura já havia mudado de direção e se aproximava, cada vez mais, da linha de pesquisa linguagem e cultura. Foi nessa época que conheci a semiótica, teoria que mudou definitivamente qualquer visão que eu poderia ter sobre o conhecimento matemático. Cursei a disciplina de semiótica, também ministrada pelo professor dr. Aldo Litaiff. Depois disso não tive mais dúvidas: eu precisava mudar de linha de pesquisa com urgência, pois todas as minhas ideias referentes à matemática como ciência e linguagem encontravam-se amplamente fundamentadas na teoria semiótica e, consequentemente, na linha de linguagem e cultura.

Coincidentemente, ao final do terceiro trimestre, minha orientadora deixou a equipe docente do programa. E, então, eu fiquei sem minha orientadora. A coordenadora do programa, professora Dra. Solange Gallo, me ligou, pois eu estava de licença maternidade (meu bebê tinha duas semanas de vida quando eu soube da notícia), para me comunicar a saída da professora e me perguntar se eu tinha preferência por algum outro professor do programa. Não exitei e solicitei que fosse o professor Litaiff, mas com um certo receio, visto que inicialmente havia sido reprovada para a linha de linguagem e cultura, da qual ele era professor. Mas como havia sido aluna dele em duas disciplinas e mostrado o quanto a semiótica fundamentava meus estudos e mudou o rumo da minha dissertação, eu apostei nessa acolhida. Dias depois, recebi a notícia de que o professor Litaiff era, oficialmente, meu novo orientador.

Pensando na concepção de ensino que eu desenvolvia, fundamentada na teoria sócio-interacionista de Lev Vigotskii, comecei a observar como ela se aliava à teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval para a concepção de um ensino mais significativo de matemática, em especial, de frações. Foi quando observei que, quase que instintivamente, eu já vinha fazendo essa relação há alguns anos em minha prática docente, embora sem fundamentação teórica.

Coincidentemente, no início de 2012, recebi a proposta de assumir duas turmas de 5º ano (o equivalente a 4ª série do ensino fundamental) na Escola Dinâmica. Momentaneamente pensei em recusar, por nunca ter trabalhado com crianças dessa idade. Mas ao analisar com mais calma e pensar na minha pesquisa, percebi que o convite era oportuno, pois me permitiria aplicar meus estudos e minhas ideias sobre o ensino de frações, justo no momento mais importante da minha vida, tanto acadêmico quanto profissional. Foi com esse convite que surgiu a ideia de relatar as estratégias e atividades desenvolvidas como forma de materializar a teoria que eu estava estudando.

E para completar, recebi outro convite que contribuiu ainda mais para o desenvolvimento da minha dissertação. Fui convidada para assumir a disciplina de Conteúdos e práticas do ensino de matemática no curso de Pedagogia do CEAD da UDESC. Assim que terminou o primeiro semestre, recebi o terceiro convite do ano. Era para escrever, juntamente com mais duas professoras, o volume 3 do material didático da disciplina. E qual não foi minha alegria ao ver a ementa do livro e ter a satisfação de ver que poderia escrever sobre o ensino de frações. Capítulo ao qual me debrucei intensamente.

E assim esta dissertação foi concebida, com muita intensidade, muito estudo, muita ação e coração, de maneira que possibilitou a compreensão do problema proposto: estratégias significativas para o ensino de frações e a aplicação de atividades fundamentadas nas teorias abordadas com os alunos do 5º ano do ensino fundamental da Escola Dinâmica. Certamente o ano de 2012 ficará marcado para sempre em minha memória.

3. O SABER MATEMÁTICO E O ENSINO DE MATEMÁTICA NAS SÉRIES INICIAIS

3.1 A MATEMÁTICA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Quando alguém pensa em Matemática, pensa especificamente em quê? Sabe-se que a Matemática é uma ciência, e, ao mesmo tempo, uma linguagem, mas geralmente, quando essa pergunta é feita, a maioria das pessoas logo se lembra de cálculos, tabuadas, medidas, contas, formas e problemas. Acompanhando essas respostas, geralmente surgem reações que revelam uma certa sensação de dificuldade ou mesmo de repulsa em relação à Matemática. Em qualquer contexto que se apresente, seja no cotidiano, no meio escolar ou no meio científico, a Matemática é sempre alvo de discussões. Mas uma questão é agravante em todas elas: a falta de uma definição para a Matemática. Portanto, as reações citadas anteriormente são compreensíveis, se partirmos do ponto de vista de que essa falta de definição deu origem à formação de uma Matemática de caráter amplo, gerando um saber que cresceu e se desenvolveu historicamente nas mais variadas direções.

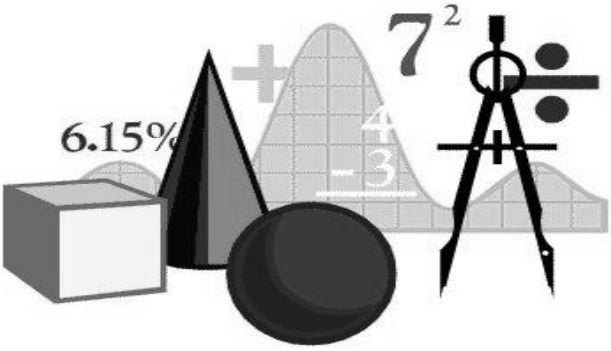


Ilustração 9 – Exemplos de representações de alguns dos diversos conhecimentos matemáticos.
Fonte: www.blogandocommatematica.blogspot.com

Alguns dicionários apresentam a Matemática como "*a ciência que investiga relações entre entidades definidas abstrata e logicamente*" (FERREIRA, 1999); "*a ciência que trata das medidas, propriedades e relações de quantidades e grandezas e que inclui a Aritmética, a Álgebra, a Geometria, a Trigonometria etc*." (MICHAELLIS, 1998) e "*a ciência que lida com relações e simbolismos de números e grandezas e que inclui operações quantitativas e soluções de problemas quantitativos*." (Enciclopédia Britânica). Nessas três definições de matemática, nota-se uma visão de ciência sempre presente, apesar de desvinculada de seu caráter social, de quem a produz ou para quem é produzida, além do modo como ela pode ser desenvolvida socialmente. Apenas em Imenes e Lellis (1998, p. 186-187) encontrei uma definição de matemática que se aproxima do contexto sócio-histórico:

> Palavra de origem grega que significa “aquilo que se pode aprender” (a palavra grega *mathema* quer dizer “aprendizagem”. Não é fácil dar uma ideia do que vem a ser matemática, e os dicionários dão definições bastante diversas. Uma possibilidade é considerá-la como a ciência que estuda as quantidades e formas. Pode-se acrescentar que ela é uma linguagem, isto é uma maneira de representar e falar ou escrever sobre quantidades e formas.

É possível encontrar na matemática três elementos característicos: o primeiro se refere a uma estrutura de relações onde acontecem conexões entre a ideia de número e aplicações a problemas práticos. Esse elemento apresenta um aspecto construtivo, de estratégia de pensamento para uma leitura de mundo, que implica na compreensão e na explicação da realidade. O segundo e o terceiro elementos característicos da matemática se referem às técnicas e ao simbolismo, considerados por grande parte da sociedade como representantes da matemática, extremamente importantes no que se refere à ideia de linguagem. Conforme Mendes (2009, p. 20 e 21):

> (...) as técnicas e o simbolismo são dois ícones característicos desse conhecimento e extremamente necessários à comunicação matemática de uma pessoa para outra, isto é, eles constituem uma espécie de instrumento fundamental de uma linguagem especialmente inventada para esse fim. Pode-se admitir, portanto, que a Matemática se constitui de uma linguagem revestida por elementos significantes que procuram expressar os significados evidenciados a cada relação que estruturamos para comunicar nossas ideias.

Para Vergani (1993), trata-se de um *processo matematizante*, um procedimento construtivo que envolve a descoberta de padrões e a busca por uma forma de generalizá-los. Para isso, é necessário o desenvolvimento de certas habilidades, como observar, questionar, manipular, experimentar, duvidar, demonstrar e validar. Esse modo de conceber a matemática, como um saber vivo, dotado de uma linguagem universalizante, significa que a criatividade se une ao rigor lógico, gerando e transmitindo o pensamento e o sentido daquele que a utiliza. Vergani (1993, p.11) infere que “... *a matemática é uma disciplina simultaneamente abstrata e concreta, racional e simbólica, pragmática e lúdica*.” Isso mostra que o aspecto universalizante da matemática está no equilíbrio entre seus maiores fundamentos: de um lado, a imaginação, a criatividade e de outro o rigor, a lógica. Courant e Robbins (2000), prefaciando a obra *What is mathematics*, definem a matemática como uma "*expressão da mente humana que reflete a vontade ativa, a razão contemplativa e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade.*"

Dessa forma, é possível concluir que as concepções acerca do significado de matemática enquanto expressão cognitiva buscam sempre estabelecer uma relação entre ação e reflexão, entre parte e totalidade. Porém, faz-se necessário uma reflexão profunda para criar ligações entre o saber e o fazer, entre o cotidiano e o científico e entre o cotidiano e o escolar, pois são esses elos que fazem com que a matemática seja reconhecida como um saber social.

O aspecto cotidiano é resultado da experiência direta no âmbito social, adquirida com a participação nas práticas culturais de cada sociedade. Isso significa que o conhecimento matemático cotidiano apresenta características específicas, de acordo com cada grupo social. Nessa perspectiva, a matemática desempenha um papel crucial na compreensão da realidade e na ação específica de cada elemento da sociedade em situações específicas. Pode-se resumir que o conhecimento matemático cotidiano é subentendido e evidente, geralmente originado de necessidades sócio-culturais, que exerce fundamental importância quando se refere à organização do conhecimento escolar e científico.

Em relação ao aspecto escolar, ele trata basicamente da organização desse conhecimento, com o objetivo maior de socializá-lo e difundi-lo. Ele praticamente oficializa a matemática por meio de um processo dinâmico

As atividades de caráter investigativo realizadas pela sociedade acadêmica sistematizam o conhecimento cotidiano, ou seja, os saberes constituídos pelas necessidades e práticas sociais dão origem a uma rede de informações que alimentam a produção científica e tecnológica. Ao desenvolver o conhecimento científico, é preciso utilizar um método e uma prática de ensino que não são usuais, além de uma explicitação e uma racionalização conscientes e sistemáticas. Em suma, a diferenciação entre teorias e evidências dá origem a uma organização mais evoluída do pensamento, que caracteriza o conhecimento científico. Um exemplo disso pode ser encontrado na história da contagem do tempo. Por muitos séculos a sombra de bastões fincados na terra foram utilizados como instrumento para quantificar e medir o tempo, bem como para orientação. A partir daí, veio o surgimento dos primeiros relógios de sol, seguidos de calendários que indicavam o tempo e seus ciclos: as horas, os dias, os meses, as estações do ano, etc. Esse conhecimento possibilitou uma organização social, até religiosa, orientando o homem em relação à contagem do tempo cronológico.

Sendo assim, percebe-se que ao analisar a matemática enquanto ciência, os processos cognitivos individuais se relacionam com os processos sócio-culturais.

No aspecto educacional, porém, as recentes reformas curriculares acompanhadas de orientações metodológicas determinadas inclusive por documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), buscam a valorização dos saberes matemáticos vivenciados e construídos no cotidiano. Apesar disso, Arnay (1998, p. 38) coloca que:

> (...) o valor e o sentido do que se ensina nas escolas estão tão afastados tanto do cotidiano quanto do científico. Do cotidiano porque não se prevê que sua obtenção sirva para a reflexão e a ação na vida cotidiana, já que para isso as pessoas elaboram modelos implícitos que servem para interpretar os fenômenos que acontecem nas dimensões intermediárias da realidade (mesomundo), enquanto o conhecimento acadêmico tenta transmitir, principalmente, os modelos e as teorias científicas sobre dimensões de micro e macromundo.

Portanto, ao invés de falar sobre a superioridade de um aspecto do conhecimento matemático em relação a outro, deve-se agregar a ideia de que eles coexistem, como formas distintas de pensamento, com o objetivo de responder à metas e necessidades diferentes. Deste modo, admite-se que os aspectos científicos só são evidenciados no conhecimento quando o sujeito experimenta, quando se considera o aspecto cotidiano no qual ele foi gerado. E daí se torna possível afirmar que a cultura contribui de maneira significativa na elaboração do conhecimento científico.

Concluída a ideia de que o saber cotidiano, o científico e o escolar, originam um saber social, pois contribuem para a construção da cidadania, uma vez que o cidadão se apropria desses conhecimentos para utilizá-los em sua vida cotidiana, bem como para a construção de recursos tecnológicos, apresenta-se a próxima etapa: o processo de ensinar e aprender esse saber. Para que isso aconteça, é preciso que o saber matemático seja acessível e que o professor tenha como meta a democratização desse ensino.

Especialmente no ambiente escolar, é preciso que a Matemática seja mais que um reconhecimento e uma identificação de coisas acabadas e determinadas, mas, principalmente, que seja construída e apropriada pelo aluno, que por sua vez se utilizará dela para a compreensão e para a transformação da sua realidade. O conhecimento cotidiano deve ser usado como base cognitiva para que os alunos possam desenvolver ainda mais seu pensamento matemático até que ele se organize como conhecimento escolar. Esse processo deve ser enriquecedor para o aluno, por meio da formalização das ideias matemáticas produzidas com a construção de modelos fundamentados nas experiências vividas por eles. Considerando o valor pedagógico, surge a necessidade de fazer com que os três aspectos do conhecimento matemático conversem entre si. Nesse sentido, Gomez e Granel (1998, p. 23) ressaltam que:

> (...) a escola é a instituição encarregada de transmitir conhecimento científico, mas o conhecimento escolar não é conhecimento científico. A escola realiza adaptações que transformam o conhecimento científico em saber ensinado.

Dessa forma, admite-se que a escolarização e a instrução intencional formalizam o conhecimento e a linguagem matemática. Sendo assim, faz-se necessário valorizar esse processo, pois ele tem papel fundamental na construção do conhecimento matemático como um todo, seja em qualquer perspectiva. Sobre essa questão, Fabro (1996, p.23) alerta que:

> O reconhecimento da existência de um conhecimento matemático universalmente aceito como básico, entretanto, não garantirá que a escola venha realizar suficientemente a socialização que lhe cabe. É preciso que haja uma adequada seleção, dosagem e sequenciação do conteúdo matemático e que sejam viabilizadas as condições de sua transmissão e assimilação, para que o aluno possa passar de seu não domínio à interpretação das relações matemáticas que se impõem em sua prática social.

É o ambiente desafiador e inventivo das escolas que possibilita fomentar nos alunos o espírito criativo que por sua vez possibilita o desenvolvimento de habilidades onde o aluno é responsável pela busca de suas próprias (re)descobertas e constrói hábitos benéficos que o acompanharão por toda a sua vida, desde o espaço escolar à sua vida sócio-cultural. Transitar do conhecimento cotidiano para o científico significa tão somente construir níveis cada vez mais aprimorados, racionais e intricados nos três aspectos do conhecimento, usando-os de acordo com o contexto em questão. A esse respeito, Fabro (1996, p. 23 e 24) coloca que:

> A operação aritmética, realizada na escola elementar, embora tenha ligação com situações do concreto do aluno, é produto de elaborações mentais complexas. Não é uma compreensão das propriedades sensíveis, mas do já matematizado e, portanto, de relações expressas por um algoritmo. Este, por sua vez, de um lado traduz a simplificação de diversos cálculos numa única forma de cálculo e, por outro lado, envolve quantidades que se utilizam de um sistema de signos e regras, o sistema de numeração, que foi sendo sistematizado no decorrer da história da humanidade. A escola trabalha suas ideias quantitativas numa representação simbólica, produto de um intricado processo de elaboração, organizado basicamente através de regras, que dirigem sua utilização.

A história do saber matemático inclui-se nesta pesquisa como uma alternativa de utilizar as informações sobre o desenvolvimento histórico-epistemológico do saber matemático no ensino da Matemática no ambiente escolar. De um modo geral, a produção do saber matemático ao longo da história da humanidade se caracteriza por uma constante criação e organização formal de representações da interpretação de situações da vida cotidiana, o que o validou enquanto saber social. A partir daí, ele foi se incorporando à estrutura cultural, que com o passar do tempo, foi organizado e difundido através de sua institucionalização na sociedade. Contudo, reconstruir a história do saber matemático tem significativas implicações pedagógicas na construção do conhecimento cotidiano, do conhecimento escolar e do conhecimento científico dos alunos. Dessa forma pode-se presumir que sob uma perspectiva construtivista baseada na história, a geração de conhecimento busca informações sobre o passado, para a partir de uma reflexão/ação sobre esse passado, transplantá-lo para o presente, de maneira a desenvolver uma ação produtiva desse saber direcionando-o ao futuro. Segundo Vergani (1993):

> A matemática é um lugar temporal onde a novidade se transforma em tradição e a tradição se converte em novidade. (...) Historicamente, a realidade da matemática e a 'matemática do real' nunca voltaram as costas uma à outra.

O ensino de Matemática apresenta dois aspectos básicos. O primeiro aspecto consiste em fazer relações entre as coisas do mundo real com as suas representações, como símbolos, figuras, tabelas, gráficos etc. O segundo aspecto se refere à relação dessas representações com os princípios e os conceitos matemáticos. E nesse processo de relacionar, o aluno deve ser estimulado a se comunicar matematicamente, ou seja, falar, ler e escrever matematicamente, trabalhando com representações matemáticas de vários os tipos, desde a simples utilização dos símbolos para representar quantidades ao tratamento de dados em forma de tabelas e gráficos.

A aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada com a compreensão, ou seja, com a apreensão do significado de um saber matemático. Apreender o significado de um objeto matemático implica em vê-lo em suas relações com outros objetos e fatos. Dessa forma, tratar os conteúdos de maneira estática e linearmente organizada, apenas contribui para o desfavorecimento de relações e conexões, o que é fatal quando se fala em aprendizagem com significado. Consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's)[2] que:

> O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (PCN's, 1997, p. 20)

Sendo assim, a escolha e a organização de um currículo de matemática não pode se pautar unicamente em sua lógica de organização interna, pois dessa forma corre-se o risco de desvalorizar, ou ainda, de desconsiderar sua importância social e a contribuição que ela oferece para o desenvolvimento social da criança. Para isso, ela precisa ser entendida e trabalhada como um processo de construção constante, pois o saber matemático é um saber social, historicamente construído e em evolução permanente. E é dessa forma que ele deve ser apresentado e desenvolvido com o aluno, pois assim ele pode compreender a Matemática sob vários aspectos: filosófico, científico e social, percebendo assim a sua importância no mundo.

[2] Publicados em 1997, os Parâmetros Curriculares Nacionais da Educação Básica, comumente conhecidos como PCN's, foram desenvolvidos por especialistas ligados ao Ministério da Educação com o objetivo de criar um referencial para colaborar com a elaboração (ou revisão) da proposta curricular de todo o ensino fundamental do país. É um documento que se constitui basicamente de orientações aos professores, distribuídos por áreas de conhecimento, que incluem Língua Portuguesa, Matemática, Ciências naturais, História e Geografia, Arte, Educação Física, Temas transversais - Ética, Meio ambiente, Saúde, Pluralidade Cultural e Orientação Sexual.

3.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA

Pensando em respeitar os procedimentos lógicos de um determinado contexto social e, simultaneamente, trabalhar os constantes mais universais, a escola deve considerar alguns critérios no que se refere ao ensino de matemática nas séries iniciais. Primeiramente é preciso ter a sensibilidade de observar o tempo que a humanidade levou para a matemática alcançar o status que tem nos dias atuais e considerar que a criança também percorre esse caminho no seu fazer matemático. Em segundo, mas não menos importante, é preciso desenvolver atividades que relacionem situações-problema do cotidiano da criança, ou seja, do grupo social no qual ela está inserida, para que ela relacione com as teorias matemáticas. E em terceiro, partir desses contextos para criar novas situações onde a criança poderá mobilizar os conhecimentos que já tem, bem como ampliá-los, construindo, assim, novas aprendizagens.

Atualmente o ensino de matemática passa por uma clara dualidade. De um lado, há uma tendência tradicional, rígida, com pouca funcionalidade e muitos elos, onde predominam, em sua maioria, os livros, os conteúdos programáticos e as ações em sala de aula que juntos formam a concepção eleita por grande parte dos professores, pais e até mesmo de autores. De outro, percebe-se uma visível inquietação, especialmente por parte de professores. Inconformados e insatisfeitos com os resultados frente a esse ensino, muitos professores perseguem um caminho pela busca de novas alternativas, que visam basicamente o desenvolvimento de um ensino diferenciado, mais significativo para o aluno de hoje e mais interessante para o cidadão que se pretende formar. Essa busca é motivada pelo frequente fracasso no ensino de matemática, pelas atuais mudanças sociais, políticas e culturais, que sugerem uma formação diferenciada, e pela baixa motivação do aluno em aprender matemática.

Nesse sentido, ao refletir sobre o ensino de matemática nas séries iniciais na atualidade, é de senso comum a ideia de que o aluno deve desenvolver competências e habilidades matemáticas para a vida em sociedade. Doravante, não tem sido simples definir quais são essas habilidades e competências a fim de consolidar uma proposta que valide essa concepção e dê condições de operacionalizá-la. O fato é que o conhecimento constitui um bem importante para qualquer indivíduo, em qualquer sociedade. Sem conhecimento não há produção de serviços, não há desenvolvimento, nem cultura no sentido antropológico. Sem ele não há profissionais de qualquer área, nem tampouco pesquisas visando a melhoria das condições gerais de vida.

Na formação tradicional, os alunos são submetidos a longos anos de estudos, visando a preparação para a continuidade desses. Assim, o aluno do 1º grau se preparava para o 2º grau, que por sua vez se prepara para o vestibular. E chegando na universidade o aluno constata que durante todo esse tempo ele havia se dedicado a uma quantidade significativa de conteúdos, que não vai utilizar, que não sabe mais usar e que até esqueceu. Mas ao mesmo tempo ele percebe que deixou de aprender muitos conteúdos extremamente necessários.

Mesmo o ensino superior não garantia a formação de um jovem para o exercício de sua profissão. Muitos profissionais só começavam a aprender sobre a profissão nos períodos de estágio, que geralmente aconteciam no final dos cursos. De alguma maneira, esse sistema tradicional de formação se mostrou, e tem se mostrado, bastante ineficaz, provocando altos índices de exclusão e desistência ao longo do ensino básico e se estendendo à universidade. Sobre essa questão, Fabro (1996, p. 21 e 22) coloca que:

> A eficiência da escola está relacionada com a sua capacidade de organizar processos, descobrir formas adequadas para a transmissão do conhecimento e crescimento dos alunos, principalmente considerando que na matemática existe uma especificidade que a caracteriza e uma lógica de sua construção a ser respeitada.

Os alunos da atualidade vivem em uma sociedade tecnologicamente mais desenvolvida, porém mais confusa, devido ao novo ritmo global de vida. A estrutura familiar mudou e a escola também teve sua dinâmica, seu ritmo e suas relações internas modificadas. Aquele pacote educacional de outrora já não satisfaz as necessidades e as condições sociais, tampouco as do próprio aluno. Mas apesar dessa evidente falência, há uma certa insistência em manter um modelo de escola muito semelhante ao relatado anteriormente.

É o caso de refletir sobre quais informações se adaptam à maioria das pessoas do mundo atual, quais informações são necessárias para viver na sociedade contemporânea, ou seja, pensar em como desenvolver nesse aluno de hoje, habilidades e competências que sejam úteis para a vida.

Nos últimos vinte anos, o processo de ensinar, especialmente no ensino formal, vem sendo reestruturado. Ensinar deixou de ser uma mera transmissão de conhecimentos para elevar-se a um nível supremo onde se considera a construção do conhecimento através de uma relação muito peculiar entre professor e aluno. Alves (1994, p.4) resume poeticamente:

> Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais...

Em se tratando do ensino de matemática nas séries iniciais, faz-se necessário uma análise sobre o papel da matemática nessa fase. Nos PCN's, (BRASIL et al, 1997, p.29) afirma-se que:

> A matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Faz parte da vida de todas as pessoas nas experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades.

Para tanto é importante que todo esse potencial da matemática seja explorado o mais amplamente possível nessa fase, para que ela possa desempenhar seu papel na formação intelectual, na estruturação das ideias, no aprimoramento do raciocínio dedutivo da criança, na sua aplicação a situações problemáticas, no cotidiano e como suporte para o desenvolvimento de outras áreas do conhecimento. A criança precisa entender a matemática como um conhecimento que pode ajudá-la no desenvolvimento do seu raciocínio, da sua capacidade de se expressar e da sua criatividade.

Os conhecimentos sobre números, que se desenvolvem justamente na base da escolarização, são importantes sustentáculos sobre os quais outros conceitos matemáticos se desenvolverão ao longo da vida escolar. Behr et al (1983, p.91) afirmam que "*os conceitos relacionados aos números racionais estão entre as idéias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização*." Sendo assim, os professores que apresentarem limitações conceituais, certamente encontrarão empecilhos para trabalhar com os diversos registros desse conteúdo e seus diferentes significados. E sem as competências essenciais para lidar com essas representações, o professor não consegue promover situações que levem os alunos a desenvolver um sentido para conteúdo, acabando por desenvolver obstáculos para sua compreensão.

Cabe ao professor o papel de identificar as características principais da matemática e dos conteúdos a serem desenvolvidos, suas particularidades, sua história, sua simbologia, seus métodos, suas subdivisões e suas aplicações, para com base neles conceber com clareza suas próprias concepções a respeito dela. Nos PCN's (1997, p. 29), encontra-se uma ideia que sintetiza bem o papel da matemática no ensino fundamental:

> (...) é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.

O ensino realizado na escola é o grande responsável por socializar o saber matemático e a sua linguagem peculiar. Para isso, ela precisa compreender como esse saber é constituído, seus conceitos, suas representações, seus processos e procedimentos de cálculo a eles relacionados, e, a partir daí, se organizar para apresentar um discurso e uma prática que favoreçam o trânsito do conhecimento no decorrer do processo escolar.

4. CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA SÓCIO-INTERACIONISTA DE LIEV VIGOTSKII

Neste capítulo apresentam-se os pressupostos teóricos referentes à teoria sócio-interacionista que fundamentam a elaboração de estratégias e atividades para o ensino de frações. O capítulo é dividido em três seções. Na primeira seção apresenta-se o nascimento da teoria sócio-interacionista. A segunda seção trata do desenvolvimento e da aprendizagem segundo Vigotskii, com subseções que tratam dos planos genéticos e da relação entre aprendizagem e desenvolvimento. Na terceira seção apresentam-se os marcos da teoria de Vigotskii que influenciaram o processo de ensino-aprendizagem, onde cada subseção trata de um marco específico: interação, mediação, internalização, zona de desenvolvimento proximal (zdp), formação de conceitos e criatividade.

4.1 O NASCIMENTO DA TEORIA SÓCIO-INTERACIONISTA

Vivemos um período de intensas e rápidas transformações sociais. E no cerne dessas mudanças fundamentais que acontecem especialmente no mercado de trabalho e nas relações sociais, encontram-se as mudanças nos meios de comunicação. A partir dessas mudanças, novas demandas são criadas, oferecendo novas possibilidades para os processos de ensinar e aprender. Nesse espaço, o conhecimento tácito e o lugar comum que a educação ocupa, tal qual era a cinquenta anos atrás, certamente estão inadequados. Fabro (1996, p. 21) destaca que:

> A institucionalização do processo educativo que ocorreu com o surgimento da escola, determinou a institucionalização pedagógico-escolar que tem como instrumento básico de trabalho o saber metódico, sistemático, científico, portanto, a cultura chamada erudita, que predomina sobre o saber espontâneo, que é o saber popular, assistematicamente adquirido e que, por isso mesmo, tem o caráter de conhecimento fragmentado.

Partindo da premissa de que é evidente a necessidade de proceder a uma mudança nas práticas pedagógicas, em especial no que concerne a disciplina de Matemática, faz-se necessário esclarecer de que modo se processa a aprendizagem, para que posteriormente seja possível apontar os princípios pedagógicos de cunho científico devidamente fundamentados.

> O movimento pedagógico que importa para caracterizar a mediação determinada pela escola, não poderá ser um movimento qualquer, mas aquele que faz com que uma totalidade confusa da realidade se transforme em outra melhor interpretada pelos conceitos nela adquiridos. Daí a inoperância de um saber fragmentado, não vinculado à totalidade e que, em consequência, desconhece a relação teoria e prática, e não consegue mostrar o conhecimento em sua perspectiva social e histórica e, portanto, evidenciando seu caráter de mutável. (FABRO], 1996, p. 21)

O ser humano é essencialmente social, por isso não consegue viver só. Para crescer, aprender, construir conhecimento, para se desenvolver, ele precisa dos outros, precisa interagir, trocar, (com)partilhar. E é a linguagem, a grande ferramenta social de contato que possibilita a cada indivíduo, partindo dessa interação com o outro, completar-se para desenvolver o seu potencial.

Foi com esse pensamento que Liev Semiónovitch Vigotskii (1896-1934), um psicólogo e professor judeu russo, desenvolveu seus estudos que fundaram a teoria da psicologia histórico cultural, também conhecida como psicologia interativista sócio cultural, ou psicologia sócio interacionista, ou ainda, teoria histórico social. Vigotskii foi o primeiro psicólogo moderno a enfatizar que a mente humana é construída social e culturalmente, ou seja, que o homem e a cultura se integram pela atividade cerebral, estimulada pela interação social, que por sua vez é mediada pela linguagem (fala), essa ferramenta que diferencia o homem dos demais seres vivos.

Ilustração 10 – Liev Semiónovitch Vigotskii
Fonte: www.marxists.org

Vigotskii nasceu em Orsha, em pleno império russo, na região da Bielorrusia, do final do século XIX e faleceu aos 37 anos, vítima de tuberculose. Apesar da pouca idade, seu legado é vasto e intenso, tendo deixado mais de duzentos trabalhos científicos, os mais conhecidos nos livros *Pensamento e Linguagem* e *A formação social da mente*. Em sua infância, Vigotskii recebeu sua formação inicial através de tutores, na própria residência, o que era uma tradição das famílias abastadas. Quando jovem, foi estudar Direito na Universidade de Moscou, onde fazia parte de um grupo de jovens intelectuais que buscavam uma relação entre o socialismo e uma nova psicologia, que integrasse corpo e mente. É que enquanto fazia seu curso superior, ele frequentou cursos de diversas áreas do conhecimento, como psicologia, filosofia e literatura, na Universidade Popular de Shanyavskii. E em seus estudos, ele não se limitou a pesquisar autores soviéticos, pois a então União Soviética mantinha intercâmbio intelectual com os Estados Unidos e com países da Europa Ocidental.

Em 1917, Vigotskii graduou-se em Direito. Esse ano foi um marco na revolução russa, pois com a queda do império dos Czares, surgiu uma nova Rússia, socialista, governada pelas ideias de Carl Marx, que alegava que tudo é resultado de um processo histórico, e que as mudanças históricas na sociedade e na vida material é que modificavam a consciência e o comportamento humanos. Alguns anos mais tarde, Vigotskii estudou Medicina em Moscou e Karkov. Tendo transitado nessas áreas, em pouco tempo ele conseguiu acumular um vasto conhecimento a respeito das mais diversas áreas do conhecimento. Essa formação interdisciplinar foi determinante na fundamentação de suas ideias, que associavam a biologia humana com a filosofia, a literatura e a psicologia.

Foi sob a influência dessas ideias que Vigotskii fundamentou e validou a sua teoria sobre as funções psicológicas superiores e sobre como a linguagem e o pensamento estão fortemente conectados. Em seus primeiros registros já se evidenciava a sua formação filosófica baseada no pensamento marxista, onde se apresentavam as categorias individuais da dialética, consideradas no sentido de encontrar respostas concretas aos problemas apontados pela psicologia, com o objetivo de estabelecer uma teoria única em torno dela e não uma mistura de ideias aproximadas. Sobre isso, Luria (2001, p. 25) aponta que:

> Influenciado por Marx, Vigotskii concluiu que as origens das formas superiores de comportamento consciente deveriam ser achadas nas relações sociais que o indivíduo mantém com o mundo exterior. Mas o homem não é apenas um produto do seu ambiente, é também um agente ativo no processo de criação deste meio.

Vigotskii passou a estudar os fenômenos psíquicos em torno do método dialético, pois entendia que eles precisavam ser analisados e compreendidos como um processo em movimento. Disposto a entender de que maneira os processos naturais de maturação física e os mecanismos sensórios se envolvem com os processos determinados pela cultura para produzir as funções psicológicas dos adultos, inicialmente Vigotskii passou a chamar essa forma de estudo de psicologia cultural, histórica ou instrumental, onde cada um desses termos representava um aspecto diferente dessa nova forma de estudar a psicologia que ele vinha desenvolvendo.

Como aspecto cultural, ele se refere aos meios estruturados socialmente, usados para organizar os tipos de tarefas e atividades enfrentados pelas crianças e os tipos de instrumentos, físicos ou mentais, que a criança dispõe para dominá-las. Um desses instrumentos, segundo Vigotskii o mais básico, trata-se da linguagem, que exerce papel fundamental na organização e no desenvolvimento dos processos de pensamento.

O aspecto histórico se mistura ao cultural. Os instrumentos que o homem utiliza para dominar seu ambiente e o próprio comportamento foram criados por ele próprio e vêm sendo aperfeiçoados ao longo da história social da humanidade. Segundo Luria, "*A linguagem carrega consigo os conceitos generalizados, que são a fonte do conhecimento humano.*" (2001, p. 26) Dessa forma, a escrita e a aritmética, por exemplo, sendo instrumentos culturais especiais, oferecem oportunidades poderosas ao homem de fazer uma análise do passado para agir no presente, projetar e aperfeiçoar o futuro.

O aspecto instrumental se refere ao fato de que as funções psicológicas complexas agem como mediadoras, uma vez que incorporam os estímulos auxiliares, normalmente produzidos pela própria pessoa.

Vigotskii entendia que esses três aspectos se aplicavam ao desenvolvimento infantil. De fato, desde que nasce a criança fica exposta à interação constante com o adulto, que vai incorporando-a à sua cultura, ou seja, à reserva de significados e hábitos historicamente acumulados. Inicialmente, as crianças respondem às questões gerais através de processos naturais, garantidos por sua herança biológica. Porém, com o adulto fazendo uma mediação constante da criança com o mundo, os seus processos psicológicos instrumentais mais complexos começam a se estabelecer.

Até o momento fica claro que a preocupação inicial de Vigotskii foi tentar explicar as formas mais complexas da vida consciente do homem, não no sentido neurológico ou espiritual, mas em relação às condições externas, nas mais diversas formas histórico-sociais de existência, como na vida social, no trabalho, entre outros.

4.2 DESENVOLVIMENTO E APRENDIZAGEM SEGUNDO VIGOTSKII

4.2.1 O desenvolvimento e os planos genéticos

Uma forma interessante de entrar no que Vigotskii concebeu como desenvolvimento é conhecer o que ele chamou de planos genéticos de desenvolvimento, uma ideia de que o mundo psíquico, o funcionamento psicológico não é inato, não nasce com as pessoas, nem tampouco está acabado, mas que também não é recebido pelo sujeito como um pacote pronto do meio ambiente.

Por isso Vigotskii é chamado de interacionista, por considerar o que vem de dentro do sujeito e o que vem do ambiente. Mas a postulação interacionista de Vigotskii ganha vida a partir dos planos genéticos que ele postula, quando ele fala das quatro entradas do desenvolvimento que juntas caracterizam o funcionamento psicológico do ser humano: a filogênese, história da espécie humana; a ontogênese, história do indivíduo da espécie; a sociogênese, história do meio cultural no qual o sujeito está inserido; e a microgênese, um aspecto mais microscópico do desenvolvimento.

A filogênese trata da história de uma espécie animal. Toda espécie animal tem uma história própria e essa história define limites e possibilidades do funcionamento psicológico, ou seja, algumas coisas o sujeito é capaz de realizar, outras não. O ser humano, por exemplo, é bípede, por ter os membros superiores liberados pode realizar outros tipos de atividades e movimentos finos como a pinça, ou seja, possui uma série de características do corpo humano, do organismo, que juntas vão fundamentar o funcionamento psicológico. Outra característica muito importantes da espécie animal humana é a plasticidade do cérebro. O ser humano tem um cérebro extremamente flexível e adaptável às mais diversas circunstâncias diferentes. Isso está ligado ao fato de que a espécie humana não nasce pronta, ou seja, o ser da espécie humana é o menos pronto ao nascer. Por isso, por possuir uma parte do desenvolvimento tão em aberto, o ser humano tem um cérebro tão flexível, porque ele vai se adaptando e funcionando de determinadas formas de acordo com o que o ambiente vier a lhe fornecer.

O segundo plano genético postulado por Vigotskii é o chamado ontogênese, que trata do desenvolvimento do ser, de um determinado indivíduo de uma determinada espécie. Em cada espécie o ser tem um determinado caminho de desenvolvimento, desde seu nascimento à sua morte, seguindo um determinado ritmo de desenvolvimento, em uma determinada sequência. Por serem de natureza biológica e tratarem da pertinência do homem à espécie, ontogênese e filogênese estão fortemente ligados. Cada espécie tem seu próprio percurso. Ana espécie humana, por exemplo, a criança nasce e só fica na posição deitada. Algum tempo depois ela aprende a sentar, depois a engatinhar, depois a andar e assim por diante, mas nessa sequência. Várias coisas são determinadas pela passagem daquele indivíduo da espécie por uma certa sequência de desenvolvimento.

O terceiro plano genético que Vigotskii postulou, a sociogênese, também chamado plano histórico cultural, que nada mais é que a história da cultura na qual o sujeito está inserido, não no sentido cronológico, mas trata da história das formas de funcionamento cultural, que interferem no funcionamento psicológico e que definem, de certa forma, o funcionamento psicológico. Sendo assim, essa questão da significação pela cultura tem dois aspectos: a cultura funciona como um amplificador das potencialidades humanas, como por exemplo, o homem anda mas não voa, porém agora pode voar porque criou o avião.

O outro aspecto da cultura é o modo como cada sociedade organiza o desenvolvimento de maneiras tão diferentes, ou seja, a passagem pelas formas de desenvolvimento é lida e relida pelas diferentes culturas nas mais variadas formas. Um exemplo bem clássico é o da adolescência. A puberdade é um fenômeno biológico. É fato que todos os seres humanos passam pela puberdade, amadurecem sexualmente, aparecem caracteres sexuais secundários, mudanças no corpo, entre outros aspectos. Mas historicamente, a puberdade é compreendida formas muito diferentes em cada cultura. Portanto, o conceito de adolescência passa a ser um conceito cultural, apesar de fundamentado no conceito biológico de puberdade. A nossa cultura é um exemplo disso. A cada geração a adolescência se torna um período bastante estendido. Atualmente ela é muito mais estendida do que era a cinquenta anos atrás. Hoje é muito provável que uma menina de nove anos já tenha desenvolvido sua vaidade o suficiente para se preocupar em se arrumar, em ter um namorado, mas em contrapartida ela pode morar junto com os pais até os 30 anos e ter uma relação de filha adolescente.

E o quarto plano genético é a microgênese, que diz respeito ao fato de que cada fenômeno psicológico tem a sua própria história. O termo micro não é necessariamente no sentido de pequeno, mas de um foco bem definido. A microgênese vai analisar o espaço entre saber algo e não saber. Por exemplo, entre uma criança não sabe escovar os dentes e aprender a escovar os dentes, algo aconteceu e um tempo passou. Para compreender o fenômeno “aprender a escovar os dentes” é preciso olhar de uma forma micro para esse fenômeno. Então como a criança aprendeu a escovar os dentes é a microgênese do aprender a escovar os dentes.

O mais interessante a respeito da microgênese é que ela abre as portas da da teoria para uma visão não determinista. A filogênese e a ontogênese são carregadas, de certa forma, de um certo determinismo biológico, pois o sujeito está atrelado às possibilidades da sua espécie, do seu momento de desenvolvimento como um ser daquela espécie. A sociogênese apresenta uma tênue característica determinista em termos socioculturais, pois a cultura está definindo através de onde o sujeito pode se desenvolver, traçando limites e possibilidades históricos de desenvolvimento. Mas a microgênese aponta para o fato de que cada pequeno fenômeno tem a sua história e como não existem dois sujeitos com histórias iguais, surge a construção da singularidade individual e da heterogeneidade entre os seres humanos.

Assim, se um professor tem em sua classe duas crianças, ambas com 10 anos, ambas originárias de família de classe média, ambas com pais alfabetizados, sendo que as duas estão naquela escola, naquela sala e naquele bairro, apesar de ser tudo tão parecido, as crianças não são iguais, simplesmente porque elas têm experiências diferentes, famílias diferentes, ou seja, existem fatos na história de cada uma que vão definir a singularidade a cada momento de sua vida.

4.2.2 Ensino, aprendizagem e desenvolvimento

O fato de Vigotskii ser tão conceituado no meio pedagógico se deve ao fato de que ele fala da escola, fala do professor, valoriza a intervenção pedagógica, valoriza o papel do professor na formação do sujeito - esse sujeito que passa pela escola, além de ter na escola uma acepção fundamental para o seu funcionamento psíquico.

Vigotskii chamou a atenção para a relação entre ensino e a aprendizagem escolar e desenvolvimento cognitivo. Diante das teorias mais importantes a respeito da relação entre desenvolvimento e aprendizagem, ele afirmou que os vários pontos de vista relativos a esta questão poderiam ser agrupados em três categorias.

A primeira categoria se refere à ideia de que, em essência, a aprendizagem escolar deve seguir o desenvolvimento, ou seja, as funções psicológicas da criança precisam atingir determinado nível de amadurecimento antes de iniciar o processo de aprendizagem escolar. Os psicólogos dessa categoria, entre eles Piaget e Binet, consideravam que as funções psicológicas se desenvolvem de uma maneira "natural", talvez porque relacionassem seu desenvolvimento diretamente à maturação das funções cerebrais.

> Segundo estas teorias, a aprendizagem é um processo puramente exterior, paralelo, de certa forma, ao processo de desenvolvimento da criança, mas que não participa ativamente neste e não o modifica absolutamente: a aprendizagem utiliza os resultados do desenvolvimento, em vez de se adiantar ao seu curso e de mudar a sua direção. (VIGOTSKII 2001, p. 23)

Em outras palavras, era uma visão de que os processos de desenvolvimento da criança são independentes do aprendizado.

A segunda categoria, cuja ideia se opunha totalmente à anterior, afirmava que a aprendizagem é a força que atua no sentido de promover o desenvolvimento cognitivo, ou seja, "*aprendizagem é desenvolvimento*" (VIGOTSKII, 2001, p. 104). Metaforizando esta concepção, se a aprendizagem fosse uma árvore, o desenvolvimento seria sua sombra.

Por fim, na terceira categoria acontece a tentativa de conciliar as ideias das duas primeiras, afirmando que são parcialmente corretas, ou seja, que o desenvolvimento da criança se baseia tanto nos processos de amadurecimento quanto na aprendizagem.

Insatisfeito com os três pontos de vista, Vigotskii afirmou que a aprendizagem e o desenvolvimento são processos distintos e que, portanto, não devem ser confundidos, mas que interagem mutuamente.

> A criança aprende a realizar uma operação de determinado gênero, mas ao mesmo tempo apodera-se de um princípio estrutural cuja esfera de ampliação é maior do que a da operação de partida. Por conseguinte, ao dar um passo em frente no campo da aprendizagem, a criança dá dois no campo do desenvolvimento; e por isso aprendizagem e desenvolvimento não são coincidentes. (VIGOTSKII, 2001, p. 109)

Ele considerava que o aprendizado vem antes do desenvolvimento, que a aprendizagem é fundamental para o desenvolvimento desde o nascimento da criança, ou seja, aquilo que ela aprende é a base fundamental para o seu desenvolvimento.

Para isso tomou como ponto de partida a aprendizagem da criança antes de iniciar sua vida escolar. É fato que ao chegar à escola a criança já passou por diversas situações de aprendizagem informal, mesmo em relação a saberes escolares. Dessa forma, a aprendizagem escolar nunca inicia no zero. Qualquer aprendizagem que a criança realize na escola é precedida de uma história. O fato de uma criança começar a aprender os fatos básicos da aritmética não quer dizer que ela ainda não tenha se relacionado com quantidades e com operações aritméticas (por vezes até complexas). Portanto, a criança teve uma “pré-escola” informal em matemática e não se pode ignorar este fato.

Mas por uma questão até de bom senso, é indiscutível o fato de que precisa existir uma coerência entre a aprendizagem e o nível de desenvolvimento da criança. Não é necessário realizar testes para comprovar que apenas em certa idade é possível ensinar um determinado conteúdo, mas pode-se partir da ideia de que existe uma relação entre um certo nível de desenvolvimento e a capacidade potencial de aprendizagem da criança.

Por isso, para definir a relação efetiva entre desenvolvimento e aprendizagem, era preciso mais de um nível de desenvolvimento. E foi dentro desse contexto que Vigotskii considerou dois níveis de desenvolvimento: real e potencial.

> Tem de se determinar pelo menos dois níveis de desenvolvimento de uma criança, já que, se não, não se conseguirá encontrar a relação entre desenvolvimento e capacidade potencial de aprendizagem em cada caso específico. Ao primeiro destes níveis, chamamos nível do desenvolvimento efetivo da criança. Entendemos por isso o nível de desenvolvimento das funções psicointelectuais da criança que se conseguiu como resultado de um específico processo de desenvolvimento já realizado. (VIGOTSKII, 2001, p. 111)

Assim, o desenvolvimento real é constituído pela solução independente dos problemas e definido por testes que medem o nível de capacidade mental. Nesse nível, as funções mentais da criança se estabelecem como resultados de ciclos de desenvolvimento já finalizados.

A zona de desenvolvimento proximal caracteriza o espaço entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial, determinado pela solução de problemas, com a orientação ou auxílio de um adulto ou de crianças mais capazes ou mais desenvolvidas. Para Vigotskii, mais importante do que o que se pode fazer sozinho é o que se pode fazer com a ajuda dos outros. Assim a aprendizagem origina processos internos de desenvolvimento que só podem ocorrer quando o indivíduo interage com outras pessoas.

Vigotskii era contrário ao que chamava de "educação livre" das crianças, pois considerava que neste período do desenvolvimento (potencial), o contato com outras pessoas que possam limitar a liberdade adquirida por estas crianças é fundamental para que o desenvolvimento mental delas possa ser direcionado, ou seja, a "interferência" dos adultos, pais e professores, neste período é essencial.

Contudo, Vigotskii afirmava que a criança deve ser um sujeito ativo no processo de aquisição dos conhecimentos e é papel da escola, enquanto espaço de ensino sistemático e explícito, mobilizar todos os esforços necessários para levar a criança a (re)conceitualizar e, principalmente, desenvolver formas de pensar que se estendam para outras áreas e para situações que transcendam o espaço escolar. Segundo Flores (2006, p. 95)

> Um dos objetivos do ensino é levar o aluno a construir sua própria relação com o saber que lhe é ensinado. Porém, antes de tudo, é preciso que o professor não só tome consciência da significação que ele mesmo dá ao saber que ensina, mas, sobretudo, que ele compreenda o que é o saber que é proposto ao ensino. Ou seja, é preciso retomar o sentido do saber. Se não é possível fazer matemática sem passar pelos registros de representação, como foi visto aqui, é preciso, então, saber como isso foi possível, como se constituiu esse método de representação, a epistemologia. Isso tudo, para retomarmos a significação do saber matemático que ensinamos.

E assim, fica claro o papel do professor. Para Vigotskii, o professor é um mediador entre a criança e o mundo, um companheiro mais experiente nessa caminhada, um descobridor da zona de desenvolvimento proximal da criança, que a ajuda a interagir com os outros e consigo mesma, e assim atingir o que lhe é de direito, não o melhor além do outro, mas o melhor de si mesma: o seu potencial.

4.3 MARCOS TEÓRICOS VIGOTSKIIANOS QUE INFLUENCIARAM O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Após as ideias gerais da teoria sócio-interacionista, serão apresentados alguns pensamentos chaves vigotskiianos: interação, mediação, internalização, zona de desenvolvimento proximal, formação de conceitos, significado e sentido, e criatividade.

4.3.1 Interação

Vigotskii entendeu que para melhorar o nível da aprendizagem, mais do que agir sobre o meio, o sujeito precisava interagir. Para ele, a aquisição de conhecimento pelo sujeito se dá a partir de relações interpessoais, de trocas com o outro. Ele afirma que aquilo que parece individual no sujeito é, na verdade, fruto da construção da sua relação com o outro, um outro coletivo, que serve de veículo da cultura. Mesmo as características e atitudes individuais são essencialmente construídas pelas trocas com o coletivo e é justamente ali, no palco da cultura, dos seus valores, da negociação de sentidos, da teia dos grupos sociais, que o conhecimento é construído e internalizado. Tudo isso através da língua, das linguagens, dos símbolos escolhidos como metáforas ou outras figuras que caracterizam uma valiosa moeda de troca, ou seja, a interação acontece através da linguagem, que realiza uma espécie de mediação do sujeito com a cultura.

Vigotskii entende que as funções mentais superiores são formadas socialmente e transmitidas culturalmente através da linguagem. E mesmo que uma criança tenha potencial biológico para se desenvolver, se não interagir, não se desenvolverá como poderia, ou seja, de nada adiantará o sujeito ter todo o aparato biológico da espécie para desempenhar determinada tarefa se ele não participar de ambientes e práticas específicas que favoreçam essa aprendizagem.

4.3.2 Mediação

A ideia de mediação é mesmo a ideia de intermediação, ou seja, a de que há uma coisa interposta entre duas outras coisas. Em se tratando do ser humano, a premissa básica levantada por Vigotskii é que a relação do homem com o mundo não é direta, mas mediada através de instrumentos e de signos.

Na mediação por instrumentos o sujeito se relaciona com as coisas do mundo usando instrumentos intermediários, como por exemplo, usar uma faca para descascar uma fruta, ou um lápis para escrever, uma escova para pentear o cabelo etc. Esses instrumentos tecnológicos estão mediando a minha ação concreta sobre o mundo e o próprio mundo. Os instrumentos têm a função de regular as ações sobre os objetos.

Apesar de ainda basear seus estudos nas ideias marxistas, enquanto Marx concebeu o instrumento mediatizando a atividade laboral do homem, Vigotskii concebeu a noção de que, enquanto sujeito do conhecimento, o homem não acessa diretamente os objetos. É através da mediação, de recortes do real, que realizados pelos sistemas simbólicos disponíveis enfatizam a construção do conhecimento como uma interação mediada pelas mais diversas relações. Isso significa que o conhecimento não é uma ação do sujeito sobre a realidade, mas sim uma mediação feita por outros sujeitos.

O signo, enquanto instrumento psicológico por excelência, mediatizaria todo o processo social humano, inclusive o pensamento. Os signos são formas posteriores de mediação de natureza semiótica, fazendo uma interposição entre o sujeito e o objeto de conhecimento, entre o psiquismo eu e o mundo, de uma forma não concreta, de uma forma simbólica. Mas há um primeiro grupo de signos que possuem uma existência concreta, como por exemplo, o símbolo  é um signo que representa a ideia de que é proibido estacionar e todos compartilham dessa representação, os sujeitos desse sistema aprenderam que isso quer dizer proibido estacionar e se apropriam da informação de forma adequada. Ainda é um signo concreto, ou seja, um índice e uma informação de natureza simbólica, ainda é visível pelos outros, ainda está marcado no mundo fora do sujeito. Entretanto, não é de natureza instrumental, mas simbólica, no sentido de que não age concretamente sobre as coisas, mas num plano simbólico.

O segundo grupo de signos encontra-se no plano totalmente simbólico, internalizado, onde as coisas estão no sistema psicológico do indivíduo e funcionam como mediadores semióticos dentro do sistema psicológico do sujeito. Ao ver uma cadeira, por exemplo, o sujeito não está se relacionando com a cadeira de uma forma direta, não mediada, ele esbarra na cadeira, ou senta nela, ou apóia algum objeto sobre ela, fisicamente só, enfim ela remete o sujeito a alguma coisa que está na sua mente que é o conceito de cadeira, a ideia de cadeira, a palavra cadeira, a imagem cadeira. Segue que isso depende de como o sujeito vai compreender essa forma de representação na mente, mas seja qual for a forma, tem uma representação das coisas do mundo que estão dentro do sujeito, que não é o próprio mundo, mas sim representações do mundo. Isso é algo especifica e exclusivamente humana, que permite ao sujeito transitar por dimensões simbólicas, em dimensões de tempo, pensando em atos que já aconteceram, ou que vão acontecer, tudo por meio desses mediadores simbólicos. [3]

Os signos revelam as ações sobre o psiquismo do sujeito, representando algo diferente de si mesmo. O outro social pode se apresentar através de objetos, da organização dos espaços e do mundo cultural que rodeia o indivíduo.

O homem produz seus instrumentos para a realização de tarefas específicas, capaz de conservá-los para usos futuros, de preservar e transmitir sua função aos integrantes de seu grupo, de aperfeiçoar instrumentos conhecidos e de criar novos signos. Segundo Moysés (1997, p. 23),

> Inclui dentre os signos, a linguagem, os vários sistemas de contagem, as técnicas mnemônicas, os sistemas simbólicos algébricos, os esquemas, diagramas, mapas, desenhos e todo tipo de signos convencionais. Sua ideia básica é a de que, ao usá-los, o homem modifica as suas próprias funções psíquicas superiores.

Os instrumentos psicológicos, por sua vez, auxiliam o homem nas suas atividades psíquicas. Através dos signos, o homem pode controlar sua atividade psicológica voluntariamente e ainda ampliar sua capacidade de atenção, memória e acúmulo de informações. A mediação (semiótica) caracteriza a intervenção de signos na relação do homem com o mundo e com os outros homens. É através

---

[3] Para Peirce (2000), um símbolo é um signo arbitrário cuja ligação com o objeto é fruto de uma convenção, portanto, um signo convencional ou signo que depende de um hábito nato ou adquirido. Então, diferentemente de um ícone (símbolo que está ligado àquilo que representa através de alguma similaridade), ou de um índice (símbolo que está ligado àquilo que representa por conexão causal, factual, física, concreta), a ligação entre o símbolo e seu objeto dá-se por mediação, isto é, por associação de idéias, de modo a fazer com que o símbolo seja interpretado como se referindo aquele objeto. Essa associação de idéias é um hábito ou lei adquirida que fará com que o símbolo seja tomado como representativo de algo diferente dele. Assim sendo, “estrela”, “cachorro”, enfim, qualquer palavra comum, pode ser exemplo de um símbolo, na medida em que um símbolo pode ser aplicado a tudo aquilo que possa concretizar a idéia relacionada com a palavra. Isto quer dizer que o símbolo não mostra as coisas às quais se refere ou se aplica, mas permite imaginar seu referente por intermédio de uma imagem. Para o caso da estrela, por exemplo, o símbolo “estrela” não nos faz ver uma estrela no céu, mas nos permite imaginar uma estrela, tendo a ela associado a palavra. (FLORES *et al*, 2006, p. 89)

desse processo que as funções psicológicas superiores, especificamente humanas se desenvolvem. Enfim, os instrumentos mediadores têm como objetivo a realização da atividade humana.

Em seu esquema de relação estímulo-resposta, Vigotskii inseriu um novo elemento, que ele chamou de “instrumento psicológico”, originando um esquema de triangulação, algo que hoje nos parece muito óbvio, mas não o era na época. O esquema a seguir ilustra a ideia:

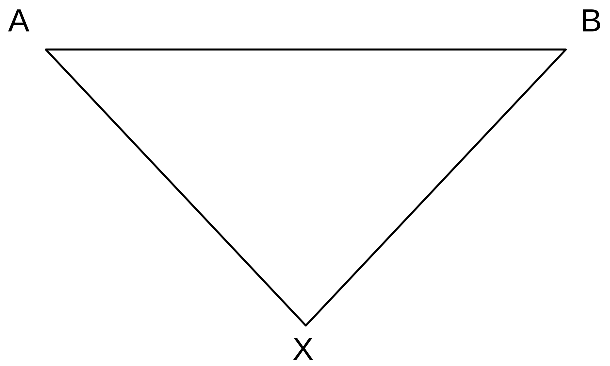


Ilustração 11 – Esquema de relação triangular estímulo-resposta de Vigotskii (1998, p. 53)
Fonte:

Nessa configuração, A é um estímulo, B é um estímulo associado ao A e X é o instrumento psicológico. Uma vez relacionados, esses dois estímulos se ligam a uma resposta. Moysés (1997, p. 25) fornece um exemplo, onde

> (...) o hábito de fazer marcas nos troncos de árvores ou nas pedras para registrar uma contagem foi encontrado em diferentes culturas. Para se ter clareza dessa concepção, suponhamos que, no exemplo dado, essas marcas se refiram ao número de caças abatidas. Segundo esse esquema, A seriam as caças, B a quantidade, e X, o signo utilizado como mediador que ajudaria o caçador a se lembrar da associação entre A e B.

Esse instrumento psicológico pode ser algo acrescentado pelo próprio sujeito ou por um sujeito externo, desde que tenha um significado. E com o passar do tempo, os instrumentos de mediação vão sendo descontextualizados, pois o significado dos signos vai se tornando independente do contexto espaço-tempo no qual os signos foram usados.

Enfim, é por meio de representações simbólicas, através da língua e da linguagem que a cultura negocia os sentidos das coisas, realizando a mediação entre a coisa e a compreensão da coisa, como se fosse uma tradução, uma afirmação, uma certificação, ou seja, um processo de semiose.

4.3.3 Internalização

Vigotskii defendia a tese de que o processo de desenvolvimento do pensamento infantil vai do social para o individual, considerando, inclusive, que a criança é um ser social por natureza, desde o seu nascimento. Um exemplo clássico é o da criança que se esforça para pegar algo que está fora do seu alcance e seu gesto é interpretado pelo adulto como um desejo de ter o tal objeto. A mãozinha estendida na direção do objeto é interpretada pelo outro como um gesto intencional de apontar, quando na verdade é o outro que, ao interpretar seu desejo, atrbuiu um significado que ainda não é da criança. Apenas mais tarde, quando ela fizer relação entre a situação em si e o seu movimento é que ela realmente começará a compreender o movimento como um gesto de apontar. Aí sim ela irá incorporá-lo ao seu rol de ações. Vigotskii (1981, p. 163) chamou de "lei genética geral do desenvolvimento cultural" considerando que:

> Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, em uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, a memória lógica, a formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. [...] A internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre as pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores.

Dessa forma, Vigotskii esclarece sua ideia em relação ao fato de que toda função psicológica já foi antes uma função social, originada em um processo de interação, além de deixar claro que a passagem do plano externo para o interno não é uma simples cópia, mas sim uma transformação do próprio processo, bem como uma mudança na sua estrutura e nas funções. Doravante, toda vez que uma função psíquica vai sendo internalizada acontece uma nova reestruturação mental, gerando um enriquecimento psicológico e intelectual. Isso se dá pelo simples fato de que ao ser internalizada, essa nova função começará a interagir com as demais funções que já existem na mente da criança, ou seja, acontece uma coordenação entre todas as funções, novas e existentes.

Em outra situação, se pegarmos, por exemplo, um livro, e houver um acordo entre nós de que vamos chamá-lo de livro e que se diz L I V R O e que serve para ler, a criança entende. Essa informação vai se instalar no seu cérebro, onde fica armazenada junto com o atributo ler. Esse é mais um marco teórico de Vigotskii: a internalização, momento em que o aprendizado se completa, pois a criança, ao pensar sobre o nome e o significado de livro, ao internalizá-los, consegue abstrair o conceito de caneta e torná-lo universal. Então, livro não caberá mais só na palavra livro, porque a própria criança descobre os muitos sentidos da palavra que agrega assim novos tons: afetivos, emocionais, de memória, de sentimento ou simplesmente de informação. Tudo através da mediação da linguagem, na troca com os outros (interação) e consigo mesma (internalização). A criança apreende conhecimentos, papéis sociais e valores.

E é a partir dessa lei genética do desenvolvimento cultural da criança, que Vigotskii explica outro conceito de sua teoria sócio-histórica, fundamental no meio educacional: a zona de desenvolvimento proximal.

4.3.4 Zona de desenvolvimento proximal - ZDP

O conceito de zona de desenvolvimento proximal só foi encontrado na obra de Vigotskii pouco antes de seu falecimento, no ano de 1933 e originou-se a partir do seu interesse pela lei do desenvolvimento e pelo processo de ensino-aprendizagem. O autor não via validade em descrever os processos de desenvolvimento das funções psíquicas superiores a partir de conquistas já realizadas. Para ele, mais importante que isso era buscar compreender a construção futura destas funções, ou seja, a criança precisa ser avaliada pelo que está aprendendo e não pelo que já aprendeu.

Partindo da observação de que as escolas de ensino fundamental esperavam crianças “prontas” para começar a ensinar os conteúdos do currículo escolar, Vigotskii verificou, após a realização de alguns testes, que o desenvolvimento cognitivo de cada criança evoluía diferentemente. Isso indicava que, no momento dos testes, cada criança estava em um estágio diferente de desenvolvimento, e como os testes só avaliavam resultados de processos já finalizados, as crianças que estavam no processo ficavam de fora. Apesar das semelhanças nos resultados, na realidade o desenvolvimento mental de cada uma era diferente. Esse acontecimento levou Vigotskii a investigar se as crianças que não são capazes de fazer algo sozinhas, o são com a ajuda de um adulto ou de um colega mais avançado que ela. Não que a criança imitaria o adulto ou o colega, no sentido de cópia, mas algo que envolvesse efetivamente uma experimentação construtiva. Mediada, a criança realiza ações semelhantes à do modelo de forma construtiva, fazendo as devidas modificações, o que resultará em uma internalização da compreensão do modelo. Para ilustrar a ideia, Vigotskii (1987, p. 116) afirma que "*o bom ensino é aquele que se adianta ao desenvolvimento*", agregando valor para a situação de ensino-aprendizagem, pois ao criar zonas de desenvolvimento proximal, o professor estimula o aparecimento de funções em fase de desenvolvimento.

> [...] a aprendizagem não é, em si mesma, desenvolvimento, mas uma correta organização da aprendizagem da criança conduz ao desenvolvimento mental, ativa todo um grupo de processos de desenvolvimento e esta ativação não poderia produzir-se sem a aprendizagem. Por isso a aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário e universal para que se desenvolvam na criança essas características humanas não-naturais, mas formadas historicamente. (VIGOTSKII *et al*, 1988, p. 15)

Assim, por sua teoria ter como norte a avaliação dos processos mentais envolvidos na compreensão do mundo, o modelo de aprendizagem apresentado por Vigotskii representou um avanço significativo na pedagogia, especialmente quando ele descreveu a zdp (zona de desenvolvimento proximal), uma das mais importantes etapas do processo de aprendizagem, que nada mais é do que o intervalo entre o que a criança já é, já sabe fazer autonomamente e aquilo que ela potencialmente pode vir a fazer e ser quando auxiliada, quando aprende com os outros. Proximal quer dizer próximo, perto, e é onde entra o adulto, o professor, ou um colega mais experiente do grupo ao qual a criança está inserida, que como parceiros de caminhada, percebem o seu potencial, estimulando a superação e a apropriação do que, em princípio, ela é naturalmente capaz.

4.3.5 A formação de conceitos

Para Vigotskii a fala se divide em dois componentes: o fonético e o significado, sendo eles os responsáveis por originar os conceitos, classificados por sua vez como espontâneos e científicos. Os conceitos espontâneos são aqueles em que a criança constrói inconscientemente, naturalmente, a partir da experiência, do cotidiano, do contato com objetos, fatos, fenômenos etc. Já os conceitos científicos são os formais, definidos e sistematizados pela ciência, transmitidos intencionalmente, geralmente a partir de uma metodologia específica. São basicamente os conceitos desenvolvidos na aprendizagem escolar.

Todo conceito científico está inserido em um sistema hierarquizado. Sendo assim, ao auxiliar o aluno na construção desse tipo de conceito, o professor possibilita que o aluno envolva-se indiretamente com o objeto através das abstrações de suas propriedades e da compreensão das relações que ele estabelece com um conhecimento mais abrangente. É, pois, a intencionalidade que diferencia o conceito científico do espontâneo, que orientada pelo uso da palavra é uma operação mental que exige uma concentração ativa sobre o assunto, possibilitando a identificação dos seus aspectos fundamentais até chegar à generalizações, aos conceitos propriamente ditos. Durante esse processo de analisar e sintetizar, de identificar a relevância de certos aspectos, a criança precisa transitar do específico para o geral e vice-versa.

> Nossa investigação mostrou que um conceito se forma não pela interação de associações, mas mediante uma operação intelectual em que todas as funções mentais elementares participam de uma combinação específica. [...] Quando se examina o processo de formação em toda a sua complexidade, este surge como um movimento do pensamento dentro da pirâmide de conceitos, constantemente oscilando entre duas direções, do particular para o geral e do geral para o particular. (VIGOTSKII 1987, p. 70)

É a interação desses dois tipos de conceito, o científico e o espontâneo, que possibilita a evolução real do pensamento, sendo a escola o espaço propício para a aquisição dessa interação. É por meio da ação do professor que uma criança consegue, por exemplo, dar explicações persuasivas a respeito de questões científicas, mesmo quando usa palavras que não faziam parte do seu léxico.

Para essa apreensão é preciso uma intencionalidade por parte do professor em sua interação com a criança. Ao entender os conceitos prévios da criança, o professor pode desenvolver estratégias e atividades baseadas na reflexão e na atividade, que por sua vez possibilitam à criança que ela faça a reconstrução e interaja com o conceito construído cientificamente. A proposta pedagógica baseada nas ideias vigotskiianas amplia as estratégias de pensamento e promove aprendizagens mais significativas, possibilitando o desenvolvimento da autonomia de pensamento. Para Vigotskii, o trabalho do professor com o aluno é um processo dinâmico, construído passo a passo nessa interação constante. O professor explica e dá informações, em seguida faz questionamentos para possíveis correções e por fim faz o aluno explicar. Nesse processo cada passo é de fundamental importância para o desenvolvimento da criança. Ao explicar, o professor faz muito mais do que uma mera transmissão, buscando na estrutura cognitiva da criança as ideias mais significativas que servirão de trampolim para o conteúdo a ser ensinado. E então os esquemas mentais existentes vão se ampliando e se modificando, ou ainda, sendo substituídos por outros mais amplos e consistentes. Para isso é de fundamental importância usar informações suficientes para exemplificar e enriquecer tal conteúdo.

Passando à ação de questionar, esse é o momento em que o professor precisa conhecer bem a zona de desenvolvimento proximal da criança, para, a partir daí, elaborar perguntas que desequilibrarão a estrutura cognitiva dela fazendo-a avançar no sentido de uma reestruturação cada vez mais elaborada.

E a ação de questionar se completa com a de corrigir, sendo esta muito mais que uma identificação do erro, mas uma orientação a respeito da análise sobre a ideia principal, excluindo as ideias secundárias para salientar apenas o que é indispensável.

Através de experimentos, Vigotskii concluiu que, ao dominar um nível mais elevado no que se refere aos conceitos científicos, a criança, por sua vez, eleva o nível dos conceitos espontâneos.

E esse processo de relacionar os conceitos espontâneos que a criança traz com os conceitos científicos que ela vai aprender, exige do professor uma compreensão dos diferentes significados que a criança atribui a esses conceitos, sejam eles espontâneos ou científicos. Além disso, o professor precisa perceber os contextos e os sentidos nos quais os conceitos serão utilizados.
A apropriação dos signos em forma de conceitos é um fator essencial para um salto qualitativo no desenvolvimento cognitivo da criança, pois simboliza internamente o mundo externo, liberando a criança do imediatismo da ação direta com a natureza, possibilitando a constituição do seu mundo interno e, consequentemente, a aprendizagem de princípios e soluções de problemas.

4.3.6 Significado e sentido

Um dos grandes questionamentos de Vigotskii ao tratar da relação entre pensamento e linguagem se refere à unidade fundamental dessa relação. Após alguns estudos, ele concluiu que essa unidade é, na verdade, o significado da palavra, pois ela é, concomitantemente, um fenômeno da linguagem e do pensamento, ou seja, é no significado da palavra que pensamento e fala se unem em um pensamento verbal. Assim, o significado de uma palavra é ela vista do seu próprio interior, é ela por ela mesma. Quando uma criança assimila o significado de uma palavra, significa que ela dominou sua experiência social.

Por sua vez, o sentido da palavra depende do seu uso, do contexto em que ela se origina. Entretanto, o seu significado continua relativamente estável. Sendo assim, é possível entender o significado como um sistema de generalizações que as pessoas compartilham, apesar de estarem em diferentes níveis de profundidade e amplitude. Já o sentido se refere ao significado da palavra para cada criança, a partir de relações que se referem ao contexto e às vivências afetivas dela.

Doravante, é o compartilhamento dos significados que estabelece uma compreensão nas relações interpessoais. Inúmeras são as possibilidades de acontecerem equívocos, distorções entre outros tantos problemas relacionados a essa questão e o professor precisa estar em permanente atenção para fazer as interferências necessárias.

4.3.7 A criatividade

A criatividade tem um significado confuso, especialmente no âmbito escolar, onde é comumente confundida com expressões que envolvem as artes em geral. Mais uma vez Vigotskii quebra um paradigma, quando infere que a imaginação criativa não é privilégio de poucos. Para ele, a atividade criativa surge quando o indivíduo (criança ou adulto) precisa acessar elementos já existentes para, a partir de uma combinação diferente, “criativa”, adaptar-se a novas situações. Por esse motivo ele sustenta a ideia de que todos, indistintamente, são capazes de realizar essa atividade criativa.

Apesar disso, Vigotskii destaca a sua complexidade. Ao contrário do que muitos pensam, a atividade criativa não surge em grandes *insights*, mas a partir de experiências prévias e de percepções internas e externas ao indivíduo.

Doravante, a atividade criativa da imaginação depende efetivamente do quão vasta e valiosa é a experiência prévia que o indivíduo registrou, sendo, por isso, uma função necessária. Dessa forma, pode-se concluir que a imaginação criativa é passível de desenvolvimento.

> A linguagem libera a criança das impressões imediatas sobre o objeto, lhe brinda com a possibilidade de representar-se tal qual o objeto que não é visto e pensar nele. Com a ajuda da linguagem, a criança obtém a Q possibilidade de liberar-se do poder das impressões imediatas, saindo para além dos seus limites (VYGOTSKI, 1993, p. 432).

5. CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE RAYMOND DUVAL

Neste capítulo refletem-se os pressupostos teóricos que fundamentam a elaboração de estratégias e atividades para o ensino de frações relativas às representações semióticas de Duval. O capítulo se desenvolve em apenas uma seção, onde apresenta-se o conceito de número como signo de um sistema semiótico e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática a partir dos registros de representações semióticas.

5.1 O NÚMERO COMO SIGNO: O FUNCIONAMENTO COGNITIVO DA COMPREENSÃO EM MATEMÁTICA A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇOES SEMIÓTICAS

O termo semiótica, de origem grega (semeion, signos) foi o termo usado para identificar a ciência dos signos. Estes signos mencionados referem-se à linguagem, sendo assim, pode-se resumir que a Semiótica é a ciência de todas as linguagens. Considerando a grande influência de Duval em trabalhos de pesquisa sobre os registros de representações semióticas, em especial, para o domínio da área de Matemática, adotamos como referencial teórico central deste trabalho, a abordagem teórica desse autor. Além disso, essa escolha está associada a um trabalho de pesquisa que trata mais especificamente a questão da diversidade de registros de representação semiótica no ensino-aprendizagem dos números racionais.

Tanto a língua falada quanto a escrita convencionam diversos signos para representar, comunicar ou transportar informações. Assim o faz a matemática. Ela se utiliza de signos para construir significados. E diferente de qualquer língua materna, a matemática possui signos praticamente iguais para um grupo de pessoas muito maior do que a de falantes de qualquer língua materna. Essa utilização de signos e símbolos de maneira unificada e universal indica que à matemática mais interessa a essência e a estrutura lógica por trás dos objetos que os símbolos propriamente ditos que irão representá-los. Essa ideia se traduz na definição encontrada em Aurélio (1999), "*matemática é a ciência que investiga relações entre entidades definidas abstrata e logicamente.*"

A maneira como expressamos o conhecimento matemático se dá dentro de um sistema de representação semiótico que possibilita representações variadas, como por exemplo, na língua materna, em forma de desenho, em linguagem algébrica, como fórmula ou outro signo especifico.

A semiótica trata as linguagens de forma mais ampla, como manifestações do conhecimento. Em verdade, ela estuda a relação das partes da linguagem. A semiótica, tendo como objetivo analisar, classificar e descrever todos os tipos de signos logicamente possíveis, tudo o que puder ser utilizado como elemento de comunicação, estabelece relações entre os diferentes códigos e linguagens. Em semiótica, tudo é signo. Segundo Peirce (2008, p. 46),

> "Um signo, ou *representamen*, é aquilo que representa algo para alguém, em algum aspecto ou sentido. Dirige-se a alguém, quer dizer, cria na mente de uma pessoa um signo equivalente ou, talvez, um signo mais desenvolvido. Ao signo que é criado chamo *interpretante* do primeiro signo. O signo representa algo, seu *objeto*. Representa o objeto, não em todos os sentidos, mas em referência a um tipo de ideia, que em alguns casos havia chamado terreno (*ground*) da representação."

Assim, Peirce considerava que o caráter linguístico do signo é a linguagem em ação. Nesta proposição o acesso à história do ensino de matemática pode servir de sustentação para, em uma primeira instância, suscitar as necessárias reflexões epistemológicas para compreendermos de que maneira os registros semióticos, na questão específica do conhecimento matemático, alçaram status de se tornar passível de suplantar o próprio objeto que representa. Em uma segunda instância, a história do ensino desse conteúdo pode ser uma rica fonte de inspiração para atividades didáticas, onde a sua seleção permite aos alunos compreender as diversas formas de representações de quantidades.

Observando a questão dos registros de representação semiótica é necessário perceber que o processo de constituição das atuais representações do conhecimento matemático foi gradativo e variável de uma cultura para outra. Desde a Antiguidade é de domínio público que haviam descobertas matemáticas admiráveis, de povos como os Egípcios, Babilônicos, Gregos etc... Mas suas descobertas se davam em um plano de ordem prática, ou seja, estavam extremamente ligadas às necessidades do cotidiano, e neste contexto se utilizavam artifícios diversificados para os cálculos, como materiais manipulativos, a língua materna etc..., cabendo basicamente aos números o papel de registro apenas do resultado.

Os saberes matemáticos continuam cada vez mais presentes nas mais diversas situações cotidianas. A sociedade atual é permeada pela presença dos números, que por sua vez são extremamente importantes nas relações sociais. Portanto, a compreensão da gênese do conceito de número é de fundamental importância para aprender e ensinar matemática.

De um modo geral, número é qualquer ideia que se tenha a respeito de uma certa quantidade. A partir do momento que se deseja comunicar essa quantidade, utilizando algum tipo de representação (escrita, pictórica, falada, ...), esse registro assume a identidade de numeral. Mas se for um registro escrito, pertencente a um sistema de numeração específico, trata-se de um algarismo, conforme as ilustrações a seguir:

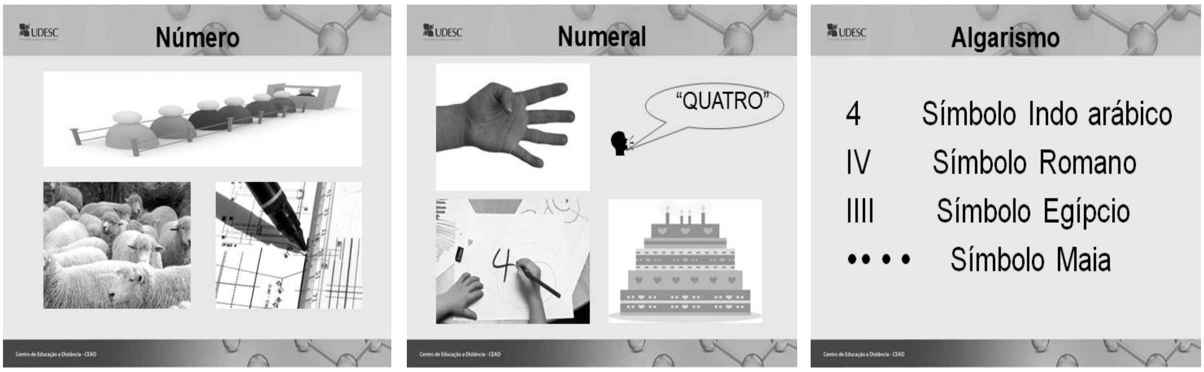


Ilustração 12 – Ilustração das ideias de número, numeral e algarismo.
Fonte: Slides da web aula "O número como signo" da disciplina de Conteúdos e Metodologias do Ensino de Matemática I do curso de Pedagogia à distância da UDESC/CEAD.

Cabe aqui ressaltar que tanto número, quanto numeral e algarismo são signos, pois fazem parte de um sistema semiótico. Assim como o homem inventou e usou instrumentos diversos, ele também inventou e usou os símbolos como meios auxiliares para solucionar qualquer problema de ordem psicológica, que no caso do pensamento matemático, envolvem representações, comparações, operações, entre outros.

Diferente dos instrumentos físicos, ditos concretos, os objetos matemáticos, incluindo os números, não são naturalmente compreensíveis em relação à percepção ou em uma situação imediata. Eles são construídos em categorias e organizados de acordo com as suas diversas representações semióticas. Para Duval (1993, p. 39):

> les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents.[4]

Ao analisar as dificuldades que os alunos encontram na compreensão da matemática através de uma abordagem cognitiva, deve-se ter como objetivo principal da matemática colaborar com o desenvolvimento geral das suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. Segundo Duval (2003, p. 12):

> A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.

A partir daí é preciso definir quais sistemas cognitivos devem ser mobilizados para junto com os objetos matemáticos realizar as múltiplas transformações que compõem os tratamentos matemáticos, bem como saber se esses sistemas são específicos da atividade matemática.

Duval (1995) coloca que só a partir das representações podemos acessar os objetos matemáticos. Estas representações estão relacionadas a um conjunto de signos que expressam o objeto matemático. Esta teoria destaca o papel das representações e suas linguagens (escrita em língua materna, escrita numérica, desenhos, gráficos, tabelas, escritas algébricas, figuras geométricas, etc.) para as atividades cognitivas relacionadas ao ensino e à aprendizagem da matemática. Só é possível expressar as representações mentais através das representações semióticas, ou seja, "*conjunto de imagens e de concepções que um indivíduo pode ter acerca de um objeto ou situação e tudo aquilo que lhes é associado*" (Duval, 1995).

---

[4] As representações semióticas são produções formadas pelo uso de signos que pertencem a um sistema de representação que tem limites próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que fazem parte de sistemas semióticos diferentes. (Tradução própria)

Considerando uma situação fictícia de uma menina que queria dividir igualmente uma pizza entre ela e mais três amigas. Se a pizza tiver 4 fatias, cada uma poderá comer um pedaço, se a pizza tiver oito fatias, cada uma poderá comer dois pedaços e assim por diante. Essa situação pode ser representada de diversas formas, em língua natural, em tabela, em gráfico, em uma representação pictórica, entre outras.

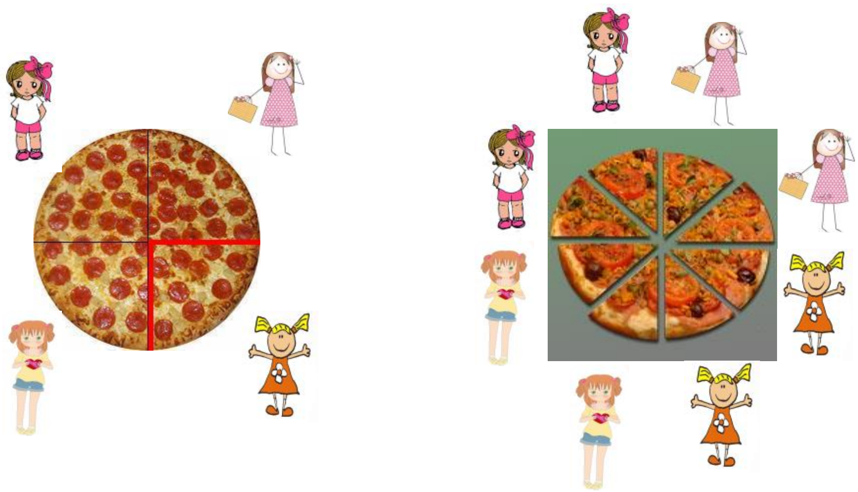


Ilustração 13 – Representação pictórica da situação fictícia
Fonte: www.matematicafernando.blogspot.com

A mesma quantidade de fatias para cada menina
Se for uma pizza de quatro fatias cada menina come um pedaço
Se for uma pizza de oito fatias cada menina come dois pedaços

Ilustração 14 – Representação da situação problema em língua natural

Nº de fatias da pizza	Nº de fatias por amiga
4	1
8	2

Ilustração 15 – Representação da situação problema em tabela com números naturais

Nº de fatias da pizza	Quantidade para cada menina
4	1/4
8	2/8

Ilustração 16 – Representação da situação problema em tabela com números fracionários

N^{o} de fatias da pizza	Percentual para cada menina
4	50%
8	50%

Ilustração 17 – Representação da situação problema em tabela com números fracionários

Assim, a situação-problema da menina comporta vários registros de representação. Entretanto, cada conversão não pode ser feita sem consequências. Formas diferentes de representação podem destacar características diversas. Para Duval, só com a mobilização de pelo menos dois registros de representação semiótica possibilita a aprendizagem conceitual (noética) em matemática.

5.1.1 Características da atividade matemática sob o ponto de vista cognitivo

Do ponto de vista cognitivo, o que caracteriza a atividade matemática é a importância e a variedade das representações semióticas. Basta observar a história do desenvolvimento do conhecimento matemático e ver que ele só evoluiu em função do desenvolvimento dos registros de representações semióticas. Isso se deve a dois motivos. Primeiramente, as possibilidades de tratamento em matemática dependem diretamente do sistema de representação utilizado. Um exemplo é o próprio sistema de numeração decimal, que é muito mais eficiente que os sistemas romano, egípcio, maia ou qualquer outro desenvolvido ao longo da história da humanidade. Entretanto, em sala de aula, percebe-se que a aquisição e a compreensão desse sistema não são tão simples assim. Pesquisas nacionais e internacionais, realizadas por órgãos oficiais, como o MEC no Brasil, o *Ministère de l'Education Nationale* na França, o *National Council of Teachers Mathematics* (NCTM) nos Estados Unidos, entre outros, informam que menos da metade dos alunos compreende efetivamente o funcionamento do sistema de numeração decimal e transita cognitivamente por todas as propriedades e operações.

O segundo motivo diz respeito à vasta variedade de representações semióticas utilizadas na matemática, como os sistemas de numeração, as formas geométricas, as escritas formais, as escritas algébricas, os gráficos, as tabelas e a própria língua natural. Mas Duval destaca quatro tipos muito diferentes de registros:

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais) Formas de raciocinar: • Argumentação a partir de observações e crenças, ...; • Dedução válida a partir de definição ou teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3) • Apreensão operatória e não somente perceptiva. • Construção de instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numéricas (binária, decimal, fracionária,...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos • Mudanças de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Ilustração 18 – Tabela de classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática).
Fonte: Duval, 2003, p. 14

Duval considera que o fato de mobilizar simultaneamente pelo menos dois registros de representação, ou ainda, o fato de trocar a todo instante de registro de representação, conferem ao sujeito uma originalidade na atividade matemática. Mas um aluno que mobiliza apenas um registro de um objeto matemático, mostrando-se incapaz de traduzi-lo em outro registro, pode confundir o objeto com o próprio registro. Um exemplo clássico é quando um aluno sabe uma regra ou uma fórmula, mas não é capaz de representá-la em gráficos, tabelas, registros pictóricos ou mesmo em representações linguísticas. De acordo com Flores (2006, p.79):

> [...] levar em conta a existência de muitos registros de representação, bem como, as atividades de conversão entre os registros, são, para Duval, imprescindíveis para a compreensão dos objetos matemáticos no ensino da matemática. É isto que possibilitará a diferenciação entre o objeto e sua representação. Então, de um lado, percebe-se que este estudo de Duval, sobre os registros de representação semiótica para a aprendizagem em matemática, mostra-se como um importante instrumento de pesquisa, já que possibilita uma análise das complexidades da aprendizagem em matemática. Mas, por outro lado, a base teórica de Duval nos leva a outras reflexões que não se referem propriamente ao aspecto cognitivo do aluno. O que quero dizer é que ela nos faz pensar sobre o papel primordial, o funcionamento e a constituição de um sistema de representação que rege a construção dos saberes.

Nesse ponto é fundamental compreender que não é possível fazer um registro sem um código subjacente. Não há como expressar ½ sem conhecer certas convenções como aquelas que fazem traduzir ½ na palavra METADE, por exemplo. Para compreender melhor essa questão, passemos aos tipos de transformações de representações semióticas.

5.1.2 Tipos de transformações de registros de representações semióticas no conhecimento matemático

> [...] vale refletir aqui como a ideia de representação, particularmente de representação semiótica, se fez como o modelo para a aquisição do conhecimento. Significa, portanto, compreender a criação, ou a emergência deste modo de conhecer. A base do estudo de Duval, sobre os registros de representação semiótica para a aprendizagem em matemática, tem como fundamento o pensamento moderno: um sujeito cognoscente, um objeto cognoscível e uma teoria dual dos signos. (FLORES, 2006, p. 80)

São dois os tipos de transformações de representações semióticas absolutamente diferentes um do outro: o tratamento e a conversão. O tratamento corresponde a transformações de representações dentro de um mesmo registro. Quando um aluno, ao desenvolver uma expressão algébrica ou numérica, permanece no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números, ele está fazendo um tratamento. O tratamento é interno ao registro. Por sua vez, a conversão corresponde a transformações de representações compostas por mudanças de registros que mantêm os mesmos objetos denotados. Quando um aluno resolve uma equação e a representa em sua forma gráfica, ele está fazendo uma conversão.

De um modo geral, a conversão apenas serve para escolher um determinado tipo de registro em que os tratamentos serão mais simples, mais econômicos cognitivamente falando. Mas do ponto de vista cognitivo, a atividade de conversão é a "verdadeira" atividade de transformação representacional, pois leva o sujeito aos processos que estão por trás da compreensão. Segundo Duval, as transformações exercem três funções básicas na matemática: atuam no desenvolvimento das representações mentais, na realização de funções cognitivas diversas e na produção de conhecimentos.

> Muitas vezes, as representações "mentais" não passam de representações semióticas interiorizadas. As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas. (DUVAL, 2003, p. 31).

Transformação de uma representação semiótica em uma outra representação semiótica	
Permanecendo no mesmo sistema: ***Tratamento***	Mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos: ***Conversão***
Quase sempre é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista "pedagógico", tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato de *os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes.* A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Ilustração 19 – Tabela contendo a distinção decisiva para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão – dos tipos radicalmente diferentes de transformação de representações semióticas. Fonte: DUVAL, 2003, p. 15

Os tratamentos são transformações de representações que ocorrem dentro de um único registro. Por isso se relacionam à forma e não ao conteúdo do objeto matemático. Em casos semelhantes a 0,20 + 0,20 = 0,40 (operação em representação decimal com tratamento decimal) e a 1/5 + 1/5 = 2/5 (operação fracionária em representação fracionária), Damm (2008, p. 180), garante que

> [...] duas representações diferentes envolvendo tratamentos completamente diferentes para o mesmo objeto matemático. Esses dois registros de representação possuem graus de dificuldades (custo cognitivo diferente) para quem aprende, e este é um dos problemas que o educador precisa enfrentar na hora de ensinar, tendo presente que trabalha sempre o mesmo objeto matemático (números racionais/operações), porém, o registro de representação utilizado exige tratamento muito diferente, que precisa ser entendidas, construídas e estabelecidas relações para o seu uso.

A seguir são apresentadas duas situações de tratamento. Na primeira situação, apresenta-se o desenvolvimento de somas simples. No primeiro exemplo, apenas utilizando as barrinhas de cuisenaire, uma criança entre cinco e sete anos consegue desenvolver noções de adição de quantidades apenas trocando as peças, onde cada cor representa uma quantidade. No exemplo da ilustração x, a criança está brincando de "***Muro do 10***" e de forma lúdica vai compreendendo que existem diversas possibilidades de encontrar resultado dez em uma soma. No exemplo, de baixo para cima, a barrinha laranja vale 10 unidades e a partir dela a criança vai construindo outras "camadas" do muro, sempre com tamanhos iguais a 10 unidades:

9 + 1 = 7 + 3 = 8 + 2 = 3 + 6 + 1 = 6 + 4 = 5 + 2 + 2 + 1 = 10. A criança desenvolveu toda a atividade dentro de um mesmo registro de representação, sendo, portanto, uma situação de tratamento.

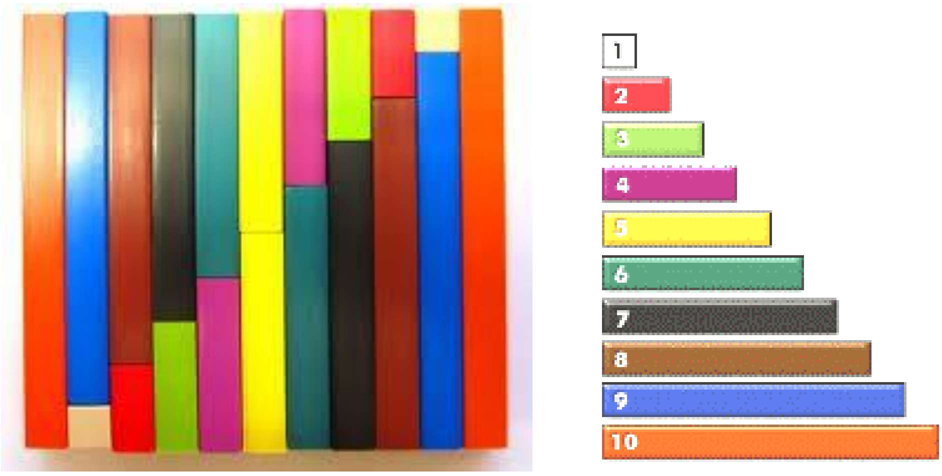


Ilustração 20 – Brincadeira do “Muro do 10” com a utilização das barrinhas de cuisenaire
Fonte: www.en.wikipedia.org; www.sahomeschooling.co.za

No segundo exemplo, a criança realiza cálculos de soma simples semelhantes aos do caso anterior usando apenas o registro escrito de representação, apesar de utilizar como apoio a contagem nos dedos para desenvolver seu raciocínio.

Ilustração 21 – Soma simples com a utilização de algoritmos.
www.google.com.br

Na segunda situação, apresenta-se a subtração de frações com denominadores diferentes. No primeiro exemplo é utilizado o recurso pictórico para realizar a operação 12/2 – 5/3, que resulta em 4 inteiros e 1/3, ou em número misto, 13/3, pois cada inteiro representa três terços.

½	½
½	½
½	½
½	½
½	½
½	½

1/3	**1/3**	**1/3**
1/3	**1/3**	

Ilustração 22 – Subtração de frações com denominadores diferentes utilizando recurso pictórico.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

No segundo exemplo, o mesmo cálculo é realizado utilizando o recurso algorítmico.

$$\frac{12}{2} - \frac{5}{3} = \frac{36 - 10}{6} = \frac{26\,{:2}}{6\,{:2}} = \frac{13}{3}$$

Ilustração 23 – Subtração de frações com denominadores diferentes utilizando recurso algorítmico.

Por sua vez, as conversões são transformações de representações onde os registros são mudados apesar dos objetos denotados serem os mesmos. Seguem três situações de transformação.

Na primeira situação, ilustração 24, a criança utiliza as barrinhas de cuisenaire para organizar suas ideias e então faz o registro escrito do algoritmo no caderno. Na ilustração 25, vários registros de representação de metades e na ilustração 26 quatro registros diferentes de uma função do 1º grau.

Ilustração 24 – Conversões de registros de representações semióticas na soma simples. Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2011.

Ilustração 25 – Conversões de registros de representações semióticas na compreensão de metades. Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

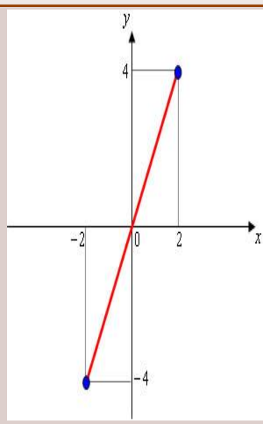
Língua “Natural”	Álgebra Simbólica	Tabela		Gráfico
Considere uma função definida no conjunto dos números reais, com valores no mesmo conjunto, que a cada elemento dos reais faz associar o seu dobro.	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto f(x)=2x$	x	f(x) = 2x	
		-2	-4	
		-1	-2	
		0	0	
		1	2	

Ilustração 26 – Conversões de registros de representações semióticas no estudo de função do 1º grau. Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2011.

Duval (2003, p. 20) alerta que:

> Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência. Infelizmente esses não são os casos mais frequentes.

Na compreensão em matemática é condição *sine qua non* a distinção entre objeto e representação. De fato, é o objeto matemático que interessa à aprendizagem, mas por outro lado, é imprescindível reconhecer que esses mesmos objetos matemáticos não são diretamente acessíveis, a não ser através das suas representações. Em outras palavras, para poder tratar objetos matemáticos, os seres humanos dependem exclusivamente dos sistemas semióticos. Ou seja, a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser conceitual, mas é só por meio de representações semióticas que podemos realizar qualquer atividade sobre objetos matemáticos.

Essa contradição do pensamento matemático gerou um grave problema para a aprendizagem. Duval (1993) aborda duas questões: *como os alunos não confundiriam objetos matemáticos se eles só operam com representações?* E mais, *como eles seriam proficientes nos tratamentos matemáticos necessariamente ligados às representações, se eles não têm uma apreensão conceitual dos objetos matemáticos?*

As representações semióticas não são exteriorizações de representações mentais com o objetivo de comunicar. Elas não servem apenas para comunicação, mas são igualmente importantes para as atividades cognitivas do pensamento, para o noético. Enfim, elas têm papel fundamental no desenvolvimento de representações mentais, no desempenho de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimentos.

> Na matemática a especificidade das representações consiste em que elas são relativas a um sistema particular de signos, à linguagem, à escrita algébrica ou aos gráficos cartesianos e elas podem ser convertidas em representações equivalentes num outro sistema semiótico, podendo tomar significações diferentes pelo sujeito que as utiliza. (DUVAL, 1995, p.17)

Em suma, para Duval, a verdadeira compreensão em matemática supõe a coordenação de mais de um registro de representação semiótica de um mesmo objeto matemático, mas essa coordenação não é adquirida naturalmente pelos alunos durante o processo de aprendizagem da matemática. Acrescento que até mesmo muitos professores não realizam essa coordenação.

E se é a articulação de registros que constrói o caminho de acesso ao conhecimento matemático, porque tantas atividades didáticas são desenvolvidas de modo a fazer prevalecer o contrário?

Duval atribui essa situação à pesquisas piagetianas a respeito da análise do desenvolvimento do conhecimento na criança, limitando-se à pesquisa de analogias funcionais. Curiosamente, Vigotskii, nos anos 30, denunciou essa pesquisa por ela desconsiderar a pluralidade dos registros de representação. Ora, se é a mobilização de dois ou mais registros de representação que garante o aprendizado em matemática, como isso acontecerá se o aluno não puder aprender a reconhecer um objeto matemático por meio de múltiplas representações, que por sua vez podem aparecer sob as mais diversas formas de registros de representação?

A partir daí, para o funcionamento cognitivo, é necessário que haja uma clara distinção entre os objetos matemáticos e as representações feitas deles no ambiente escolar. É preciso analisar de que maneira esses objetos matemáticos são compreendidos por meio de suas possíveis representações.

Pois é esse reconhecimento que possibilita ao aluno transferir ou modificar as representações durante o desenvolvimento de um problema. Então ele não mais confundirá os objetos matemáticos com suas representações.

O fazer matemático deve ser estudado naquilo que ele tem de específico. Enfatizar o desenvolvimento cultural, a apropriação e o domínio de sistemas semióticos, vai influenciar diretamente no desenvolvimento da capacidade mental de representação do aluno, pois estes completam as funções de comunicação, de transformação de representações e de objetivação consciente do sujeito. Além disso, é na apropriação dos sistemas semióticos que acontece a coordenação de registros de representação, o que possibilita ao aluno progredir no que se refere á aquisição de conhecimentos matemáticos. Na medida em que os registros de representação vão sendo diversificados durante o processo de ensino-aprendizagem da matemática, acontece uma forte contribuição para o desenvolvimento das capacidades cognitivas gerais do aluno. Portanto, a grande contribuição da aprendizagem matemática é buscar um desenvolvimento cognitivo geral, sem se fixar em determinado conceito, visando um sentido mais global.

De acordo com as considerações anteriores, ensinar matemática não é tarefa simples. E na perspectiva de Duval, analisar o conhecimento matemático nada mais é que analisar o sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento. Para ele, quando raciocinamos e visualizamos matematicamente, estamos intrinsecamente ligados à utilização das representações semióticas, pois toda comunicação em matemática se dá com base nessas representações.

6. ENSINANDO E APRENDENDO FRAÇÕES

Neste capítulo apresentam-se os pressupostos teóricos referentes aos conceitos matemáticos sobre números racionais (frações) que fundamentaram a elaboração de estratégias e atividades para o ensino de frações. O capítulo é dividido em duas seções. Na primeira seção apresentam-se os conceitos matemáticos. Na segunda seção apresenta-se a descrição da aplicação do desenvolvimento de estratégias e de atividades específicas para o desenvolvimento do estudo de frações realizado com os alunos do 5º ano da Escola Dinâmica, construídas com base nos conceitos da teoria sócio-interacionista e nos conceitos de conversão de registros de representação.

6.1 O ENSINO DE FRAÇÕES NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

É a partir do segundo ciclo do ensino fundamental (4º e 5º anos) que se inicia o ensino formal dos números racionais. Até então a criança trabalha com ideias muito lúdicas de metades, terços etc, sem qualquer formalização. Caso contrário corre-se o risco de se obter um aprendizado mecânico e sem significado. Segundo Schliemann (1998, p. 17), "... *a forma como os procedimentos matemáticos são desenvolvidos e utilizados pode também contribuir para que a transferência ocorra ou deixe de ocorrer."*

As crianças que se encontram nessa faixa etária apresentam avanços significativos em relação às suas capacidades cognitivas. É quando se inicia a famosa fase dos "porquês". Estimulados pelas relações de causalidade que começam a desenvolver nessa fase, as crianças começam a buscar explicação e finalidade para toda e qualquer situação. O pensamento fica mais flexível e reversível, possibilitando a percepção de transformações e a observação de que alguns elementos de alguns objetos ou situações permanecem ou se transformam. Assim, eles passam a descobrir regularidades, compreender propriedades, sejam elas numéricas, geométricas ou métricas. Também compreendem melhor alguns significados do sistema de numeração decimal, das operações e das relações entre elas. Ampliam suas hipóteses, levando-as para contextos mais amplos, passando a perceber que regras, propriedades ou padrões que se aplicam a quantidades pequenas também acontecem com quantidades maiores.

Mas apesar dessa maturidade, elas ainda não generalizam. Quando muito fazem generalizações simples, normalmente relacionadas à possibilidade de observar, manipular e transitar pelas representações, mas ainda sem chegar à uma formalização de conceitos. Além disso, a concentração e a capacidade verbal estão mais desenvolvidas, pois elas expressam suas ideias com mais clareza. E ainda pode-se considerar o fato de que elas começam a apresentar condições de abandonar as representações pictóricas em detrimento das representações escritas. O fato de desenvolver atividades com mais de um aluno faz com que as crianças comecem a comparar as suas concepções com as dos colegas, possibilitando o desenvolvimento da análise e da comparação entre as diversas estratégias de resolução.

O aprendizado desse conteúdo geralmente acontece como uma ampliação do conjunto dos números naturais, com o objetivo de suprir a necessidade de resolver situações nas quais este já não consegue atuar, de comunicar ideias que os números naturais não têm mais condições de realizar.

Identificando as dificuldades referentes ao aprendizado desse novo conjunto, Moreira e David (2007, p. 61) colocam que o professor das séries iniciais deve considerar os significados concretos das frações como base do seu trabalho, possibilitando ao aluno a compreensão da ideia abstrata de número racional. E a ampliação do conjunto dos números naturais, os números racionais, juntamente com suas características peculiares (formas de representação, ordem, operações, propriedades), constituem conhecimentos novos que, gradualmente, serão processados e apreendidos.

Os números racionais são representados de diversas maneiras, sendo uma delas as frações. Conforme Merlini (2005), pesquisas recentes constataram que os alunos, por diversas vezes, se tornam hábeis na compreensão dos números racionais sem a compreensão adequada das frações. Nunes e Bryant (1997, p. 191) complementam que, em se tratando de frações, as aparências enganam, ou seja, a criança aparenta ter compreendido claramente as frações, quando na verdade não o fez. Chegam a usar a terminologia adequada, falam sobre o assunto com certa coerência e resolvem alguns problemas envolvendo frações, mas aspectos fundamentais das frações ainda não são de seu domínio. E essas aparências chegam a ser tão enganosas que é possível o aluno levar toda sua vida escolar sem que ninguém perceba.

O fato é que o conceito de fração é complexo. Segundo Berh et al (1983), existem três perspectivas para as quais o professor deve voltar sua atenção: a prática, a psicológica e a matemática. Na perspectiva prática, considera-se as diversas situações cotidianas em que se faz necessário o uso de diferentes formas de representação de uma fração, evidenciando a necessidade de ampliar o conjunto dos números naturais. Na perspectiva psicológica, considera-se o desenvolvimento de quais estruturas mentais precisam ser utilizadas para compreender e operar frações no sentido mais amplo. E, por fim, a perspectiva matemática, que considera a importância da compreensão deste conceito como modo de fundamentar o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos ulteriores.

Diversos autores, motivados pela diversidade das formas de compreender e representar uma fração, realizaram estudos acerca de como esse conceito é formado. Baseando-se na teoria dos campos conceituais para interpretar os significados de fração, Nunes *et al* (2003) classificam em cinco tipos: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

O significado de número acontece quando se faz necessário entender a fração como a representação de uma quantidade e não somente a sobreposição de dois números. E para apreender este significado é necessário perceber que, assim como todos os números, a fração se localiza em um ponto da reta numérica e ainda compreender que essa fração sempre está entre outros dois números.

Na classificação parte-todo, a referência é a divisão de um todo em partes iguais, em situações específicas. Significado clássico, que considera as partes em que o todo foi dividido em partes iguais, representado pelo denominador, e as partes consideradas na situação, representado pelo numerador.

Na classificação medida, destacam-se situações em que a fração representa a relação entre duas variáveis, ou ainda a divisão de uma unidade em partes iguais, para verificar quantas partes podem caber naquilo que se deseja medir.

A classificação quociente é expressa por situações onde a finalidade é a partição, ou seja, onde a divisão é necessária para a resolução de um problema. Quando se conhece o número de grupos a ser formado, o quociente representa exatamente o tamanho de cada grupo. Ele possibilita uma visão além das ideias de parte-todo, pois se pode analisar duas grandezas distintas.

O significado operador multiplicativo, associado à ideia de transformação, pois imprime-se uma "ação sobre um número ou quantidade transformando seu valor nesse processo" (MERLINI, 2005, p.31). Em situações que envolvem esse significado, a fração expressa um divisor ou multiplicado. Exemplificando: Maria recebe um salário mensal de R$1200,00. Ela gasta 2/3 desse valor com contas diversas. Quanto ela gasta com essas contas diversas? Nessa situação, considera-se 1200 reais como valor inicial e a fração 2/3 representando a realização de uma situação na qual é possível dividir esse valor por 3 e multiplicar por 2. Através do procedimento adequado, o valor final será 800 reais. Nesta classificação é necessário perceber a necessidade de tratar a fração na sua função de transformação e, simultaneamente, a noção de que, em casos deste tipo, os números racionais se apresentam como um corpo formado por duas operações: a adição e a multiplicação. Com base na classificação teórica de Nunes et. al. (2003), estão devidamente apresentados os significados de fração.

Magina e Campos (2008) colocam que situações parte-todo priorizam o ensino de fração no Brasil, permitindo que aspectos perceptuais sejam mais explorados em detrimento das relações lógico matemáticas. Por exemplo, o caso clássico da pizza. Considerando a situação em que o professor desenha uma pizza dividida em quatro partes iguais e solicita ao aluno que identifique a fração correspondente a cada parte da pizza, o aluno pode responder a questão sem a necessidade de efetuar relações lógico-matemáticas mais complexas, apenas olhando para a figura. Assim, considera-se que o método de ensino leva o aluno a utilizar um procedimento de dupla contagem, quando conta o número total de partes, em seguida conta o número de partes pintadas, sem compreender o significado deste número novo.

Fica claro que a aquisição do conhecimento matemático, em especial o conceito de fração, bem como a forma como se processa a aprendizagem são grandes preocupações no campo da Educação Matemática. É no campo das ideias que se encontra a natureza dos objetos matemáticos. E a possibilidade desses objetos se apresentarem sob diversas formas de representação exige que os professores desenvolvam os conceitos matemáticos de forma diversificada, considerando essas distinções. É nesse momento que a semiótica compõe esse cenário. Sobre essa questão, Danyluk afirma que (1998),

> Dentre os vários tipos de linguagem presentes no horizonte da existência humana, encontra-se a linguagem matemática expressa pelo discurso matemático. O discurso matemático é a articulação inteligível dos aspectos matemáticos compreendidos, interpretados e comunicados pelo homem, dentro de uma civilização. É nessa unidade relacional entre homens que estão em uma mesma comunidade que a linguagem matemática pode ser compreendida, interpretada e expressa e, desse modo, lida.

Por sua natureza dedutiva e suas características formal e abstrata, a matemática se diferencia dos demais conhecimentos. Apesar disso, a sua construção se dá a partir de atividades concretas envolvendo os objetos e para as quais a criança utiliza como processo mental a intuição. Sob essa ótica, a matemática assume um caráter mais construtivo do que dedutivo. E se não fosse assim, haveria uma grande chance de ela se tornar uma ciência baseada na memorização de fatos, afastando-se de sua característica de representar, explicar e prever fatos reais. Segundo Huete e Bravo (2006, p. 15),

> O pensamento matemático é um processo em que é possível aumentar o entendimento daquilo que nos rodeia, afirmação passível de transferir para a disciplina acadêmica da matemática, não tanto como corpo de informação e técnicas, mas como método para fazer a mente trabalhar.

Perceber os conceitos matemáticos enquanto ciência e linguagem é criar e recriar a própria presença neles a partir de experiências que envolvam emoção e pensamento, ação e significação. Existe uma diferença muito grande entre saber fazer e saber explicar o que se faz. São duas capacidades intelectuais distintas.

É por meio das diversas estratégias de ensino que o sujeito (re)elabora seus conceitos acerca do mundo, tudo isso de forma significativa e original, embasando-se em uma concepção de aprendizado da matemática que não se resume a uma mera repetição de conceitos e algoritmos.

O ensino de Matemática deve ser considerado um processo propagador de conhecimento para professores e alunos, para que o sujeito possa, além de desenvolver seu raciocínio, divertir-se com o desconhecido ou com o reconhecido, arriscando hipóteses, recriando linguagens, ousando e alegrando-se com as descobertas e leituras do mundo – empreendendo uma viagem no campo do saber, do pensar e da produção de novas linguagens e de novos conhecimentos.

6.2 RELATOS DA EXPERIÊNCIA SOBRE ESTRATÉGIAS LÚDICAS E SIGNIFICATIVAS NO ENSINO DE FRAÇÕES COM ALUNOS DO 5º ANO

A orientação didática adotada na parte experimental deste trabalho que priorizou a iniciação do processo ensino-aprendizagem de frações em classes do 5º ano do ensino fundamental teve como fundamento o desenvolvimento de estratégias de ensino e atividades diversificadas, que possibilitassem um trabalho baseado no processo de conversão de registros de representações semióticas.

Como desenvolver uma disciplina tão culturalmente mitificada como o terror da educação escolar de modo a desconstruir essa ideia e, ainda, apresentar para crianças de 9 a 10 anos, uma matemática baseada numa teoria que muito provavelmente eles não haviam sido submetidos, a teoria das representações semióticas? Obviamente que não intencionava discorrer sobre os escritos de Duval, mas sim possibilitar a eles que compreendessem a matemática enquanto ciência e linguagem, responsável pelo desenvolvimento da humanidade desde os primórdios mais longínquos. Consequentemente, intencionava possibilitar às crianças a oportunidade de pensar sobre o conceito de frações e seus desdobramentos de diversas maneiras, compreendendo os significados de suas diversas relações e representações.

6.2.1 Ambiente de pesquisa e público-alvo

Ao começar uma busca por um espaço para o desenvolvimento de uma análise teórico-prática tão intensa, seria preciso um espaço que permitisse atuar diretamente com os alunos. E realizando tal busca, foi percebido que não seria tão simples conseguir esse espaço.

O fato de trabalhar na Escola Dinâmica desde o ano de 1999, desenvolvendo atividades que vão da docência em matemática à formação continuada em matemática de professores da Educação Infantil e do Ensino Fundamental, influenciaram na opção por desenvolver nela este projeto.

A Escola Dinâmica se baseia nos princípios filosóficos da escola ativa, objetivando, entre outros aspectos, a autonomia do aluno e a criatividade. Sua metodologia é muito peculiar, fundamentada em uma combinação dos principais métodos pedagógicos ativos, possibilitando uma coerência entre processo de ensino e formação global do aluno. Um dos aspectos mais valorizados no projeto político pedagógico da referida instituição é aquele em que a aprendizagem se caracteriza pela aquisição de diversas capacidades para pensar sobre uma diversidade ainda maior de coisas. Seu eixo norteador se baseia na interação (pensamento vigotskiano), onde o conhecimento é fruto da aliança entre interação social e cultura, e o aluno busca o saber de forma interativa, atuando com espírito crítico e construtivo.

Outro fator influenciador na escolha foi o convite para assumir a disciplina de matemática nas turmas do 5º ano do Ensino Fundamental. Situação perfeita para o desenvolvimento do projeto, pois é nesta fase que se inicia o processo de sistematização do estudo de frações, fase que tem como pré-requisito o conhecimento e reconhecimento de frações de quantidades contínuas e discretas, noções de equivalência, comparação de frações, entre outros. Isso me possibilitaria desenvolver o conteúdo de acordo com as metodologias planejadas no projeto.

Embora sendo alunos da mesma instituição, as turmas do 5º ano matutino e vespertino se mostraram bastante diferenciadas, desde o nível de conhecimento e maturidade ao interesse pelas atividades propostas. Em ambas as turmas os alunos tinham entre 9 e 11 anos. Para uma análise mais ampla, são apresentadas atividades realizadas pelas duas turmas, especificando, quando necessário, os tipos de atividades e relatos.

Por todo o exposto, a Escola Dinâmica foi considerada adequada para a realização do projeto apresentado nesta dissertação. A Escola Dinâmica, fundada em 1978, é uma instituição de ensino privada, que atende alunos do Berçário ao Ensino Médio e se localiza na cidade de Florianópolis/SC, no bairro Vargem Grande.

6.2.2 A experiência em evidência

Os relatos apresentados a seguir, bem como as estratégias e as atividades foram desenvolvidas no período de junho a outubro do corrente ano. As estratégias e atividades foram planejadas e executadas com base na teoria sócio-interacionista e na teoria dos registros de representações semióticas.

Por se tratarem de crianças, os estudos seguiam pelo viés da história da matemática, por entender que usar situações reais para apresentar o desenvolvimento do conhecimento matemático seria uma forma de sensibilizá-los.

Mas no primeiro encontro, no primeiro dia de aula, antes de falar qualquer coisa sobre a matemática, os alunos foram motivados com uma discussão inicial solicitando a cada um que explicasse, à sua maneira, o que é matemática. Não estão reunidas todas as respostas, mas as mais diferentes. Vejam algumas delas (todas de crianças com idade entre 9 e 10 anos):

*"Matemática é uma... (*pensando*) ah, matemática é uma matéria que a gente estuda pra aprender números e fazer contas com eles."*

"Com a matemática a gente aprende números e formas."

"Matemática é muito fácil... Eu e meu pai adoramos matemática e a gente fica um tempão brincando de fazer problemas e contas... Meu pai é muito bom em matemática."

"A gente aprende matemática pra ficar mais inteligente e saber pensar mais."

"Matemática é uma coisa muito difícil... minha mãe disse que no tempo dela era horrível..."

"Matemática é saber a tabuada pra fazer contas rápidas sem errar."

"Matemática não é tão difícil, mas eu gosto... um pouco... mas não gosto quando tem problemas... eu sou boa na tabuada e nas continhas. Minha mãe diz que eu sou igual à ela... (risos)"

*"Pra ser bom em matemática precisa saber fazer contas e saber as formas: triângulo, quadrado, retângulo e losango**lo**"*

"Nada disso... matemática não é só pra fazer contas... serve pra mostrar as horas, pra saber o peso da gente, pra mostrar o número do telefone, pra saber quanto tem que ter de dinheiro pra comprar uma coisa... matemática serve pra tudo!"

E quando o último aluno acabou de responder eles imediatamente solicitaram: *Profe, agora explica pra gente o que é matemática de verdade*. Foi surpreendente. Eles não acreditavam no que haviam dito, tampouco no que ouviram dos colegas. E ficaram perplexos quando ouviram da própria professora que ela também tinha uma ideia, não muito certa, do que era a matemática, mas que todos estavam com boas ideias. Foi quando souberam que muitos haviam confundido "*o que é matemática*" com "*pra que serve a matemática*", mas que essa confusão é muito comum, mesmo entre adultos.

Mas eles insistiram pela resposta. Antes disso, foi solicitado que eles observassem os cartazes colocados no mural da sala de aula, explicando que eles apresentavam, de uma maneira sintetizada, o que é a matemática.

Foi uma provocação muito intensa percebida após algumas indagações: "_ *Como assim quantidades?!*", "_ *O que é estrutura?*", "*Variações são gráficos?*", entre outras. Percebeu-se que era um vocabulário estranho, apesar de serem palavras conhecidas. E uma grande conversa sobre cada tema abordado nos cartazes foi realizada. E as explicações começaram. O cartaz "quantidades" representava os estudos sobre os números, como eles foram pensados, como surgiram, como foram organizados e como essa organização influenciou a humanidade até hoje.

Ilustração 27 – Cartaz utilizado para ilustrar o tema "quantidades".
Fonte: www.estudantesespanholportugues.blogspot.com

O cartaz "medidas" teve contribuição dos alunos. Em suma, disseram que esse tema se refere a tudo o que pode ser medido. Além disso, se refere também ao que é medir e a como e com o quê as coisas podem ser medidas, como uma medida pode ser indicada, etc.

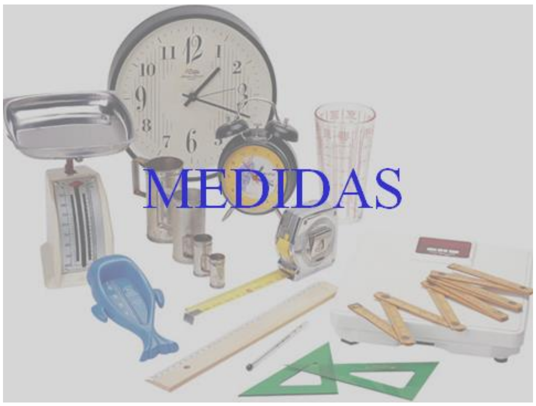


Ilustração 28 – Cartaz utilizado para ilustrar o tema "medidas".
Fonte: www.silvanosaraiva.blogspot.com

Passando ao cartaz “espaços e formas”, os alunos participaram ativamente e explicaram, a seu modo, que se tratava de um assunto que estudaria triângulos, retângulos, quadrados e todas as formas que existem. Alguns alunos acrescentaram que o tema em questão também ia tratar de formas diferentes, como “cubo e bola”. Nesse momento foi feita uma interferência, para que eles percebessem que estavam querendo dizer que estudariam as formas planas e as formas tridimensionais e todos concordaram.

Ilustração 29 – Cartaz utilizado para ilustrar o tema “espaços e formas”.
Fonte: www.adventistasalvador.blogspot.com

O cartaz sobre “estruturas” causou um impacto muito grande. Todos ficaram em silêncio aguardando a fala da professora. Questionados se tinham alguma ideia sobre o que significava a palavra estrutura, informalmente foram surgindo as primeiras ideias, pois eles nunca haviam escutado essa palavra no contexto da matemática. Inicialmente disseram que estrutura é uma “*obra*”, ou “*estrutura do corpo humano*”, mas estrutura em matemática eles não conseguiram associar. Buscando no dicionário os mais diversos significados da palavra “estrutura” , foi feita uma leitura coletiva. Em Aurélio (1999, p.845), foi encontrada a ideia de que estrutura é a “*disposição dos elementos ou partes de um todo; a forma como esses elementos se relacionam entre si, e que determina a natureza, as características ou a função ou o funcionamento do todo*”, foi solicitado aos alunos que parassem a leitura e fizessem uma reflexão sobre o que haviam acabado de ler, pois esse significado cabia perfeitamente na ideia de estrutura em matemática. E releram a definição, com atenção, discutindo trecho a trecho, como em uma tradução. Foi sendo explicado para eles que, relacionando essas ideias com a matemática, os “elementos” eram os algarismos e todos os demais símbolos matemáticos que eles conheciam (ou que ainda iriam conhecer) e que as relações citadas nada mais eram que as relações entre quantidades que fazemos em matemática, como comparar, somar, multiplicar etc. Ainda em Aurélio (1999, p.846) encontraram outro trecho, que também foi lido doletivamente, “... *sistema que compreende elementos ordenados e relacionados entre si de forma dinâmica...*” e ainda “*Um todo, considerada a forma por que se dispões as partes que o constituem.*” Foi então que eles próprios pediram para ver se haviam entendido. A imagem que utilizada no cartaz ilustrava bem essa ideia. Era uma criança desenvolvendo na lousa uma divisão de número inteiro por fração e realizando algumas outras operações. Eles tentaram juntar as ideias dos significados com a imagem e disseram:

_ Sim, entendi profe, estruturas são as contas, o jeito que a gente calcula.

_ Entendi. Estruturas são os jeitos de organizar tudo que é “coisa” da matemática.

Concluíram que no tema “estruturas” seriam tratadas as formas como os números são operados, ou seja, como as operações entre os números são realizadas (comparação, adição, subtração, multiplicação e divisão).

Ilustração 30 – Cartaz utilizado para ilustrar o tema “estruturas”.
Fonte: www.google.com.br

No último cartaz, “variações”, continuaram as contribuições dos alunos. Quase unanimemente disseram que nesse tema estudam-se os gráficos, pois todos os gráficos que eles conhecem sempre informavam variações de alguma coisa.

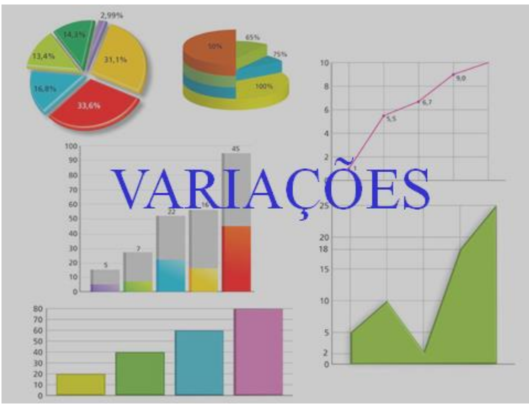


Ilustração 31 – Cartaz utilizado para ilustrar o tema “variações”.
Fonte; www.maisoumenosmatematica.blogspot.com

Assim o assunto foi finalizado, concluindo que a matemática trata de tudo isso que foi conversado, mas que era preciso saber, de cada um, se após essa conversa eles tinham condições de dizer o que é matemática. E o que havia sido falado foi relembrado, colocando que em todas as falas sempre apareciam as ideias de informar, de comunicar e de estudar. Foi então que, pela primeira vez, foi perguntado se era possível dizer que a matemática é uma ciência, pelo fato de estudar fatos relativos aos temas apresentados. Todos concordaram, achando que haviam encontrado a resposta correta. E em seguida, eles foram provocados, ao serem questionados sobre o fato de a matemática ser uma linguagem, já que seus símbolos são usados para informar e comunicar ideias. Eles concordaram, mas com certo receio, por estarem em dúvida se a matemática era, então, uma ciência ou uma linguagem. De repente, um aluno disse que a matemática era os dois: ciência e linguagem, que dependia do momento em que a matemática estava sendo usada.

Assim foi apresentada a definição de matemática dada por Imenes e Lellis (1998, p. 186, 187) onde eles colocam que a matemática é uma

> Palavra de origem grega que significa “aquilo que se pode aprender” (a palavra grega *mathema* quer dizer “aprendizagem”. Não é fácil dar uma ideia do que vem a ser matemática, e os dicionários dão definições bastante diversas. Uma possibilidade é considerá-la como a ciência que estuda as quantidades e formas. Pode-se acrescentar que ela é uma linguagem, isto é uma maneira de representar e falar ou escrever sobre quantidades e formas.

Foi a primeira vez que eles ouviram a palavra “representar” em matemática. Então eles foram questionados sobre o que haviam concluído após lerem uma definição dada por autores conceituados. Depois de muito trocarem ideias, chegaram à conclusão de que é realmente muito difícil dizer o que é matemática e que a ideia dos autores era a melhor que eles já tinham ouvido. Disseram que nunca tinham pensado nisso, que faziam as “coisas” de matemática sem pensar muito nela, mas sim nas coisas dela. Essa afirmação apontou para o fato de que eles nunca haviam parado para pensar sobre a matemática, pois se preocupavam com as representações dos objetos matemáticos e com o fazer matemático, mas não com os objetos em si. A partir daí, foi pedido que escrevessem o número seis usando todas as maneiras que conheciam. E foi uma grata surpresa ver as respostas:

6	VI	SEIS	SIX	2 x 3	8 – 2	12 : 2

Eles escreveram de várias maneiras, que foram amplamente exploradas. Foi explicado que essas maneiras nada mais eram que representações diferentes da ideia de quantidade seis. Assim eles foram apresentados à semiótica de maneira bem informal.

Nesse ponto, foi proposta a seguinte atividade:

DATA: _____ / _____ / _____ **MTM – 5º ANO**

EscolaDinâmica
PENSE ALÉM PENSE DINÂMICA

NOME: ____
PROFESSORA: Fernanda Alves ASSUNTO: Números e códigos

Decodifique a mensagem e a escreva em seu caderno linha por linha de acordo com o texto.

SUA MENTE É CAPAZ DE DECODIFICAR A MENSAGEM?

M473M471C4 (53N54C1ON4L):
4S V3235 3U 4C0RD0
M310 M473M471C0.
D31X0 70D4 4 4857R4Ç40 N47UR4L D3 L4D0
3 ME P0NH0 4 P3N54R 3M NUM3R05,
C0M0 53 F0553 UM4 P35504 R4C10N4L.
540 5373 D1550, N0V3 D4QU1L0...
QU1N23 PR45 0NZ3...
7R323N705 6R4M45 D3 PR35UNT0...
M45 L060 C410 N4 R34L
3 C0M3Ç0 4 FA23R V3R505
H1ND0-4R4B1C05

Como era a primeira atividade deste ano, havia planejado algo diferente, que referenciasse o conhecimento matemático e ao mesmo tempo que mostrasse a matemática enquanto um sistema de signos, capaz de assumir significados de acordo com seu uso. E como tarefa para casa eles levaram a seguinte atividade:

DATA: _____ / _____ / _____ MTM – 5º ANO

NOME: ___________________________________

PROFESSORA: Fernanda Alves ASSUNTO: Desafios Matemáticos

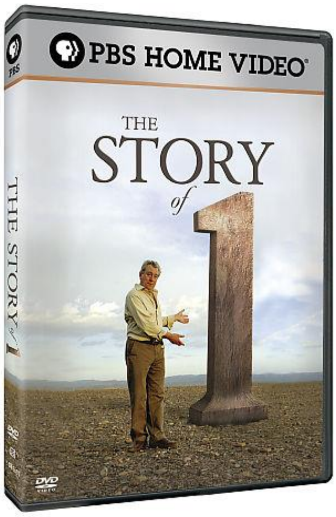
QUEM SOU EU?! Se meu quatro fosse um nove e o meu seis fosse um três Aquilo que sou apenas valeria menos um da metade que eu seria... Tenho três dígitos... Só três numa fila... Então, quem sou eu? Quem é que advinha?	Registre seus pensamentos...

A IDA AO MUSEU Quatro amigos vão visitar um museu e um deles resolve entrar sem pagar. − Eu não fui, diz o Bernardo. − Foi o Carlos, diz o Mário. − O Mário não tem razão, diz o Pedro. Só um deles mentiu. Quem entrou sem pagar?	Registre seus pensamentos...

Adaptado de VELOSO, Eduardo e VIANA, José Paulo. Desafios 3. São Paulo: Afrontamento, 1991

Acreditando ser importante por entender que os comentários enriqueceriam o presente trabalho, o primeiro encontro com os alunos foi relatado. Porém, como a pesquisa se refere a um tema específico, retorna ao mês de junho, quando efetivamente os estudos sobre frações foram iniciados.

Antes de começar a estudar o assunto, os alunos assistiram um documentário bem interessante, produzido pela BBC, apresentado por Terry Jones e veiculado pelo canal History Channel, cujo título é "*A história do número um*". O vídeo faz uma abordagem histórico-social muito interessante, mostrando como a matemática é uma ciência / linguagem produzida pela humanidade e, talvez por esse motivo, como a história da matemática se funde com a história da humanidade.



Descrição oficial do vídeo: O herói desta história é um mestre na arte do disfarce. Para algumas pessoas ele apareceu em forma de cunha, para outras como um cone. Mas independente da forma que assumiu, ele tem sido sempre o número "1". Sua história é a nossa história. É uma história de lutas, de conhecimento, da origem dos números. Nós veremos como o "1" ajudou a construir as primeiras cidades, como ele ajudou a erguer impérios, e como inspirou algumas das mentes mais brilhantes da história. Veremos também o papel dele no funcionamento do dinheiro. E finalmente veremos como o "1" se associou ao "0" para dominar o mundo em que vivemos hoje, o mundo digital que funciona com "1"s e "0"s.

Ilustração 32 – Capa do vídeo assistido pelos alunos do 5º ano matutino e vespertino.
Fonte: www.matemagicapedagogia.blogspot.com

Após os alunos assistirem o vídeo, aconteceram algumas conversas sobre a ideia de número e as representações numéricas, entendendo-a como uma construção nascida da necessidade de contar e representar quantidades. Dos conjuntos passaram aos sistemas de numeração, onde foi avaliado o conhecimento que eles já tinham a respeito do SND (sistema de numeração decimal), bem como de suas particularidades, propriedades e operações. Em cada etapa do processo procurava-se contextualizar as ideias das teorias que fundamentaram meu trabalho profissional e acadêmico.

No trabalho com as frações, surgiram algumas preocupações que dizem respeito a aspectos que precisam ficar claros para as crianças. O primeiro deles é a percepção de grandezas contínuas e descontínuas. Ao final de algumas ponderações, eles conseguiram compreender que quando uma quantidade é considerada contínua não é possível isolá-la para quantificá-la, ou seja, faz-se necessário o uso de uma unidade de medida. Ao contrário, quando uma quantidade é considerada discreta, significa que ela pode ser quantificada por unidade, como os objetos em geral, pessoas, anos, bicicletas, bonecas, carrinhos, etc.

A partir daí, eles iniciaram o significado de fração propriamente dito. Como as crianças já tinham suas ideias a respeito de fração, o primeiro passo foi ouvi-las. Após essa etapa, eles foram contextualizando cada um dos significados de fração, pois para que haja uma aprendizagem efetiva do conceito de número racional, é fundamental promover situações em que o aluno tenha condições de compreender os diferentes significados dos números racionais, bem como fazer uso das suas diferentes formas de representação.

O tema escolhido para abordar as ideias de frações inicialmente foi área de figuras planas. Por serem grupos diferentes, com interesses diferentes, os alunos do turno matutino realizaram um trabalho em classe com material lúdico e os alunos do turno vespertino realizaram um trabalho na quadra da escola, trabalhando com escalas.

No turno matutino, após conversas sobre representações gráficas, foi apresentado um material para os alunos solicitando que representassem a "planta baixa" de um apartamento. As informações sobre os tamanhos das áreas de cada cômodo eram passadas oralmente pela professora. A disposição dos cômodos ficava a cargo deles, até para que fosse possível avaliar a questão de organização espacial.

Ilustração 33 – Alunos do 5º ano matutino realizando atividade sobre área com material manipulável.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustração 34 – Alunos do 5º ano matutino realizando atividade sobre área com material manipulável.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustração 35 – Alunos do 5º ano matutino realizando atividade sobre área com material manipulável.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Informalmente eles foram questionados a respeito da área de cada cômodo: se havia algum cômodo que era metade de outro, se havia algum que era o triplo de outro e assim por diante, para começar a levá-los a analisar e relacionar os tamanhos dos cômodos. Após as intervenções, foi solicitado que registrassem no caderno quadriculado o trabalho finalizado. Em seguida, eles brincaram de arquitetos. Foi solicitado que fizessem uma reforma no apartamento, reduzindo, por exemplo, a varanda pela metade, o banheiro cinco vezes menor que a sala e, consequentemente, ampliando outros cômodos, de maneira que a área total não fosse alterada. E registraram novamente no caderno. Esse foi o primeiro contato no ano com as frações.

Os alunos do turno vespertino ficaram curiosos para saber que tamanho tinha um apartamento de 60 metros quadrados quando comparado a um de 120 metros quadrados, em tamanho **real**. Sabiam que era o primeiro era metade do segundo, mas qual a dimensão **real** desse tamanho? Entretanto, uma coisa é mudar de ideia manipulando quadradinhos de 10 cm de lado, outra coisa é mudar de ideia em um espaço de 60 ou 120 metros quadrados. Os alunos fizeram medições, usaram trenas, metros, barbantes, fitas e demarcaram seus apartamentos. Metade da turma ficou com o apartamento menor e a outra metade com o apartamento maior. Assim como na turma da manhã, os alunos foram instigados com perguntas, mas não foi solicitado que fizessem reformas, pois seria muito trabalhoso. E como os registros foram feitos no caderno quadriculado, a reforma foi deixada para o papel.

Ilustração 36 – Alunos do 5º ano vespertino realizando atividade sobre área na quadra poliesportiva.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustração 37 – Alunos do 5º ano vespertino realizando atividade sobre área na quadra poliesportiva.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustração 38 – Alunos do 5º ano vespertino realizando atividade sobre área na quadra poliesportiva.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustração 39 – Alunos do 5º ano vespertino realizando atividade sobre área na quadra poliesportiva.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustração 40 – Alunos do 5º ano vespertino realizando atividade sobre área na quadra poliesportiva.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustração 41 – Alunos do 5º ano vespertino realizando atividade sobre área na quadra poliesportiva.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustração 42 – Alunos do 5º ano vespertino realizando atividade sobre área na quadra poliesportiva.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Durante a realização das atividades com as duas turmas, os alunos fizeram relações entre as formas de representação de acordo com o que era solicitado pela professora. Relações do tipo "*Se a área da sala é 30m*^{2} *e a área do banheiro é 12m*^{2}*, quer dizer que a área do banheiro é um pouco maior que 1/3 da área da sala*"; "*Já o corredor tem 6m*^{2}*, então ele ocupa menos que ¼ da área da sala*". Nesse momento eles já estavam trabalhando com o conceito de frações de quantidade, mais especificamente de grandezas contínuas, ou seja, desenvolvendo tacitamente a seguinte estrutura matemática: 1/3 de 30m^2 = 10m^2.

Ilustração 43 – Registro gráfico e escrito das atividades sobre cálculo e comparação de áreas.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

A próxima atividade também envolveu a ludicidade. Os alunos trabalharam com o tangram, um quebra-cabeças chinês formado por sete peças (cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo), cuja origem é permeada por lendas do imaginário humano. Com suas peças foi possível formar outras várias figuras, utilizando todas elas sem sobrepô-las. Ao todo são mais de 1700 figuras. Conhecido também como jogo das sete peças, o tangram é muito utilizado por professores de matemática como instrumento facilitador da compreensão das formas geométricas. Além de facilitar o estudo da geometria, ele desenvolve a criatividade e o raciocínio lógico, aspectos fundamentais para o estudo da matemática. Sua origem é incerta, mas segundo uma lenda, uma pedra preciosa se desfez em sete pedaços, e com elas era possível formar várias formas, tais como animais, plantas e pessoas. Outra narra que um imperador deixou um espelho quadrado cair, e este se desfez em 7 pedaços que poderiam ser usados para formar várias figuras. Na Ásia o jogo é chamado de "*Sete placas da Sabedoria*".

Depois de contar a história do tangram, os alunos montaram o quebra cabeças, inicialmente em duplas.

Ilustração 44 – O tangram, quebra-cabeças japonês montado pelos alunos do 5º ano matutino.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Os alunos da turma da manhã se interessaram por trabalhar com dobraduras. Sendo assim, antes de montar o quebra-cabeças, eles o construíram, o que permitiu que percebessem melhor as relações entre os tamanhos das peças.

Ilustrações 45 – Alunos do 5º ano matutino construindo um tangram.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustrações 46 – Alunos do 5º ano matutino construindo um tangram.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Após a construção, ficou fácil montar o quadrado do tangram. Eles partiram para a formação de figuras, concluindo que todas tinham sempre a mesma área, mas os contornos eram todos diferentes. Por meio de intervenções, eles foram dizendo, por exemplo, que a área do triângulo pequeno correspondia a 1/4 da área do triângulo grande, que o quadrado e o paralelogramo tinham a mesma área, mas as medidas dos seus contornos eram diferentes, que a área deles é metade da área do triângulo grande, mas, por sua vez, corresponde ao dobro da área do triângulo pequeno, entre outras características observadas.

Ilustrações 47 – Alunos do 5º ano matutino montando figuras com o tangram.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustrações 48 – Alunos do 5º ano matutino montando o tangram.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustrações 49 – Alunos do 5º ano vespertino montando o tangram.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ilustrações 50 – Alunos do 5º ano vespertino montando o tangram.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

A ilustração acima merece um comentário. Esses meninos dedicaram um bom tempo tentando montar o quadrado do tangram, sem muito sucesso. Até que em dado momento se olharam e, como se tivessem a mesma ideia, se perguntaram: “*E se a gente conseguir montar a metade? Aí fica mais fácil... depois é só preencher em cima dessa metade...*”. E assim eles conseguiram montar todo o tangram, com base na metade, conforme mostra a segunda foto das ilustrações 50.

Ilustração 51 – Alunas do 5º ano vespertino montando o tangram.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.
.

Após diversas discussões a respeito das frações encontradas no tangram, os alunos realizaram uma atividade de registro sobre o assunto (anexo ?).

A partir daí o estudo de frações foi sendo intensificado. Após entender os vários significados da fração, os alunos passaram às suas representações. Na representação escrita era preciso saber que cada símbolo tem um nome:

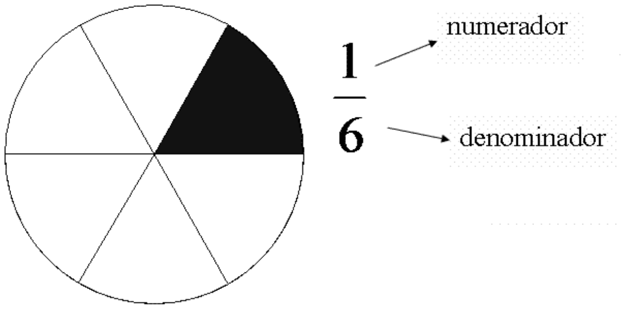


Ilustração 52 – Apresentando os elementos numéricos de uma fração e sua relação com o registro pictórico.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Ao estimular a análise pela etimologia das palavras, surgiram os “conceitos”: “*Profe, não é que se chama denominador por que dá nome pra fração, porque é ele que sempre vale a quantidade de partes que tem na fração*?” Indiscutivelmente correto. Assim, logo outros quiseram falar sobre o numerador, que por sua vez “*numera*” a quantidade de partes a serem “*comidas*”, “*usadas*”. Conceituar com tanta propriedade e falando dos “diversos tipos de representação” é algo que se destaca nessa idade. Inicialmente eles pensaram em três tipos de representação, que eles mesmos chamaram de escrita, numérica e desenho.

Ilustração 53 – As três principais representações de uma fração, segundo os alunos do 5º ano: “desenho”, “número” e “escrita”.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Simultaneamente com a representação surge a leitura (visto que precisamos nos comunicar através da fala). Expliquei as regras de escrita e leitura de frações como sendo regras de linguagem, que devem ser aceitas da mesma forma que convencionamos chamar, por exemplo, de porta o objeto porta.

Em seguida, foram trabalhados os tipos de frações. Foi explicado que existe uma classificação que considera o tamanho da fração em relação ao inteiro, ou seja, frações menores que o inteiro, iguais ao inteiro ou maiores que o inteiro e pedi que desenhassem. Sem dificuldades eles fizeram algo semelhante às figuras abaixo:

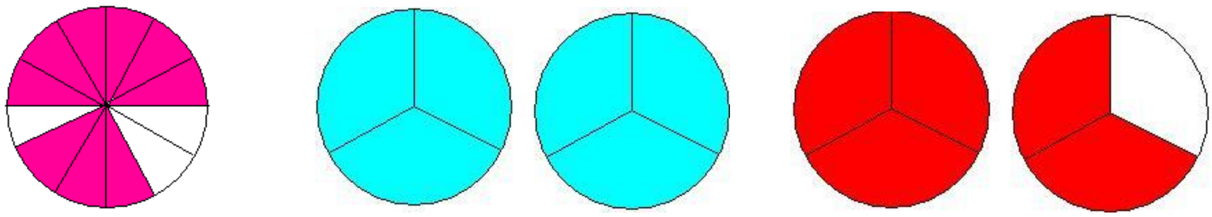


Ilustração 54 – Classificando frações com relação ao inteiro
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

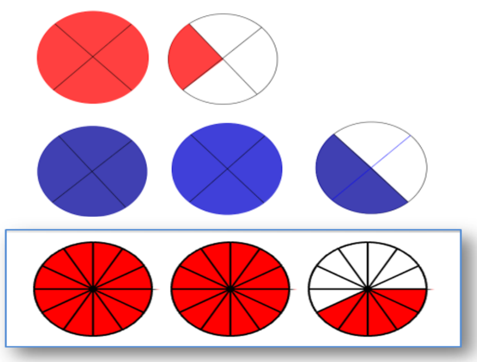
Menor que um inteiro	Igual a um ou mais inteiros	Maior que um inteiro

Quando foi solicitado aos alunos que apresentassem a representação escrita de cada fração, imediatamente o fizeram:

9/12	6/3 ou 6/6	5/3 ou 5/6

Os alunos demonstraram uma certa confusão ao representar numericamente as imagens com mais de um inteiro. Isso aconteceu devido à quantidade total de partes. Esse engano é muito comum entre crianças e até mesmo jovens e adultos. Mas é facilmente esclarecido. Uma simples pergunta fez com que eles entendessem como deveriam registrar essas imagens numericamente. Ao serem questionados sobre a fração numérica que representa um inteiro completamente pintado, eles logo responderam “3/3”. Foi relembrada a ideia de que o denominador indica a quantidade de partes de um inteiro, ou seja, mesmo tendo mais de um inteiro, ele continuava dividido em três partes, o que garante a manutenção no denominador três. Sendo assim, na segunda imagem, tem-se 6/3 ao invés de 6/6. Em seguida foi pedido que eles comparassem as representações escritas com os desenhos e dissessem que relação havia entre o numerador e o denominador em cada situação. Não demorou muito e alguns se manifestaram, dizendo que quando a fração é menor que um inteiro o numerador é menor que o denominador e que quando a fração é maior que o inteiro o numerador é maior que o denominador. Então perguntados sobre a fração que é exatamente igual a um ou mais inteiros, deram a seguinte resposta: "*Sempre que der certinho... tipo, quando o denominador é metade do numerador*." Entretanto, a intenção era maior. Perguntados se tivessem três inteiros completos como ficaria a fração escrita. 9/3, responderam quase que imediatamente. E qual a relação entre os elementos, novamente foram questionados. "*É o triplo*!!!", gritou um outro aluno mais entusiasmado. Mas o objetivo era oportunizar uma situação que os obrigasse a elaborar uma regra para as frações aparentes (nome técnico para esse tipo de fração). Até que depois de conversarem e trocarem ideias, eles concluíram que sempre que ocorresse isso, "*os números estariam na tabuada*..." Faltava vocabulário específico para dizer que o numerador precisaria ser múltiplo do denominador... Mas a ideia estava semeada, isso é o que importa.

Então foi solicitado que eles analisassem melhor a fração maior que um inteiro. Cada um deveria inventar uma fração maior que um inteiro. Algumas foram sorteadas e juntos eles preencheram a tabela abaixo:



Fração comum	**Número inteiro e fração**
5/4	1 ¼
10/4	2 2/4
29/12	2 5/12

Ilustração 55 – Representações pictóricas e escritas de frações impróprias e números mistos.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Foi mostrado à eles que existe mais de uma maneira de escrever as frações que representam mais que um inteiro, mostrando a quantidade total de inteiros e o que sobra continua em forma de fração.

Assim, eles souberam que todas essas frações tinham nomes. As frações que representam quantidades menores que o inteiro são chamadas de próprias, as frações que representam quantidades exatamente iguais ou maiores que o inteiro são chamadas aparentes e as frações que representam quantidades pouco maiores que um ou mais inteiros são chamadas de impróprias, que por sua vez podem ser escritas com número inteiro e fração, sendo por isso chamadas de número misto. Mas são apenas nomes e mais importante que aprendê-los é compreender seus significados.

No estudo de frações eles trabalharam muito com o material dourado.[5] Especialmente nas transformações de fração imprópria para número misto, o uso desse material foi muito produtivo, dinâmico e divertido.

Ilustração 56 – Material dourado.
Fonte: www.misturao.blogspot.com

Divididos em dois grandes grupos, os alunos ficavam em fila, sentados de frente uns para os outros. Então, eu disse o nome de uma fração imprópria e um

[5] Idealizado pela médica e educadora italiana Maria Montessori, o material dourado é um material manipulável estruturado (estrutura definida com base em regras matemáticas), com o objetivo de auxiliar crianças com problemas de aprendizagem. Esse objetivo se expandiu e esse material passou a ser um dos materiais mais importantes no ensino de matemática nas séries iniciais, por possibilitar a representação lúdica do sistema de numeração decimal, especialmente sua característica posicional. O material dourado é formado por quatro peças, a saber: o cubinho, que representa uma unidade; a barra, que representa uma dezena ou dez unidades; a placa, que representa uma centena, ou dez dezenas, ou cem unidades; e o cubo grande, que representa um milhar, ou dez centenas, ou cem dezenas ou ainda mil unidades. É um material extremamente importante quando se considera o aprendizado do significado de unidade, dezena, centena e milhar. É um material que possibilita o desenvolvimento das quatro operações básicas, assim como de representações numéricas inteiras e decimais. Além disso, é possível desenvolver os conceitos de porcentagem, frações, sistema monetário e medidas (perímetro, área e volume). Após a manipulação, o aluno pode registrar as representações no papel, desenhando ou colando. As diversas maneiras de se utilizar o material e a diversidade de conceitos que podem ser trabalhados fazem dele um material de grande valor.

aluno de cada equipe deveria representá-la em forma de número misto usando as barrinhas do material dourado, da seguinte forma: Ao ouvirem a fração 9/2, eles devem separar as barrinhas em inteiros completos de 2 barrinhas (pois a fração é “meios”) mais a quantidade que sobrar e falar o número misto correspondente. No exemplo dado, era preciso formar quatro grupos de duas barrinhas, deixar uma sozinha e dizer “quatro inteiros e um meio”, conforme a figura:

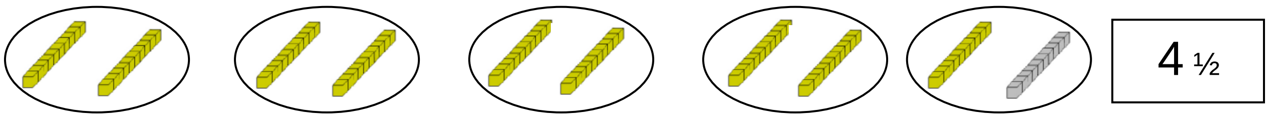


Ilustração 57 – Representações pictóricas de frações impróprias para a conclusão do número misto equivalente.
Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2012.

Depois de muito trabalhar os conceitos desenvolvidos até então, parecia ter chegado o momento de trabalhar um dos conceitos mais importantes da matemática no ensino fundamental: a equivalência. Todavia, era necessário fazer com que a abordagem desse assunto fosse algo bastante natural. E surgiu a seguinte ideia. Por meio de uma história (meio verdade, meio ficção), sobre uma situação que aconteceu entre a professora e sua irmã, onde a necessidade da ideia de equivalência se fez presente. A atividade discorreu da seguinte forma. Numa apresentação em slides desenvolvi a seguinte situação: *Como uma fração pode ajudar a resolver problemas de comunicação?* O objetivo era causar uma certa instabilidade com relação ao assunto.

Ilustração 58 – Slide de situação problema sobre equivalência de frações.
Fonte: www.paodeacucar.com.br

Ao observar as imagens, os alunos se interessaram e ficaram na expectativa. No segundo slide, a situação foi relatada e, em seguida, eles foram questionados sobre o que significava uma quantidade ser “menos que a metade, mas mais que a metade da metade”.

Ilustração 59 – Slide de apresentação da situação problema.
Fonte: www.paodeacucar.com.br

A identificação da metade de um litro era simples. Ao serem questionados sobre tal ação, os alunos disseram que bastava destacar metade da caixa de leite, pintando ou riscando. E fizeram:

Ilustração 60 – Slide mostrando situação indicada pelos alunos.
Fonte: www.paodeacucar.com.br

E quando foram questionados a respeito de “metade da metade”, imediatamente responderam que era apenas marcar a metade da parte pintada.

Ilustração 61 – Slide mostrando situação indicada pelos alunos.
Fonte: www.paodeacucar.com.br

Esse momento deu início à discussão, pois se na receita era necessário utilizar menos que a metade, mas mais que a metade da metade, essa quantidade precisava ser menos que 2/4, porém, ser mais que 1/4. Decididos a representar graficamente, logo sugeriram dividir a caixa em oito partes. Ao questioná-los sobre o motivo dessa decisão, os alunos responderam que dessa forma "ficava mais fácil", pois era possível marcar a quantidade desejada. Essa ação se deve à forte influência do conjunto dos números inteiros e das grandezas discretas, pois os alunos concluíram que a medida desejada só poderia ser 3/8, já que 3 está entre 2 e 4 e, na concepção deles a quantidade desejada está entre 2/8 e 4/8.

Ilustração 62 – Slide mostrando situação indicada pelos alunos.
Fonte: www.paodeacucar.com.br

Assim, foi sugerido que eles dividissem todo o litro em oito partes iguais:

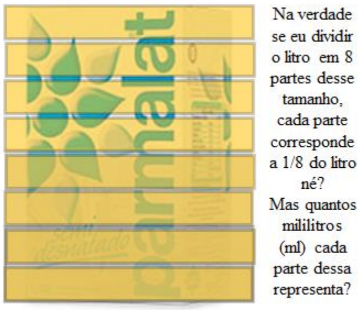


Ilustração 63 – Divisão do litro de leite em oito partes iguais.
Fonte: www.paodeacucar.com.br

Com o objetivo de elevar o nível da discussão, os alunos foram questionados sobre quanto essas frações representavam em quantidades contínuas, ou seja, em partes do litro, em mililitros. A partir desse momento eles deram início à relação entre frações e quantidades contínuas, calculando 1000 ml (que corresponde a 1 litro) divididos em oito partes e concluindo que em cada parte das oito caberiam 125 ml.

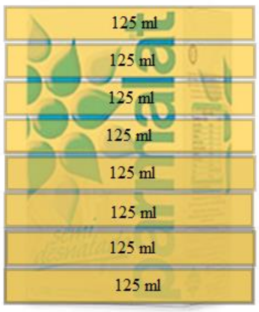


Ilustração 64 – Divisão do litro de leite dividido em oito partes.
Fonte: www.paodeacucar.com.br

Diante de tudo o que foi exposto e discutido, os alunos foram novamente questionados sobre a quantidade de leite a ser utilizada na receita e eles responderam prontamente 375 ml.

Ilustração 65 – Fração de leite a ser utilizada na receita.
Fonte: www.paodeacucar.com.br

Ao insistir e perguntar como calcularam a resposta 375 ml, eles responderam exatamente o que eu já imaginava que fossem dizer, que 375 ml corresponde aos 3/8 do litro de leite, que por sua vez era menos que a metade e mais que a metade da metade.

Ilustração 66 – Quantidade de leite correspondente a cada fração.
Fonte: www.paodeacucar.com.br

Para insistir na discussão, um questionamento os deixou inicialmente sem resposta. Foi perguntado se a quantidade certa poderia ser, por exemplo, 400 ml. A resposta imediata e unânime foi não. Diante da minha feição de dúvida, eles decidiram refletir mais um pouco antes de dar a resposta final. E então concluíram que poderia sim, pois 400ml é menos que a metade e mais que a metade da metade, o que atende as exigências da orientação da irmã. E o alvoroço estava instalado, pois se deram conta que qualquer quantidade entre 376 ml e 399 ml seria possível, pois também atendiam perfeitamente às indicações. Indignados com a situação, ficaram ansiosos pela resposta correta.

Os alunos se decepcionaram com a resposta de que todas as quantidades entre 376 ml e 399 ml poderiam estar corretas, visto que não havia nenhuma informação mais precisa a respeito dessa quantidade. Foi interessante a ponderação deles a respeito da resposta: "*Então você pode ter errado a receita, não é, profe?*". A resposta foi afirmativa e o slide que mostrava as divisões do litro de leite em quatro e oito partes foi apresentado. Foi explicado que, naquela situação específica, para não ficar nem muito acima da metade da metade, nem muito abaixo da metade, foram utilizados 375 ml, pois assim a margem de erro, se houvesse, seria pequena. A conversa foi ampliada para o conceito de média.

Ilustração 67 – Quantidades de leite equivalentes.
Fonte: www.paodeacucar.com.br

A conversa foi encerrada concluindo que teria sido mais simples se a irmã tivesse se lembrado que usava uma certa quantidade, mesmo que fossem os 375 ml de leite ou que entendesse um pouco de frações para dizer que usava cerca de 3/8 de 1 litro de leite. A partir desse slide eles começaram a transitar pelo conceito de equivalência de uma forma bastante natural, dizendo que 1/4 era igual a 2/8, que 1/2 era igual a 4/8 e que 3/4 era igual a 6/8.

Mostrando o “pedaço” correspondente a 2/8 e o “pedaço” correspondente a 1/4, foi questionado se eram realmente iguais, no sentido de idênticos. Eles concluíram que não, pois os pedaços estavam divididos em partes diferentes, mas tinham o mesmo tamanho, a mesma quantidade. Em nenhum momento foi falado que era a tal equivalência que estava sendo inicialmente abordada, mas as ideias de equivalência foram fomentadas para que eles próprios concluíssem no final.

Passando à próxima atividade, adaptada de um jogo *on-line* da Revista Nova Escola *on line,* um retângulo foi apresentado e abaixo dele vários pedaços que correspondiam a frações do mesmo. A atividade se resumia em dizer que fração faltava para completar o retângulo na moldura após cada peça ser colocada. Em vez de deixar os alunos escolherem as peças, a professora as escolhia, com o objetivo de tornar a atividade mais exigente, passível de questionamentos e ponderações.

Ilustração 68 – Atividade coletiva sobre equivalência.
Fonte: www.novaescola.com.br

Ilustração 69 – Atividade sobre equivalência: primeira peça escolhida.
Fonte: www.novaescola.com.br

Ao colocar a primeira peça, os alunos rapidamente perceberam que a mesma correspondia à metade do retângulo e responderam que faltava ½ para completar o retângulo. Em seguida, a segunda peça foi colocada.

Ilustração 70 – Atividade sobre equivalência: segunda peça escolhida.
Fonte: www.novaescola.com.br

Assim como a primeira, a segunda peça logo foi associada pelos alunos à 1/4 do retângulo, portanto, concluíram que faltava 1/4 a ser preenchido.

Ilustração 71 – Atividade sobre equivalência: justificativa da resposta 1/4.
Fonte: www.novaescola.com.br

A terceira peça exigiu um pouco mais, mas apesar disso não foi difícil para os alunos concluírem que se tratava de 1/8 e que, portanto, ficaria faltando 1/8 do retângulo a ser completado.

Ilustração 72 – Atividade sobre equivalência: terceira peça escolhida
Fonte: www.novaescola.com.br

Ilustração 73 – Atividade sobre equivalência: justificativa da resposta 1/8.
Fonte: www.novaescola.com.br

A quarta peça foi colocada. A partir daí alguns alunos se dirigiram à tela de projeção para contar a quantidade que faltava e definir a fração correspondente. Enquanto isso, outros alunos começaram a observar a representação numérica de cada fração e perceber que havia alguma relação entre os denominadores das frações e o tamanho de cada pedaço.

Ilustração 74 – Atividade sobre equivalência: quarta peça escolhida
Fonte: www.novaescola.com.br

Ilustração 75 – Atividade sobre equivalência: justificativa da resposta 1/16.
Fonte: www.novaescola.com.br

E foi na quinta peça colocada que os alunos que estavam conjecturando a respeito das representações numéricas chegaram a uma conclusão. Responderam, sem contar os pedaços, que o próximo pedaço correspondia a 1/32, pois perceberam que quanto maior era a divisão, menores ficavam os pedaços e que como se tratavam de metades, bastava duplicar os denominadores.

Ilustração 76 – Atividade sobre equivalência: quinta peça escolhida.
Fonte: www.novaescola.com.br

Ilustração 77 – Atividade sobre equivalência: justificativa da resposta 1/32.
Fonte: www.novaescola.com.br

E a ultima peça completa o retângulo.

Ilustração 78 – Atividade sobre equivalência: atividade finalizada.
Fonte: www.novaescola.com.br

Posteriormente esse jogo foi realizado na íntegra, em atividade on-line, no site www.novaeswcola.com.br. Em outra atividade, também sobre o conceito de equivalência, foi iniciado o processo de conceituação da ideia. Cada um dos alunos recebeu a seguinte figura:

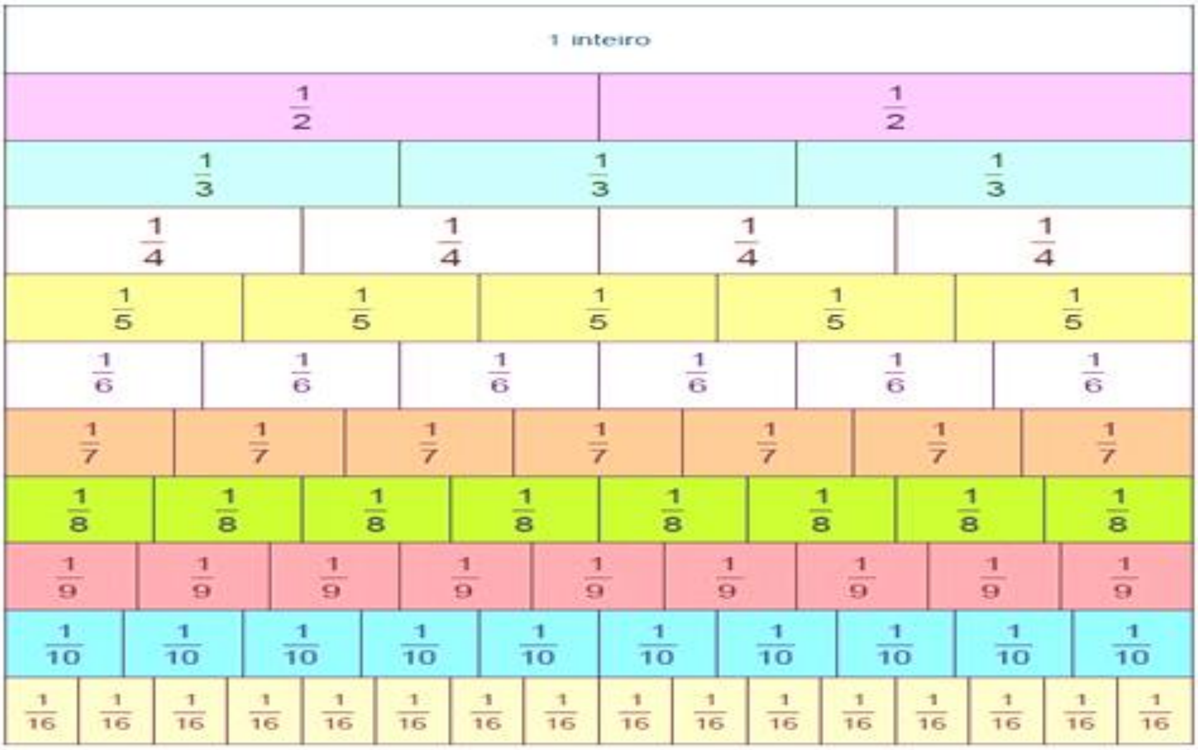


Ilustração 79 – Tabela de frações equivalentes
Fonte: www.blogdamathematics.blogspot.com

Em seguida foram questionados sobre quantas maneiras seriam possíveis para se conseguir metades do inteiro. Após as respostas esperadas, apresentei a seguinte figura:

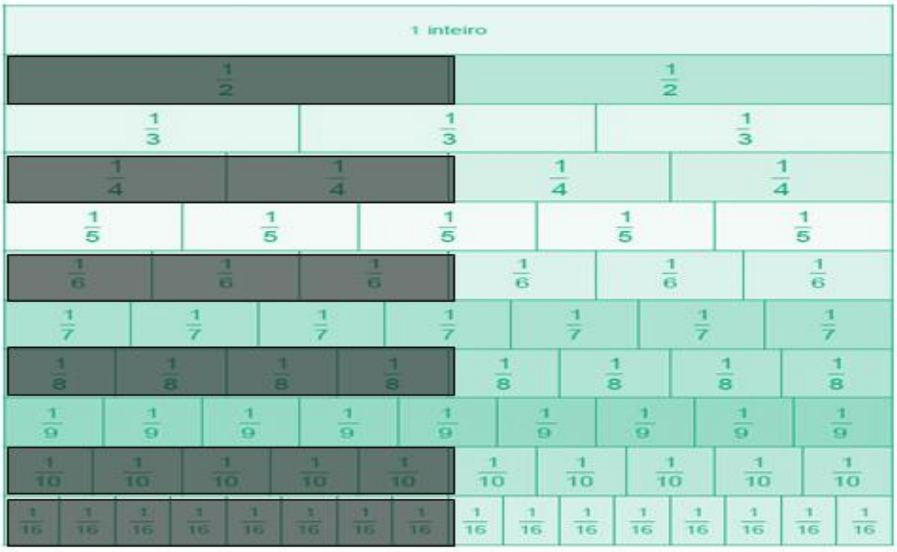


Ilustração 80 – Tabela de frações equivalentes destacando as metades.
Fonte: www.blogdamathematics.blogspot.com

A partir da figura eles constataram que as frações 1/2, 2/4, 2/6, 4/8, 5/10 e 8/16 têm o mesmo tamanho, todas são metades. Então, perguntados se eles poderiam fazer a mesma coisa com fração de tamanho 1/3, forneceram uma lista: 1/3, 2/6 e 3/9 também têm o mesmo tamanho, todas são um terço.

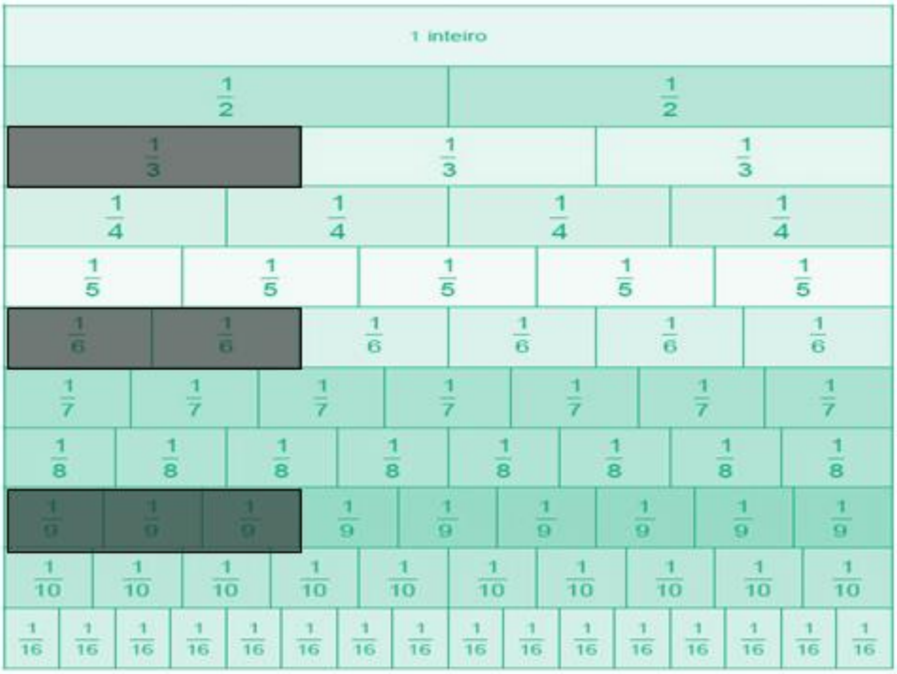


Ilustração 81 – Tabela de frações equivalentes destacando os “terços”.
Fonte: www.blogdamathematics.blogspot.com

Em seguida, concluíram que o pedaço de tamanho 1/4 era igual a 2/8 e 4/16.

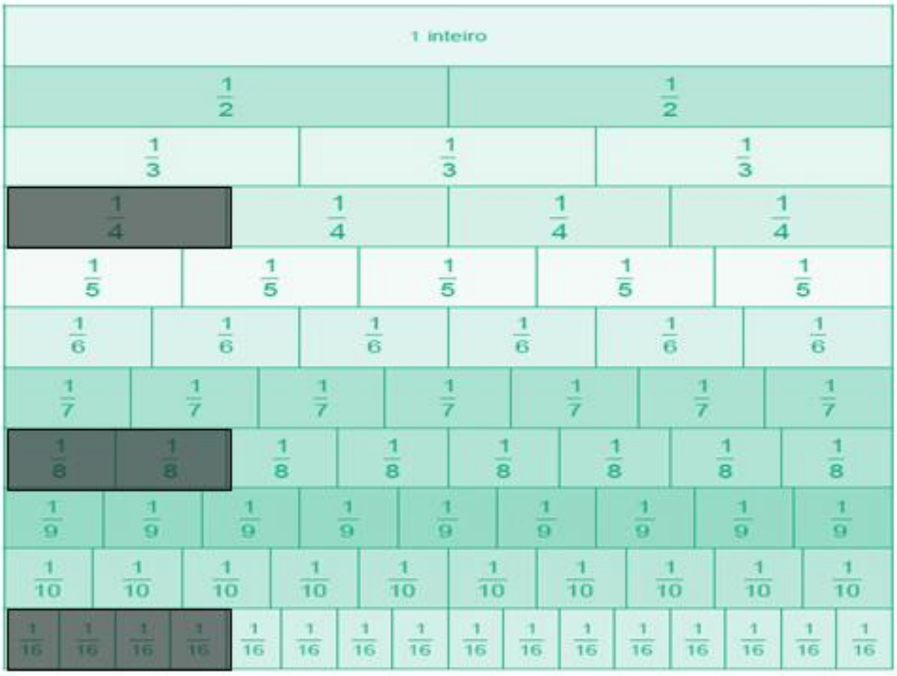


Ilustração 82 – Tabela de frações equivalentes destacando os “quartos”.
Fonte: www.blogdamathematics.blogspot.com

E depois concluíram que o pedaço de tamanho 1/5 era igual a 2/10.

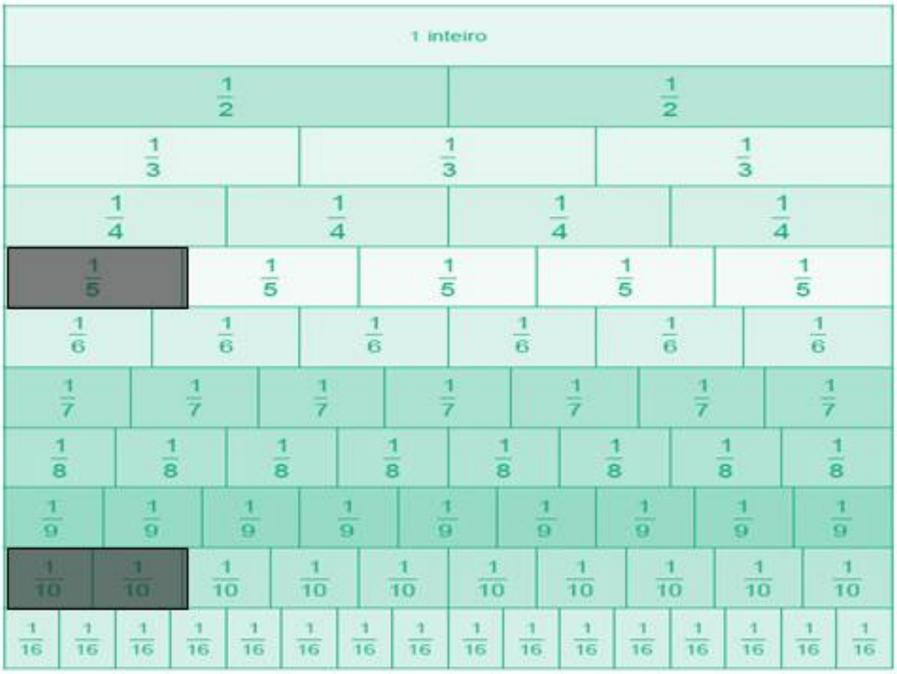


Ilustração 83 – Tabela de frações equivalentes destacando os “quintos”.
Fonte: www.blogdamathematics.blogspot.com

Por fim, concluíram mais uma situação em que era possível conseguir tamanhos iguais: 1/8 e 2/16.

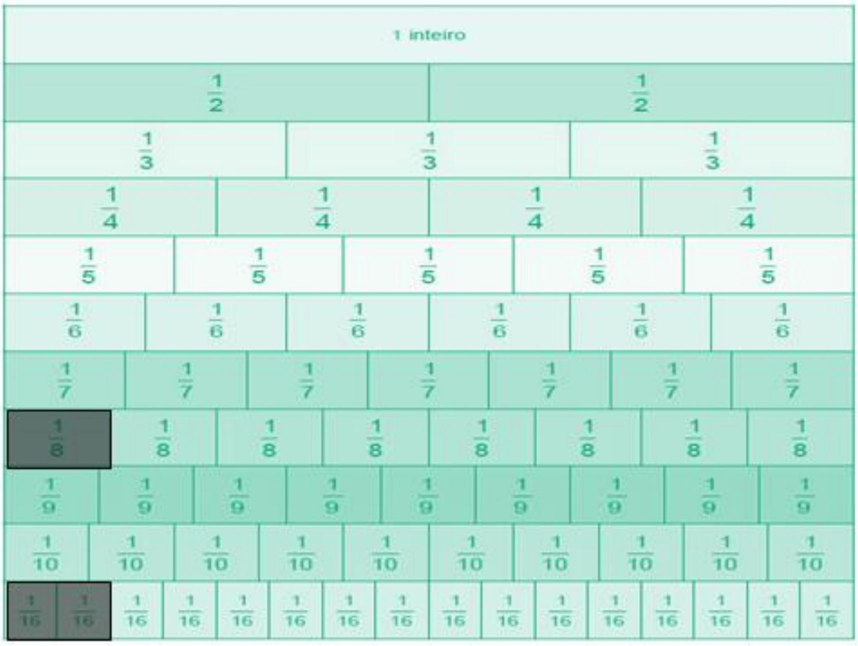


Ilustração 84 – Tabela de frações equivalentes destacando os “oitavos”.
Fonte: www.blogdamathematics.blogspot.com

Percebendo que já estavam familiarizados com a “ideia” de equivalência, começou a finalização do processo de conceituação. Os alunos foram questionados se era correto seguir afirmando que os pedaços eram iguais, quando na verdade não eram, pois apenas tinham o mesmo tamanho. Então, pela primeira vez foi utilizada a palavra equivalência, perguntando se eles sabiam o significado dessa palavra. Em seguida, foi explicado que nesses casos, as frações não são iguais, já que estão divididas em pedaços de tamanhos diferentes, entretanto são EQUIVALENTES, pois têm o mesmo VALOR, ou o mesmo tamanho. Foi surpreendente quando um aluno pediu a palavra e disse que quando *frações são divididas em pedaços diferentes e escritas de formas diferentes, mas têm o mesmo valor, elas serão consideradas equivalentes*. A partir dessa conclusão, foi solicitado aos alunos que explicassem a frase a baixo:

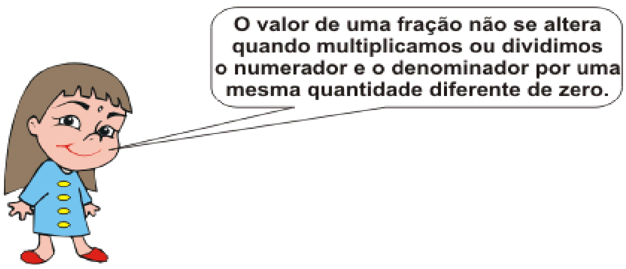


Ilustração 85 – Descrição do princípio da equivalência de frações.
Fonte: www.google.com.br

E eles mostraram alguns exemplos, como 1/3, 2/6, 3/9 e 4/12, onde acontecia o que estava descrito na ilustração x:

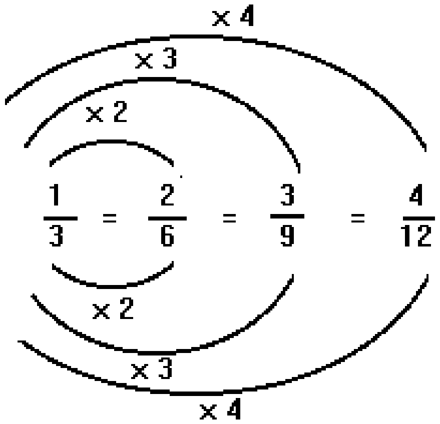


Ilustração 86 – Apresentação do princípio da equivalência de frações através da multiplicação.
Fonte: www.educar.sc.usp.br

Ao solicitar uma tarefa de casa, uma aluna do 5º ano vespertino escreveu a seguinte situação:

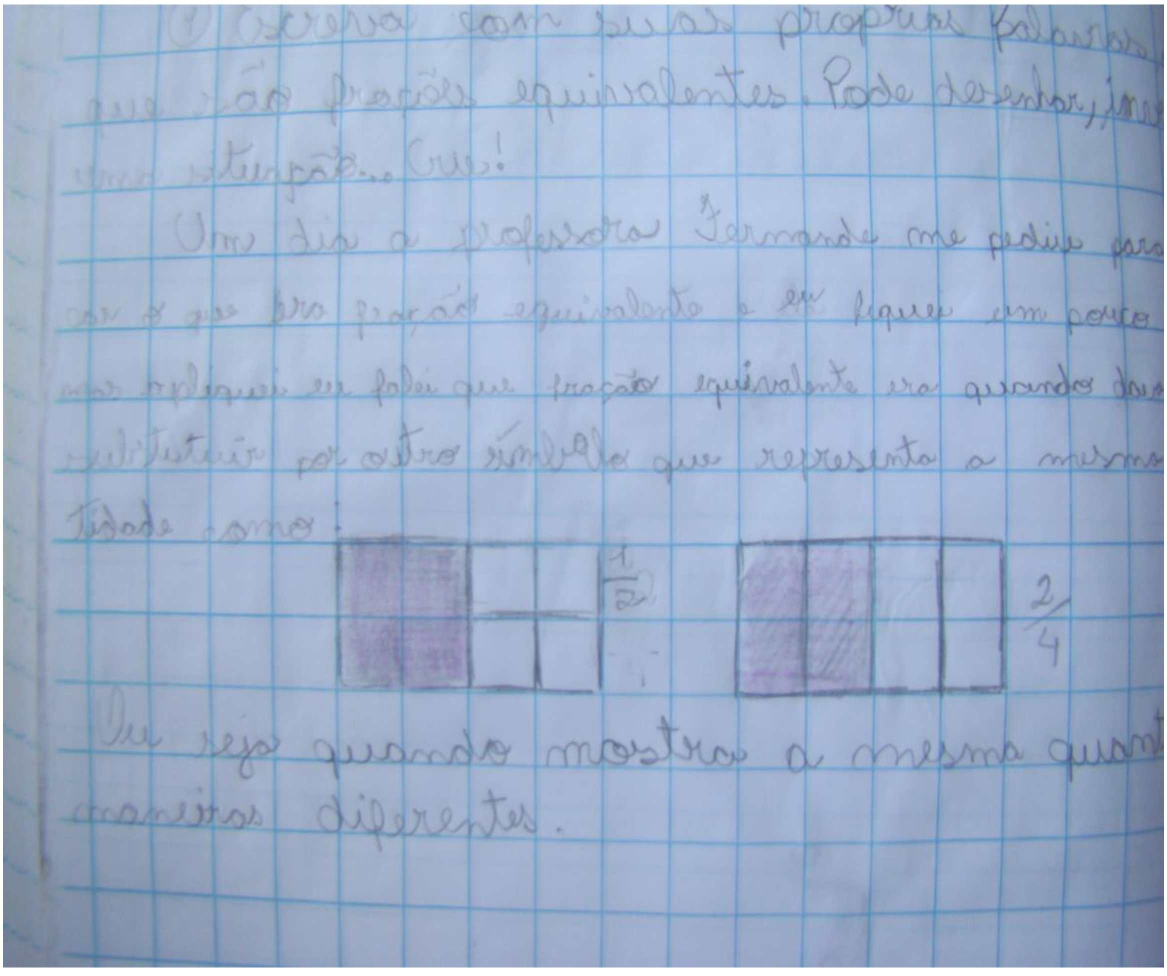


Ilustração 87 – Registro da conclusão de uma aluna a respeito da equivalência de frações.

Transcrevendo a situação: "*Um dia a professora Fernanda me pediu para explicar o que era fração equivalente e eu fiquei um pouco nervosa mas expliquei que fração equivalente era quando dava para substituir por outro símbolo que representa a mesma quantidade como: 1/2 e 2/4. Ou seja quando mostra a mesma quantidade de maneiras diferentes*."

Outra atividade interessante aplicada foi o jogo das varetas fracionárias. Atribuindo valores fracionários às varetas, o jogo transcorria normalmente e no final os alunos precisavam somar as frações para saber quem havia ganhado o jogo.

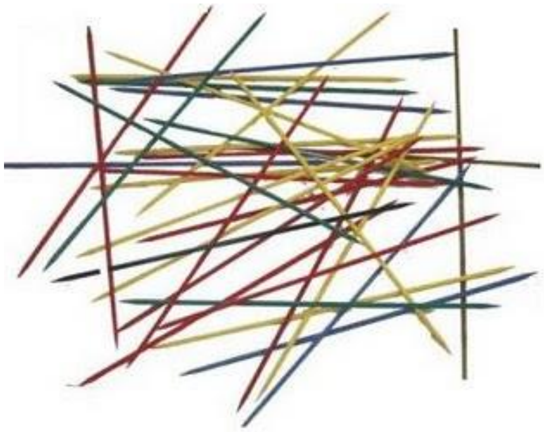


Ilustração 88 – Jogo de varetas gigantes tradicional.
Fonte: www.lojamayfershop.com.br

A vareta preta vale 1 inteiro, a vermelha vale 1/2 da preta, a verde vale 1/3 da preta, a azul vale 1/4 da preta e a amarela vale 1/5 da preta. Nessa atividade foi possível trabalhar duas situações: a adição de frações, a equivalência (pois para juntar ¼ com 1/5 era preciso buscar as equivalências na tabela) e a fração de quantidade (por vezes valores foram atribuídos para a vareta preta, como por exemplo 150. Assim, quem pegava a vareta verde precisava saber quanto valia 1/3 de 150, ou seja, dividir 150 em três partes e ficar com uma delas).

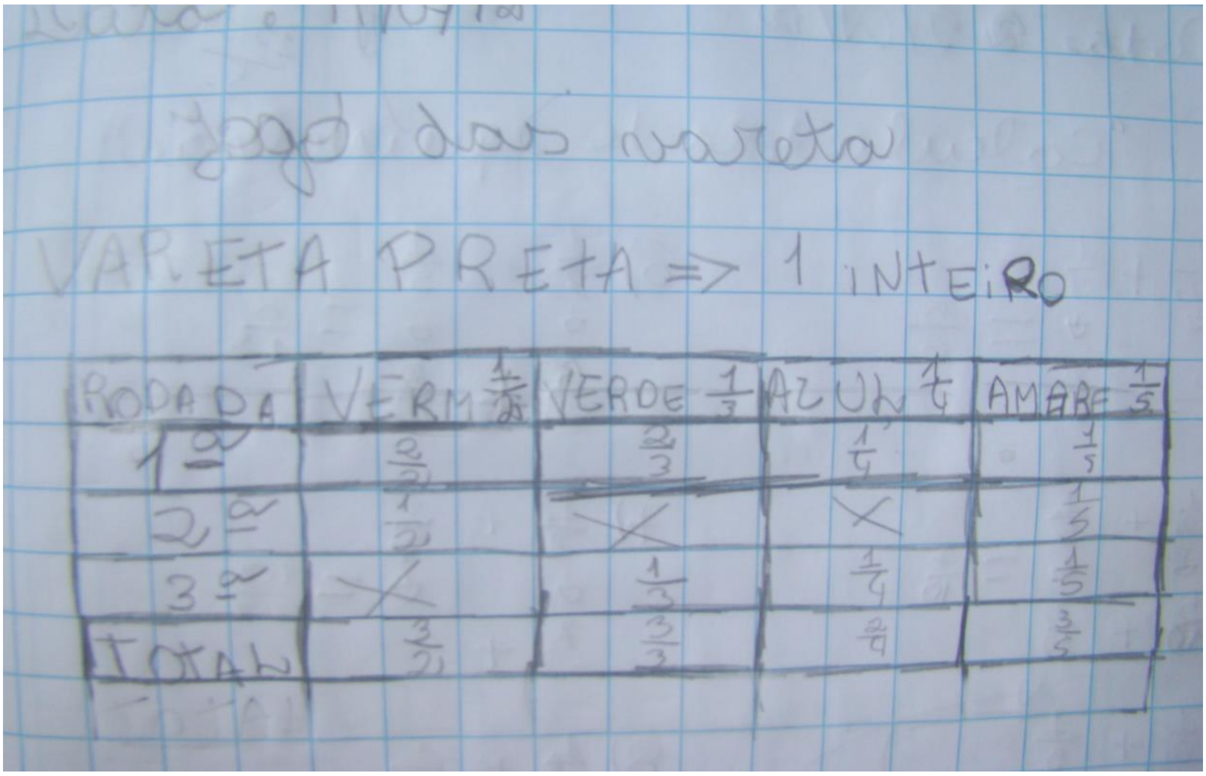


Ilustração 89 – Registro do desenvolvimento do jogo de varetas fracionárias
Fonte: Arquivo pessoal da professora, 2012.

Os resultados alcançados foram bem sucedidos e uma série de atividades foram planejadas para que eles pudessem registrar os conceitos desenvolvidos no estudos sobre frações. Essas atividades se encontram nos anexos C a L.

O mais interessante é que o conceito de equivalência possibilitou a realização das operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, assunto que só seria desenvolvido na série seguinte, no 6º ano. Através da zona de desenvolvimento proximal de cada aluno, foi possível constatar que eles estavam prontos e dispostos a fazer mais que somas e subtrações simples com denominadores iguais. Então, uma tabela de equivalências mais completa foi desenvolvida e entregue para eles junto com uma lista de atividades de soma e subtração de frações com denominadores diferentes, que se encontra no anexo K.

De posse desse material, os alunos demonstravam que estavam com uma verdadeira máquina de calcular. Usaram a equivalência na sua essência. Se tinham que somar 1/3 + 3/6, procuravam ver se 1/3 era parecido com algum “pedaço” da fração “sextos”. Ao verificarem que 1/3 é equivalente a 2/6, somavam 2/6 com 3/6 resultando em 5/6. E melhor, depois de muito trabalharem, chegaram à uma conclusão geralmente conseguida apenas por alunos a partir do 6º ano: duas frações são equivalentes quando seus numeradores e denominadores são duplicados, triplicados, ou divididos por dois etc. E deram um exemplo: 3/5 é equivalente a 6/10 porque 6 é o dobro de 3 e 10 é o dobro de 5.

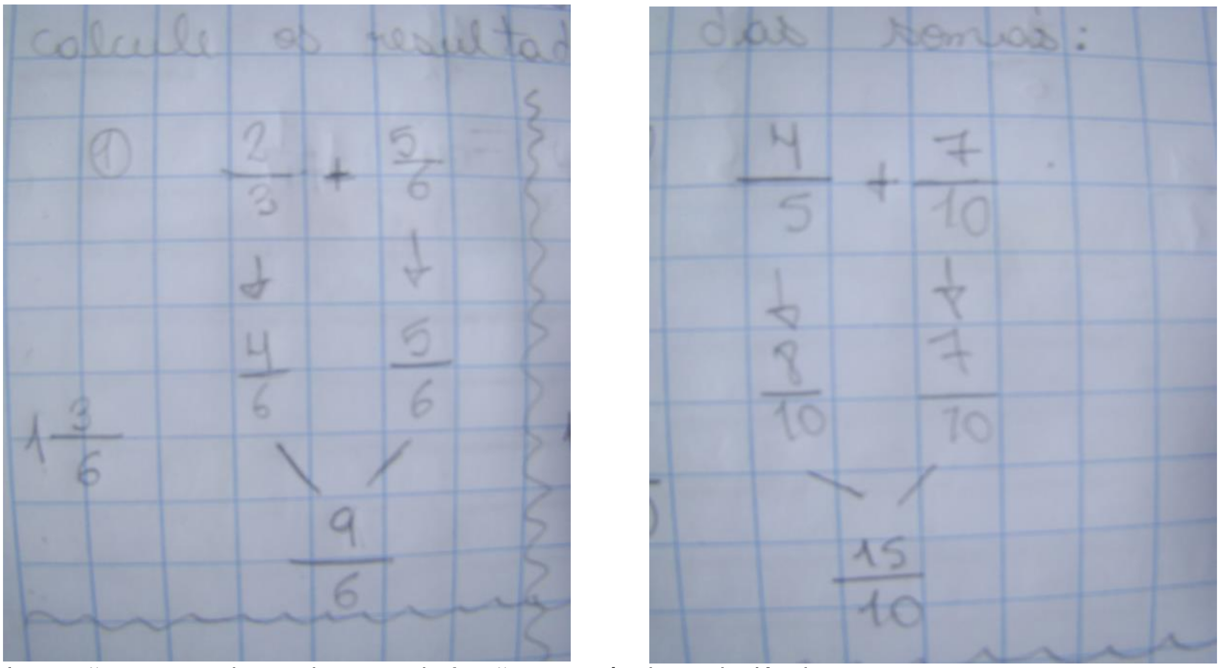


Ilustração 90 – Registros da soma de frações através da equivalência.
Fonte: Arquivo pessoal da professora, 2012.

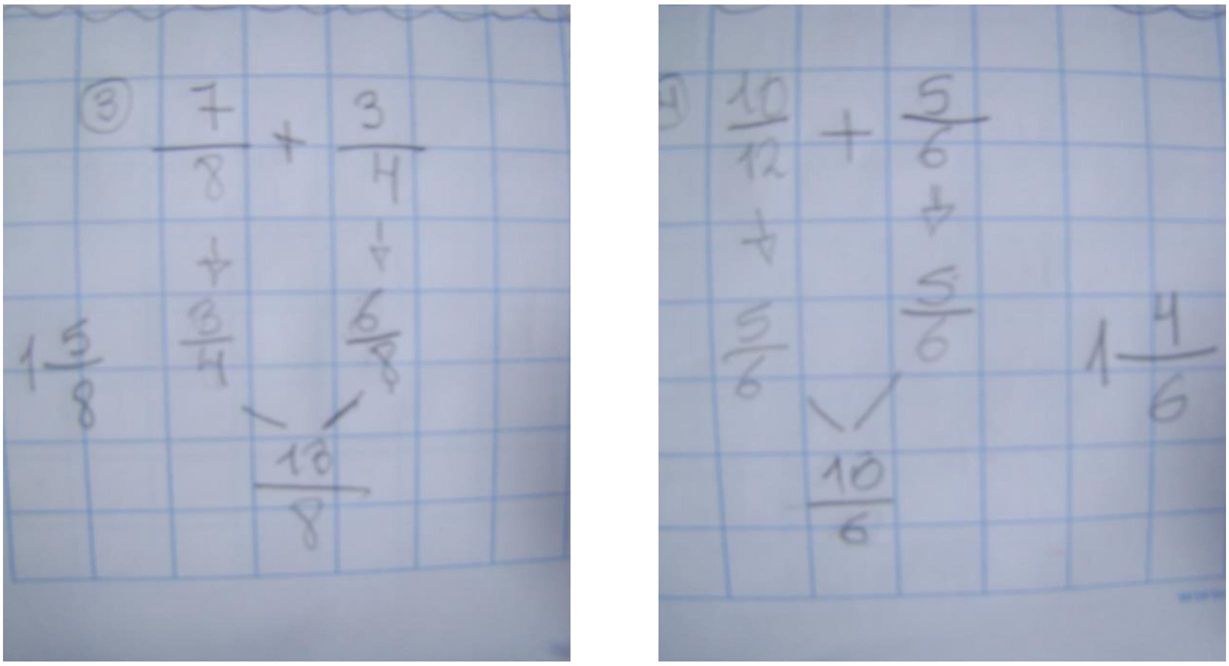


Ilustração 91 – Registros da soma de frações através da equivalência.
Fonte: Arquivo pessoal da professora, 2012.

Assim eles de fato compreenderam o cerne da ideia de equivalência.[6] A riqueza dessas práticas e atividades e o envolvimento dos alunos fez com que essa euforia pelas frações chegasse nas casas de cada um deles. O aspecto positivo é que os pais poderiam observar o empenho e o desempenho de seus filhos, mas o aspecto negativo é que, apesar de bem intencionados, os pais estavam ensinando as mesmas regras que aprenderam em seus tempos de escola e, consequentemente, começando a confundir as ideias dos filhos. Dessa forma, foi uma unanimidade a decisão de elaborar um material resumindo todos os estudos sobre frações para que pudessem compartilhar com seus familiares. O material foi desenvolvido e recebeu o nome de "Manual prático de frações para pais e alunos", confeccionado na forma de um diário de aula, com registros das nossas conversas e estudos.

Esse manual foi enviado para os pais, com a orientação de que estudassem e realizassem as atividades solicitadas sob a orientação dos seus filhos, que fariam o papel de tutores. Esse manual se encontra no anexo L.

Essa atividade finalizou os estudos iniciais sobre frações. E assim finalizo esse relatório, esperando ter conseguido retratar com fidelidade as estratégias atividades até aqui desenvolvidas.

---

[6] Mas esse resultado, como nenhum outro, não foi pleno. Dessa forma, está sendo realizado um trabalho paralelo de recuperação de conteúdos, onde além de orientar os alunos que não conseguiram acompanhar plenamente o desenvolvimento do assunto, alguns alunos mais desenvolvidos foram selecionados para auxiliarem os colegas com dificuldades, aproveitando o potencial desses para o aprimoramento próprio e para o desenvolvimento dos demais.

7. CONCLUSÃO

Nas atividades que constituíram o desenvolvimento desse trabalho, pretendi oportunizar aos alunos do 5º ano o desenvolvimento do processo de internalização da ideia de fração, das suas formas de representação e de suas propriedades básicas, amparada pelas teorias apresentadas nos capítulos anteriores.

A necessidade da representação como fundamento da ação das crianças e registro das discussões, das atividades e dos jogos, possibilitou a descoberta da originalidade de cada representação feita pelos alunos. Através de todas as atividades mediadas eles puderam aprender, aos poucos, os significados embutidos nas representações, bem como se apropriarem das regras que compõem o sistema estudado.

As estratégias, os materiais, as atividades e os jogos utilizados nas atividades práticas são elementos do cotidiano do aluno e de fácil acesso a qualquer professor. Foi esse o enfoque que possibilitou uma ação efetiva e significativa em sala de aula, graças à compreensão das teorias envolvidas.

Essas atividades foram conversas, exercícios mediados, jogos e vídeos. Apesar de serem alunos de uma mesma série, por encontrarem-se em diferentes níveis de construção da ideia frações, consequentemente, os modos de representação também foram diferentes.

Assim como a matemática envolve um sistema de símbolos criados ao longo da história da humanidade, os alunos também tiveram liberdade para construir representações para as atividades que realizaram e, de certa forma, reconstruíram os conceitos de frações, possibilitando a internalização dos mesmos.

Com base na observação e na reflexão sobre as diversas maneiras de resolução das situações que se apresentavam, pude perceber que esses diferentes níveis de representação são muito particulares, não ocorrem em sequência, nem tampouco são observados em todas as crianças.

Constatei esses níveis de representação através de alguns comportamentos adotados pelos alunos, como o fato de não se desvincularem dos materiais concretos, de utilizavam parte dos materiais em determinadas situações, de se relacionarem de maneira singular em relação às grandezas contínuas e discretas. Esses alunos estabeleceram um tipo de organização, que permitiu fazer todas as atividades em vários passos.

E, apesar de adotar diferentes maneiras de representar a realidade matemática encontrada, os alunos se organizaram para chegar às soluções. Foi o modo de organização dos alunos que me possibilitou acompanhar o progresso e detectar as dificuldades que aconteceram no processo de construção. E esse processo de construção foi possibilitado pela comunicação, pois foi sempre permeado por discussões coletivas sobre todas as atividades e seus resultados.

No desenvolvimento dessa pesquisa trabalho, os alunos sentiram a necessidade de utilizar diversos tipos de registros, desde os mais simples aos mais complexos, para que pudessem representar suas ideias matemáticas. Precisavam desses registros para aferir seus resultados e ter argumentos nas discussões em grupo, além de sistematizar o conhecimento que estavam adquirindo. Inicialmente, tais registros foram livres, não convencionais. Assim, cada aluno utilizou formas individuais de representação.

Depois de alguns estudos, eles (re)criaram um tipo de representação para homogeneizar os registros. Assim o ambiente durante as aulas possibilitou discussões a respeito dos conceitos até chegar a um consenso, que acabou por coincidir com a forma convencional.

Assim, mesmo nas diferentes turmas, as formas de representação e de formação de conceitos foram compartilhadas, convencionadas e socializadas. Consequentemente, o conceito de fração foi constituído como conceito abstraído tanto das atividades práticas como das diferentes representações elaboradas e internalizou-se. Isto quer dizer que essas representações já não eram mais instrumentos externos, que serviam apenas para registrar, mas signos que passam a servir para realizar operações cada vez mais complexas que as oferecidas pelas atividades mediadas. Desta forma, abriu-se um caminho para a aprendizagem das frações e suas propriedades, devido à compreensão dos conceitos e das regras.

Observei também que as experiências particulares marcaram os vários caminhos percorridos pelos alunos, que apesar das diferenças, chegaram à solução das situações, porém em tempos diferentes.[5]

Finalizo essa análise evidenciando que a necessidade de o professor, juntamente com seus alunos, desenvolver situações para que, de forma lúdica e significativa, criem e recriem as formas de representação, que refaçam o caminho trilhado pelo homem na construção da matemática, reconstruindo os conceitos de números racionais sob sua orientação, o que lhes assegurará a estruturação do conhecimento e, consequentemente, sua internalização.

Tomando como referência de seu trabalho a representação dos alunos, o seu modo de pensar e a sua organização interna, o professor deve dialogar com eles para compreender o significado de suas representações individuais e a conceituação que eles possuem. Partindo dessa premissa, terá condições de ampliar a zona de desenvolvimento proximal de seus alunos, possibilitando acesso às diferentes formas de representação e conceituação socialmente construídas.

Doravante, a escola precisa contribuir para instrumentalizar o aluno no sentido de uma vida melhor. E a matemática, enquanto campo de conhecimento produzido pelo homem, por excelência, deve ser apresentada de forma atraente e repleta de significados através de uma linguagem que facilite a identificação dos conteúdos apresentados. Entretanto, não pode ficar no lugar comum, pois precisa criar situações em que o aluno possa extrapolar esse aspecto prático e internalizar os conceitos matemáticos. Matemática e língua materna caminham lado a lado, fundamentais para a aquisição do conhecimento, garantindo acesso livre ao saber socialmente construído.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo aqui apresentado, a análise teórica, a reflexão e a prática obtidas em relação ao ensino de frações, foi de fundamental importância, por ser esse conteúdo um conhecimento útil para a compreensão da representação das ideias quantitativas de frações e das operações fundamentais.

Ensinar matemática significa compreender suas ideias como um bem social e cultural, pensado e desenvolvido pelo homem ao longo de sua história, através de sua longa caminhada em busca de respostas às necessidades humanas e a partir disso, construir o conhecimento. Essa ideia se opõe à visão da matemática enquanto um saber pronto e determinado.

Os erros que por ventura ocorrem na compreensão e na resolução de operações com números racionais realizadas pela criança, não acontecem apenas porque simplesmente não sabem fazer, mas porque não dominam os conceitos e as estruturas desses números. Essa é uma consequência que também se observa em níveis de ensino mais elevados, inclusive no ensino superior, o que revela uma deficiência no processo educativo escolar. Portanto não se pode culpar as crianças pelos seus fracassos na escola, ou não somente elas; a escola precisa compreender como as crianças aprendem, e desenvolver suas estratégias de ensino a partir dessa compreensão.

Nessa pesquisa buscou-se a origem sócio-histórica desse conhecimento, bem como a questão da influência das conversões dos registros de representação, fundamentou-se nas concepções de Vygotsky e Duval. Propôs-se trabalhos práticos com alunos do 5º ano, oferecendo a eles a oportunidade de construir e conceber o conhecimento relacionado ao estudo de frações. Essa reflexão, aliada à prática efetiva do grupo, oferece indicadores que favorecem a compreensão do processo de internalização da representação fracionária e do cálculo fracionário pela criança.

Foram considerados como aspectos fundamentais na construção do conceito de fração, os seus possíveis significados e as suas possíveis representações. Tais aspectos aparecem simultaneamente no trabalho com as equivalências, onde se percebe a necessidade de o professor ter uma profunda compreensão de cada um deles, para obter melhores condições de perceber onde se encontram as possíveis dificuldades da criança e assim poder orientar sua prática docente, a fim de torná-la significativa. As crianças envolvidas nesse processo experimental se apresentaram com diferentes fases de aquisição do conhecimento, o que tornou o estudo ainda mais enriquecedor.

Observou-se que as crianças concluíram de diversas formas a maneira de resolver as situações propostas. Tais construções, consideradas níveis de representação, são muito específicas, não ocorrem em uma sequência pré-determinada, nem tampouco foram observadas em todas as crianças. As atividades de registro também possibilitaram uma forma livre para demonstrar a representação das ideias de cada uma. A partir dos avanços, com o aumento do grau de dificuldade, ou se as ideias referentes às atividades se complicavam, as crianças buscavam oferecer soluções, chegando ao objetivo proposto, (re)construindo o seu conhecimento, bem como o dos colegas e, inclusive, o do professor, através de experiências particulares.

Essas experiências marcaram os vários caminhos trilhados pelos grupos, que tinham níveis sociais variados. Porém, esse trabalho mostrou que as diferenças sociais não justificam a ausência de aprendizagem, dadas as informações que o meio cultural pode lhes oferecer. Mostrou ainda que dominar as formas convencionais não é uma ação espontânea, mas resultado do processo educacional, principalmente do espaço escolar. E o professor precisa estar atento a essa condição.

Durante a elaboração e o desenvolvimento dessa pesquisa foram percebidas mudanças positivas e significativas no cotidiano das crianças e de outras pessoas que com elas convivem, desde professores aos familiares.

As atividades apresentadas nessa dissertação podem (e devem) ser utilizadas como sugestões para outros trabalhos pedagógicos e para contribuir para um conhecimento mais aprofundado de matemática. Enfim, trata-se de uma alternativa para o desenvolvimento do estudo de frações, portanto flexível e passível de ser enriquecida.

REFERÊNCIAS

ALVES, Rubem. **A alegria de ensinar**. São Paulo: ARS Poética Editora, 1994.

ARNAY, J. Reflexões para um debate sobre a construção do conhecimento escolar e científico: rumo a uma cultura científica escolar. In: RODRIGO, M. ARNAY, J. **Conhecimento cotidiano escolar e científico: representação e mudança**. São Paulo: Ática, 1998.

BARRETO, M. C.. SOUSA, A. C. G. **Os Registros de Representação Semiótica e o Trabalho com Aritmética nas Séries Iniciais da Escolaridade: uma experiência de formação docente,** XII Encontro Brasileiro de Pesquisa em Educação Matemática. Rio Claro SP, 2008.

BEHR, M. J; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática v3** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília MEC/SEF, 1997.

COURANT, R. ROBBINS, H. **O que é matemática: uma abordagem elementar de métodos e conceitos.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação matemática**: **uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2008.

DANYLUK, Ocsana. **Alfabetização matemática: as primeiras manifestações da escrita infantil**. Porto Alegre: Editora Sulina, 1998.

DUVAL, R. **Semiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques Et Apprentissages Intellectuels**. Berna: Peter Lang, 1995.

---------------- Basic Issues for Research in Mathematics Education. Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 55-70, 2000.

---------------- **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: Alcântara Machado, Silvia D. (Ed.) Aprendizagem Matemática: Representação Semiótica. São Paulo: Papirus, 11-34, 2003.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

FABRO, Silvia Gomes Vieira (Org.) **A representação numérica nas séries iniciais**. Toledo: EdT, 1996.

FLORES, C. R. **Registro de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem.** BOLEMA. Ano 19, nº 26, Rio Claro, 2006, p. 77/102.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências. Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da física, 2007.

GOMEZ-GRANNEL, C. Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática. In: RODRIGO, M. J., ARNAY, J. (Orgs.) **Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores**. São Paulo: Ática, 1998.

HUETE, J. C. S, BRAVO, J. A. F. **O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

IMENES, Luiz Marcio Pereira. **Microdicionário de matemática** / Imenes e Lellis. São Paulo: Scipione, 1998.

MAGINA, S. CAMPOS, T. **A fração na perspectiva do professor e do aluno das séries iniciais da escolarização brasileira**. Boletim de Educação Matemática,São Paulo, Vol. 21, No. 31, 2008

MARANHÃO, M. C. S. A. IGLIORI, S. B. C. **Registros de Representação e Números Racionais**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). A aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: 2003. (Coleção Papirus Educação)

MENDES, Iran Abreu. Investigação histórica no ensino da matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

MICOTTI, M.C. de **O ensino e as propostas pedagógicas**. In: BICUDO, Maria A. Viggiani. (Org.). Pesquisa em educação matemática. Concepções e perspectivas. São Paulo: Editora IJNESP, 1999.

MOREIRA, P. C. DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autência, 2007.

MORETTI. M.T. **O papel dos registros de representação na aprendizagem matemática**. Contrapontos - ano 2 - n. 6 - p. 423-437 - Itajaí, set./dez. 2002

MOYSÉS, Lucya. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Petter. **Crianças fazendo Matemática**. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T. et al. **The effect of situations on children´s understanding of fractions**. Trabalho apresentado à British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, June, 2003.

PEIRCE, C.S. Semiótica. (tradução: José Teixeira Coelho Neto). São Paulo: Perspectiva, 2008.

PINEDO, C. Q. Introdução à epistemologia da ciência. Palmas: Universidade Federal do Tocantins, 2008.

SERFATI, M. **La constitution de l'écriture symbolique mathematique**. 432 p. Thèse (Doctorat en Philosophie) - l'Université Paris I, 1997.

SOUSA, A. C. G. **Representações Semióticas e formação docente para o trabalho com números e operações nos anos iniciais do ensino fundamental: uma experiência de formação**. Dissertação (Mestrado em Educação). Fortaleza: Universidade Estadual do Ceará, 2009.

SUTHERLAND, P. **O desenvolvimento cognitivo atual**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

VERGANI, T. **Um horizonte de possíveis sobre uma Educação Matemática viva e globalizante**. Lisboa: Universidade aberta, 1993.

VIGOTSKII, L.S. ; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A.N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Editora Ícone, 2001.

VIGOTSKY, L. S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

VYGOTSKY, L. S. **Obras Escogidas**. Tomo II. Madrid: Visor, 1993.

ANEXOS

ANEXO A – Ofício à direção da Escola Dinâmica Ambiental

Programa de Pós-graduação em
Ciências da Linguagem

UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA – PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
DIRETORIA DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO – COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO

Palhoça, 17 de setembro de 2012

Ilma Sra Ângela Diener, diretora da Escola Dinâmica:

Por meio desta solicitamos sua autorização para a utilização de imagens dos alunos do 5º ano do ensino fundamental da sua escola, realizadas em aula, na dissertação de mestrado intitulada "**O número como signo: relatos de uma experiência de ensino de frações com base na teoria dos registros de representação"** (título provisório), da mestranda **Fernanda Medeiros Alves Besouchet Martins**, do curso de mestrado em Ciências da Linguagem da Universidade do Estado do Sul de Santa Catarina, cuja orientação está sendo elaborada pelo professor Dr. Aldo Litaiff.

A pesquisa tem o objetivo de socializar com a comunidade acadêmica e científica um processo de ensino significativo de frações realizado com a turma de alunos do 5º ano do ensino fundamental, que foram baseados na teoria matemática e na teoria dos registros de representação, visando a aplicabilidade deste estudo para a evolução do ensino de Matemática.

A pesquisa se divide em cinco etapas:

Apresentar os conceitos de frações a partir da teoria matemática tradicional e da teoria dos registros de representação; comparar os conceitos de frações da matemática tradicional com os da teoria dos registros de representação; apresentar o projeto de ensino de frações baseado na teoria dos registros de representação desenvolvido com a turma do 5º ano do ensino fundamental; analisar as contribuições da teoria dos registros de representação no processo ensino aprendizagem de frações e divulgar práticas que favoreçam a criação, a compreensão e a expressão dos conceitos matemáticos, mais especificamente das frações, com base na teoria dos registros de representação. As imagens são referentes às atividades realizadas no período letivo de 2012, mais especificamente referentes aos estudos, atividades e jogos realizados durante as sulas sobre frações. As imagens têm como grande objetivo ilustrar e enriquecer a pesquisa. Mas é importante esclarecer que elas só serão utilizadas mediante a autorização dos pais/responsáveis.

A pesquisadora se compromete a não fornecer nenhuma informação sobre os alunos além das imagens.

Sem mais para o momento colocamo-nos à disposição para maiores esclarecimentos.

Atenciosamente,

____

Prof^{a} Solange Leda Gallo
Vice-coordenadora do programa de pós-graduação em Ciências da Linguagem

ANEXO B – Consentimento livre e esclarecido

Programa de Pós-graduação em
Ciências da Linguagem

UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA – PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
DIRETORIA DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO – COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO

Palhoça, 17 de setembro de 2012

Senhores pais do(a) aluno (a) ______________________ da Escola Dinâmica – Unidade Ambiental:

Por meio desta solicitamos sua autorização para a utilização de imagens de seu(sua) filho(a) na dissertação de mestrado intitulada “**O número como signo: relatos de uma experiência de ensino de frações com base na teoria dos registros de representação”** (título provisório), da mestranda **Fernanda Medeiros Alves Besouchet Martins**, do curso de mestrado em Ciências da Linguagem da Universidade do Estado do Sul de Santa Catarina, cuja orientação está sendo realizada pelo professor Dr. Aldo Litaiff.

A pesquisa tem o objetivo de socializar com a comunidade acadêmica e científica um processo de ensino significativo de frações realizado com a turma de alunos do 5º ano do ensino fundamental, que foram baseados na teoria matemática e na teoria dos registros de representação, visando a aplicabilidade deste estudo para a evolução do ensino de Matemática.

A pesquisa se divide em cinco etapas:

Apresentar os conceitos de frações a partir da teoria matemática tradicional e da teoria dos registros de representação; comparar os conceitos de frações da matemática tradicional com os da teoria dos registros de representação; apresentar o projeto de ensino de frações baseado na teoria dos registros de representação desenvolvido com a turma do 5º ano do ensino fundamental; analisar as contribuições da teoria dos registros de representação no processo ensino aprendizagem de frações e divulgar práticas que favoreçam a criação, a compreensão e a expressão dos conceitos matemáticos, mais especificamente das frações, com base na teoria dos registros de representação. As imagens são referentes às atividades realizadas no período letivo de 2012, mais especificamente referentes aos estudos, atividades e jogos realizados durante as sulas sobre frações. Elas têm como grande objetivo ilustrar e enriquecer a pesquisa. Mas é importante esclarecer que elas só serão utilizadas mediante a autorização dos pais/responsáveis.

A pesquisadora se compromete a manter absoluto sigilo o nome do discente, assim como, qualquer pista que permita identificá-lo.

Sem mais para o momento colocamo-nos à disposição para maiores esclarecimentos.

Atenciosamente,

____

Profª Solange Leda Gallo
Vice-coordenadora do programa de pós-graduação em Ciências da Linguagem

Dados da pesquisadora:

Fernanda Medeiros Alves Besouchet Martins, CPF 022.404.707-80, CI 5.970.730

Dados do Orientador:

Prof. Dr. Aldo Litaiff

Programa de Pós-graduação em Ciências da Linguagem da Unisul.

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e que recebi, de forma clara e objetiva, todas as explicações pertinentes ao projeto e que todos os dados a meu respeito serão sigilosos. Declaro que fui informado que poderia ter-me recusado a participar da pesquisa antes da assinatura desse termo de consentimento.

Responsável pela Escola Dinâmica: ____________________________________

Nome por extenso: ____

RG: ____

Local e Data: ____

Assinatura: ____

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e que recebi, de forma clara e objetiva, todas as explicações pertinentes ao projeto e que todos os dados a meu respeito serão sigilosos. Declaro que fui informado que poderia ter-me recusado a participar da pesquisa antes da assinatura desse termo de consentimento.

Responsável pelo(a) aluno (a): ____

Nome por extenso: ____

RG: ____

Local e Data: ____

Assinatura: ____

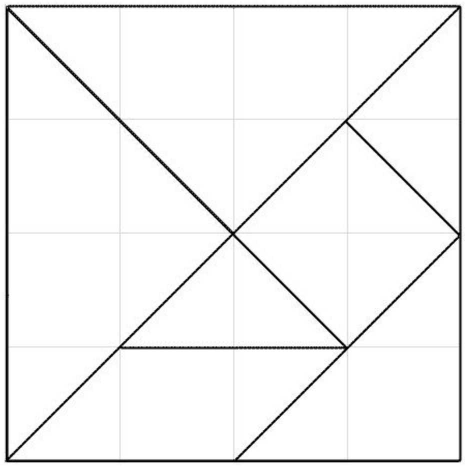
ANEXO C – Atividade sobre o frações entre as partes do tangram e seu todo.

DATA: _____ / _____ / _____ MTM – 5º ANO

NOME: ___________________________________

PROFESSORA: Fernanda Alves ASSUNTO: Tangram

Nas aulas anteriores conversamos sobre o tangram, sua história, suas aplicações e sua utilização no nosso estudo de área. Veja a seguir outra lenda:



Ainda nas aulas anteriores, nomeamos cada peça do Tangram:

P	Q	T_G	T_G	T_M	T_P	T_P

Qual é a menor das 7 peças do tangram? O que concluímos em relação à ela?

____

Diante de sua conclusão e utilizando as peças do tangram, responda:

O triângulo pequeno representa que fração do...			
... triângulo médio?	... triângulo grande?	... quadrado?	... paralelogramo?

<table>
<tr><td rowspan="5">O...</td><td>...triângulo pequeno</td><td rowspan="5">Corresponde a que fração do tangram?</td><td></td></tr>
<tr><td>... triângulo médio</td><td></td></tr>
<tr><td>... triângulo grande</td><td></td></tr>
<tr><td>... quadrado</td><td></td></tr>
<tr><td>... paralelogramo</td><td></td></tr>
</table>

ANEXO D – Atividade sobre o conceito de fração e seu registro numérico.

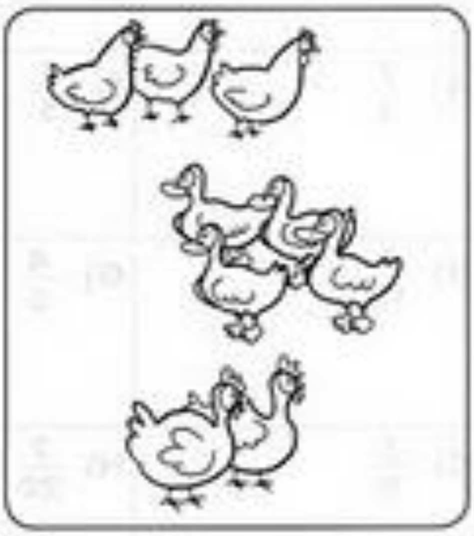
ESCOLA DINÂMICA MTM – 5º ANO

ALUNO (A):______________________________ DATA: _____ / _____ / 2012

PROFESSORA: Fernanda Alves ASSUNTO: Representando com fração

DE OLHO NA FRAÇÃO

Observe a figura.



A) Na figura há _____ aves.

B) A fração que as representa é $\frac{\square}{\square}$.

C) A fração que representa as galinhas é $\frac{\square}{\square}$.

D) A fração que representa os patos é $\frac{\square}{\square}$.

E) A fração que representa os perus é $\frac{\square}{\square}$.

Jorge está carregando um cesto de frutas.

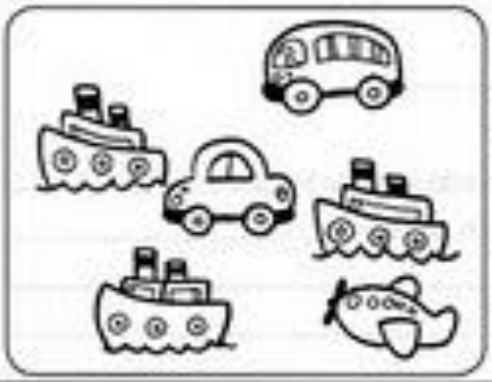
A) No cesto de Jorge há _____ frutas.

B) A fração que as representa é $\frac{\square}{\square}$.

C) A fração que representa os abacates é $\frac{\square}{\square}$.

D) A fração que representa as mangas é $\frac{\square}{\square}$.

Veja os meios de transporte.



A) Na figura há _____ meios de transportes.

B) A fração que os representa é $\frac{\square}{\square}$.

C) A fração que representa os carros é $\frac{\square}{\square}$.

D) A fração que representa os navios é $\frac{\square}{\square}$.

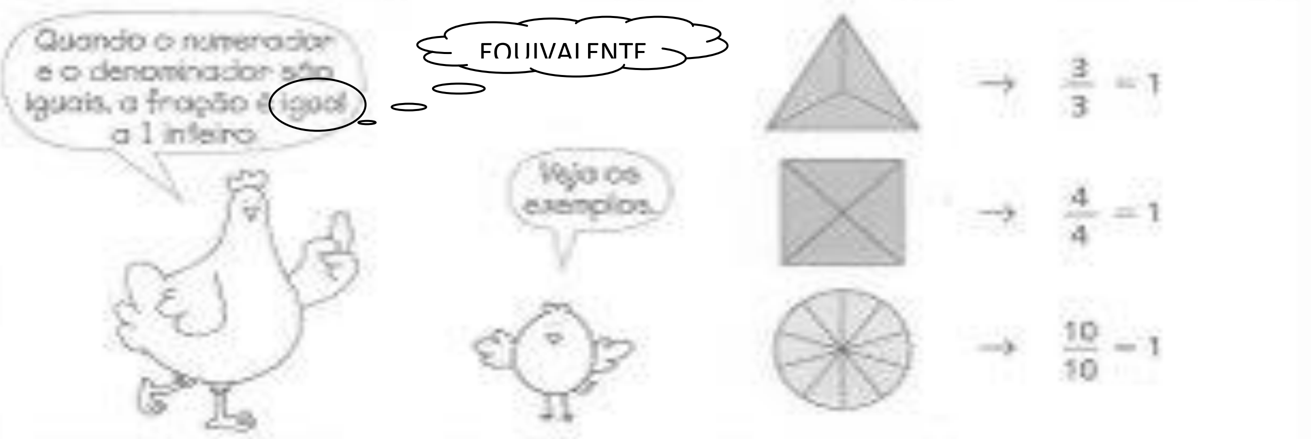
E) A fração que representa o avião é $\frac{\square}{\square}$.

ANEXO E – Atividade sobre os elementos de uma fração, sua leitura e escrita na língua natural.

ESCOLA DINÂMICA | MTM – 5º ANO
ALUNO (A):______________________________ | DATA: _____ / _____ / 2012
PROFESSORA: Fernanda Alves | ASSUNTO: Lendo e escrevendo frações

Complete a tabela com as informações pedidas:

Número fracionário	Numerador	Denominador	Leitura
$\frac{6}{5}$			seis quintos
	10	1 000	
$\frac{9}{100}$			
			um terço
	7	15	
$\frac{15}{23}$			
	1	10	
			dois onze avos
$\frac{2}{9}$			



ANEXO F – Atividade sobre classificação de frações a partir da relação com o inteiro (todo-referência).

ESCOLA DINÂMICA — MTM – 5º ANO

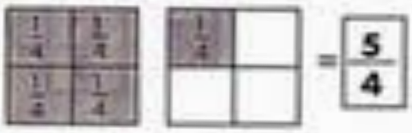
ALUNO (A):______________________________ — DATA: _____ / _____ / 2012

PROFESSORA: Fernanda Alves — ASSUNTO: Tipos de frações

TIPOS DE FRAÇÕES

Fração própria é a que tem numerador menor que o denominador. Por isso ela vale menos que 1.

Fração imprópria é a que tem numerador maior que o denominador. Por isso ela vale 1 ou mais que 1.



Fração aparente é a que tem numerador divisível pelo denominador. Por isso ela vale como um número natural.

Observe as frações e responda:

$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{24}{8}$	$\frac{5}{9}$

A) Quais são as frações próprias? ______________________

B) Quais são as frações impróprias? ______________________

C) Quais são as frações aparentes? ______________________

Escreva os números naturais representados pelas frações:

A) $\frac{8}{8} = \square$ C) $\frac{14}{7} = \square$ E) $\frac{6}{6} = \square$ G) $\frac{12}{4} = \square$

B) $\frac{9}{3} = \square$ D) $\frac{24}{4} = \square$ F) $\frac{72}{9} = \square$ H) $\frac{10}{2} = \square$

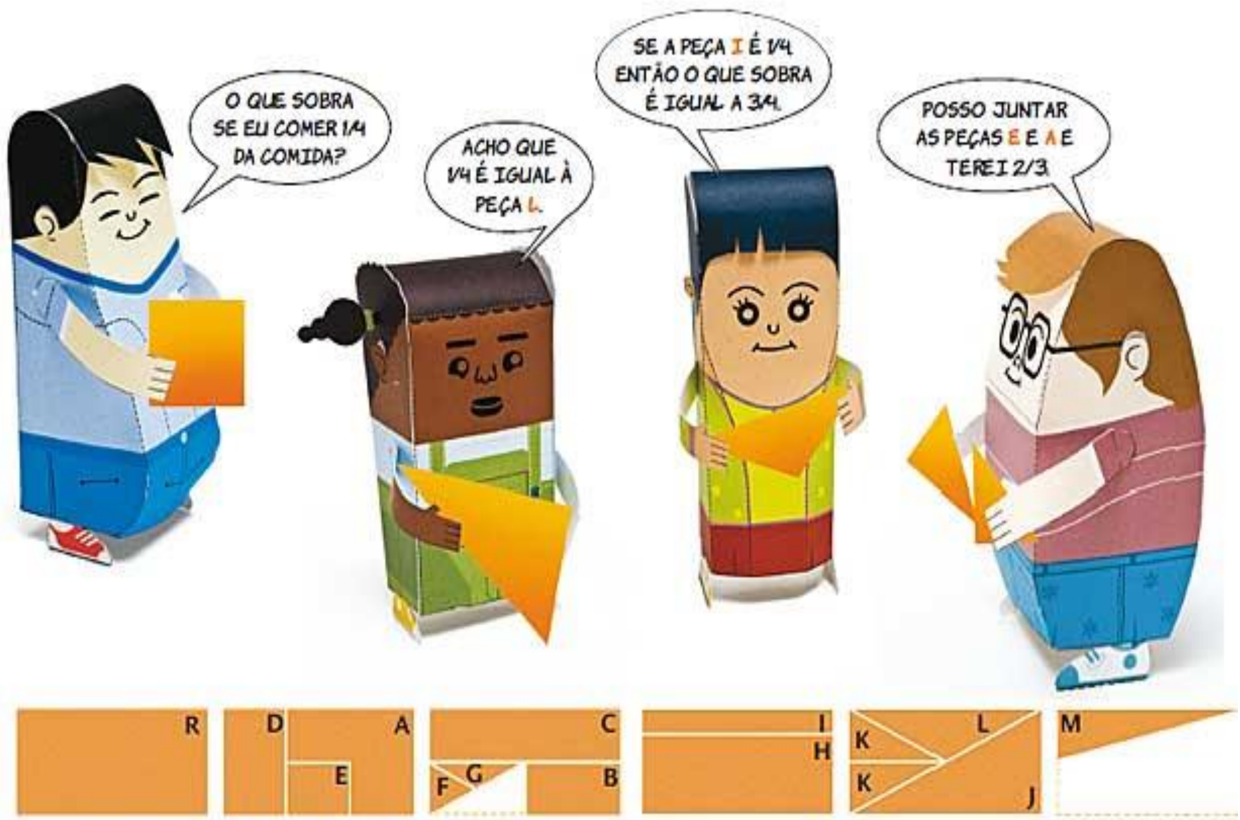
Fonte: www.cantinhodadezinha.blogspot.com

ANEXO G – Atividade sobre relações entre partes de frações e seu todo.

ESCOLA DINÂMICA	MTM – 5º ANO
ALUNO (A):______________________________	DATA: _____ / _____ / 2012
PROFESSORA: Fernanda Alves	ASSUNTO: Frações

A FIGURA R representa o todo e as demais representam as partes.

Responda a pergunta do primeiro personagem e comente as falas dos demais.



OBS.: a ficha R indica o todo, e as demais representam as partes. As informações que seguem são para orientação do professor e não devem fazer parte do material do aluno: A, C e J = 1/2; B, L, I e M = 1/4; D = 1/3; E = 1/6; F e G = 1/16; H = 3/4; e K = 1/8

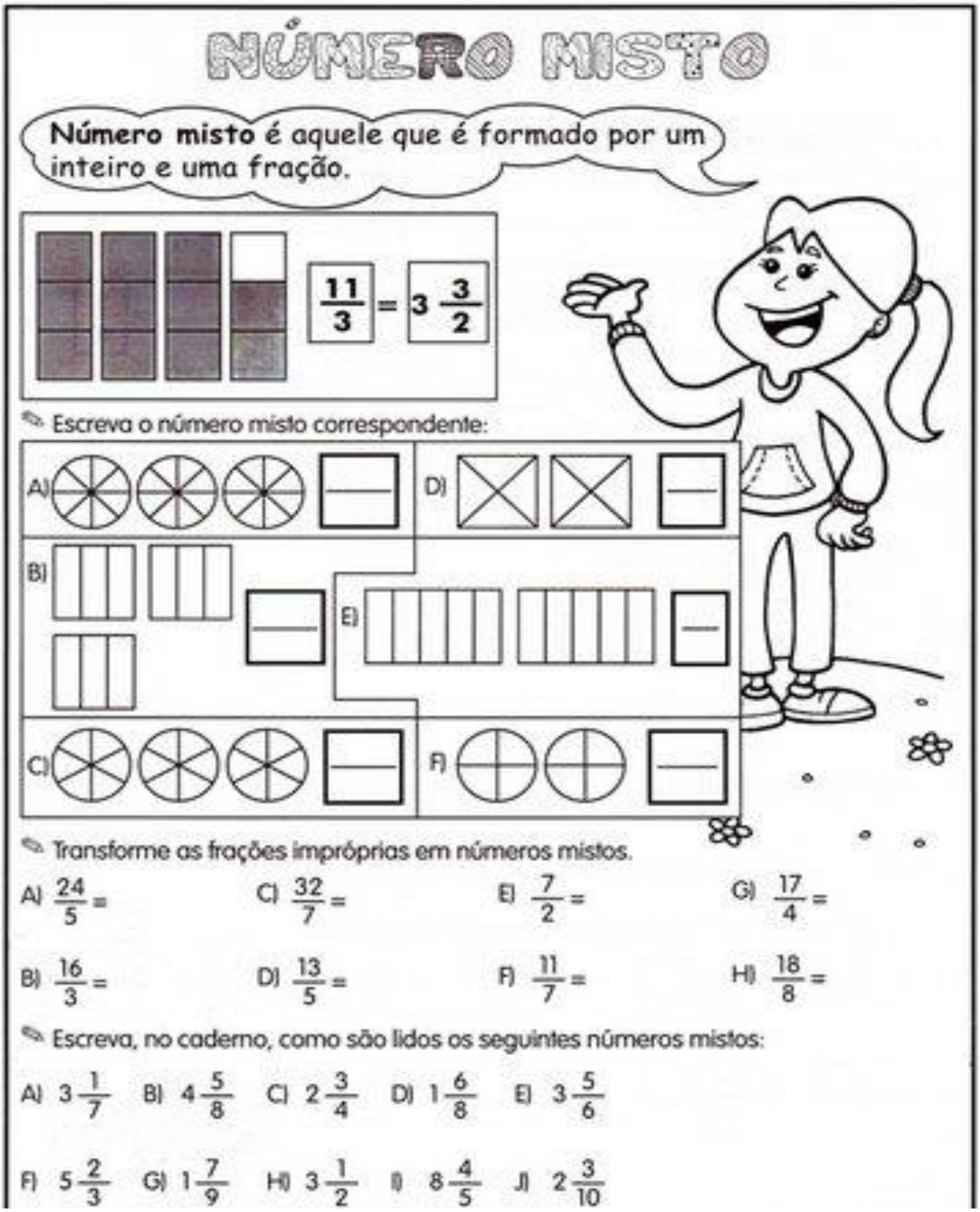
Boneco 1	**Boneca 2**
Boneca 3	**Boneco 4**

ANEXO H – Atividade sobre representações de frações maiores que um inteiro (todo referência).

ESCOLA DINÂMICA **MTM – 5º ANO**

ALUNO (A):______________________________ DATA: _____ / _____ / 2012

PROFESSORA: Fernanda Alves ASSUNTO: Misturando inteiros e partes



NÚMERO MISTO

Número misto é aquele que é formado por um inteiro e uma fração.

$\frac{11}{3} = 3\frac{3}{2}$

Escreva o número misto correspondente:

A) D) B) E) C) F)

Transforme as frações impróprias em números mistos.

A) $\frac{24}{5} =$ C) $\frac{32}{7} =$ E) $\frac{7}{2} =$ G) $\frac{17}{4} =$

B) $\frac{16}{3} =$ D) $\frac{13}{5} =$ F) $\frac{11}{7} =$ H) $\frac{18}{8} =$

Escreva, no caderno, como são lidos os seguintes números mistos:

A) $3\frac{1}{7}$ B) $4\frac{5}{8}$ C) $2\frac{3}{4}$ D) $1\frac{6}{8}$ E) $3\frac{5}{6}$

F) $5\frac{2}{3}$ G) $1\frac{7}{9}$ H) $3\frac{1}{2}$ I) $8\frac{4}{5}$ J) $2\frac{3}{10}$

Fonte: www.amarioludico.blogspot.com

ANEXO I – Atividade sobre frações equivalentes (conceito e as relações entre seus elementos numéricos).

ESCOLA DINÂMICA — MTM – 5º ANO

ALUNO (A):______________________________ — DATA: _____ / _____ / 2012

PROFESSORA: Fernanda Alves — ASSUNTO: Diferente ou igual?

FRAÇÕES EQUIVALENTES

Frações equivalentes são frações diferentes que representam a mesma parte do inteiro.

Complete as frações para que se tornem equivalentes:

A) $\frac{3}{6} = \frac{9}{\_\_}$ C) $\frac{15}{45} = \frac{5}{\_\_}$ E) $\frac{5}{8} = \frac{\_\_}{24}$ G) $\frac{9}{12} = \frac{\_\_}{4}$

B) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\_\_}$ D) $\frac{8}{10} = \frac{\_\_}{5}$ F) $\frac{18}{21} = \frac{\_\_}{7}$ H) $\frac{6}{10} = \frac{3}{\_\_}$

Dê três frações equivalentes usando a multiplicação.

A) $\frac{1}{4}$ = ___ = ___ = ___ D) $\frac{2}{5}$ = ___ = ___ = ___

B) $\frac{2}{3}$ = ___ = ___ = ___ E) $\frac{1}{7}$ = ___ = ___ = ___

C) $\frac{4}{8}$ = ___ = ___ = ___ F) $\frac{1}{2}$ = ___ = ___ = ___

Dê duas frações equivalentes usando a divisão.

A) $\frac{12}{24}$ = ___ = ___ C) $\frac{15}{30}$ = ___ = ___

B) $\frac{14}{42}$ = ___ D) $\frac{18}{48}$ = ___ = ___

Fonte: www.quintalestudante.blogspot.com

ANEXO J – Atividade sobre frações de quantidades discretas.

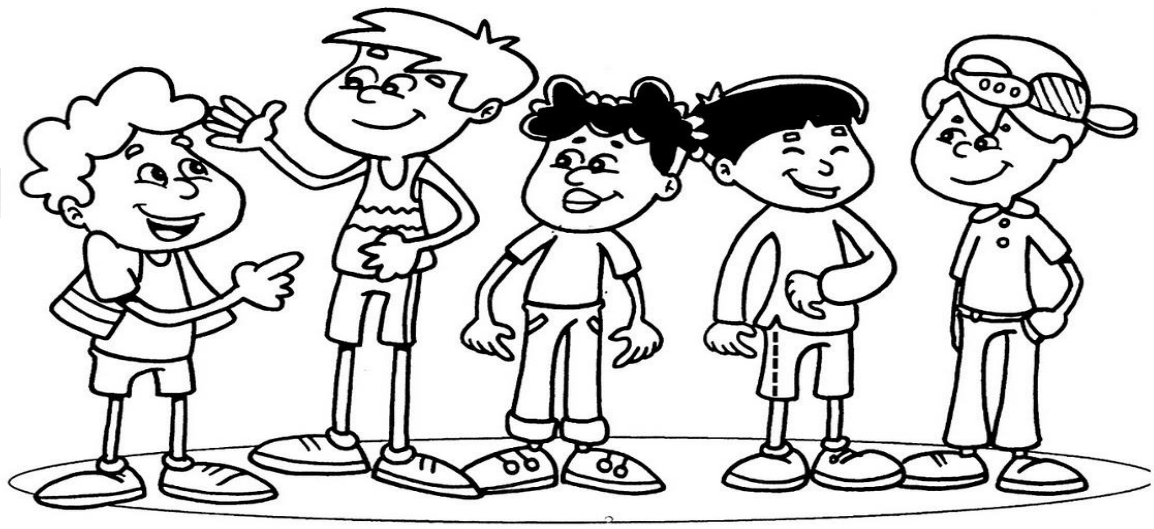
ESCOLA DINÂMICA — MTM – 5º ANO

ALUNO (A):______________________________ — DATA: _____ / _____ / 2012

PROFESSORA: Fernanda Alves — ASSUNTO: Desafio Frações

DESAFIO??

Cinco amigos foram a um rodízio de pizza. Descubra quantas fatias cada um comeu, seguindo as dicas.



João	Lucas	Pedro	Breno	Rafael
___________	___________	___________	___________	___________

1- João comeu $\frac{1}{3}$ a mais que Pedro.

2- Lucas comeu $\frac{2}{3}$ do dobro de João.

3- Pedro comeu $\frac{3}{5}$ do que Breno comeu.

4- Breno comeu $\frac{1}{4}$ de 60 fatias.

5- Rafael comeu $\frac{1}{2}$ de João.

Querido (a) aluno (a), registre as estratégias usadas para chegar às conclusões!

Fonte: www.movimento-sem-sala.blogspot.com

ANEXO K – Tabela de frações equivalentes.

ESCOLA DINÂMICA DATA: _____ / _____ / _____ 5º ANO

PROF^{A}: Fernanda Alves ALUNO(A): ________________________ Assunto: Tabela de equivalências

1 INTEIRO																			
½	½																		
1/3	1/3	1/3																	
1/4	1/4	1/4	1/4																
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5															
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6														
1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7													
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8												
1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9											
1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10										
1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11									
1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12								
1/14	1/14	1/14	1/14	1/14	1/14	1/14	1/14	1/14	1/14	1/14	1/14	1/14	1/14						
1/15	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15					
1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16				
1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18		
1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20

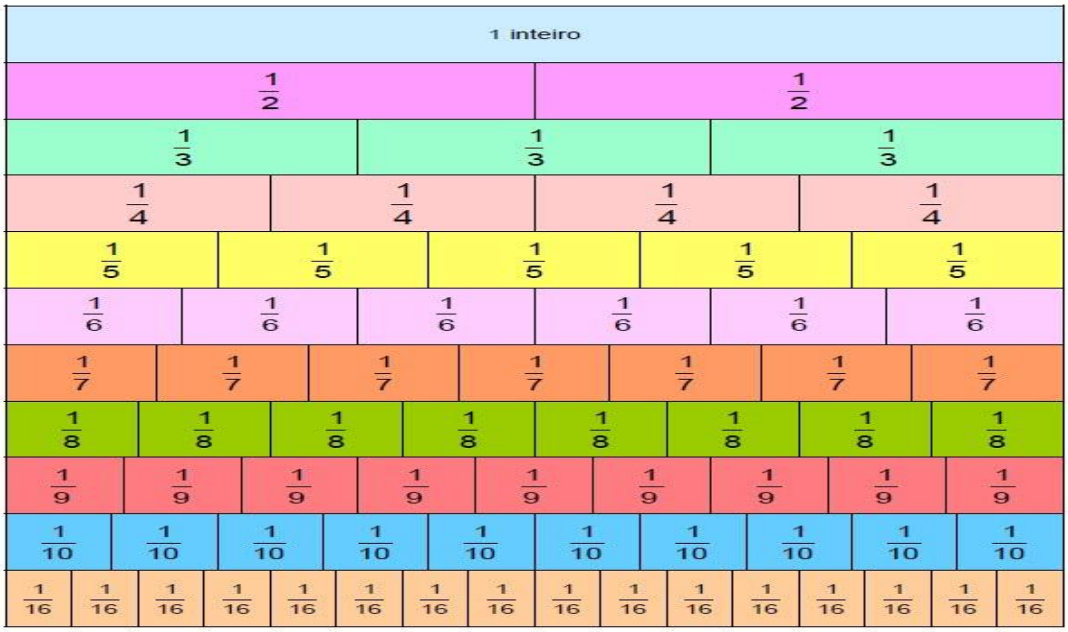
ANEXO L – Calculadora de frações.

ESCOLA DINÂMICA MTM – _____ ANO

ALUNO(A):___________________ DATA: _____ /_____ / _____

PROF^{A}: Fernanda Alves ASSUNTO: Calculadora de frações

Calculadora de frações!!! Que maravilha!!! Use essa engenhoca espetacular para fazer os cálculos a seguir. E, claro, registre o desenvolvimento na parte de trás da folha, colocando a resposta final na frente. Bons cálculos!!! Prof^{a} Fernanda!



$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = $ ______ + ______ = ______

$\frac{2}{4} + \frac{3}{8} = $ ______ + ______ = ______

$\frac{2}{4} - \frac{1}{2} = $ ______ - ______ = ______

$\frac{3}{5} - \frac{5}{10} = $ ______ - ______ = ______

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = $ ______ - ______ = ______

$\frac{2}{3} + \frac{5}{9} = $ ______ + ______ = ______

$\frac{6}{10} - \frac{2}{5} = $ ______ - ______ = ______

$\frac{2}{4} \quad \frac{3}{16} = $ ______ + ______ = ______

ANEXO M – Manual prático de frações para pais e alunos.