UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

MARLEIDE COAN CARDOSO

CONCILIAÇÃO DE METAS, RELEVÂNCIA E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM MATEMÁTICA

Tubarão

2015

MARLEIDE COAN CARDOSO

CONCILIAÇÃO DE METAS, RELEVÂNCIA E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ciências da Linguagem.

Orientador: Prof. Dr. Fábio José Rauen.

Tubarão

2015

Cardoso, Marleide Coan, 1965-
C26 Conciliação de metas, relevância e registros de representação semiótica em matemática / Marleide Coan Cardoso; -- 2015.
173 f. il. ; 30 cm

Orientador : Fábio José Rauen.
Tese (doutorado)–Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.
Inclui bibliografias.

1. Semiótica. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Aprendizagem cognitiva. I. Rauen, Fábio José. II. Universidade do Sul de Santa Catarina - Doutorado em Ciências da Linguagem. III. Título.

CDD (21. ed.) 401.41

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária da Unisul

MARLEIDE COAN CARDOSO

CONCILIAÇÃO DE METAS, RELEVÂNCIA E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM MATEMÁTICA

Esta Tese foi julgada adequada à obtenção do título de Doutor em Ciências da Linguagem e aprovada em sua forma final pelo Curso de Doutorado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 19 de março de 2015.

____
Professor e orientador Fábio José Rauen, Doutor.
Universidade do Sul de Santa Catarina

____
Professor Jorge Campos da Costa, Doutor.
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

____
Professor Méricles Tadeu Moretti, Doutor.
Universidade Federal de Santa Catarina

____
Professora Elizete Maria Possamai Ribeiro, Doutora.
Instituto Federal Catarinense

____
Professora Diva Marília Flemming, Doutora.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Dedico esta tese a todos os professores de Matemática que reconhecem em outras áreas de conhecimento relações que podem contribuir para a sua formação e para o aperfeiçoamento de sua prática docente.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que sempre iluminou a minha caminhada.

Ao meu orientador Professor Dr. Fabio José Rauen, pelo estímulo e atenção que me concedeu durante a elaboração desta tese.

Ao meu esposo Alcionê e os meus dois filhos Richard e Erickson, que souberam suportar pacientemente a minha ausência e impaciência.

Aos meus pais Emílio e Sestina, por terem me dado a vida, e aos demais familiares e amigos, pelo apoio e colaboração.

Aos colegas e professores do curso Ciências da Linguagem, pelo incentivo e troca de experiências, em especial a Bazilicio de Andrade Filho, pelas horas de estudo e trocas de ideias, e Luiza Liene Bressan, pelo apoio recebido em momentos que eu necessitei.

Aos professores e gestores do Instituto Federal Catarinense Campus Avançado Sombrio, em especial aos professores do curso de Licenciatura em Matemática, pelo apoio recebido.

Aos alunos da 7ª fase 2014-1 do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Catarinense, que colaboraram como sujeitos desta pesquisa.

A professora Diva Marilia Flemming, cujos exemplos e ensinamentos estão sempre presentes em minha prática docente e formação.

A Unisul, por me proporcionar a oportunidade de estudar e pelo incentivo financeiro recebido.

A todos o meu “Muito obrigada!”

“É com a hipótese mais simples que se precisa ter cuidado; pois é ela que tem mais chance de passar despercebida.” (POINCARÉ).

RESUMO

Nesta tese, desenvolve-se e ilustra-se uma arquitetura descritiva e explanatória dos processos cognitivos envolvidos nas operações de apreensão de unidades significativas, de tratamento e de conversão de registros de representação semiótica fundamentada nas noções de conciliação de metas e de relevância. O estudo desenvolve a arquitetura em três estágios. No primeiro estágio elabora-se uma revisão crítica da teoria de registros de representação semiótica de Duval (2009, 2011). No segundo estágio, apresentam-se os fundamentos da teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986/1995) de modo a descrever e explicar os processos cognitivos descritos por Duval. No terceiro estágio, considera-se a noção de conciliação de metas de Rauen (2014), de modo a aplicar o modelo em uma atividade de interpretação de uma função quadrática definida no campo dos naturais elaborada por estudantes de licenciatura em Matemática. O estudo permite tecer as seguintes conclusões: Relações cognitivas e comunicativas de relevância guiadas pelo conceito de conciliação de metas subjazem a identificação de unidades significativas, o tratamento e a conversão dos registros de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Além disso, a presunção de relevância ótima e o procedimento de compreensão guiado pela noção de relevância são aplicáveis à apreensão e ao processamento de unidades significativas de todo e qualquer registro de representação semiótica em matemática, bem como aos seus tratamentos e conversões, respeitando-se a primeira conclusão. Por fim, a expertise na coordenação de diferentes registros de representação semiótica em processos congruentes e não congruentes de conversão é indício de uma apreensão mais qualificada dos objetos matemáticos, respeitando-se as conclusões anteriores.

Palavras-chave: Pragmática Cognitiva. Teoria de Conciliação de Metas. Teoria da Relevância. Teoria de Registros de Representação Semiótica. Ensino e Aprendizagem de Matemática.

ABSTRACT

In this thesis, I develop and illustrate a descriptive and explanatory architecture of the cognitive processes involved in the operations of apprehension of meaningful units, treatment and conversion of registers of semiotic representation grounded in notions of goal conciliation and relevance. I develop this architecture in three stages. In the first stage, I carry out a critical review of Duval's (2009, 2011) theory of registers of semiotic representation. In the second stage, I present the foundations of Sperber and Wilson's (1986/1995) relevance theory to describe and explain the cognitive processes described by Duval. In the third stage, I consider Rauen's (2014) notion of goal conciliation, in order to apply the model in an activity of interpretation of a quadratic function defined in the set of natural numbers, which was made by undergraduate students in Mathematics. The study leads to make the following conclusions. Cognitive and communicative relationships of relevance, guided by the concept of goal conciliation, underlie the identification of meaningful units, the treatment and conversion of registers of semiotic representation in the process of teaching and learning in Mathematics. Moreover, the presumption of optimal relevance and the comprehension procedure guided by the notion of relevance are applicable to the apprehension and processing of meaningful units of any register of semiotic representation in Mathematics, as well as their treatments and conversions, taking into account the first conclusion. Finally, the expertise in the coordination of different registers of semiotic representation in congruent and not congruent conversion processes is indicative of a more qualified apprehension of mathematical objects, considering the previous conclusions.

Keywords: Cognitive pragmatics. Goal conciliation theory. Relevance theory. Theory of registers of semiotic representation. Teaching and learning in Mathematics.

RESUMEN

Esta tesis desarrolla e ilustra una arquitectura descriptiva y explicativa de los procesos cognitivos involucrados en las operaciones de aprehensión de unidades significativas, tratamiento y conversión de registros de representación semiótica basadas en nociones de conciliación de metas y relevancia. El estudio desarrolla la arquitectura de tres etapas. En la primera etapa, se emprende una revisión crítica de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (2009, 2011). En la segunda etapa, se presentan los fundamentos de la teoría de la relevancia de Sperber y Wilson (1986/1995) para describir y explicar los procesos cognitivos descritos por Duval. En la tercera etapa, se considera la idea de conciliación de metas de Rauen (2014), con el fin de aplicar el modelo en una actividad de interpretación de una función cuadrática definida en el campo de los números naturales, que ha sido elaborada por estudiantes de nivel superior en las Matemáticas. El estudio lleva a hacer las siguientes conclusiones. Relaciones cognitivas y comunicativas de relevancia guiada por el concepto de conciliación de metas subyacen la identificación de unidades significativas, el tratamiento y la conversión de los registros de representación semiótica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Además, la presunción de relevancia óptima y el procedimiento de comprensión guiada por la noción de relevancia son aplicables a la aprehensión y procesamiento de unidades significativas de cualquier de los registros de representación semiótica en Matemáticas, así como sus tratamientos y conversiones, respetando la primera conclusión. Por último, la experiencia en la coordinación de los diferentes registros de representación semiótica en procesos congruentes y no congruentes de conversión es evidencia de una aprehensión más cualificada de los objetos matemáticos, respetando los resultados anteriores.

Palabras-clave: Pragmática cognitiva. Teoría de la reconciliación de metas. Teoría de la relevancia. Teoría de los registros de representación semiótica. Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> O caráter abstrato dos estudos matemáticos surpreende o principiante nos primeiros contatos com o mundo das ideias e representações desprovidas das particularidades das coisas materiais. Apesar de a matemática ser utilizada e estar presente na vida diária, exceto para quem já compartilha deste saber, as ideias e os procedimentos matemáticos parecem muito diferentes dos utilizados na experiência prática ou na vida diária. (BICUDO, 1999, p. 162).

Esta tese emerge de inúmeras inquietações da pesquisadora enquanto docente da disciplina de Matemática em diferentes níveis de ensino, desde as séries finais do Ensino Fundamental da Educação Básica até a pós-graduação *lato sensu*, o que de certo modo justifica a busca por respostas fora da área mais restrita de sua formação. Em especial, destaca-se aqui a dificuldade de os estudantes aprenderem e apropriarem-se de conceitos de objetos matemáticos, mesmo após a apresentação do conteúdo e a extensiva consideração de casos.

Por exemplo, após finalizar a apresentação de um conteúdo novo em matemática, espera-se que o aluno não somente o compreenda, mas o relacione com os demais conceitos já elaborados anteriormente e que, supostamente, deveriam constituir seu ambiente cognitivo. Todavia, quando questionados sobre a aprendizagem do assunto, há quem demonstre sua não compreensão por enunciados como “Dá para falar a nossa língua professora?” ou “Não consigo compreender esse assunto!”.

Para além da frustração de educadora, vale questionar o que faltou para que o aluno compreendesse o conteúdo; o que faltou para que fosse estabelecida a comunicação entre professor, aluno e objeto de ensino; ou mesmo, em que momento da aula não houve a relação entre o conceito novo e aqueles supostamente já elaborados pelos estudantes, de forma a integrar e a ampliar esse conjunto prévio de conhecimentos.

As dificuldades no ensino e na aprendizagem da matemática e as diversas variáveis que interferem nesses processos com maior ou menor intensidade têm sido objeto de inúmeras pesquisas. Argumenta-se que essas dificuldades advêm de causas diversas, desde aquelas relacionadas com os próprios aprendizes, passando por aquelas relacionadas com o processo em si mesmo de ensinar e de aprender, até aquelas relacionadas com os educadores e suas metodologias de ensino. Obviamente, trata-se de um tema complexo que pode ser abordado de múltiplas formas e a partir de múltiplas correntes teóricas.

Esta pesquisa de interface entre os estudos da linguagem, especialmente a teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986/1995, 2005) e a teoria de conciliação de metas de

Rauen (2014), e os da matemática, especialmente a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009, 2011), quer delimitar o olhar para um aspecto aparentemente banal: o principal instrumento de ensino dos objetos matemáticos e de seus registros de representação é a língua natural, cuja lógica diverge muitas das vezes daquela que dá sustentação à Matemática como ciência formal. Enquanto a matemática se sustenta em sistemas lógicos formais, demonstrativos e monossêmicos, a língua natural se sustenta em sistemas lógicos não necessariamente demonstrativos próprios que lhe dão seu aspecto polissêmico característico. Enquanto a língua natural expressa uma lógica própria do senso comum que os seres humanos desenvolveram espontaneamente, a matemática exprime uma lógica sistêmica que gera conclusões as quais, no mais das vezes, terminam em paradoxos evidentes com as crenças de senso comum.

Todavia, ensinar matemática não implica somente ensinar a lógica demonstrativa que lhe dá sustentação, mas também assimilar formas próprias de representação, uma vez que os objetos matemáticos necessitam de representações para serem acessados.

> O sistema formal é uma realidade de ordem ideal. Os sinais dos sistemas formais se referem a entidades ideais próprias de tais sistemas. Por exemplo, na lógica, as diferentes formas de juízo e de raciocínio; na matemática, os números, os conjuntos, as estruturas algébricas, os espaços. (BUZZI, 1997, p. 114).

Considerando que somente por meio de representações semióticas é que determinados aspectos dos objetos matemáticos podem se tornar manifestos, Duval (2009, 2011) elaborou a noção de *registros de representação semiótica*, alertando para a necessidade de se diferenciar a representação dos objetos matemáticos em si – a *semiósis* – do objeto matemático representado – a *noésis*.

Diferentes registros de representação semiótica acionam diferentes unidades significativas. Por exemplo, a equação matemática $x+2=5$, aqui expressa no registro algébrico, contém as seguintes unidades significativas ‘*x*’, ‘+’, ‘2’, ‘=‘ e ‘5’. Destaque-se, no entanto, que um registro de representação não se resume a um conjunto aleatório de unidades significativas, mas a um conjunto sintática e semanticamente estruturado dessas unidades. É por meio desse arranjo que é possível proceder a tratamentos e conversões.

Conforme o autor, um tratamento “consiste num conjunto de transformações efetuadas no interior de um determinado registro de representação semiótica”, graças às características algorítmicas permitidas por essa estrutura. No caso, para proceder ao tratamento da resolução equação $x+2=5$, é preciso estabelecer relações entre as unidades significativas respeitando a noção de igualdade, entre outras, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x+2&=5 \\ x&=5-2 \\ x&=3 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} x+2&=5 \\ x+2-2&=5-2 \\ x&=3 \end{aligned}$$

Contudo, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, não basta saber identificar e tratar unidades significativas da equação em questão, porque o próprio processo de ensinar e aprender implica mobilizar e coordenar pelo menos dois registros diferentes, a língua natural e a representação algébrica. Por exemplo, quando o professor enuncia algo como "Qual é o número que somado com dois é igual a cinco?" no contexto do ensino de equações do 1º grau, o estudante precisa converter as unidades significativas da língua natural nas respectivas unidades significativas do registro algébrico.

Algo aparentemente trivial como o que se representa na figura 1 a seguir:

Figura 1 – Exemplo de conversão de enunciado em língua natural para o registro algébrico

Qual é o número que	somado com	dois	é igual	a cinco?
|	|	|	|	|
x	+	2	=	5

Fonte: Elaboração própria.

Duval (2009, 2011) argumenta em favor da importância de se mobilizarem e coordenarem diferentes registros na abordagem de um mesmo objeto matemático. Para ele, um estudante que consegue coordenar pelo menos dois registros de representação para um mesmo objeto matemático procede a um salto qualitativo substantivo na compreensão dos próprios objetos matemáticos.

Contudo, as unidades significativas de cada registro de representação semiótica em particular, por suas características semióticas intrínsecas, tornam evidentes apenas certos aspectos noéticos do objeto matemático representado, aspectos esses que unidades significativas de outro registro podem não ser capazes de evidenciar. Isso implica dizer que:

a) nem sempre há congruência entre os registros que estão sendo mobilizados e coordenados num processo de conversão – um claro obstáculo para a compreensão dos objetos matemáticos; e
b) quanto maior for a não congruência entre unidades significativas dos registros mobilizados, maior será o custo de processamento para a conversão.

Vejamos um exemplo para ilustrar esse argumento de forma mais objetiva. No estudo das funções, utiliza-se geralmente do registro tabular como intermediário entre o registro algébrico e gráfico de uma função. Tome-se o caso de um estudante que precise representar numa tabela a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. O resultado dessa operação pode ser visto na tabela a seguir:

Tabela 1 – Representação tabular da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$

x	*f(x)*
0	1
1	2
2	5
3	10

Fonte: elaboração da autora

No caso da função em questão, o registro algébrico de partida e o registro tabular de chegada registram discretamente, isto é, 'ponto a ponto', os números naturais $\mathbb{N}$ da variável $f(x)$ que correspondem à função $f(x) = x^2 + 1$ para 0, 1, 2 e 3 unidades da variável x. Contudo, a mesma representação tabular pode corretamente representar a função f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Nesse último caso, embora haja correspondência entre os dados algébricos de partida e os dados tabulares de chegada, a tabela, ao representar somente os valores discretos de $f(x)$ que correspondem à função $f(x) = x^2 + 1$ para 0, 1, 2 e 3 unidades, deixa escapar valores próprios dos números reais $\mathbb{R}$, revelando-se incongruente com a formulação algébrica. Por exemplo, se a tabela for tomada como registro de partida para representar as funções num plano cartesiano, em ambos os casos, a representação cartesiana captaria somente três coordenadas dos pontos $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,5)$, $(3,10)$. Nesse processo, comumente realizado em sala de aula e correto no universo dos números naturais $\mathbb{N}$, revela-se incompleto ou incorreto no universo dos números reais $\mathbb{R}$, uma vez que a representação cartesiana destes pontos não representaria os valores contínuos pertinentes da curva da função definida em $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Considerando a contingência dos fenômenos de congruência e de não congruência quando os indivíduos mobilizam e coordenam diferentes registros de representação, este estudo buscará fundamentos para descrever e explicar esses processos na abordagem teórica guiada pela noção de relevância que Sperber e Wilson (2001) utilizaram para a língua natural. A teoria da relevância é uma abordagem pragmática cognitiva fundamentada numa economia de custos e efeitos cognitivos. Os autores defendem que o processamento de um *input* linguístico num contexto cognitivo prévio de suposições pode gerar efeitos de fortalecimento de suposições existentes, de contradição e eliminação de suposições existentes e de combinação com suposições existentes para gerar implicações contextuais. Dado que a geração desses efeitos implica custos de processamento, os autores asseveram que uma informação será mais relevante, na medida em que maiores forem os efeitos cognitivos ou menores forem esses custos.

Com base nessas suposições, os autores definem um *princípio cognitivo de relevância* segundo o qual "a cognição humana tende a ser dirigida para a maximização da relevância" e, decorrente desse princípio cognitivo, um *princípio comunicativo de relevância*, segundo o qual "cada enunciado (estímulo ostensivo) cria a presunção de sua própria relevância ótima". Os autores partem da constatação de que o falante manipula a atenção do ouvinte para propósitos definidos. Assim, ao processar um estímulo comunicativo, o ouvinte presume que ele será relevante de um modo esperado. Trata-se do que eles definem como *presunção de relevância ótima*, ou seja, "o enunciado (ou outro estímulo ostensivo) será ao menos relevante suficiente para merecer o esforço de processamento do ouvinte e o mais relevante compatível com as habilidades e preferências do falante".

Os princípios cognitivo e comunicativo de relevância redundam num *procedimento de compreensão guiado pela noção de relevância*. Segundo esse procedimento, o ouvinte segue um caminho de menor esforço na computação de efeitos cognitivos, considerando interpretações em ordem de acessibilidade e parando quando sua expectativa de relevância é satisfeita.

Conforme Rauen (2005, p. 37), um ouvinte que se dispõe a compreender um enunciado procura obter uma interpretação que satisfaça sua expectativa de relevância ótima. Para alcançar esse propósito, considerando a codificação linguística e seguindo uma rota de menor esforço, o ouvinte enriquece esses *inputs* para obter um significado explícito e, se necessário, completá-lo em nível implícito, de forma que o resultado da interpretação se conforme com sua expectativa de relevância. O autor complementa:

> Nesse processo, concebe-se a forma linguística, em nível representacional, como uma forma lógica não proposicional (semanticamente incompleta). Pragmaticamente, essa forma lógica é enriquecida por mecanismos inferenciais de modo a se obter a explicatura, entendida com uma forma lógica proposicional, uma proposição semanticamente completa para a qual se pode atribuir valor de verdade.

> Por vezes, a forma lógica proposicional compõe uma premissa implicada que gera dedutivamente uma conclusão implicada, uma proposição que possivelmente seria a interpretação última pretendida pelo falante – a implicatura. (RAUEN, 2005, p. 37).

O procedimento de compreensão guiado pela noção de relevância fundamenta-se na concepção de que os endereços conceituais podem ser acessados por três entradas distintas: a entrada lexical, a entrada lógica e a entrada enciclopédica. A *entrada lexical* corresponde às palavras ou expressões da linguagem natural. A *entrada lógica* consiste num conjunto de regras de dedução que se aplicam às formas lógicas das quais esse conceito é um constituinte. A *entrada enciclopédica* refere-se à extensão e/ou denotação do conceito.

Um enunciado linguístico simples como "o quadrado de dois é quatro" pode exemplificar a complexidade do processamento cognitivo necessário para sua compreensão. Esse enunciado, com as entradas lexicais 'o', 'quadrado', 'de', 'dois', 'é' e 'quatro', encaixa-se numa forma lógica do tipo "ser x, y" ou "algo ser algo", tal que "x" equivale à sequência lexical 'o quadrado de dois', "ser" equivale à entrada lexical 'é' e "y" equivale à entrada lexical 'quatro'. Essas entradas lexicais são convertidas em entradas enciclopédicas equivalentes, grosso modo, aos conceitos de POTÊNCIA DE DOIS, de IGUALDADE, e de QUATRO UNIDADES. Com esses processamentos, a forma linguística do enunciado converte-se numa forma lógica proposicional, uma vez que a ela pode ser atribuído um valor de verdade. Como, de fato, o quadrado de dois é quatro, pode-se dizer que a compreensão desse enunciado está correta.

Figura 2 – Exemplo do processamento cognitivo de um enunciado I

Forma Linguística (entradas lexicais)	O quadrado de dois	é	quatro
	|	|	|
Forma Lógica (entradas lógicas)	algo (x)	Ser	algo (y)
	|	|	|
Explicatura (entradas enciclopédicas)	POTÊNCIA DE DOIS	IGUALDADE	QUATRO UNIDADES

Fonte: Elaboração própria.

A ilustração acima sugere que o procedimento de compreensão concebido para a língua natural pode não somente ser aplicado aos demais registros de representação, como também pode ajudar a descrever e a explicar como ocorre a congruência e a não congruência entre diferentes registros de representação no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Defende-se aqui a tese de que as entradas lexicais e enciclopédicas propostas por Sperber e Wilson podem ser colocadas em correspondência, respectivamente, com as unidades significativas dos registros de representação e os conceitos matemáticos pertinentes tal como propostos por Duval. As entradas lógicas, por sua vez, podem entrar em correspondência com o caráter sintático dos próprios registros. Trata-se de um aspecto com o qual Duval atenta para a organização interna peculiar de cada registro de representação.

Embora a consideração do conceito de relevância faça avançar a compreensão dos processos cognitivos envolvidos no processamento de enunciados matemáticos, ainda está aberta a questão dos custos de processamento. O conceito de relevância ainda não explica por que os indivíduos se dispõem a incrementar os custos mobilizando e coordenando diferentes registros na expectativa de ganhos cognitivos futuros incertos derivados da apreensão mais qualificada dos conceitos. Esse investimento cognitivo precisa ser descrito e explicado por algo que excede um conceito meramente reativo de relevância.

Considere-se um professor que faz a seguinte pergunta em sala de aula "Qual é o quadrado de dois?". Esse enunciado, com as entradas lexicais 'qual', 'é', 'o', 'quadrado', 'de' 'dois', encaixa-se numa forma lógica do tipo "ser x, y" ou "algo ser algo", tal que "x" equivale à entrada lexical 'qual', "ser" equivale à entrada lexical 'é' e "y" equivale à sequência lexical 'o quadrado de dois'. Essas entradas lexicais são convertidas em entradas enciclopédicas equivalentes, grosso modo, aos conceitos de ∅[1], de IGUALDADE, e de QUADRADO DE DOIS, sem os quais a compreensão desse enunciado não está correta.

Figura 3 – Exemplo do processamento cognitivo de um enunciado II

Forma Linguística (entradas lexicais)	Qual	é	o quadrado de dois?
	|	|	|
Forma Lógica (entradas lógicas)	algo (x)	ser	algo (y)
	|	|	|
Explicatura (entradas enciclopédicas)	∅	IGUALDADE	QUADRADO DE DOIS

Fonte: Elaboração própria.

O problema aqui é que a forma lógica está incompleta. A forma lógica não se configura ainda como proposicional, pois não se pode atribuir a ela valor de verdade. A rigor, esse exemplo é uma demanda pela necessidade de se completar a proposição. "O professor demanda que *P*", tal que *P* equivale a "qual é o quadrado de dois". O que leva o estudante a

[1] Nesta tese, quando da representação da entrada enciclopédica e lógica, utilizaremos o símbolo '∅' para representar o conceito de entrada vazia. Esta opção não tem relação com o objeto matemático conjunto vazio cuja representação também é dada por ∅ ou { }.

atender essa demanda? A noção de relevância sozinha parece não ser capaz de responder a essa questão, visto que ela parece ser antes reativa que proativa. Segundo Rauen (2014, p. 2), isso ocorre porque o procedimento de compreensão guiado pela noção de relevância é acionado pela emergência de um enunciado.

Como resposta a essa questão, Rauen (2014) apresenta uma abordagem abdutivo/dedutiva denominada de teoria de conciliação de metas, conectando do ponto de vista simbólico a noção de relevância com a noção de meta. O autor argumenta que, em contextos proativos, a cognição é movida abdutivamente antes por uma conclusão *Q* assumida do que pela emergência de premissas *P*. Assim, o agente abduz uma hipótese ou inferência para a melhor solução *PQ* – *princípio de plausibilidade* – que simultaneamente é a solução com menor custo diante do efeito fixo de uma meta – *princípio da relevância*.

A teoria de conciliação de metas é um modelo em quatro estágios: formulação de uma meta *Q*, e formulação, execução e checagem de uma hipótese abdutiva antefactual *PQ*. Rauen concebe na fase de checagem quatro tipos de consecuções de acordo com a noção de conciliação de metas (conciliação ativa, inconciliação ativa, conciliação passiva e inconciliação passiva) e cinco arquiteturas para a avaliação de hipóteses abdutivas antefactuais (categóricas $P \Leftrightarrow Q$, bicondicionais $P \leftrightarrow Q$, condicionais $P \rightarrow Q$, habilitadoras $P \leftarrow Q$ e tautológicas *P*–*Q*). Segue-se dessa abordagem a possibilidade de não somente descrever e explicar autoconciliações de metas, mas heteroconciliações, quando é o caso de se estabelecerem colaborativamente coordenações de metas e submetas entre indivíduos. Segundo o autor, a partir dessa arquitetura abdutivo/dedutiva, é possível operacionalizar mais adequadamente tanto a produção como a percepção de intenções informativas e comunicativas no escopo de uma arquitetura que considera seriamente relevância como um predicado dependente de meta.

A presunção de uma resposta correta para questões de Matemática em sala de aula é um exemplo trivial de ascendência da meta sobre as premissas. Tome-se o caso de um estudante que é demandado a representar a função pertinente para os dados da tabela 1. Diante dessa questão, a meta *Q* em questão consiste em determinar a função observando o modelo matemático que comporta os pontos representados. Como ele observa dados discretos na tabela, a hipótese abdutiva antefactual *PQ* simultaneamente mais plausível e relevante é a de que a função está definida no universo dos números naturais $\mathbb{N}$. Segue-se a sua tentativa de inferir a função no universo dos números naturais *P*, fase de execução. Uma vez obtido o resultado, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definido por $f(x) = x^2 + 1$, ele provavelmente espera a confirmação do professor ou confere os dados num gabarito, fase de checagem. Caso o resultado obtido pelo aluno seja conciliado com a resposta do professor ou do gabarito, Rauen (2014) diz ter havido uma heteroconciliação de metas, e a hipótese abdutiva é corroborada e fortalecida.

Tendo em vista esse contexto teórico de interface entre a teoria dos registros de representação semiótica de Duval, a teoria da relevância de Sperber e Wilson e a teoria de conciliação de metas de Rauen, esta tese propõe três hipóteses de trabalho:

A *primeira hipótese* assevera que relações cognitivas e comunicativas de relevância guiadas pelo conceito de conciliação de metas subjazem a identificação de unidades significativas, o tratamento e a conversão dos registros de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

A *segunda hipótese* considera que a presunção de relevância ótima e o procedimento de compreensão guiado pela noção de relevância são aplicáveis à apreensão e ao processamento de unidades significativas de todo e qualquer registro de representação semiótica em matemática, bem como aos seus tratamentos e conversões, considerando a primeira hipótese.

A *terceira hipótese* afirma que a expertise na coordenação de diferentes registros de representação semiótica em processos congruentes e não congruentes de conversão é indício de uma apreensão mais qualificada dos objetos matemáticos, considerando a primeira e a segunda hipótese.

Tendo sido consideradas as hipóteses deste estudo, esta pesquisa tem como objetivo geral desenvolver e ilustrar uma arquitetura descritiva e explanatória dos processos cognitivos envolvidos nas operações de apreensão de unidades significativas, de tratamento e de conversão de registros de representação semiótica fundamentada nas noções de conciliação de metas e de relevância.

Para dar conta desse objetivo geral, esta pesquisa pretende especificamente: (a) revisar criticamente a teoria de registros de representação semiótica de Duval (2009, 2011); e (b) revisar, propor e ilustrar a aplicação da arquitetura conceitual da teoria de relevância, de Sperber e Wilson (1986/1995) e da teoria de conciliação de metas de Rauen (2014) em casos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, com ênfase nos processos de apreensão de unidades significativas, de tratamento e de conversão de diferentes registros de representação semiótica.

Para alcançar os objetivos propostos e verificar as hipóteses levantadas, esta tese foi desenvolvida em mais quatro capítulos. No segundo capítulo, destacam-se os registros de representação semiótica em Matemática. Este capítulo é constituído de três seções. Na primeira seção, apresenta-se a Matemática como ciência formal. Trata-se de uma ciência com objetos abstratos e uma linguagem própria de representação, aspecto este que, por um lado, aproxima a Matemática da Lógica, por outro, distancia a Matemática das demais ciências tais como as naturais e as sociais. Na segunda seção, dada a necessidade de representação para o acesso aos objetos matemáticos, apresenta-se a teoria de registros de representação semiótica de Duval (2009, 2011), destacando a noção de congruência e de não congruência nos processos de conversão de unidades significativas de diferentes registros de representação. Finalmente, na terceira seção, põe-se em destaque o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, enfatizando os obstáculos epistemológicos e didáticos que precisam ser levados em conta na transposição didática de objetos matemáticos científicos em objetos de ensino.

No terceiro capítulo, apresenta-se a teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986/1995) como base teórica para analisar custos e benefícios cognitivos gerados pela utilização de diferentes registros de representação semiótica no processo de transposição didática. O capítulo foi dividido em três seções. Na primeira seção, apresentam-se noções introdutórias sobre relevância, entre as quais as noções de efeitos cognitivos e esforços de processamento, e os princípios cognitivo e comunicativo de relevância. Na segunda seção, apresenta-se o processamento pragmático de enunciados. Nesta seção, destacam-se questões como a noção de forma lógica, o mecanismo dedutivo, as regras de eliminação, o processamento das informações, o processamento pragmático de enunciados propriamente ditos e o procedimento de compreensão guiado pela relevância. Conhecida a teoria da relevância, na terceira seção, revisita-se a questão da conversão. Nesse esforço, retomam-se os diversos registros de representação, destacando-se a língua natural e os registros algébrico, tabular e gráfico. O capítulo se encerra com uma subseção dedicada à complexidade das conversões entre registros de representação semiótica.

No quarto capítulo, apresenta-se a teoria de conciliação de metas e o modelo desenvolvido neste estudo é aplicado em um exemplo prático de sala de aula. O capítulo foi dividido em duas seções principais. A primeira seção se dedica à teoria de conciliação de metas de Rauen (2014). Na primeira seção, apresentam-se os fundamentos da teoria, a modelação proativa de ações e a avaliação de metas, bem como apresenta a noção de auto e heteroconciliação de metas. Na segunda seção, aplicam-se os conceitos desenvolvidos na tese numa interpretação de uma função definida no campo dos naturais. Nesta seção, apresenta-se e analisa-se a atividade para então analisar e discutir as respostas dos estudantes.

No quinto capítulo, por fim, apresentam-se as considerações finais do estudo. Neste capítulo, cotejam-se os resultados obtidos em função das hipóteses e dos objetivos do estudo, bem como se elencam limitações e potencialidades.

2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM MATEMÁTICA

> A matemática é frequentemente imaginada como uma árvore poderosa com raízes, tronco, galhos e brotos assinalados com nomes de certas subdisciplinas. É uma árvore que cresce com o tempo. Conceitos são ampliados e têm suas possibilidades preenchidas. São criadas novas teorias. Novos objetos matemáticos são delineados e trazidos para a luz dos refletores. (DAVIS E HERSH, 1989, p. 44).

Este capítulo está organizado em três seções. Na primeira seção, caracteriza-se a Matemática como uma ciência formal cujos objetos somente são acessados por registros de representação semiótica. Nesta seção, apresentam-se aspectos importantes da formalização da Matemática; discussões sobre as noções de referência e sentido do ponto de vista de Frege; o processo de formalização e a importância da dedução; impactos da formalização no ensino da Matemática; e a necessária atividade de representação dos objetos matemáticos. Na segunda seção, apresenta-se a teoria de registros de representação semiótica aprofundando os conceitos de *noesis* e *semiosis*, bem como a diferenciação dos tipos de representações que envolvem os objetos matemáticos. Nesta seção, a partir de um exemplo matemático, os processos de tratamento e de conversão são analisados em função da noção de congruência. Na terceira seção, por fim, destaca-se a questão da transposição didática de conceitos matemáticos científicos em conteúdos de ensino, pondo em destaque como obstáculos epistemológicos convertem-se em obstáculos didáticos.

2.1 MATEMÁTICA COMO CIÊNCIA FORMAL

Conforme Rauen (2014, p. 42), no que diz respeito aos objetos de investigação, as ciências podem ser divididas em dois grandes grupos, o grupo das ciências materiais e o grupo das ciências formais. As ciências materiais ou factuais caracterizam-se por lidarem com seres, coisas, fatos ou fenômenos encontrados na natureza ou produzidos pelo homem. Elas podem ser subdivididas em ciências naturais e sociais. As ciências naturais, tais como a física, a química, ou a biologia, por exemplo, operam com objetos naturais e supostamente independentes da ação humana. As ciências sociais, tais como o direito, a sociologia, a história, a educação, a economia, a linguística, por exemplo, lidam com objetos caracterizados pela ação social humana. Em comum, ambos os grupos caracterizam por representar objetos externos passíveis de serem observados.

As ciências formais, tais como a matemática e a lógica, operam com objetos abstratos que se restringem à mente humana em nível conceitual. Em essência, o que caracteriza esse tipo de ciência é a ausência de objetos externos observáveis. Conforme Rauen (2014, p. 43), "os critérios de cientificidade aplicados às ciências formais têm a ver com sua capacidade de validação ou de demonstração, e não com sua correlação com a realidade externa". Não sem motivo, é apenas por meio de representações semióticas que esses objetos são acessíveis. Por exemplo, enquanto o conceito de mamífero pode ser confrontado com objetos externos observáveis, ou seja, com animais cujas crias amamentam; a noção de potência não pode ser confrontada na realidade da mesma forma.

Rauen (2014, p. 43) assim complementa.

> Um conhecimento em ciência formal precisa ser válido e demonstrável. As ciências formais preocupam-se com proposições e argumentos, e não com objetos empíricos. Os enunciados formais consistem em relações entre símbolos, e não em relações com seres, objetos, fatos ou fenômenos. As ciências formais são suficientes em relação aos seus conteúdos e métodos de prova e contentam-se com a lógica para demonstrar rigorosamente seus teoremas, ao passo que as ciências factuais dependem dos fatos. Destaque-se que a demonstração de um conhecimento formal é sempre completa e final, enquanto a verificação de um conhecimento material ou factual é sempre incompleta e temporária. Logo, enquanto se pode obter uma verdade formal completa, a obtenção de uma verdade material ou factual é sempre discutível e passível de ser contestada por novas evidências.

2.1.1 Formalização em Matemática

A representação algébrica representa a essência da formalização em Matemática e se tornou mais frequente nos textos matemáticos a partir da inserção da teoria dos conjuntos e de seus fundamentos como veículo para as demonstrações matemáticas quando da introdução da matemática moderna por volta dos meados do século XX.

> As demonstrações preenchem simultaneamente vários fins. Ao serem expostas ao exame e julgamento de uma nova audiência, as demonstrações estão sujeitas a um processo constante de criticismo e revalidação. Erros, ambiguidades e incompreensões são dissipados devido à exposição constante. Uma demonstração significa respeitabilidade. Uma demonstração é o sinete da autoridade. (DAVIS; HERSH, 1989, p. 182).

Num primeiro momento, o objetivo da formalização matemática não foi alcançado, pois a linguagem simbólica da matemática apresentou grande rejeição por seus usuários. Esta rejeição foi sendo substituída pela grande credibilidade desta linguagem quando aplicada à linguagem dos computadores a partir da segunda guerra mundial.

> Um texto formal é uma cadeia de símbolos. Quando manipulada, por um matemático ou por uma máquina, é transformada em uma outra cadeia de símbolos.

> Tais manipulações de símbolos podem, elas próprias, ser o objeto de uma teoria matemática. Quando se considera a manipulação como sendo feita por uma máquina, a teoria é chamada "teoria dos autômatos" pelos informáticos ou "teoria de recursividade" pelos lógicos. Quando a manipulação é considerada como sendo efetuada por um matemático é chamada de "teoria da demonstração". (DAVIS; HERSH, 1989, p. 169-170).

A utilização do simbolismo matemático pode ser pensada sob dois aspectos, o semântico em que os símbolos e as notações carregam um significado em paralelo com a língua natural, e o aspecto puramente sintático em que se podem aplicar regras manipulativas, sem referência direta ao significado.

> Os símbolos especiais que constituem parte do registro escrito da matemática são um acréscimo numeroso e exuberante aos símbolos das linguagens naturais. A criança, na escola elementar, aprende logo os dez algarismos 0, 1, 2, 3... 9 e as maneiras de relacioná-los, de trabalhar com números decimais, de elevar números a uma potência. Aprende também os sinais operatórios $+, -, \times$ (ou $\cdot$), $\div$ (ou $/$) e $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$. Aprende os símbolos de números matemáticos particulares, tais como $\pi = 3{,}14159$, ou interpretações especiais, tais como o símbolo de grau em 30° ou 45°. Aprende símbolos de grupamentos como $()$, $\{\}$. Aprende símbolos de relações como $=, >, <$. (DAVIS; HERSH, 1989, p. 153).

Inúmeros outros símbolos foram criados e padronizados ao longo do processo de formalização da linguagem matemática, por exemplo, o x e o y para representar variáveis, os símbolos lógicos '$\wedge$' para 'e' '$\vee$' para 'ou'. Este processo de formalização, de acordo com Davis e Hersh (1989), foi introduzido por Frege e Peano, objetivando tornar as demonstrações mais rigorosas e aumentar a certeza da conclusão de um raciocínio matemático.

> Os axiomas de Peano, formulados pela primeira vez em 1889, na *Arithmetices principia nova methodo expositiva*, representam a mais notável tentativa do século de reduzir a aritmética comum – portanto, no fim, a maior parte da matemática – a puro simbolismo formal. (Ele exprimia os postulados em símbolos, em vez de palavras que usamos). Aqui, o método postulacional atingiu novo nível de precisão, sem ambiguidade de sentido e sem hipóteses ocultas. Peano também despendeu muito esforço no desenvolvimento da lógica simbólica, um tema favorito do século vinte. (BOYER, 2012, p. 385).

A linguagem matemática formal constitui-se de um conjunto de símbolos vazios cuja principal característica é a forma e não o conteúdo da representação. Há inúmeras discussões que envolvem esta característica da linguagem formal da matemática.

> Na prática matemática contemporânea, uma estrutura matemática consiste em um conjunto de objetos S, que podem ser imaginados como sendo o suporte da estrutura, um conjunto de operações ou relações, que são definidas sobre o objeto S, e um conjunto de elementos distinguidos em S, por exemplo, 0, 1, etc. Estes

> ingredientes básicos são chamados "*assinatura*" da estrutura, e são frequentemente exibidos em forma de uma lista com *n* elementos. (DAVIS; HERSH, 1989, p. 171).

A matemática e a lógica como ciências formais constituem-se de sentenças analíticas, sendo que sua condição de verdade independe de sua existência no mundo físico. Conforme Bicudo (1999, p. 163),

> o método dedutivo, as demonstrações, as relações conceituais logicamente definidas e a especificidade das representações simbólicas com seus significados precisos, diferenciam o saber matemático dos demais saberes. Essas peculiaridades e a sua importância na vida em sociedade propõem problemas ao ensino. Da solução desses problemas depende a democratização do saber matemático.

Nas línguas naturais, são as palavras que veiculam a significação, embora que arbitrariamente. Quando utilizada por uma comunidade linguística, as palavras significam alguma coisa para alguém que as profere e tem a intensão de se comunicar.

> Palavras, contudo, não são simplesmente ocorrências físicas. Palavras significam, são símbolos. O que as torna significativas é o fato de que, mediante sua presença física, passamos a considerar outro objeto. Mas isso que uma palavra significa não é algo que a ela se relacione por natureza. Uma palavra por si mesma nada significa, é um símbolo arbitrário. Não há qualquer característica intrínseca à palavra 'lógica' que a faça referir-se a um determinado tipo de ciência. Significados são atribuídos por convenção. E assim historicamente evoluem as linguagens, também as convenções podem alterar-se. Uma palavra tem um certo significado se dela se faz algum uso costumeiro ou se há alguma convenção explicitamente formulada mediante definição. (CERQUEIRA; OLIVA, 1980, p. 14).

Assim, para obter o significado de uma palavra, é preciso considerar sua extensão ou denotação, e sua intenção, conotação ou compreensão.

> A extensão ou denotação, que consiste na classe de todos os objetos a que ela corretamente se aplica, e intensão ou conotação ou compreensão, que consiste na(s) propriedade(s) que um objeto precisa possuir a fim de pertencer à extensão da palavra. Pode-se, assim, especificar de duas maneiras gerais o significado de uma palavra: ou mediante sua extensão, quando por ostensão, exibimos os elementos que constituem a classe de objetos a que a palavra se aplica; ou mediante sua intensão, quando explicitamos seu significado por meio de outra(s) palavra(s). (CERQUEIRA; OLIVA, 1980, p. 14-15).

Em matemática, por exemplo, a representação da proposição matemática $x+3=8$ independe de aspectos externos. Trata-se de uma forma, em princípio, sem conteúdo existencial. Contudo, aplicar esta característica dos enunciados matemáticos a situações da língua natural foi um projeto perseguido por grandes pensadores e filósofos que buscaram na lógica e na matemática a tentativa de criação de uma linguagem na qual a ambiguidade pudesse ser minimizada.

2.1.2 Referência e sentido

Em função da ambiguidade das proposições das línguas naturais, Frege (1980, p. 193) afirma que elas são deficientes para "prevenir os erros de pensamento".

> A linguagem não é regida por leis lógicas de modo que a obediência à gramática já garantisse a correção formal do curso do pensamento. As formas em que se exprimem a dedução são tão variadas, tão frouxas e flexíveis que facilmente se podem insinuar, sem que perceba, premissas que em seguida são ignoradas, no momento de enumerar as condições necessárias de validade da conclusão.

Frege foi pioneiro ao perceber que o significado em língua natural envolve dois conceitos: o de referência e o de sentido. Conforme Frege, o conceito de referência corresponde ao "objeto a que refere o signo, tomada a palavra 'objeto' no seu sentido mais amplo". FREGE (1971, apud LOPES 1995, p. 245). Por 'sentido' o autor considera o "modo como a palavra exprime a referência e que traria uma imagem associada (grosso modo) à noção de conotação que para ele é a associação subjetiva que cada pessoa faz com cada sentido" (IBIDEM, p. 246).

Conforme resenha Lopes (1995, p. 246), cabe ainda explicitar os três sentidos que Frege atribui à palavra 'significação':

> Privilegiando a noção de referência, a significação mostraria o signo relacionado com um objeto do qual esse mesmo signo é o nome;
> Privilegiando a noção de sentido, a significação mostraria o signo relacionado com o código que o funda como signo;
> Privilegiando a noção de imagem associada, a significação mostraria o signo relacionado com o seu destinatário.

Uma leitura atualizada dos estudos de Frege pode ser encontrada em Oliveira (2001, p. 99) para quem "a referência de uma sentença, que podemos definir sintaticamente pela presença de um verbo principal conjugado e semanticamente pela expressão de um pensamento completo, é um valor de verdade". A autora alerta, no entanto, que se pode proferir uma mesma sentença com sentidos diferentes, ou seja, uma referência pode ser representada por diferentes sentidos. "O sentido é, pois, o caminho que nos leva a referência" (OLIVEIRA, 2001, p. 102).

Conforme afirma Oliveira, Frege considera que é possível potencializar o conhecimento, quando se utilizam caminhos (sentidos) diferentes para alcançar o mesmo objeto (referente) – como será visto mais a frente, um argumento que Duval explora. Isso significa que o conhecimento sobre o mundo é mutável e depende do sentido que se está tomando em relação a aquele referente. Esta situação pode ser exemplificada ao se pensar nas representações possíveis do número ‘3’ conforme ilustra a figura 4 a seguir:

Figura 4 – Algumas possibilidades de representação de sentidos para a referência ‘3’

3	*três*	$8-5$	3×1	$\log_2 8$	

Fonte: Elaboração da autora.

Com base na figura 4, pode-se falar da referência ‘3’ em diferentes sentidos. Por exemplo, pela representação imagética ou figural ; pelo resultado de uma subtração $8-5$ ou de uma multiplicação 3×1, pela expressão logarítmica $\log_2 8 = 3$, ou ainda pela expressão linguística ‘três’ ou numérica 3.

Apesar do apelo essencialmente sintático dos estudos de Frege, ao incluir em seus estudos elementos da lógica, o autor tem a preocupação de não eliminar das sentenças o que mais importante elas veiculam, o significado. Frege buscou generalizar e diferenciar logicamente os conceitos de sujeito e predicado de uma sentença, passando a denominá-los de função e argumento, a fim de poder estabelecer um valor de verdade (seja verdadeiro ou falso) conforme suas especificidades.

Para exemplificar esta diferença, tome-se a seguinte sentença matemática completa expressa em língua natural: ‘Um número somado com três é igual a oito’. Logicamente, pode-se substituir a expressão completa por uma expressão incompleta com um lugar vazio ($\emptyset$). Por exemplo, assim ‘$\emptyset$ somado com três é igual a oito’. Se o lugar vazio representado por ‘$\emptyset$’ for substituído pelo número ‘5’, então o valor de verdade da sentença é verdadeiro. Se qualquer outro valor que é colocado no lugar vazio ‘$\emptyset$’, então o valor de verdade da sentença é falso.

Russell afirma que toda sentença completa admite um processo de decomposição que reduz a uma expressão incompleta, que pode comportar lugares vazios.

> Qualquer equação matemática é uma função proposicional. Enquanto as variáveis não tiverem valor definido algum, a equação será meramente uma expressão

> aguardando determinação a fim de se tornar uma proposição verdadeira ou falsa. Se for uma equação contendo uma variável, tornar-se-á verdadeira quando a variável for tornada igual a uma raiz da equação, tornando-se, de outro modo, falsa; mas se for uma "identidade" será verdadeira quando a variável for qualquer número. A equação de uma curva no plano ou de uma superfície no espaço é uma função proposicional, verdadeira para valores das coordenadas pertencentes aos pontos da curva ou da superfície, falsa para outros valores. Expressões da Lógica tradicional, tais como "todo A é B", são funções proposicionais: A e B têm de ser determinados como classes definidas para que tais expressões sejam verdadeiras ou falsas. (RUSSELL, 1974, p. 150).

Neste contexto, a expressão em língua natural 'um número somado com três é igual a oito' pode ser representada por uma proposição matemática em registro algébrico, substituindo-se a sequência lexical 'um número' pela letra 'x'. O resultado pode ser visto a seguir: '$x+3=8$'. Na representação de sentenças matemáticas no registro utilizamos os símbolos '$\times$', '$\div$', '$+$', '$-$', '$=$' para enunciarmos operações abstratas com números, realizando certas combinações de maneira que resulte em uma proposição. Conforme destacando anteriormente, a sentença matemática '$x+3=8$' pode assumir duas condições a de ser verdadeira quando trocamos a letra 'x' ou '∅' por cinco (5) ou falsa quando trocamos 'x' ou '∅' por qualquer outro valor.

A denominação 'sujeito e predicado' em língua natural pode ser intercambiada pelos termos matemáticos 'função e argumento'. Em língua natural, 'sujeito' e 'predicado' são funções dos núcleos nominais ou verbais das sentenças. Na linguagem proposta por Frege 'argumentos' são as variáveis que serão usadas no cálculo da função matemática. Para a lógica, "um argumento é qualquer grupo de proposições tal que se afirme ser uma delas derivada das outras, as quais são consideradas provas evidentes da verdade da primeira" (COPI, 1978, p. 23).

Tome-se a proposição 'o camarão é um artrópode' em língua natural como exemplo, tal que 'o camarão' corresponde à função-sujeito e 'é um artrópode' corresponde à função-predicado. Na proposta de Frege, esta sentença forma um argumento, cuja função-sujeito pode ser representa por um lugar vazio, '∅ é um artrópode'. Desse modo, o predicado assume o valor de função que possibilitará validar ou falsificar a proposição a partir da substituição desse lugar ∅.

Para Russell (1974, p. 151),

> a única maneira de expressar uma propriedade comum de modo geral é dizer que uma propriedade comum a vários objetos é uma função proposicional que se torna verdadeira quando qualquer desses objetos é tomado para valor de variável. Neste caso, todos os objetos são "instâncias" da verdade da função proposicional – porque uma função proposicional, conquanto não possa ser por si verdadeira ou falsa, é

> verdadeira para certas instâncias e falsa para certas outras, a menos que seja “sempre verdadeira” ou “sempre falsa”.

No caso de ‘∅ é um artrópode’, ao dizer que ‘x é um artrópode’ estamos afirmando que ‘x’ tem a característica de pertencer à classe dos artrópodes, ou seja, a função ‘ser artrópodes’ pode assumir o valor de verdade a partir da substituição do argumento ‘x’ por um animal. Ao ser preenchido o lugar ‘∅’ da função com o argumento ‘x’, obtém-se uma proposição verdadeira ou falsa. Desse modo, se ‘x’ é substituído por ‘elefante’, a proposição é falsa. Assim, a substituição por qualquer animal que não tem a característica de ser um artrópode torna falsa a proposição e a substituição por qualquer animal que é classificado como artrópode torna verdadeira a proposição.

A proposta de Frege (1980) foi a de analisar logicamente uma proposição. Esta análise decompõe em uma parte significando a função que se configura num conceito relacional com um ou mais elementos correspondendo aos argumentos. A partir desta análise, Frege (1980, p. 182) define conceito como “uma função que tem para qualquer argumento um valor de verdade como valor”. Neste aspecto Frege difere dos demais logicistas, porque para ele os símbolos têm significado.

> Todo conceito está associado a um objeto lógico, sua extensão entendida como caso particular de uma noção mais geral definida para funções. Se duas funções assumem os mesmos valores para os mesmos argumentos, diz-se que elas têm o mesmo percurso de valor. No caso dos conceitos assumirem os mesmos valores para os mesmos argumentos é equivalente a assumir o valor verdadeiro para os mesmos argumentos, ou seja, subsumir os mesmos objetos. (FREGE, 1980, p. 183).

Frege também faz considerações em relação a dois objetos que apresentam o mesmo valor de verdade, ou, como expressa a lógica tradicional, a mesma ‘extensão’. A extensão de um conceito representa o conjunto de objetos que tem o mesmo conceito. No exemplo ‘o camarão é um artrópode’, pode-se considerar que a extensão do conceito de artrópode suporta o argumento formado por um conjunto de animais que apresentam ‘patas articuladas’ como principal característica. Os argumentos ‘barata’, ‘mosca’, ‘lacraia’, ‘carrapato’, ‘aranha’, nesse caso, apresentam a mesma extensão ou são argumentos verdadeiros para a função ‘ser artrópode’. Por outro lado, os argumentos, ‘papagaio’, ‘jacaré’, ‘tubarão’, ‘minhoca’ são argumentos falsos.

Os estudos de Frege também se referem à ideia de unidades lógicas, não apenas em termos de conceito, mas também em termos de proposições. Segundo Copi (1978, p. 22),

> as proposições são verdadeiras ou falsas e nisto diferem das perguntas, ordens e exclamações. Só as proposições podem ser afirmadas ou negadas; uma pergunta pode ser respondida, uma ordem dada e uma exclamação proferida, mas nenhuma delas pode ser afirmada ou negada, nem é possível julgá-las como verdadeiras ou falsas.

Ao estudar as proposições, Frege desejou aproximar seus estudos de lógica e matemática com a língua natural, ou apresentar a possibilidade de aplicar os princípios que são válidos à matemática e à lógica, enquanto ciências formais, para a língua natural.

Russell (1974, p. 149) define proposições da seguinte forma:

> Por "proposição" queremos dizer primariamente uma forma de palavras que expressa o que é ou o verdadeiro ou o falso. Digo "primariamente", porque não desejo excluir outros símbolos que não os verbais, ou até os meros pensamentos, se eles tiverem caráter simbólico. Mas penso que a palavra "proposição" deve ser limitada ao que pode, em algum sentido, ser chamado "símbolo", e, mais ainda, àqueles símbolos que deem expressão à verdade ou à falsidade. [...] O enunciado: "Sejam quais forem os números a e b, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$" é uma proposição; mas a simples fórmula $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ não o é, desde que ela não assere coisa alguma definida.

2.1.3 Formalização e dedução

A Lógica e a Matemática constituem-se como ciências formais organizadas em sistemas dedutivos, de modo que de uma ou mais proposições iniciais verdadeiras, denominada de premissas, infere-se uma proposição verdadeira, denominada de conclusão.

> Para que possamos estar validamente capacitados para inferir a verdade de uma proposição, temos de saber que outra proposição é verdadeira e que há entre as duas uma relação do gênero chamado "implicação", isto é, que (como costumamos dizer) a premissa "implica" a conclusão. (RUSSELL, 1974, p. 140).

Cerqueira e Oliva (1980, p. 28) afirmam que:

> Um sistema dedutivo pode ser considerado um vasto e complexo argumento, cujas premissas são axiomas e sua conclusão a conjunção de todos os teoremas deduzidos. Como em qualquer argumento, o que está em questão não é a verdade ou falsidade das premissas, mas a validade da inferência uma vez admitida a verdade das premissas, necessariamente as conclusões serão verdadeiras, desde que suas demonstrações sejam argumentos válidos.

Interessa para a Lógica, segundo Copi (1978, p. 21), "a distinção entre raciocínio correto e incorreto. [...] Os métodos e técnicas do lógico foram desenvolvidos primordialmente com a finalidade de elucidar essa distinção. O lógico está interessado em todos os raciocínios, independentemente do seu conteúdo”. Para ele (1978, p. 21), a lógica se debruça sobre a correção da inferência.

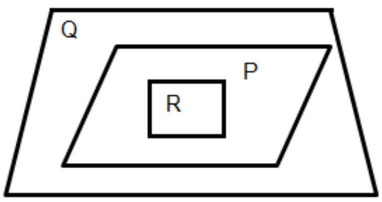
> A inferência é um processo pelo qual se chega a uma proposição, afirmada na base de uma ou outras mais proposições aceitas como ponto de partida do processo. O lógico não está interessado no processo de inferência, mas nas proposições que são os pontos inicial e final desse processo, assim como nas relações entre elas.

Argumentos dedutivos podem tomar a forma de silogismos categóricos. Conforme Rauen (2014, p. 78), “um silogismo categórico é uma inferência sintética que, partindo de duas proposições aceitas como verdadeiras, implica, necessariamente, uma conclusão verdadeira”. Para o autor “as duas proposições de um silogismo que sustentam a conclusão são chamadas de premissas”. No silogismo (1a-c), expresso em língua natural a seguir, as proposições (1a) e (1b) são as premissas maior e menor que sustentam a conclusão (1c).

> (1a) – Todo paralelogramo é um quadrilátero;
> (1b) – O retângulo é um paralelogramo;
> (1c) – O retângulo é um quadrilátero.

Outra forma de representar esse silogismo é o diagrama de Venn. Por meio desse diagrama, pode-se capturar a noção de premissa maior expressa pela proposição (1a), de premissa menor expressa pela proposição (1b) e a de conclusão, que corresponde a um conjunto menor do que a premissa menor (razão pela qual o silogismo se define como dedutivo, ou seja, de deduzir ou de diminuir). Em outras palavras o conjunto dos quadriláteros (Q) contém o conjunto dos paralelogramos (P), que contêm o conjunto dos retângulos (R).

Figura 5 – Representação em diagramas da relação de inclusão entre figuras geométricas



Fonte: Elaboração da autora.

O importante nesta subseção é que estas proposições podem ser enunciadas também na linguagem da lógica formal. Se desejarmos mostrar que o argumento é válido em função de sua forma e não em virtude dos termos particulares que nele ocorram, estes podem ser expressos em linguagem formal.

Para se efetivar tal representação convém informar ao leitor as regras lógicas que se está utilizando a fim de não confundir. Em lógica, utilizam-se os quantificadores universais e os quantificadores existenciais, a partir destes quantificadores os enunciados podem ser classificados em universais e existenciais.

Segundo Cerqueira e Oliva (1980, p. 92), em um enunciado universal, afirma-se "que um predicado é verdadeiro de todas as coisas" (tudo é humano), e em um enunciado existencial, sustenta-se "que um predicado é verdadeiro de pelo menos alguma coisa" (algo é humano). Os quantificadores para um enunciado universal e existencial são respectivamente 'Para todo x', representado pelos símbolos '$\forall x$' e 'Existe pelo menos um x, tal que', representado pelos símbolos '$\exists x$'. A proposição 'todo paralelogramo é um quadrilátero' pode ser traduzida logicamente da seguinte forma:

'Para todo x, x é quadrilátero'

$$(\forall x)(Rx)$$

Tal enunciado implica que todas as figuras no universo dos paralelogramos são quadriláteros. Neste contexto, ao se definir um universo finito U de objetos que apresentam certa característica comum à representada ou extensão do conceito 'ser um quadrilátero' por U = $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, logo o enunciado ($\forall x$) (Rx) é verdadeiro apenas no caso de a_1, a_2 e a_n serem quadriláteros.

Por outro lado, os quantificadores existenciais apresentam uma estrutura mais complexa. Ao se proferir 'alguns quadriláteros são paralelogramos', estamos diante de dois predicados o de ser 'quadrilátero' e o de ser 'paralelogramo'. Este enunciado pode ser representado em linguagem formal pela proposição: 'Existe pelo menos um x, tal que x é quadrilátero e paralelogramo'. Se simbolizarmos 'x é paralelogramo' por Px e 'x é quadrilátero' por Qx e recorrendo ao quantificador '$\exists x$' podemos representar na linguagem formal a proposição 'alguns quadriláteros são paralelogramos' por $(\exists x)(Px \wedge Qx)$.

Mas o que se pretende neste caso é representar a conclusão 'O retângulo é um quadrilátero' – Qa – utilizando-se das premissas 'Todo paralelogramo é um quadrilátero' - $(\forall x)(Px \rightarrow Qx)$ – e 'o retângulo é um paralelogramo' – Pa –, assim elabora-se a seguinte representação lógica:

$(\forall x)(Px \rightarrow Qx)$ (proposição)
Pa (proposição)
$Pa \rightarrow Qa$ (partindo da proposição ‘a’)
Qa (Conclusão por *Modus Ponens*)

No entanto, pode-se apresentar uma análise de cada proposição em seus diferentes registros e se a análise for realizada apenas na proposição ‘(1a)’ ‘todo paralelogramo é um quadrilátero’, em qualquer das representações anteriores, inúmeras inferências podem ser expressas, o que será aprofundado mais adiante neste estudo. Neste caso, pode-se exemplificar o quadrado, o retângulo, o losango e o próprio paralelogramo, apesar de não importar o conteúdo das proposições para a representação lógica e sim a estrutura das proposições enunciadas.

Copi (1978, p. 23) alerta para o aspecto relacional das proposições.

> Nenhuma proposição, tomada em si mesma, isoladamente, é uma premissa ou uma conclusão. Só é premissa quando ocorre como pressuposição, num argumento ou raciocínio. Só é conclusão quando ocorre num argumento em que se afirma decorrer das proposições pressupostas nesse argumento. Assim “premissas” e “conclusão” são termos relativos.

No entanto, em se tratando da língua natural, outras relações entre proposições podem ocorrer. Assim, relações corretas do ponto de vista da Lógica podem assumir significados diferentes em contextos diferentes, incluindo a incorreção e a ambiguidade.

Na abordagem da língua natural, torna-se importante considerar que uma palavra assume uma variedade de sentidos e significados diferentes, quando empregadas em contextos diferentes. Em relação às discussões sobre a aplicação da lógica à língua natural, Copi (1978, p. 100) considera que:

> As palavras são resvaladiças, e a maior parte delas tem uma grande variedade de sentidos, de significados diferentes. Quando se confundem esses significados diferentes na formulação de um argumento, o raciocínio é falacioso. Para evitar as várias falácias de ambiguidade, devemos ter presente, com toda a clareza, os significados dos termos que empregamos. [...] Visto que as variações do significado dos termos pode tornar falacioso um raciocínio.

Contudo, dado que a Matemática configura como um conjunto fechado de argumentos dedutivos formais, ela expulsa a ambiguidade. É por isso que Frege destaca que:

> Todos que empregam as palavras ou os sinais matemáticos pretendem que signifiquem algo, e ninguém esperará que os sinais vazios resultem algo dotado de sentido. Mas é possível a um matemático proceder a longos cálculos sem entender por seus sinais nada sensivelmente perceptível, intuível. Nem por isso esses sinais serão desprovidos de sentido; distinguir-se-á ainda entre eles e seu conteúdo, embora este conteúdo talvez apenas possa ser apreendido por meio dos sinais. Sabe-se que para o mesmo conteúdo outros sinais poderiam ter sido estipulados. É suficiente saber como deve ser manipulado logicamente o conteúdo que se faz sensível aos sinais e, quando se pretende fazer aplicações à física, como deve ser feita a passagem aos fenômenos. Mas não se pode reconhecer nesta aplicação o sentido próprio das proposições. Nela perde-se sempre uma grande parte da generalidade, e introduz-se algo particular, que em outras aplicações será substituído por algo diferente. (1980, p. 218).

Assim, não se pode ignorar o fato que a Matemática e a Lógica enquanto ciências formais constituem-se de relações entre símbolos dentro do próprio sistema que se está operando. Conforme Cerqueira e Oliva, “a Lógica e a Matemática, em seu nível mais elementar, trata de enunciados e dos métodos por meio dos quais se podem concluir enunciados a partir de enunciados”. (1978, p. 31).

2.1.4 Formalização e ensino

Se os sistemas formais como os da Lógica e da Matemática têm estruturas que se autossustentam, o que parece distanciar do processo de significação proposto por Frege, eles podem ser um obstáculo para a elaboração dos próprios conceitos dos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem. Isso ocorre porque esse processo precisa ser consistentemente construído a partir das experiências materiais dos aprendizes e intermediado por uma língua natural permeada de ambiguidade.

> O ensino é comunicação e um de seus objetivos é o de favorecer a aprendizagem dos alunos; em primeiro lugar, então, quem comunica deve fazê-lo de maneira tal que a linguagem utilizada não seja ela própria uma fonte de obstáculos à compreensão; a solução poderia parecer banal: bastaria evitar com os alunos aquela linguagem específica: toda a comunicação deveria acontecer na língua comum; A matemática possui uma linguagem específica (ou até mesmo, é uma linguagem específica); um dos objetivos principais de quem a ensina é o de fazer com que os alunos apreendam, não apenas entendam, mas também de que se apropriem dessa linguagem especializada; por isso, não é possível evitar que os estudantes entrem em contato com essa linguagem específica, mais ainda, ao contrário, é necessário apresenta-la (impô-la?) para que se apropriem. (D’AMORE, 2007, p. 249-250)

Conforme Copi, “a linguagem é um instrumento tão sutil e complicado que frequentemente perdemos de vista a multiplicidade de seu uso” (1978, p. 47). Cada linguagem se constitui de símbolos e regras que torna possível o processo de comunicação, quando estes, mesmo que arbitrários, são reconhecidos. No entanto, o uso de uma linguagem nem sempre representa o pensamento de quem comunica, ou ainda, os símbolos utilizados para comunicar podem apresentar significados diferentes em contextos diferentes.

> A linguagem não é regida por leis lógicas, de modo que a obediência à gramática já garantisse a correção formal do curso do pensamento. As formas em que se exprime a dedução são tão variadas, tão frouxas e flexíveis que facilmente se podem insinuar, sem que se perceba, premissas que em seguida são ignoradas, no momento de enunciar as condições necessárias da validade da conclusão. (FREGE, 1980, p. 193).

Parafraseando Frege (1980) a linguagem natural apresenta certa flexibilidade e mutabilidade, apresentando consequentemente inúmeras aplicações. Dadas essas características, carecemos de um conjunto de sinais do qual se expulse toda ambiguidade, e cuja forma rigorosamente lógica não deixe escapar o conteúdo. Para Cerqueira e Oliva (1978, p. 16) uma linguagem apresenta características de seu sistema de símbolos.

> Uma linguagem é um sistema abstrato de elementos identificáveis associados a uma gramática, que é exemplificado num determinado comportamento linguístico e que é descoberto por uma análise deste comportamento. Não apenas o sistema como um todo, mas também cada elemento, é uma abstração a partir do comportamento concreto. Essa é uma consequência do fato de que não de pode identificar o elemento independentemente de uma análise do sistema.

Campos (p. 3) afirma que:

> A linguagem simbólica da matemática, embora fundamentalmente diferente da natural, é, como ela, uma criação humana. Apenas que, enquanto a primeira atinge um grande rigor e precisão em seus fins específicos, a segunda, em seu caráter histórico-social, desenvolve-se como um meio para diversos modos de expressão e comunicação, tornando-se, então, adequadamente flexível para os seus objetivos. À medida que sua utilização vai muito além da pura veiculação da verdade ou falsidade dos pensamentos, a linguagem natural em seus termos e formas gramaticais não reflete necessariamente, as formas lógicas do pensamento, constituindo-se, nesse sentido, num instrumento de mediação inadequado e problemático.

Conforme Cerqueira e Oliva (1978, p. 16), os estudos da linguagem como uma ferramenta problemática de mediação podem ser analisados em pelo menos três aspectos: os semânticos, os pragmáticos e os sintáticos.

> Ao estudo do problema do significado nas linguagens chama-se de Semântica. Se nos interessarmos pelo estudo das relações entre os símbolos e os falantes da linguagem, na tentativa de caracterizar o comportamento de um falante ou da comunidade no processo de comunicação, desenvolveremos o que se chama Pragmática. Finalmente, se fizermos completa abstração tanto da comunidade linguística bem como de quaisquer significados que possam ter, os símbolos poderão ser considerados apenas entre si. Ao estudo das relações formais dos símbolos entre

> si, ou seja, independentemente de interpretação qualquer, chama-se Sintaxe. A sintaxe de uma linguagem é a teoria da construção e identificação das sequências de símbolos bem formados dessa linguagem.

Cerqueira e Oliva (1978) consideram que a semântica, a pragmática e a sintaxe constituem-se objetos de estudo da Semiótica. Charles Sanders Peirce, um dos pioneiros dos estudos semióticos, definiu semiótica como o estudo dos signos ou representâmens.

> Um signo, ou representâmen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que eu, por vezes, denominei fundamento do representâmen.
> "Ideia" deve aqui ser entendida num sentido platônico. (PEIRCE, 1977, p. 46).

O próprio Peirce (1977) considera que a palavra 'signo' é utilizada para denotar um objeto perceptível, ou apenas imaginável, ou imaginável num certo sentido.

> Todo signo tem, real ou virtualmente, um Preceito de explicação segundo o qual ele deve ser entendido como uma espécie de emanação, por assim dizer, de seu objeto. (Se o signo for um Ícone, um escolástico poderia dizer que a "species" do Objeto que dele emana materializou-se no ícone). Se o Signo for um Índice, podemos considerá-lo como um fragmento extraído do Objeto, constituindo os dois, em sua Existência, um todo ou uma parte desse todo. Se o Signo for um símbolo, podemos considerá-lo como corporificando a "ratio", ou razão, do Objeto, que dele emanou. (PEIRCE, 1977, p. 47).

Como constituintes de uma linguagem, o uso de signos não envolve apenas a sua estrutura formal, mas também a relação com os objetos que são designados por ele bem como as pessoas que comungam de sua utilização. "A semiótica fornece uma linguagem geral aplicável a qualquer linguagem ou signo especial, e por isso mesmo, aplicável à linguagem da ciência e aos signos específicos que são usados na ciência" (MORRIS, 1976, p. 11). Morris também diferencia a Sintaxe da Semântica e da Pragmática a partir dos termos especiais que as caracterizam. Assim, se *implica* é um termo adequado para a sintaxe, *designa* e *denota* são termos adequados para a semântica e *expressa* é um termo próprio para a pragmática.

Em síntese, houve diferentes tentativas de se inserir na língua natural mecanismos lógico-dedutivos que pudessem eliminar a ambiguidade ou, ainda, de compreender e/ou controlar os mecanismos de inferências espontâneas feitas pelos seres humanos. Esses empreendimentos acabaram por esclarecer as diferenças entre as características próprias da Matemática e da Lógica e aquelas próprios das línguas naturais. Na sala de aula, essas distinções são particularmente sensíveis, porque nela estão envolvidos simultaneamente esses dois tipos de linguagens. Ou seja, de um lado, há a linguagem formal que é inerente aos objetos matemáticos e suas representações; de outro, há a língua natural, veículo com o qual se processa a comunicação necessária para a transposição didática de conteúdos matemáticos. Isso implica dizer que, a todo o momento, esses dois sistemas semióticos conflitantes precisam ser harmonizados sob pena de os conteúdos formais próprios da matemática serem superficialmente compreendidos ou mesmo incompreendidos. Em outros termos, quando o processo envolve a língua natural como veículo de comunicação, torna-se importante considerar as diferenças que constituem suas unidades significativas e suas relações com os registros de representação semiótica dos objetos matemáticos e suas especificidades. É justamente sobre esse ponto, assumido incorretamente como banal por muitos docentes, que se problematiza nesta tese.

2.1.5 Representação

No processo de ensino e aprendizagem da matemática são as representações que desempenham função indispensável para o processo comunicativo, pois os objetos matemáticos são somente acessados e exteriorizados por meio delas. Segundo Duval, os registros de representação cumprem a função de representar semioticamente os objetos matemáticos. Antes de aprofundar essa questão, vale conceituar a palavra representação. Neste estudo adotar-se-á a definição dada por Peirce (1980, p. X), para quem "todo pensamento ou conceito está inextricavelmente ligado às funções de representação, não sendo capaz de interpretar a si mesmo. A interpretação somente pode realizar-se através do signo".

Peirce (1980, p. X) define signo como algo que, sob algum aspecto ou capacidade, equivale a alguma coisa para alguém. Nenhum signo pode ser literalmente aquilo que significa. Representar, em Peirce, tem relação com a propriedade de estar no lugar de alguma coisa. Desse modo, pensamos por representações. Não é possível qualquer ato de cognição que não seja determinado por outra cognição prévia, na medida em que todo pensamento implica a interpretação ou representação de alguma coisa por outra coisa (PEIRCE, 1908, p. IX-X). A representação estabelece a relação entre o objeto e o interpretante. O processo de uma interpretação somente é possível por meio de signos. No caso da Semiótica, o signo representa o *objeto* para o *interpretante*.

Peirce diferenciou dois tipos de objetos, os *dinâmicos* e os *imediatos*.

> O Objeto Imediato é o objeto tal como está expresso pelo signo. Já o Objeto Dinâmico é o objeto real, aquilo que o signo não o representa de forma absoluta. Na estrutura Objeto, Signo e Interpretante, o Objeto Imediato é o modo como o Objeto

> Dinâmico se apresenta para o interpretante. O Objeto Dinâmico é sempre mediado; ele mesmo não é representado. (COSTA; SILVA, 2004, p. 37).

Cardoso (2003, p. 13-14) considera que,

> sob a versão peirceana os objetos de estudo utilizados na matemática dividem-se em: objetos dinâmicos e objetos imediatos. Os objetos dinâmicos constituem-se como ideia geral de um objeto matemático e o objeto imediato como representação sígnica desse objeto dinâmico sob determinado aspecto. Por exemplo: no estudo específico das funções, a ideia de função representa o objeto dinâmico e a representação gráfica dessa ideia é um objeto imediato.

O estudo semiótico envolve sempre, signos, objetos e suas representações referenciando-se também quem (ou mesmo o que) está interpretando a representação, o interpretante. Para Costa e Silva (2012, p. 38), interpretante é sinônimo de condição real em que o signo deve representar de alguma forma o objeto. Sem a ação interpretante, não haveria a noção de signo, e nem de objeto para o signo, dado que tal relação é triádica.

Partindo-se da compreensão destes termos é que se inserem os registros de representação semiótica na abordagem dos objetos matemáticos como signos com unidades significativas diferentes que revelam aspectos diferentes dos objetos que representam. Os registros de representação semiótica descritos por Duval (2009, 2011) são elementos essenciais e mediadores da linguagem matemática utilizada na transposição didática e serão descritos na próxima seção.

2.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Nesta seção, pretende-se compreender os fundamentos da teoria dos registros de representação semiótica aplicados em matemática. Para Duval (2011, p. 38), os registros de representações semióticas são as frases em linguagem natural ou as equações em linguagem algébrica (e não as palavras ou os algarismos); são as figuras, os esquemas, os gráficos (e não os pontos, raramente visíveis, ou os traços). O autor (2009, p. 37) considera que o emprego dos registros de representação semiótica "constituem os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor".

A importância da abordagem dos objetos matemáticos por meio de diferentes registros tem relação com a possibilidade de que cada registro de representação apresenta especificidades dos objetos representados. São essas especificidades que permitem a um mesmo objeto ser representado de diferentes modos.

Os registros de representação podem manter-se relacionados dentro de suas próprias unidades significativas bem como estabelecer relações com as unidades significativas de outro sistema de representação. As unidades significativas são as letras, símbolos, eixos, desenhos que, a partir de uma sintaxe própria e de um processo de significação, constituem-se em diversos registros de representações semiótica capazes de representar certos aspectos do objeto matemático para um indivíduo que as reconhece.

As relações entre unidades significativas de um mesmo registro ou entre registros diferentes são definidas por Duval como processos de tratamentos ou conversões.

> Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que se faz passar de um registro a um outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. (DUVAL, 2009, p. 39).

Não se pode deixar de considerar que cada unidade significativa tem seu processo de significação dentro de um determinado sistema ou registro. Assim, a unidade significativa ‘x’ pode representar uma variável independente no registro algébrico, ou o eixo das abscissas no registro gráfico. A convenção das unidades significativas em cada registro de representação é indispensável para o processo de significação e de construção conceitual. Isso permite que o processo de comunicação seja estabelecido dentro de uma comunidade que utiliza um determinado sistema de representação.

Duval (2009, p. 14) considera que

> é essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como números, funções, as retas, etc., com suas representações, quer dizer as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras..., porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. [...] Toda confusão entre objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se então rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem: seja pela falta de atenção, seja porque eles tornam-se representações inertes não sugerindo tratamento produtor.

A diversidade de registros tem a ver com as diferentes possibilidades de tratamento que eles propiciam. Essas características próprias também justificam a emergência de conversões entre registros diferentes. Para o autor, essas operações requerem do sujeito à coordenação dos registros.

> A diversificação dos registros de representação semiótica é a constante do desenvolvimento dos conhecimentos tanto sobre o ponto de vista individual quanto científico ou cultural. Sua importância para o funcionamento do pensamento é geralmente explicada pelas diferenças de custo ou limitações para a função de tratamento, e por aquelas possibilidades de apresentar para a função de comunicação, que existe entre registros. (DUVAL, 2009, p. 80).

Em outras palavras, Duval destaca que um mesmo objeto matemático poder ser representado de inúmeras formas é uma consequência direta da evolução do pensamento do conhecimento em Matemática, de modo que um mesmo objeto invariante possa ser representado de diferentes maneiras. Isso põe em evidência a importância de se considerarem as formas de tratar os objetos no interior de cada domínio de registro de representação e as formas de converter ou de traduzir esses objetos de um registro de representação para outro, cada qual demandando custos e promovendo efeitos cognitivos específicos.

Para Duval (2009, p. 14), "não se pode ter compreensão em matemáticas, se nós não distinguimos um objeto e sua representação". Um objeto matemático pode ser acessado por diferentes registros de representações. No entanto, o próprio Duval considera que "é o objeto representado que importa e não suas diversas representações semióticas possíveis" (p. 14). As representações semióticas são sempre intencionais e instrumentais pela mobilização de um sistema semiótico de representação.

2.2.1 Semiósis e Noésis

Duval (2009), considera que a apropriação do conhecimento matemático está diretamente relacionada com a apropriação de suas representações semióticas. Isto implica dizer que os objetos matemáticos nunca são acessados em sua totalidade, e o processo de compreensão ocorre se há a relação entre *semiósis* e *noésis.*

Duval (1999, p. 15) assim define *semiósis* e *noésis*.

> Se chamamos de *semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou compreensão de uma inferência, pareceria então evidente admitir que a *noésis* é independente da *semiósis* ou, ao menos, a dirige.

Assim, o processo de construção conceitual de um objeto matemático exige o estabelecimento de relações entre a *noésis* e a *semiósis*. A *noésis,* relacionada com os objetos dinâmicos de Peirce, envolve a conceptualização do objeto matemático. A *semiósis*, que tem relação com os objetos imediatos, está em conexão com as representações semióticas destes objetos. Assim, o processo de compreensão dos objetos matemáticos, principalmente na atividade de conversão, está diretamente relacionado com as afinidades entre *noésis* e a *semiósis*. Duval (2009, p. 39) considera que a atividade de conversão entre os registros de representação semiótica permite "compreender a natureza de um laço estrito entre *noésis* e a *semiósis*".

Duval (2009, p. 41) também aponta que o estudo das representações é indispensável ao processo de elaboração conceitual, uma vez que é por meio das representações que ocorre o processo de objetivação, ou seja, o sujeito toma consciência de forma intencional de certos aspectos do objeto representado.

> Este caráter intencional das representações conscientes é essencial de um ponto de vista cognitivo. Porque ele permite tomar conta do papel fundamental da significação na determinação dos objetos que podem ser remarcados por um sujeito. Em efeito, é sempre através da significação que se faz a apreensão perceptiva ou conceitual de um objeto.

2.2.2 Tipos de representação

Para Duval (2009, p. 42), de acordo com sua caracterização e funções nos processos cognitivos e de significação, as representações podem ser internas ou externas.

> As representações externas são, por natureza, representações semióticas tais representações são então estritamente ligadas a um estado de desenvolvimento e de domínio de um sistema semiótico. Elas são acessíveis a todos os sujeitos que aprenderam o sistema semiótico utilizado. As representações internas são as representações, pertencendo a um sujeito e que não são comunicadas a um outro pela produção de uma representação externa.

As representações semióticas são conscientes e externas, uma vez que permitem tornar manifestas certas características dos objetos representados. Um gráfico, uma figura, uma tabela são representações externas de um objeto imediato, que ilustram certos aspectos do objeto representado para alguém que reconhece a representação proposta. Assim, as representações externas são as que completam a função de objetivação, de comunicação e de tratamento enquanto que as representações internas pertencem a um sujeito e não são comunicadas.

Duval (2009, p. 44-47) identifica três tipos de representações: mentais, computacionais e semióticas.

As *representações mentais* permitem uma visão do objeto na ausência de todo significante perceptível. São imagens mentais que estabelecem uma relação com a percepção, embora mais amplas, pois estão incluídas nestas representações as crenças, os fantasmas e todas as demais projeções de valores de uma comunidade ou de um grupo que refletem seus próprios desejos. No processo de ensino e aprendizagem, estas representações podem ter relação com imagens e conceitos primeiros que são evocadas pelo aluno durante o desenvolvimento de uma resposta a uma atividade. A formação de uma objetivação nova tem relação com as representações mentais, ou seja, as representações mentais limitam-se à visão do que é representado. Estas representações em si mesmas não se prestam a tratamentos, uma vez que eles demandam representações semióticas. A importância das representações mentais refere-se ao domínio da aquisição e da interiorização de sistemas e das representações semióticas.

As *representações computacionais* são aquelas relacionadas aos significantes. Elas não necessitam da visão do objeto, pois são internas e inconscientes. Além disso, permitem transformações algorítmicas de um conjunto de significantes em outros significantes. As representações computacionais são transformáveis por um processo de compilação de informações. Eles são capazes de realizar a tradução das informações externas a um sistema, permitindo sua recuperação e combinação dentro do próprio sistema. Logo, elas são indispensáveis no desenvolvimento da capacidade cognitiva de tratamento.

A *representação semiótica* é externa e consciente ao sujeito. Elas são inseparáveis da visão que se tem de qualquer coisa que assume a posição de ser objeto. A produção de representações semióticas é submetida às regras sintáticas de formação e de tratamentos realizados entre as unidades significativas que as constituem. A representação semiótica está relacionada a um sistema particular de signos de um objeto matemático (língua natural, escrita algébrica, escrita gráfica, figuras) bem como as novas relações que podem ser representáveis a partir destas dos tratamentos e conversões realizadas entre estas representações. As representações semióticas podem ser convertidas em representações equivalentes em outro sistema semiótico, mas podendo ter significações diferentes nos sujeitos que utilizam.

2.2.3 Conversão e congruência

Por atividade de conversão, Duval (2009) define a transformação que produz uma representação em outro registro diferente da representação inicial. Em matemática, podemos exemplificar a conversão da forma de um conteúdo quando construímos um gráfico de uma função a partir de seu registro algébrico, ou desenhamos uma região quadrada a partir da medida de seus lados.

A realização do processo de conversão envolve necessariamente o que Duval (2009, p. 69) denominou de congruência e não congruência entre registros de representação.

> Duas representações são congruentes quando há correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações. Naturalmente, pode não haver correspondência para nenhum desses três critérios, para dois ou somente para um. A não congruência entre duas representações pode então ser maior ou menor. A dificuldade da conversão de uma representação depende do grau de não congruência entre a representação de partida e a representação de chegada.

Duval considera que são necessários alguns critérios para se definir a congruência entre os registros de representação semiótica a partir de suas unidades significativas.

> O primeiro critério é a possibilidade de uma correspondência "semântica" dos elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar. [...] O segundo critério é a univocidade "semântica" terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma só unidade significante elementar no registro de representação de chegada. [...] O terceiro critério é relativo à organização das unidades significantes. As organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender nelas as unidades em correspondências semântica segundo a mesma ordem nas duas representações. (DUVAL, 2009, p. 68-69).

A conversão de representações semióticas não ocorre de forma cognitivamente neutra. É a articulação entre os registros de representação e as conversões que permite o processo de compreensão em Matemática. Se fosse o inverso, ou seja, a compreensão que permitisse o processo de articulação entre os registros haveria um afastamento de cada registro do objeto representado. Colocar em correspondência as unidades significativas de uma representação em outra é a condição cognitiva para reconhecer um mesmo objeto em suas diferentes representações. Essa correspondência entre as unidades significativas é fundamental tanto do ponto de vista matemático quanto cognitivo. Contudo, a correspondência entre as unidades significativas de um registro de representação para outro requer que o usuário as discrimine de acordo com os aspectos possíveis do conteúdo de cada representação. Isso ocorre porque a compreensão que muitos estudantes têm de determinado conteúdo matemático está limitada à forma da representação. Desse modo, a forma de representação assume o lugar do conteúdo em seu ambiente cognitivo, limitando-o, quando ocorre a necessidade de se realizarem processos de conversão para outro registro.

> É por isso que, em matemática, uma representação semiótica só é interessante à medida que ela pode se transformar em outra representação, e não em função do objeto que ela representa. Isso provoca evidentemente uma reversão completa do ponto de vista cognitivo comum sobre as representações e particularmente sobre as representações semióticas. (DUVAL, 2011, p. 52).

Ao confundir 'forma' e 'conteúdo' num registro de representação, o aluno não percebe as diferenças entre as unidades significativas que constituem cada registro de representação em relação ao objeto representado. O funcionamento cognitivo dos objetos de representação em seu processo de conversão entre registros permite as múltiplas ocorrências representacionais.

O processo de conversão envolve o reconhecimento das unidades significativas dos registros de representação. Duval (2011) considera que a dificuldade de conversão reflete as diferenças entre as unidades significativas de cada objeto representado bem como a 'distância' entre a correspondência de congruência entre eles. A congruência entre registros pode ser maior ou menor, dependendo da relação que existe entre as unidades significativas de cada registro envolvido nos processos de conversão a partir dos aspectos do objeto representado.

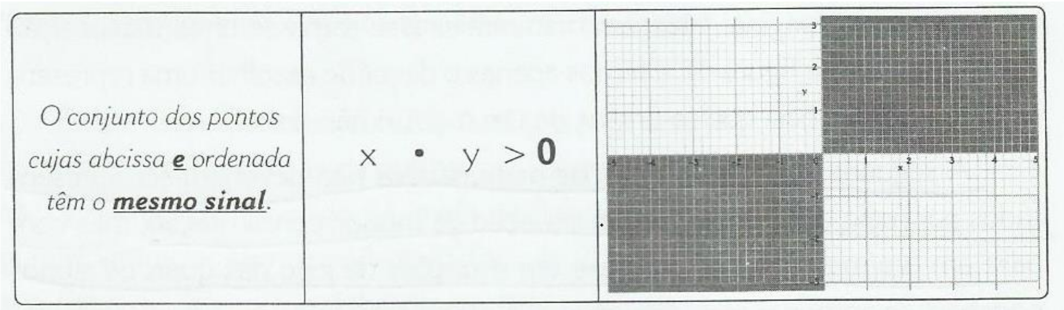
Ao analisar o fenômeno de congruência e não congruência, Duval (2011, p. 124) reforça o fato de que cada registro de representação apresenta unidades significativas diferentes que mobilizam, consequentemente, aspectos diferentes dos objetos matemáticos sempre que este for acessado.

> As variações de congruência e não congruência mostram que não existe nenhum isomorfismo entre as representações de um objeto matemático em um registro e suas possíveis representações nos outros registros. O fato de as conversões de representações serem operações cognitivas não reversíveis corrobora esse dado fundamental para a análise do funcionamento cognitivo do pensamento em matemática.

A não congruência é muito mais comum do que o fenômeno da congruência e permite novas interpretações para além das previsíveis que são tornadas manifestas em um processo comunicativo ou mesmo de ensino e aprendizagem. Contudo, esse fenômeno causa dificuldades em processos de conversão entre diferentes registros de representação. Além disso, algumas conversões entre os registros de representação semiótica envolvem representações auxiliares ou mistas, isto é, envolvem as unidades significativas de mais de um registro de representação, o que é um complicador adicional.

Duval (2011, p. 122) ilustra a não congruência entre registros de representação na figura 6. Para o autor, ocorre não congruência na conversão da expressão ‘mesmo sinal’ para a representação '> 0'. Para ele a expressão congruente a '> 0' é ‘maior que zero’.

Figura 6 – Ilustração sobre congruência e não congruência



Fonte: Duval (2011, p. 122)

Em geral, as diferenças relativas entre dois registros de representação semiótica no processo de conversão são maiores do que inicialmente parecem, pois ambos são constituídos de unidades significativas diferentes e que podem acessar aspectos distintos do objeto representado que o outro registro não evidenciou. Duval (2011) aponta para uma dissimetria entre os sentidos de conversão motivados principalmente pela heterogeneidade dos conteúdos que as unidades significativas tornam manifestas quando dentro de uma sintaxe constituinte de um registro de representação. O que é importante em uma representação semiótica são as transformações que esta permite realizar no objeto representado e não a representação em si. Estas transformações têm relação com as unidades significativas que podem ser utilizadas para acessar certos aspectos deste objeto. “A diversidade de tipos de representação semiótica e o modo de funcionamento próprio de cada tipo são as questões cruciais para a análise cognitiva da atividade matemática e, portanto, dos processos de compreensão e incompreensão na aprendizagem.” (DUVAL, 2011, p. 68).

2.2.4 Exemplificando a noção de congruência

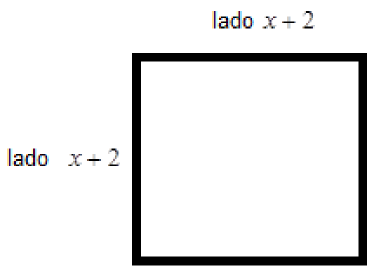
Para a realização dos processos de conversão e tratamentos é necessário distinguir cada registro de representação. Para além de uma discussão teórica apresentada até aqui, apresenta-se um exemplo matemático em diferentes registros de representação semiótica para aproximar o fenômeno da congruência e não congruência entre estes. O objeto matemático representado trata da medida da superfície quadrada que tem medida de lado $x+2$. Este objeto pode ser abordado em diferentes registros de representação. Neste exemplo, será utilizada a língua natural, a representação figural, algébrica, tabular e gráfica.

Em língua natural, utilizando-se arbitrariamente a notação ‘y’ para a medida de superfície quadrada de medida de lado $'x+2'$, o enunciado pode assim ser expresso:

> Represente a medida da superfície quadrada y em função da medida do lado $x+2$.

Dependendo dos conceitos já construídos, o estudante pode utilizar-se de várias possibilidades de registros de representação. A primeira possibilidade explorada aqui será a da conversão do registro da língua natural para o registro geométrico. A conversão permite traduzir a proposição em língua natural para uma figura geométrica ‘a região quadrada ‘y’ de medida de lado $x+2$’ como se pode ver na figura a seguir.

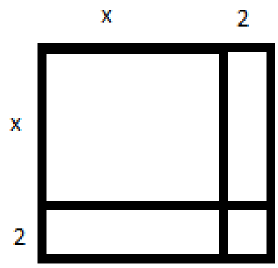
Figura 7 – Representação geométrica da região quadrada y de medida de lado $x+2$



Fonte: Elaboração da autora.

Ao analisar a conversão da língua natural para a representação figural, há elementos de congruência e de não congruência entre os registros de representação. A sequência lexical ‘superfície quadrada’ remete para região quadrada no registro figural e, ao mesmo tempo, se temos um registro figural na forma de um quadrado, este possibilita identificar o objeto pela expressão ‘região quadrada’. No entanto, nada impede ao ouvinte de converter o enunciado ‘Represente a medida da superfície quadrada y em função da medida do lado $x+2$’ em uma figura geométrica que representa o conjunto de retângulos correspondente à medida do lado x mais duas unidades como se pode ver na Figura 8.

Figura 8 – Representação geométrica do quadrado de lado x mais duas unidades



Fonte: Elaboração da autora.

Se uma representação remete para mais de uma possibilidade de interpretação, então o retorno para o registro em Língua Natural poderá acontecer de formas diferentes. Essa dissimetria revela a não congruência entre os dois registros mobilizados para representar o mesmo objeto. Caso seja mobilizada a figura 7, ela pode ser convertida para o enunciado 'a medida da superfície quadrada de lado $x+2$' em língua natural. Caso seja mobilizada a figura 8, que também corresponde ao enunciado 'a medida da superfície quadrada y em função da medida do lado x mais duas unidades', então inúmeras possibilidades em língua natural certamente descreveriam essa representação composta de um conjunto de figuras retangulares.

Além disso, há o fato de a medida da superfície quadrada estar representada, em língua natural, pela letra 'y'. Se a letra 'y' não for mobilizada e registrada na conversão para o registro figural, torna-se impossível recuperar sua representação no momento de reversão para a língua natural.

Outra possibilidade para a realização de conversão do registro da língua natural da expressão 'a medida da superfície quadrada y em função da medida do lado $x+2$' é para o registro algébrico. Esta conversão é possível apenas se o ouvinte reconhece a partir do enunciado de partida que as medidas dos lados de uma superfície quadrada são iguais e, ainda, que essa medida é resultado do produto da medida de um dos lados do quadrado multiplicado pela mesma medida do outro lado que não lhe é paralelo, a saber:

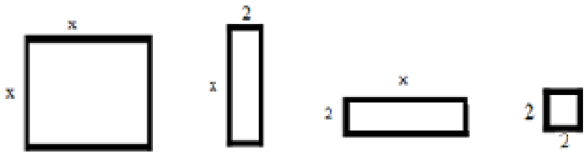
$$y=(x+2).(x+2)$$

A reversão para a língua natural, contudo, é praticamente impossível. O registro algébrico não possui unidades significativas que permitam essa reversão, embora permitam realizar tratamentos para representar a medida da superfície y de lado $x+2$, conforme segue:

$$y = (x+2).(x+2) = (x+2)^2 = x \times x + x \times 2 + 2 \times x + 2 \times 2 = x^2 + 4x + 4$$

A resolução da equação, respeitando o eixo sintagmático, pode ser convertida analiticamente nas representações figurais que compõem a figura 9, a seguir.

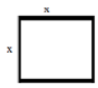
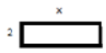
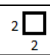
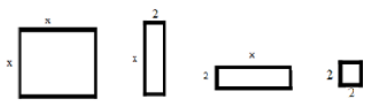
Figura 9 – Representação figural da expressão algébrica correspondente decomposição no conjunto figural



Fonte: elaboração da autora

A decomposição do resultado da equação em quatro diferentes figuras proporciona observar o fenômeno da congruência parcial entre o registro algébrico e o registro figural quando postos em correspondência, permitindo relacionar cada unidade significativa de um registro a outra unidade significativa do outro registro, conforme ilustra o seguinte quadro.

Figura 10 – Relação de congruência entre registro de representação algébrico e figural

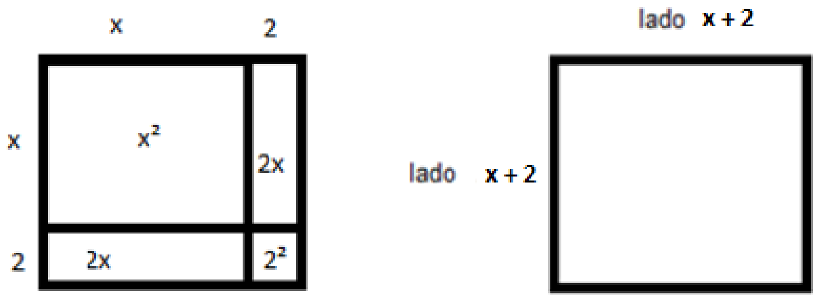
Registro algébrico	Registro figural
$x \times x$	
$x \times 2$	
$2 \times x$	
2×2	
$y = x \times x + x \times 2 + 2 \times x + 2 \times 2 = x^2 + 4x + 4$	

Fonte: Elaboração da autora.

No entanto, esta congruência não é total, pois há unidades significativas no registro algébrico cuja representação não é explícita no registro figural.

O algoritmo da representação algébrica consiste num exemplo de tratamento, porque, mantendo-se o mesmo registro, realizam-se operações permitidas pela estrutura lógica e relações sintáticas desse registro. O que se expressa no algoritmo do registro algébrico, pode ser convertido no registro de representação geométrica figural, identificando-se a representação em cada constituinte do registro figural em uma única composição sintética de figuras tal como pode ser visto na figura 11, a seguir.

Figura 11 – Comparação de representações geométricas figurais da equação $y=(x+2).(x+2)$



Fonte: Elaboração da autora.

A mesma expressão, por fim, pode ser convertida em tabela (tabela 2) e gráfico cartesiano (figura 12) – aqui apenas expostos. Destaque-se, contudo, que nem sempre os objetos matemáticos possibilitam a realização de representações nos diferentes registros dadas as suas características e limitações. No caso em questão, antes de iniciar a elaboração do registro gráfico, é necessário determinar algumas restrições concernentes ao registro dado, entre elas está a determinação do campo de existência para os valores da variável ‘x’, uma vez que se trata de medida de lado de um quadrado e não existe medida negativa. Neste caso o valor -2 é utilizado apenas como referência para a construção da representação tabular, cujo domínio da variável independente ‘x’ é ser maior que -2 para a representação do lado do quadrado expresso na figura 7, considerando a medida do lado ‘x+2’. No registro gráfico a exclusão do -2 como valor está representado no intervalo aberto a esquerda em -2. Todas estas restrições ‘desaparecem’ quando abordado apenas no registro algébrico, por exemplo.

Tabela 2 – Representação tabular da medida da superfície quadrada y em função da medida do lado $x+2$

x	y	Representação do cálculo
-2	0	Se $x=-2$, então $y=(-2)^2+4.(-2)+4=0$
-1	1	Se $x=-1$, então $y=(-1)^2+4.(-1)+4=1$
0	4	Se $x=0$, então $y=(-0)^2+4.(-0)+4=4$
1	9	Se $x=1$, então $y=(1)^2+4.(1)+4=9$
2	16	Se $x=2$, então $y=(2)^2+4.(2)+4=16$
3	25	Se $x=3$, então $y=(3)^2+4.(3)+4=25$

Fonte: Elaboração da autora.

Figura 12 – Representação gráfica da medida da superfície quadrada y em função da medida do lado $x+2$

Fonte: Elaboração da autora.

2.2.5 Importância da conversão

Duval (2011) argumenta que somente quando o indivíduo realiza atividades de conversão é que existe a possibilidade de se identificar as dificuldades inerentes ao processo de elaboração conceitual do objeto matemático, uma vez que é a partir do processo de conversão que se manifestam os fenômenos de congruência e não congruência entre os registros de representação. Fundamentados nessa observação, é possível constatar casos onde o estudante efetua tratamentos e, até mesmo conversões, sem compreender o conceito dos objetos tratados. Por exemplo, esse é o caso de quem só consegue dizer que 'elevar um número ao quadrado' equivale a 'multiplicar o número por ele mesmo', o que é um exemplo de tratamento, sem mesmo operar com o conceito de 'quadratura do número considerado'. Ou melhor, o indivíduo até sabe fazer o cálculo, mas não compreende ou relaciona o significado conceitual do cálculo realizado.

> A mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro! Ela não é suficiente, pois é preciso que haja também uma coordenação de registros de forma que os registros funcionem em sinergia. Não é suficiente justapor representações de registros diferentes para que os alunos "vejam" as correspondências entre as unidades de sentido matematicamente pertinentes das diferentes representações justapostas. A conversão das representações é o primeiro limiar da compreensão em matemática. Ela é também o lugar em que se opera a tomada de consciência do funcionamento representacional próprio de cada registro. (DUVAL, 2011, p. 100).

Assim, emergem vários questionamentos sobre a utilização da diversidade de registros de representação de um objeto matemático, entre os quais: "Haveria um registro que possibilitaria maior aprendizagem com menor custo de processamento para o aluno?"; "Quais seriam as vantagens e as desvantagens de se utilizar a diversidade de registros em sala de aula uma vez que inicialmente estes podem representar um acréscimo de custo de processamento característico de cada tipo de registro?". Duval (2009, p. 32) propõe uma resposta.

> A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidos em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza.

Feitas essas considerações, cabe agora tecer algumas reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem considerando os aspectos comunicacionais envolvidos.

2.3 MATEMÁTICA E O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Esta seção visa a apresentar algumas considerações sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e o papel mediador da linguagem como ferramenta de transposição didática responsável pela construção da relação professor, aluno e objeto de ensino. Adota-se aqui a definição de aprendizagem de Brito (2005, p. 69). Para ele, a aprendizagem é "um processo que envolve as esferas cognitiva, afetiva e motora e pode ser inferidas a partir de mudanças relativamente permanentes no comportamento, resultantes da prática". Esta prática implica o processo de ensinagem entendido aqui como "uma situação de ensino da qual necessariamente decorra a aprendizagem, sendo a parceria entre professor e estudante a condição fundamental para o enfrentamento do conhecimento necessário a formação do aluno [...]”. (ANATASIOU, 2005, p. 15). Definidos, ainda que minimamente esses processos, a próxima seção apresenta considerações sobre o ato pedagógico no ensino da Matemática.

2.3.1 A matemática e o ato pedagógico

Um modo de tentar responder as inquietações pedagógicas demonstradas na introdução desta tese poderia ser o de considerar seriamente o processo comunicativo em sala de aula, reconhecendo que o ensino e a aprendizagem em Matemática não prescindem da língua natural e levando em conta a tríade que envolve professor-saber-aluno.

Para Almouloud (2007), o processo de ensino e aprendizagem da Matemática constitui-se simultaneamente de um conjunto de variáveis que envolvem os conceitos matemáticos (o saber) em si (suas possíveis representações e especificidades enquanto objeto da ciência), o professor e o aluno.

Nesse processo, é preciso considerar um conjunto de variáveis que envolvem os conceitos matemáticos (o saber) aqui considerados como objetos da ciência matemática que necessitam de um conjunto das transformações para se constituírem como objeto de ensino constituinte dos currículos escolares.

Em relação aos objetos de ensino da matemática (o saber), consideram-se sua complexidade, representações e importância por se constituir em um dos itens do currículo educacional. Cornu e Vergnoux (1992, apud D’AMORE, 2007, p. 222) comentam que “o saber o seu estudo a sua definição pertencem ao domínio dos especialistas das disciplinas, que estruturam, organizam o saber, a partir do que, quem toma institucionalmente as decisões define qual é o saber a ensinar”.

Pais (2011) considera dois aspectos importantes que interferem significativamente na aprendizagem dos objetos de ensino da matemática, um que tem relação com o tempo didático e outro relacionado ao tempo de aprendizagem do aluno.

Pais (2011, p. 24-25) assim define o tempo didático e o tempo da aprendizagem:

> O *tempo didático* é aquele marcado nos programas escolares e nos livros didáticos em cumprimento a uma exigência legal. Ele prevê um caráter cumulativo e irreversível para a formalização do saber escolar. Isso implica no pressuposto de que seja sempre possível enquadrar a aprendizagem do saber escolar em um determinado espaço de tempo. [...] Seu compromisso está mais voltado para o texto sintético do saber e para o cumprimento de um programa curricular do que para os desafios do fenômeno cognitivo.
> O *tempo de aprendizagem* é aquele que está mais vinculado com as rupturas e conflitos do conhecimento, exigindo uma permanente reorganização de informações

> e que caracteriza toda a complexidade do ato de aprender. É o tempo necessário para o aluno superar os bloqueios e atingir uma nova posição de equilíbrio. Trata-se de um tempo que não é sequencial e nem pode ser linear na medida em que é sempre necessário retomar concepções precedentes para poder transformá-las e cada sujeito tem seu próprio ritmo para conseguir fazer isto.

Neste conjunto de variáveis que envolvem diretamente o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, o professor, desempenha papel importante como responsável pela condução do processo em sala de aula, pelas escolhas metodológicas de abordagem dos objetos matemáticos bem como pelas escolhas em si dos objetos e da profundidade de abordagem destes. Esta ação implica, explícita ou implicitamente, a percepção de suas crenças, de sua postura, das metodologias que conhece e que utiliza na abordagem dos objetos de ensino da matemática, incluindo a linguagem como mediadora na transformação dos objetos da ciência em objetos de ensino.

Por fim, devem-se considerar também as representações elaboradas pelo estudante. Em muitas situações, as representações dos estudantes diferem das representações apresentadas pelo professor – questão a ser mais bem desenvolvida no capítulo 5 desta tese.

Não se advoga aqui que a relação estabelecida nesta tríade dá conta da complexidade envolvida no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Concordando com o próprio Almouloud (2007, p. 26), por exemplo, "as relações professor-saber-aluno não são relações tão diretas e tão transparentes como sugere o triângulo pedagógico" e não há razão alguma de pensar o processo de ensino e aprendizagem exclusivamente na sala de aula ou conduzido pelo professor.

Todavia, essas relações são tão importantes que pesquisadores como Almouloud (2007), Bicudo (1999), Brousseau (2008), Chevallard (2000), Duval (2009), Fiorentini (2003), Pais (2001), Brito (2005) para citar alguns, dedicam-se a entender o próprio processo de ensinar e de aprender Matemática; as questões didáticas que envolvem os sistemas educacionais; as questões cognitivas que envolvem a aprendizagem dos estudantes; as questões epistemológicas intrínsecas da complexidade dos próprios objetos matemáticos que se constituíram historicamente; e a necessária transposição didática exigida dos professores de Matemática.

2.3.2 Transposição didática e os obstáculos de aprendizagem

Chama-se de transposição didática, conforme Chevallard (1991), o processo em que um objeto da ciência se transforma em objeto de ensino. Conforme D'Amore (2007, p.

228), a transposição didática é múltipla, pois ela “participa da transformação que as disciplinas e os programas provocam ao saber; mas também sofre a interpretação e o exemplo (em sentido geral, como imagem da disciplina) que os professores dão de uma disciplina em sua prática cotidiana”. Conforme Pais (2011, p. 22),

> enquanto o saber científico é apresentado através de artigos teses, livros e relatórios; o saber escolar é apresentado através de livros didáticos, programas e outros materiais. O processo de ensino leva finalmente ao *saber ensinado*, que é aquele registrado no plano de aula individual, do professor e que não coincide necessariamente com a intensão prevista nos objetivos programados. A análise do saber ensinado coloca em evidência os desafios da metodologia de ensino, a qual não pode ser dissociada da análise de valores e dos objetivos da aprendizagem. Por outro lado, não há garantia de que, no plano individual, o conteúdo aprendido pelo aluno corresponda exatamente ao conteúdo ensinado pelo professor.

Para D’Amore (2007, p. 228), no processo de transposição didática,

> os professores trabalham no nível de formulação de um conceito. Se permanecer indispensável que os programas transfiram os saberes, cabe aos professores em sua prática inventar exercícios, colocar em marcha modalidades por meio das quais tais saberes tenham um sentido e vigiar a prática junto aos alunos.

O próprio D’Amore considera que o processo de transposição didática colabora com o reconhecimento dos obstáculos epistemológicos e didáticos presentes nos objetos matemáticos e na ação docente, além de auxiliar no reconhecimento das concepções dos estudantes. Segundo o pesquisador, por um lado, esse processo “permite uma intervenção didática que previna, dentro do possível, a formação de conceitos inadequados ou até mesmo errados”; e, por outro, “permite ao professor reconhecer as suas próprias concepções implícitas no que se refere à Matemática” (2007, p. 229).

Assim, os obstáculos epistemológicos tem relação com a evolução histórica dos conceitos. Por exemplo, quanto tempo se levou para a construção dos números negativos na história da humanidade? Hoje, esse conceito é apresentado aos alunos do 7º ano do ensino fundamental desconsiderando todas as dificuldades de sua gênese, razão pela qual não se pode tratar como banal as dificuldades de aprendizagem que os alunos possam ter em sua aprendizagem. Os obstáculos epistemológicos em Matemática têm raízes sociais e culturais históricas. Muitos deles, inclusive, revelam-se contraditórios ao senso comum (a consideração de números negativos é um exemplo desse tipo). Não sem razão, os aprendizes se veem diante de dificuldades semelhantes na escola.

Pais (2011, p. 43) considera que

> na educação matemática os obstáculos interferem com maior intensidade na fase de gênese das primeiras ideias e que não estão normalmente, presentes na redação final do texto do saber. A apresentação final do conteúdo acaba filtrando dificuldades próprias de sua etapa de síntese. Por esse fato, há de se considerar a dificuldade de aprendizagem da matemática decorrente dessa diferença entre a sua síntese e redação. [...] por vezes, é preciso que haja fortes rupturas com o saber cotidiano, caracterizando a ocorrência de uma revolução interna, o que leva o sujeito vivenciar a passagem do seu mundo particular a um quadro mais vasto de ideias, às vezes incomensuráveis através do antigo conhecimento.

Ainda de acordo com Pais (2011), a educação escolar necessita promover rupturas com o saber cotidiano objetivando uma necessária emancipação e saída do mundo individual para um mundo amplo de ideias que constituirão o conhecimento. Em Matemática, estes obstáculos epistemológicos são quase sempre mascarados pela apresentação linear dos conteúdos, e as dificuldades da evolução dos conceitos científicos são apagadas dos registros textuais e da prática docente.

Do ponto de vista individual, estes obstáculos geralmente se manifestam no processo de ensino e aprendizagem como dificuldades de aprendizagem. Em geral, os docentes tratam essas dificuldades como próprias dos indivíduos, eles mesmos apagando a complexidade epistemológica intrínseca do objeto matemático abordado; silenciando, portanto, inúmeras nuances de seu processo de criação e de constituição.

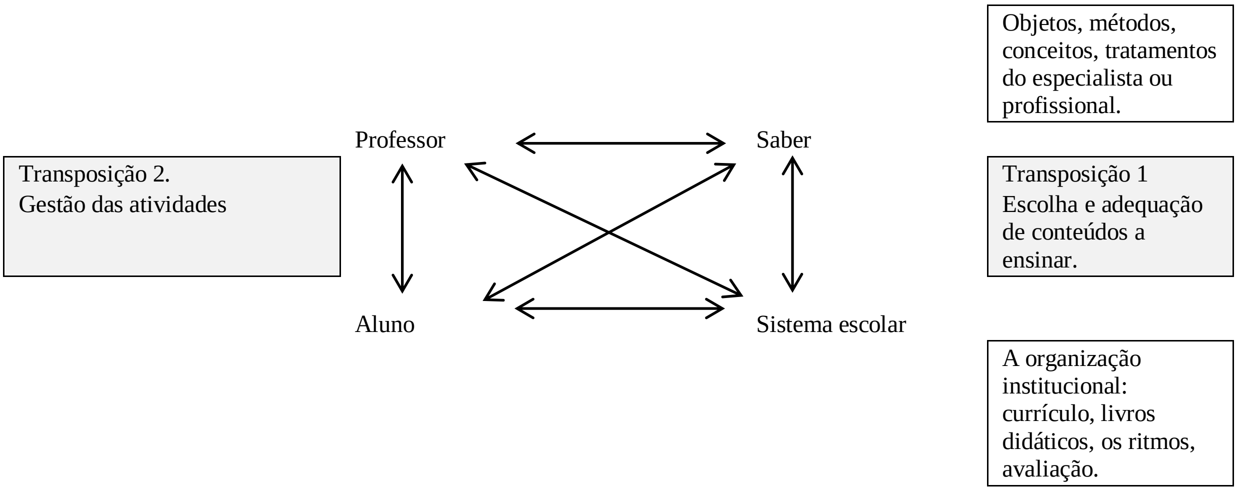
> Uma das principais críticas quanto à utilização da ideia de obstáculo epistemológico para interpretar o fenômeno da aprendizagem escolar é a forma precipitada com ela é transferida do contexto histórico da filosofia das ciências para o contexto pedagógico (PAIS, 2011, p. 45).

Some-se a essas questões o papel da organização do sistema educativo como um todo organizado e sistematizado em currículos, materiais de ensino, carga horária das disciplinas curriculares entre outros fatores.

> Os obstáculos didáticos são conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar. No que se refere ao estudo dos obstáculos didáticos, permanece o interesse de estabelecer os limites do paralelismo possível entre o plano histórico do desenvolvimento das ciências e o plano cognitivo da aprendizagem escolar. Se a didática se dispõe a estudar o aspecto evolutivo da formação de conceitos, é conveniente admitir a flexibilização de que os obstáculos não dizem respeito somente às dificuldades históricas e externas ao plano da aprendizagem. (PAIS, 2011, p. 44)

Nesse contexto, é útil observar o esquema do processo de ensino e aprendizagem proposto por Duval (1999).

Figura 13 – Processo de ensino e aprendizagem conforme Duval



Fonte: Duval (1999, p. 68 apud ALMOULOUD, 2007, p. 27) modificado pela autora.

Como se pode ver na figura 13, o processo de transposição didática dos objetos científicos da Matemática em objetos de ensino abre inúmeras possibilidades ao professor.

> O professor se relaciona com um conjunto de alunos diferentemente das relações que poderia ter com cada um dos alunos, em tarefas pontuais. Além disso, os alunos interagem entre si e esta interação pode ser utilizada, didaticamente, para promover o processo de *ensino* e *aprendizagem*. São tantos e tão complexos os fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem que o professor dificilmente dará conta de todos eles, qualquer que seja o esquema imaginado. (ALMOLOUD, 2007, p. 27).

Contudo, para além destas inúmeras variáveis inerentes ao processo de transposição didática dos objetos da ciência em objetos de ensino, é preciso reconhecer uma diferença importante nos objetos de ensino em Matemática. Por serem abstratos, esses objetos somente são acessíveis por meio de múltiplos registros de representação semiótica. Desse modo, seu processo de ensino configura-se na utilização destes registros, levando em consideração as especificidades dos objetos abordados.

Assim, uma consideração pertinente de como ocorrem ou se potencializam formas de ensinar e de aprender conceitos matemáticos não pode deixar de considerar como se configuram as representações dos objetos matemáticos e de qual é o papel que elas desempenham no processo de ensino e aprendizagem. Por exemplo, o questionamento sobre que tratamentos ou que tipos de conversão entre representações semióticas podem ser mais relevantes para a aprendizagem dos objetos matemáticos, no sentido de ampliar efeitos cognitivos e/ou de diminuir esforços de processamento do aprendiz, remete para o reconhecimento da importância da diversidade dos registros de representação semiótica na abordagem dos objetos matemáticos. Duval (2009, 2011) aponta para inúmeras vantagens da utilização da diversidade de registros de representação sobre inúmeros aspectos.

Argumenta-se, nesta tese, que se deve levar em conta a noção de custos e benefícios de processamento na utilização de diferentes registros de representação, especialmente quando se consideram casos de congruência e não congruência nos processos de conversão. É para dar conta destas abordagens que buscamos na teoria da relevância e dos processos cognitivos os fundamentos necessários para a compreensão desses processos que demandam esforços de processamentos diferentes. Justamente nessa consideração de esforços de processamento e de ganhos cognitivos é que se pode pensar nos aportes da teoria da relevância, de Sperber e Wilson (2001). Se a cognição humana só ocorre a partir de representações, e se estas representações constituem 'portas' de acesso ao ambiente cognitivo, torna-se importante avaliar custos e benefícios dessa ampliação de 'portas'. Os registros de representação não constituem apenas as 'portas' de acesso ao ambiente cognitivo, mas também as 'portas' de saída para a expressão do pensamento, ou seja, o ato de pensar necessita necessariamente da atividade de representar. Sperber e Wilson (2001, p. 128) apontam que os sistemas de representação são estruturas que permitem inclusive acessar a outras representações.

> O sistema de representações internas do ser humano é claramente de uma riqueza suficiente para permitir representações de segunda ordem das representações. Por outras palavras, a linguagem do pensamento atua como sendo a própria metalinguagem: temos a capacidade de não só criar suposições, mas também de raciocinarmos acerca delas e acerca de outras representações.

Consideradas essas questões, o próximo capítulo será dedicado a apresentar a arquitetura descritiva e explanatória guiada pela noção de relevância.

3 TEORIA DA RELEVÂNCIA

> A língua na qual se faz Matemática possui um "código semiológico próprio"; isso acarreta várias convenções, mais ou menos explícitas: existe o uso de escritas específicas, as expressões simbólicas, como as fórmulas. Às vezes, elas se encontram inseridas em frases que, de resto, pertencem à língua comum. (D'AMORE, 2007, p. 254).

Este capítulo encontra-se estruturado em três seções. O capítulo visa a apresentar a teoria da relevância de Sperber e Wilson como base teórica para analisar custos e benefícios cognitivos motivados pela utilização de diferentes registros de representação semiótica no processo de transposição didática. A primeira seção trata dos fundamentos da teoria, com ênfase nos princípios cognitivo e comunicativo de relevância. A segunda seção trata do processamento pragmático dos enunciados, enfatizando a Língua Natural e suas portas de acesso ao ambiente cognitivo por meio das entradas lexical, lógica e enciclopédica das unidades significativas constituintes dos enunciados na forma linguística, passando pela formulação de explicaturas e implicaturas. A terceira seção consiste numa revisitação da questão da conversão, considerando a Língua Natural como registro intermediário para a mobilização dos demais registros de representação utilizados no processo de ensino. Esta seção amplia o conceito das entradas lexical, lógica e enciclopédica para os demais registros de representação considerando suas unidades significativas constituintes.

3.1 NOÇÕES INTRODUTÓRIAS SOBRE RELEVÂNCIA

Segundo Wilson (2004, lição1, p. 1), "o termo 'pragmática' foi introduzido na linguística para dar conta do estudo do uso da linguagem em vez de sua estrutura". Nesse sentido, a pragmática difere da fonologia, da sintaxe e da semântica, que estudam diferentes aspectos da estrutura da linguagem. De um conjunto extenso de fatores que podem ser estudados no campo da pragmática, esta tese se insere no que se define por pragmática cognitiva, cujo objeto é o de investigar como os enunciados em língua natural são compreendidos. Trata-se de "estudos de como propriedades linguísticas e fatores contextuais interagem na interpretação de enunciados". Ou, mais especificamente, "como a estrutura fonológica, sintática e semântica da sentença enunciada combina-se com fatos sobre o falante, a audiência, o tempo e o lugar do enunciado para gerar uma interpretação particular de um enunciado em contexto".

A questão central de uma teoria pragmática é que o significado que um falante manipula quando enuncia uma sentença extrapola o significado linguístico atribuído a essa sentença pela gramática. Compreender como essa diferença entre o significado subdeterminado da sentença e o significado do falante é preenchida por um ouvinte interessado em compreender o enunciado é a meta dos estudos da pragmática.

Segundo Wilson (2004), uma sentença da língua natural é um construto abstrato com uma estrutura fonológica, sintática e semântica que é analisável independentemente de algum contexto. Um enunciado é um objeto concreto com propriedades linguísticas e não linguísticas. As propriedades linguísticas decorrem da estrutura gramatical da sentença. As propriedades não linguísticas incluem fatores contextuais.

O significado de uma sentença pode ser descrito semanticamente. Esse significado é tipicamente esquemático ou incompleto e precisa ser completado ou complementado pelo ouvinte para gerar uma proposição definida capaz de ser verdadeira ou falsa. O significado do falante é sempre o que o falante quer comunicar ao enunciar contextualmente uma sentença em uma ocasião particular.

O ponto essencial numa teoria pragmática é que a diferença entre o significado do falante e o significado da sentença é a noção de contexto. Numa pragmática de viés cognitivo, contexto corresponde ao conjunto de suposições mentalmente representado (a parte da suposição que o enunciado foi produzido) e realmente usado na interpretação de um estímulo comunicacional.

> As suposições podem ser construídas da interpretação do texto anterior, da observação do falante ou do que está acontecendo no ambiente imediato, mas elas podem também ser elaboradas do conhecimento cultural, do conhecimento científico, do senso comum, e, mais geralmente, de algum item de informação compartilhada ou idiossincrática que o ouvinte tem acesso em certo tempo. (WILSON, 2004, lição 1, p. 6).

Se o propósito do ouvinte é identificar o significado do falante quando ele está interpretando um enunciado e se o significado do falante decorre de aspectos gramaticais da sentença e de fatores contextuais, a tarefa do ouvinte é elaborar uma hipótese sobre esse significado por meio de “uma combinação de contexto, significado explícito e significado implícito de uma lista de possíveis interpretações”. A hipótese desenvolvida por Sperber e Wilson é que essa combinação é guiada pela noção de relevância.

Wilson distingue três formas de transmissão de informação: acidental, encoberta e aberta. A transmissão de informação acidental consiste em pistas informacionais que não são produzidas intencionalmente (por exemplo, o sotaque de uma pessoa). A transmissão encoberta é aquela em que o falante deliberadamente quer esconder (por exemplo, uma animosidade por trás de palavras gentis). A transmissão aberta ou comunicação ostensiva, que interessa à teoria da relevância e aos propósitos desta tese, é aquela que o falante pretende transmitir e pretende que o ouvinte reconheça essa intenção.

> Na comunicação aberta, há duas camadas de intenção para o ouvinte separar: uma intenção básica do falante em informar algo à audiência, e uma intenção de ordem superior de que o ouvinte reconheça essa intenção básica. Em teoria da relevância, essas intenções são chamadas, respectivamente, de intenção informativa e comunicativa. (WILSON, 2004, lição 1, p. 10)

Conforme a autora, identificar o significado do falante é identificar um estado mental complexo que envolve uma intenção informativa e uma intenção comunicativa, de modo a obter a interpretação abertamente pretendida: “aquela que o falante quer que o ouvinte recupere, está ativamente ajudando o ouvinte a recuperar e reconheceria se fosse solicitado” (WILSON, 2004, lição 3, p. 1). Como se verá mais adiante, a ideia de que o falante produz seu enunciado de modo a torná-lo fácil para que o ouvinte recupere a interpretação pretendida é fundamental para compreender a abordagem teórica guiada pelo conceito de relevância.

Conforme resume Wilson (2004, lição 3, p. 1), a teoria da relevância é fundamentada em quatro suposições simples. A primeira é a de que todo enunciado em língua natural possui várias interpretações possíveis, todas elas compatíveis com o significado decodificado da sentença. A segunda é a de que nem todas essas interpretações são acessíveis ao ouvinte em determinada ocasião. A terceira é a de que os ouvintes possuem um critério único e muito geral para avaliar interpretações sobre o significado do falante à medida que elas ocorrem. A quarta é a de que esse critério permite eleger uma interpretação (ou algumas interpretações próximas), de modo que ele tem o direito de assumir que essa primeira hipótese que satisfaz sua expectativa (se alguma) é a única plausível.

O mecanismo de interpretação desenvolvido por Sperber e Wilson decorre de uma suposição fundamental sobre a cognição humana: a de que ela é orientada para a relevância. Isso implica que o sistema cognitivo é engrenado para escolher a informações potencialmente relevantes, sejam elas comunicadas ou não.

A relevância é uma propriedade dos *inputs* (enunciados, pensamentos, memórias, percepções sensoriais, acrescente-se aqui qualquer registro de representação) direcionados aos processos cognitivos. Um *input* se mostra relevante quando seu processamento por um sistema cognitivo vale à pena.

Um *input* é sempre processado num contexto de suposições cognitivas disponíveis a um indivíduo. Essa contextualização do *input* nesse conjunto prévio de suposições pode gerar algum efeito cognitivo por meio da modificação ou da reorganização dessas suposições. A tese central é a de que a informação nova (ou novamente apresentada) é relevante em um contexto quando interage com o contexto para gerar efeitos cognitivos.

> A noção de um efeito contextual é essencial para se fazer uma caracterização da relevância. Desejamos defender que é condição necessária para a relevância o fato de ter efeitos contextuais, e que, em igualdade de condições, quantos mais efeitos contextuais se obtiver maior é a relevância. (SPERBER; WILSON, 2001, p. 190).

Neste contexto, apresenta-se o princípio cognitivo de relevância que, de acordo com Sperber e Wilson (2001, p. 241), constitui-se de dois fatores:

> o esforço necessário para o processar otimamente e os efeitos cognitivos que são alcançados por esse processamento ótimo. É nossa opinião que a presunção de relevância é diferente pelo lado do efeito e pelo lado do esforço. Do lado do efeito, a presunção é a que de que o nível dos efeitos alcançáveis nunca é menor do que o necessário para tornar o estímulo digno do esforço de processamento; do lado do esforço, é a de que o nível do esforço requerido nunca é maior do que aquilo que é necessário para conseguir esses efeitos.

3.1.1 Efeitos cognitivos

Uma informação pode alterar o ambiente cognitivo de um indivíduo produzindo três tipos de efeitos cognitivos: o de *fortalecimento* de uma suposição contextual; o de *contradição* e *eliminação* de uma suposição contextual; e o de *combinação* com uma suposição contextual para gerar uma implicação contextual. Nesse último caso, trata-se de conclusões dedutíveis da conjunção da informação nova e do contexto, mas nunca da informação nova ou do contexto sozinhos.

Para ilustrar esses efeitos, tome-se o caso de um professor que está trabalhando o teorema de Pitágoras com seus alunos. Para abordar o teorema de Pitágoras, os estudantes devem reconhecer inicialmente as medidas dos ângulos e dos lados de um triângulo e, nesse caso específico, a presença de um ângulo reto, condição indispensável para a aplicação do teorema. Para explorar a noção de ângulo reto, o professor pode utilizar em sala de aula um conjunto de formas triangulares construídas em diferentes materiais (madeira, EVA, acrílico, papel, etc.), de modo a explorar com régua e transferidor relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo. Em seguida, usando o transferidor, ele pode solicitar que os estudantes classifiquem os diferentes triângulos conforme eles possuam ângulo reto. Na sequencia, para explorar formas triangulares com ângulos retos, o professor pode solicitar que sejam medidos os lados dos triângulos com uma régua e anotados os valores encontrados. É nessa fase que ele pode também explorar as noções de cateto e hipotenusa, de modo que o lado maior do triângulo que não forma ângulo reto é a hipotenusa ‘a’ e os lados menores do triângulo que formam ângulo reto são chamados de catetos ‘b’ e ‘c’ (maior e menor, conforme o caso). Diante de todo esse contexto, ele pode então reforçar a ideia de que, se o triângulo possuir ângulo reto, então o quadrado da medida do lado maior (hipotenusa) equivale à soma dos quadrados das medidas dos lados menores (catetos).

Tome-se o *caso A* em que o professor está por apresentar uma nova forma triangular. Se tudo correu bem, o contexto cognitivo inicial dos estudantes pode ser representado pelas seguintes suposições (aqui arbitrariamente restringidas).[2]

> Contexto Cognitivo Inicial:
>
> (1a) O próximo triângulo provavelmente possui ângulo reto.
> (1b) Se o triângulo possuir um ângulo reto então o quadrado da medida do lado maior equivale à soma dos quadrados das medidas dos lados menores.
> (1c) Se o triângulo não possuir um ângulo reto então o quadrado da medida do lado maior não equivale à soma dos quadrados das medidas dos lados menores.

O professor, então, apresenta um novo triângulo, e o estudante confere com o transferidor que este triângulo possui um ângulo reto. Isso o faz pensar:

> Nova informação
>
> (2) Este triângulo possui ângulo reto.

A questão em jogo aqui é se essa informação é relevante no contexto de suposições restringidas (1a-c). Uma forma de ver isso é se esse *input* gera efeitos cognitivos nesse contexto. Fácil de ver que esse é o caso. A constatação de o triângulo possuir ângulo reto fortalece ou fornece mais evidência para a suposição em (1a), tomada até então como hipótese. Além disso, essa informação, combinada com a suposição (1b), gera a implicação contextual em (3):

---

[2] Esses exemplos seguem o modelo de Wilson (2004, lição 3). Críticas sobre essa forma de exposição podem ser vistas em Luciano (2014).

(3) O quadrado da medida do lado maior deste triângulo em particular equivale à soma dos quadrados das medidas dos lados menores deste triângulo em particular.

Desse modo, intuitivamente, pode-se dizer que a informação (2) é relevante para o estudante nesse contexto. Sperber e Wilson defendem que essa informação é relevante justamente porque produz esses dois efeitos cognitivos e, quanto maiores forem os efeitos cognitivos obtidos de uma informação, maior será relevância dessa informação.

Para ilustrar o segundo tipo de efeito cognitivo, o de contradição e consequente eliminação de uma suposição contextual, considere o *caso B* no qual o aluno observa com o transferido que o próximo triângulo não possui ângulo reto – informação (4) a seguir:

(4) Este triângulo não tem ângulo reto.

Neste caso, a nova informação em (4) contradiz a suposição contextual (1a) de que o próximo triângulo possuiria um ângulo reto. Segundo os autores, quando suposições novas e velhas contradizem-se umas às outras, a mais fraca das duas suposições é abandonada. Aqui, por hipótese, a informação nova em (4) forneceria forte evidência contra a suposição velha (1a), que, dessa maneira, seria abandonada. Além disso, (4) também pode ser combinada com suposição (1c) para gerar a implicação contextual em (5):

(5) O quadrado da medida do lado maior deste triângulo em particular não equivale à soma dos quadrados das medidas dos lados menores deste triângulo em particular.

Intuitivamente, (4) é relevante parcialmente porque contradiz e elimina suposições existentes e, quanto mais suposições ela elimina, mais forte ou mais relevantes ela foi.

A asserção fundamental dos autores é a de que quanto maiores forem os efeitos cognitivos de um estímulo, maior será a relevância desse estímulo. Se um estímulo não gerar efeitos cognitivos, quer porque é tautológico com o contexto, quer porque é absurdamente contrário a suposições assumidas como verdadeiras, ou quer porque não tem qualquer relação plausível com esse contexto, diz-se, então, que ele é irrelevante.

> A suposição pode contribuir com uma nova informação, mas essa informação não faz nenhuma ligação com quaisquer informações presentes no contexto. [...] a suposição já está presente no contexto e a sua força não é afetada pela informação apresentada de novo; essa informação apresentada de novo não tem, portanto, absolutamente nenhuma informação nova a dar e, *a fortiori*, não se apresenta como relevante. [...] a suposição é incompatível com o contexto e é demasiado fraca para perturbar; o processamento da suposição deixa assim o contexto sem modificação. (SPERBER; WILSON, 2001, p. 193).

Em outras palavras, há também três possibilidades para que uma informação nova (ou novamente apresentada) pode deixar de ser relevante. Vejam-se os casos:

No *caso A'*, enquanto o aluno está manipulando e observando a medida dos ângulos e dos lados na forma triangular que dispõe, com os seus pensamentos em (1a-c), outro aluno profere o enunciado (6):

(6) Este triângulo é um triângulo.

Essa informação, embora nova, é irrelevante em um contexto consistindo unicamente das suposições em (1a-c), porque ela não interage com elas em nenhum dos três modos apresentados. A informação nova também não fortalece uma suposição existente, não contradiz nem elimina suposições antigas, além de não se combinar com uma suposição antiga para gerar uma nova implicação contextual. Ela, desse modo, seria irrelevante em um contexto consistindo somente das suposições (1a-c) porque é tautológica com essas informações, embora perguntar por que alguém diz (6) nesse contexto sempre pudesse ser relevante.

No *caso A''*, em tudo similar ao caso anterior, um colega profere o enunciado (7):

(7) Este triângulo é de madeira.

Neste caso, dado que se espera que os estudantes identifiquem ângulos retos, a constituição material da figura em nada contribui para a tarefa. Nesse caso, a proposição expressa por (7) seria irrelevante no contexto consistindo somente das suposições (1a-c) porque é descontextualizada, embora, outra vez, perguntar por que alguém diz (7) nesse contexto sempre pudesse ser relevante.

Por fim, veja-se o *caso B'*, onde, mais uma vez, o estudante manipula diferentes formas triangulares. Nessa situação, um colega profere o enunciado (8):

(8) Essa forma triangular não tem forma triangular.

Aqui, a informação nova contradiz uma suposição existente sobre formas triangulares. Todavia, diferente do caso original B, a identificação de figuras triangulares está fortemente segura para ser desafiada por uma informação nova. Mais uma vez, quando suposições novas e velhas entram em conflito, a mais fraca é abandonada. Nesse caso, a informação nova em (8) não será forte o suficiente para superar a suposição existente no ambiente cognitivo do estudante e, consequentemente, será a informação nova aquela que será rejeitada pelo aluno. O resultado do processamento da nova informação não provocará nenhuma alteração no conjunto de suposições construídas em relação às formas triangulares existentes, de modo que não produzirá nenhum efeito cognitivo e, consequentemente, nenhuma relevância pode ser atribuída à proposição expressa por (8). Embora, ainda uma vez mais, perguntar por que alguém diz (8) nesse contexto sempre pudesse ser relevante.

3.1.2 Esforços de processamento

A verificação dos efeitos cognitivos é necessária, mas não é suficiente para a avaliação da relevância de um estímulo. Para isso é preciso comparar esses efeitos com o custo de processamento necessário para obtê-los. Como em qualquer processamento de informações há esforço para se produzirem efeitos contextuais, a asserção fundamental dos autores é a de que quanto menores forem os esforços de processamento de um estímulo, maior será a relevância desse estímulo.

Para ver como isso se dá, observe-se o *caso C* em que, mais uma vez, o estudante encontra-se manipulando formas triangulares com no contexto das suposições (1a-c). Diante da constatação de estar diante de um triângulo com ângulo reto, qual das suposições (9a-c) a seguir seria mais relevante nesse contexto?

> (9a) Este triângulo possui ângulo reto.
> (9b) Não é verdade que este triângulo não possui ângulo reto.
> (9c) Não é verdade que este triângulo não possui ângulo reto e este triângulo é de madeira.

Intuitivamente, (9a) seria o pensamento mais relevante. Observe-se que (9a-c) têm exatamente os mesmos efeitos cognitivos nesse contexto: eles fortalecem (1a), têm a implicação contextual em (3), e não alcançam outros efeitos cognitivos. Apesar disso, esses efeitos são mais fáceis de derivar de (9a) do que de (9b) ou (9c), que são linguisticamente e logicamente mais complexas (ambas incluindo a forma lógica de (9a) como uma subparte de sua própria forma lógica e (9c) incluindo ainda material irrelevante). Portanto, se as comparações de relevância fossem baseadas somente em efeitos cognitivos, então as diferenças de relevância entre (9a-c) não seriam explicadas.

Segundo os autores, portanto, as avaliações de relevância de um estímulo qualquer dependem de dois fatores concomitantes: (a) a geração de efeitos cognitivos, e (b) o dispêndio de esforço de processamento para obter esses efeitos cognitivos. Segundo os autores (2001, p. 199), "a avaliação da relevância, assim como a avaliação da produtividade, é uma questão de equilíbrio entre o rendimento (*output*) e o investimento (*input*): neste caso, o equilíbrio entre efeitos contextuais e o esforço de processamento". A rigor, relevância é uma inequação entre efeitos cognitivos a serem maximizados e esforço de processamento a ser minimizado.

As avaliações de relevância podem ser extrapoladas para o objeto de investigação dessa tese. Cada registro de representação semiótica em Matemática, com suas unidades significativas próprias recortando o objeto matemático de diferentes modos, possui diferentes desempenhos no que se refere aos efeitos cognitivos gerados e ao dispêndio de energia. Desse modo, um registro pode ser mais eficiente (relevante) do que outro de diferentes modos. Um aprendiz que consegue manipular esses registros não apenas acessa o conceito por diferentes ângulos, mas é também capaz de calcular, diante de um problema, custos e benefícios da utilização de cada registro. Por exemplo, tabelas podem ser eficientes para algumas variáveis discretas, mas ineficientes para variáveis contínuas; gráficos permitem acesso a valores significativos de uma função, mas requerem um custo muito alto para converter na formulação algébrica que lhe dá sustentação, e assim outras atividades que envolvem tratamentos e conversões de registros de representação semiótica podem ser analisados a partir do ponto de vista da teoria da relevância.

3.1.3 Definição de relevância: o princípio cognitivo

Sperber e Wilson (2001) propõem que, sendo iguais as condições de processamento, quanto maiores são os efeitos cognitivos, maior é a relevância do *input*. Como gerar efeitos contextuais implica despender esforço mental, os autores propõem que, sendo iguais as condições de processamento, quanto menor é o esforço de processamento que se requer, maior é a relevância do *input*.

Os autores (2001, p. 11) definem relevância tal como se segue:

> *Relevância:*
> a) quanto maiores são os efeitos cognitivos, maior é a relevância;
> b) quanto menor é o esforço de processamento, maior é a relevância

Como essas avaliações são idiossincráticas, os autores definiram o conceito de relevância para um indivíduo.

> *Relevância para um indivíduo*
> a) em igualdade de condições, quanto maiores os efeitos cognitivos (de um input para um indivíduo que o processa), maior a relevância (ao indivíduo no momento);
> b) em igualdade de condições, quanto menor o esforço de processamento requerido para derivar esses efeitos, maior a relevância (do input ao indivíduo no momento). (WILSON, 2004, lição 3, p. 9).

Com base nesse conceito, os autores definem o que eles denominam de princípio cognitivo de relevância, segundo o qual a cognição é engrenada para maximizar a relevância dos estímulos a que está submetida.

> *Princípio cognitivo de relevância*
> A cognição humana tende a ser dirigida para a maximização da relevância.
> (WILSON, 2004, lição 4, p. 1).

O princípio cognitivo de relevância que, de acordo com Sperber e Wilson (2001, p. 241), constitui-se de dois fatores:

> O esforço necessário para processar otimamente e os que são alcançados por esse processamento ótimo. É nossa opinião que a presunção de relevância é diferente pelo lado do efeito e pelo lado do esforço. Do lado do efeito, a presunção é a que de que o nível dos efeitos alcançáveis nunca é menor do que o necessário para tornar o estímulo digno do esforço de processamento; do lado do esforço, é a de que o nível do esforço requerido nunca é maior do que aquilo que é necessário para conseguir esses efeitos.

Segundo Wilson, defender o princípio cognitivo de relevância é defender que nossos sistemas de percepção, memória e inferência se organizaram para automaticamente tender a direcionar atenção e recursos de processamento aos estímulos disponíveis mais relevantes, e a processá-los de uma forma que tende a maximizar a relevância.

3.1.4 Definição de relevância: o princípio comunicativo

Sperber e Wilson (1986/1995), então, extrapolaram o princípio cognitivo de relevância para instâncias comunicacionais. Segundo Wilson (2004, lição 3, p. 10), o que é singular na comunicação aberta ou ostensiva é que o ouvinte pode ter expectativas razoáveis de relevância a partir de fragmentos de comportamento comunicativo do falante. O argumento é o de que “expectativas de relevância criadas em cada enunciado são precisas e poderosas o suficiente para excluir todas exceto uma única interpretação”. Assim, se o ouvinte encontrar uma interpretação que satisfaça sua expectativa de relevância, essa será a única interpretação que ele está justificado a aceitar (mesmo que equivocada). A propósito, quando se considera a resolução de problemas matemáticos, percebe-se que estudante, quando decide tomar um caminho para resolver uma questão, raramente volta para conferir se sua proposta está ou não correta. Para ele, a primeira interpretação sempre é a mais condizente com a proposta dada.

Considerando-se que o sistema cognitivo humano orienta-se para a relevância, isso permite prever e manipular em alguma medida o ambiente cognitivo dos outros. Nesse aspecto, a comunicação aberta ou ostensiva cria expectativas de relevância não criadas por outros tipos de transmissão de informação. Quando um falante deliberadamente atrai a atenção do ouvinte, o ouvinte está justificado a presumir que alguma informação relevante será fornecida. A chave da abordagem pragmática guiada pela relevância consiste em afirmar que comunicar é oferecer informação, partindo-se do princípio que essas ofertas criam presunções ou expectativas de relevância ou pertinência. Sperber e Wilson (2001, p. 242) definem o princípio comunicativo de relevância da seguinte forma: “Todo o ato de comunicação ostensiva comunica a presunção da sua própria relevância ótima”.

Em seguida, os autores questionaram que quantidade de informação torna um enunciado relevante. Dado que relevância máxima é improvável e que todo enunciado é minimamente relevante quando processado, eles chegaram à conclusão de que a presunção esperada é a de relevância ótima. Em outras palavras, um enunciado usado ostensivamente deve ter ao menos efeitos cognitivos suficientes a um custo de processamento suficientemente baixo para merecer atenção.

A meta do ouvinte/leitor é a de obter uma interpretação que satisfaça sua expectativa de relevância ótima. Para tanto, com base na codificação linguística e seguindo uma rota de esforço mínimo, o ouvinte/leitor deve enriquecer esses *inputs*, de modo a obter o significado explícito e completá-lo implicitamente, até que a interpretação se conforme com sua expectativa de relevância.

A presunção de relevância ótima foi então definida com duas cláusulas:

> *Presunção de relevância ótima:*
> a) O enunciado deve ser ao menos relevante o suficiente para merecer processamento.
> b) O enunciado deve ser o mais relevante compatível com as habilidades e as preferências do falante.

Se a cláusula (a) da presunção de relevância ótima opera excluindo algumas interpretações e encorajando outras, a cláusula (b) sugere que se espera do falante que ele produza o enunciado mais relevante possível, a não ser que isso vá contra suas habilidades ou preferências. Isso ocorre porque, para prender a atenção do ouvinte e direcioná-la para o significado pretendido, é de interesse do falante que ele otimize a relevância. Como complementa Wilson (2004, lição 4, p. 8), "é do próprio interesse do falante fazer seu enunciado tão relevante quanto possível (isto é, tão rico quanto possível em efeitos cognitivos e tão econômicos quanto possível para obter esses efeitos cognitivos), desde que isso não vá contra seus próprios interesses e preferências".

Além disso, a cláusula (b) da presunção de relevância ótima tem uma consequência mais geral que desempenha um papel fundamental na interpretação pragmática. "Ela dispensa a necessidade de o ouvinte, tendo achado uma interpretação aceitável do que o falante poderia manifestadamente ter previsto, continuar a considerar outras interpretações menos acessíveis" (WILSON, 2004, lição 4, p. 8). É justamente com base nessa extrapolação que é possível considerar um procedimento de compreensão concreto (ou heurística) que os ouvintes podem usar para descobrir a melhor hipótese sobre o significado do falante.

> *Procedimento de compreensão guiado pela relevância*
> Siga um caminho de menor esforço ao computar efeitos cognitivos:
> a) Considere interpretações (por exemplo, atribuições de referência, contextos, etc.) na ordem de acessibilidade;
> b) Pare quando sua expectativa de relevância é satisfeita (ou abandonada).
> (WILSON, 2004, lição 4, p. 8).

Neste caso, o ouvinte tem que acreditar que o estímulo ostensivo utilizado pela pessoa que comunica era o mais relevante entre um conjunto de estímulos que ele poderia utilizar para comunicar. Neste ponto, podem-se retomar os registros de representação semiótica como veículos que a pessoa que comunica tem a sua disposição para realizar a comunicação ostensiva em matemática sobre alguns aspectos de seus objetos. A presunção de relevância assevera que a escolha por um dos registros de representação para tornar manifestas o conjunto de suposições {I} de quem comunica supostamente foi a melhor escolha.

No processo comunicativo, o destinatário tem o papel de construir um conjunto de hipóteses interpretativas das suposições {I} e escolher a hipótese considerada como mais correta. Neste caso observa-se que as interpretações e as escolhas das hipóteses podem acontecer de maneiras diferentes, pois os contextos individuais são diferentes e cada indivíduo tem sua representação de mundo já construída ao longo de sua vida. Esta representação de mundo vai interferir diretamente na interpretação das suposições {I} proferidas pela pessoa que comunica.

Para esta situação, torna-se importante que a pessoa que comunica ofereça possibilidades de escolha ao ouvinte, e cabe ao ouvinte escolher a melhor hipótese. O que torna uma interpretação mais relevante do que outras é o fato de ela gerar o maior número de efeitos demandando o menor esforço de processamento possível. De acordo com Sperber e Wilson (2001, p. 255), "o que é importante é que, dado o ambiente cognitivo, dado o contexto inicial e dado o estímulo, algumas hipóteses são mais acessíveis do que outras e isso significa que requerem menos esforço de processamento".

> O princípio de relevância torna mesmo possível utilizar uma estratégia de verificação de item a item na compreensão. Garante a seleção da primeira interpretação acessível que é compatível com o princípio, se na verdade houver alguma e pelo contrário se não houver interpretação absolutamente nenhuma. Por outras palavras, a teoria da relevância explica como é possível a comunicação ostensiva e como ela pode falhar. (SPERBER; WILSON, 2001, p. 258).

Conhecidas em linhas gerais a abordagem guiada pela noção de relevância, apresenta-se na próxima seção a operacionalização do procedimento de compreensão.

3.2 PROCESSAMENTO PRAGMÁTICO DE ENUNCIADOS

Nesta seção, apresenta-se como a teoria da relevância descreve e explica o processamento pragmático de enunciados. Para isso, inicialmente, apresenta-se o processamento da forma lógica não proposicional e, em seguida, apresenta-se o mecanismo ou módulo dedutivo proposto por Sperber e Wilson (1986/2001, 1995).

Considera-se que a entrada de dados (*inputs*) no ambiente cognitivo acontece por meio de informações sensoriais, linguísticas e, no caso especial da Matemática, por meio dos diferentes registros de representação semiótica de seus objetos. O processamento central de informações é responsável pela integração e comparação das informações derivadas dos vários sistemas de entradas de dados da memória.

> O fato de muitos processos centrais serem inferenciais impõe um constrangimento importante sobre o sistema de representações conceituais. As representações conceituais têm de ter propriedades lógicas: têm de ser capazes de fazer implicações, de se contradizerem umas às outras e de sofrerem regras de dedução. (SPERBER; WILSON, 2001, p. 124).

3.2.1 Formas lógicas

Segundo Sperber e Wilson, o fato de muitos processos centrais do pensamento ser inferencial sugere que representações conceptuais devem ter propriedades lógicas.[3] Os autores chamam de forma lógica as propriedades lógicas de uma representação conceitual. Para eles, "uma forma lógica é uma fórmula bem formada, um conjunto estruturado de constituintes que passa pelas operações formais determinadas pela sua estrutura" (2001, p. 125). A teoria defende que, diferente das regras triviais fornecidas pela lógica padrão, a compreensão de enunciados linguísticos ocorre de maneira não trivial, ou seja, elas são sensíveis à verdade das premissas ou, de outro modo, elas são preservadoras da verdade. Eles complementam:

> Na essência, para que uma representação seja tratável pelo processamento lógico, defendemos que é apenas necessário que ela esteja bem formada, enquanto que, para que ela seja capaz de ser verdadeira ou falsa, tem também de estar semanticamente completa: isto é, tem de representar um estado de coisas cuja existência num mundo possível ou real a tornaria verdadeira. Consideramos, no entanto, que uma estrutura conceptual incompleta pode estar bem formada e pode passar por processamentos lógicos. (SPERBER; WILSON, 2001, p. 125).

Com base nessa distinção, os autores definem formas lógicas não proposicionais de formas lógicas proposicionais. Uma forma lógica será proposicional quando for semanticamente completa e, dessa maneira, puder ser avaliada como verdadeira ou falsa. Se isso não puder ser feito, trata-se de uma forma lógica não proposicional. Um exemplo de forma lógica não proposicional é uma fórmula do cálculo de predicados com alguma variável livre. Nesse caso, diz-se que ela está sintaticamente bem formada, mas ainda não é proposicional. São também não proposicionais as sentenças da língua natural que contêm pronomes ou as fórmulas algébricas com alguma variável por resolver.

Observe o exemplo em (1).

A variável x é maior que 1.

Não se pode atribuir verdade ao enunciado (1) a menos que definamos valores maiores que 1 para a variável x, razão pela qual o enunciado é uma forma lógica não

---

[3] Obviamente, nem todas as representações conceituais são lógicas. Estar feliz ou triste, por exemplo, são estados mentais e podem não ter propriedades lógicas.

proposicional. Mesmo assim, é possível fazer operações lógicas como a pressuposição em (2) as inferências em (3) ou as contradições em (4):

> Existe a variável x.
> Há números maiores (menores) que 1 para a variável x.
> Não existem números maiores (menores) que 1 para a variável x.

As formas lógicas incompletas que apresentam lugares vazios em sua constituição desempenham papel importante no processamento cognitivo. Sperber e Wilson (2001) argumentam que as formas lógicas não proposicionais podem ser armazenadas como esquemas de suposições que podem ser completadas por informações contextuais adquirindo significado pleno e também ser completa pelo sentido da frase. Assim, as formas lógicas não proposicionais desempenham papel importante nas etapas intermediárias do processamento de informações. Todavia, são apenas as formas lógicas proposicionais totais que constituem o conhecimento enciclopédico do indivíduo, a sua representação total de mundo. Trata-se do que os autores passam a chamar de suposições factuais e é sobre elas que opera o mecanismo dedutivo pressuposto pela teoria.

3.2.1 Mecanismo dedutivo

Segundo Sperber e Wilson (2001), o processamento de um enunciado – um estímulo ostensivo comunicacional – pressupõe seu encaixe numa formulação ou forma lógica. Por enquanto, é fundamental destacar que as formas lógicas que são processadas no raciocínio espontâneo humano compõem-se de conceitos. Cada conceito é uma espécie de rótulo, etiqueta ou endereço na memória.

Os indivíduos podem acessar informações de natureza lógica, enciclopédica e lexical, que funcionam como entradas para esses conceitos. Conforme Sperber e Wilson (2001, p. 144),

> a entrada lógica para um conceito é constituída por um conjunto de regras de dedução que se aplicam às formas lógicas das quais o conceito é constituído. A entrada enciclopédica contém informações sobre a extensão e/ou denotação do conceito, isto é, sobre os objetos, acontecimentos e/ou propriedades que o representam. A entrada lexical contém informações sobre a parte correspondente ao conceito na linguagem natural: a palavra ou a expressão da língua natural.

Por *entrada lógica de um conceito* define-se um conjunto pequeno e relativamente estável de regras dedutivas de eliminação que se aplicam às formas lógicas das quais fazem parte. Trata-se de informações de caráter computacional.

Por *entrada enciclopédica de um conceito* define-se o conjunto de informações sobre a extensão ou denotação dos conceitos, objetos, características e/ou fatos que a instanciam. Trata-se de informações de caráter representacional que se modificam de indivíduo para indivíduo com o passar do tempo. A constituição de um conceito está sempre aberta para o acesso de novas informações cuja finalidade é ampliar a entrada enciclopédica do mesmo pela expansão do contexto a partir da entrada de dados. Sempre que há o acesso a uma nova informação, se esta é processada pelo ambiente cognitivo, passa a compor o conjunto de suposições da memória enciclopédica disponíveis para serem acessadas a qualquer momento que se tornarem necessárias ao processo de compreensão de um novo aspecto do conceito ou, então, para compor uma parte da extensão deste conceito.

Por *entrada lexical de um conceito* define-se o conjunto de informações linguísticas sobre a contraparte em linguagem natural do conceito. Trata-se de informações de caráter representacional ligadas a aspectos fonológicos e sintáticos.

Para Silveira e Feltes (2002, p. 33), a elaboração do conteúdo de um enunciado envolve competências para: identificar as palavras que constituem o enunciado; recuperar os conceitos associados a essas palavras; e aplicar as regras dedutivas às suas entradas lógicas.

É justamente na aplicação de regras dedutivas às suas entradas lógicas que se mobiliza o mecanismo ou módulo dedutivo assumido pelos autores. Segundo Sperber e Wilson (2001 [1986], p. 174), a função central do mecanismo dedutivo é a de

> [...] fazer a derivação, espontânea, automática e inconscientemente, das implicações contextuais de quaisquer informações apresentadas de novo dentro de um contexto de informações antigas. Em igualdade de condições, quanto maior for o número de implicações contextuais, mais essa nova informação irá melhorar a existente representação do mundo do indivíduo.

3.2.2 Regras de eliminação

O mecanismo dedutivo opera de forma não trivial (sensível à força das suposições) e não demonstrativa (passível de ser confirmado, mas não de ser provado) por regras lógicas de eliminação do tipo *eliminação-e*, *modus ponens* e *modus tollens*.

Sperber e Wilson consideram que as regras de dedução que primeiro aparecem são as regras de eliminação para um conceito do tipo *modus ponendo ponens, eliminação conjuntiva (e)* e *modus tollendo ponens.*

No *modus ponendo ponens*, toma uma entrada de dados um par de premissas, uma premissa condicional e a outra premissa como antecedente desta condicional e tem como resultado a consequente da condicional.

Entrada de dados (*input*):	P
	Se P então Q ($P \rightarrow Q$)
Resultado *(output)*:	Q

No exemplo a seguir, diante da condicional (premissa maior) de que ‘se uma função f(x) está definida no conjunto dos números naturais então as variáveis de f(x) são discretas’ e do antecedente dessa condicional, ou seja, a constatação de que ‘f(x) está definida no conjunto dos números naturais’ (premissa menor), pode-se concluir dedutivamente por *modus ponens* que ‘as variáveis de f(x) são discretas’.

(1a) Se uma função f(x) está definida no conjunto dos números naturais então as variáveis de f(x) são discretas.
(1b) f(x) está definida no conjunto dos números naturais.
(1c) As variáveis de f(x) são discretas.

O segundo caso é a regra de *eliminação conjuntiva (e)*. Neste caso, toma-se como entrada de dados uma única premissa associada e resulta uma das duas conjuntas constituintes do enunciado conforme segue:

Entrada de dados (*input*):	$P \wedge Q$
Resultado (*output*):	P

Ou

Entrada de dados (*input*):	$P \wedge Q$
Resultado (*output*):	Q

A regra de eliminação da conjunção assevera que sendo consideradas duas suposições verdadeiras em conjunto, decorre que cada uma delas é verdadeira em separado. Tomem-se por exemplo as suposições em (2a), ambas consideradas verdadeiras:

(2a) ‘f(x)’ está definida no conjunto dos naturais e f(x) é discreta

Segue-se como verdade (2b) ou (2c) isoladamente.

> (2b) ‘f(x)’ está definida no conjunto dos naturais.
> (2c) ‘f(x)’ é discreta.

O terceiro caso de regra de eliminação apresentado é o *modus tollendo ponens*. Neste caso toma como entrada de dados um par de premissas em que uma é disjunta e a outra a negação da disjunta, resultando em outra disjunta.

Entrada de dados (*input*):	$P \vee Q$
	$\neg P$
Resultado (*output*):	Q

Ou

Entrada de dados (*input*):	$P \vee Q$
	$\neg Q$
Resultado (*output*):	P

Vejamos o exemplo:

> (3a) Uma grandeza variável é continua ou uma grandeza variável é discreta;
> (3b) Uma grandeza variável não é contínua;
> (3c) Uma grandeza variável é discreta.

Ou

> (3a) Uma grandeza variável é continua ou uma grandeza variável é discreta;
> (3b) Uma grandeza variável não é discreta;
> (3c) Uma grandeza variável é contínua.

3.2.3 O processamento das informações

Conforme Sperber e Wilson (2001, p. 217), o mecanismo funciona da seguinte maneira. No início de cada processamento dedutivo, há conjunto inicial de suposições ou de premissas na memória do mecanismo dedutivo. Em seguida, derivam-se todas as implicações não triviais desse conjunto de premissas e todos os fortalecimentos possíveis. No fim do processo, se não houver contradições, a memória do conterá as premissas originais, possivelmente fortalecidas e as conclusões derivadas. Nesse processo, as informações que não são processadas e armazenadas em endereços conceituais, são descartadas imediatamente pela memória ou passam a constituir a memória de curto prazo.

Assim, instalam-se inúmeros endereços conceituais na memória relacionados aos mais diversos conceitos formando a entrada enciclopédica que se organiza em diferentes contextos a partir do conjunto de suposições já processadas e devidamente armazenadas nestes endereços. As suposições armazenadas em endereços conceituais ficam a disposição e são recuperadas sempre que uma nova entrada de dados estabelecer relações com este ambiente e iniciar o processamento de novas informações ampliando o conjunto de suposições antigas ou substituindo as que se tornaram contraditórias, permanecendo armazenada no ambiente cognitivo aquela que apresentar o maior grau de força em relação das informações que as compõem.

3.2.4 O processamento pragmático de enunciados

Conforme Silveira e Feltes (2002, p. 56), "a proposta de Sperber e Wilson pretende, mais especificamente, descrever e explicar os níveis de compreensão desde a forma lógica, lexical e gramaticalmente determinada, até a forma proposicional da implicatura." As mesmas autoras apontam que Sperber e Wilson (1986/2001, 1995) e Carston (1988), consideram necessários três níveis de representacionais: o nível da forma lógica, dependente da decodificação; o nível da explicatura, em que se desenvolve a forma lógica através de processos inferenciais de caráter pragmático; e o nível da implicatura, que para construir inferências pragmáticas parte da explicatura.

Para exemplificar os níveis representacionais tome-se o caso em que Pedro precisa resolver a equação do primeiro grau $x+\frac{1}{3}=2$ proposta pela professora. Ao iniciar a resolução, Pedro pergunta para a professora como deve proceder. A professora responde:

(19) Faça o mínimo múltiplo comum!

Para processar o enunciado (19) da professora, o primeiro passo de Pedro é conformá-lo numa forma lógica tal como (20), que pode ser aqui mais bem caracterizada como semântica. A descrição (20) captura a ideia de que alguém$_x$ faz alguma coisa$_y$ em algum tempo$_\alpha$ para alguma finalidade$_\beta$.

(20) (fazer x, y, α_{tempo}, $\beta_{finalidade}$).

Como foi explicado, as formas lógicas podem ser classificadas como proposicionais e não proposicionais. Uma *forma lógica proposicional* é semanticamente completa e caracteriza-se por ser possível atribuir um valor de verdade. Uma *forma lógica não proposicional* é uma forma semanticamente incompleta, porque não se pode atribuir um valor de verdade conforme já explicitado neste texto.

No exemplo, não se pode atribuir um valor de verdade à descrição (20), porque há algumas lacunas que não foram codificadas no enunciado (19) da professora.

Veja-se:

(19) Faça o mínimo múltiplo comum!
(20) (fazer x, y, α_{tempo}, $\beta_{finalidade}$).
(21) (faça $\varnothing_x$, o mínimo múltiplo comum$_y$, $\varnothing_{tempo}$, $\varnothing_{finalidade}$).

Para poder transformar essa forma lógica não proposicional numa forma lógica proposicional, Pedro precisa preencher com entradas enciclopédicas um conjunto de informações não fornecidas pelo enunciado ‘Faça o mínimo múltiplo comum’ da professora. Antes de demonstrar os passos necessários para isso, vale dizer que nesta tese considera-se a seguinte convenção: as expressões linguísticas são apresentadas entre aspas simples: ‘faça’; as entradas enciclopédicas são apresentadas em versalete ou caixa alta: FAÇA; e as referências no mundo são apresentadas sem qualquer indicativo: faça.

Em primeiro lugar, Pedro tem de estreitar o item lexical ‘Faça’ para um sentido mais adequado ao contexto. Nesse caso, fazer o mínimo múltiplo comum é CALCULAR O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM. Em seguida, Pedro precisa reconhecer que ele é o destinatário da orientação da professora de tal modo que ele ocupa a posição de ‘x’. Em outros termos, $\varnothing_x$ equivale a PEDRO$_x$. Mais à frente, Pedro deve mobilizar o conceito acionado pela sequência lexical ‘mínimo múltiplo comum’, algo como mmc$_y$ equivale a MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM$_y$ (aqui, precisamente, está o ponto central de Duval. Duval está especialmente preocupado com que aspecto do conceito de mínimo múltiplo comum é realmente acionado por Pedro em função do estímulo linguístico da professora). Mais adiante, ele precisa determinar a coordenada temporal dessa ação, algo como α_{tempo} equivale a EM SEGUIDA$_{tempo}$. Por fim, Pedro precisa preencher a finalidade dessa ação, algo como $\varnothing_{finalidade}$ equivale a RESOLVER A EQUAÇÃO $x + \frac{1}{3} = 2_{\text{finalidade}}$.

Feitas essas operações, é possível obter a explicatura do enunciado:

> (19) Faça o mínimo múltiplo comum!
> (20) (fazer x, y, α_{tempo}, $\beta_{finalidade}$).
> (21a) CALCULE $\varnothing_x$ PEDRO$_x$, O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM$_y$, $\varnothing_{tempo}$ EM SEGUIDA$_{tempo}$ $\varnothing_{finalidade}$ PARA RESOLVER A EQUAÇÃO $x+\frac{1}{3}=2$ $_{finalidade}$!
> (21b) CALCULE PEDRO O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM EM SEGUIDA PARA RESOLVER A EQUAÇÃO $x+\frac{1}{3}=2$.

Sperber e Wilson (2001) consideram que quanto menores forem as contribuições dos traços contextuais de uma suposição comunicada mais explícita será a suposição comunicada. Partindo do termo implicatura de Grice (1975), chegam a um nível pragmático da comunicação humana que se estabelece entre a decodificação linguística e a implicação contextual, ou seja, a explicatura. Para Sperber e Wilson (2001, p. 274), "uma explicatura é uma combinação de traços conceituais linguisticamente codificados e contextualmente inferidos". Conforme Silveira e Feltes (2002, p. 54) "no nível da explicatura, ocorrem várias operações pragmáticas envolvendo atribuição de referência, desambiguação, resolução de indeterminâncias, interpretação de linguagem metafórica, enriquecimentos devido a elipses [...]". Vale dizer que uma explicatura será mais explícita quanto menor for a colaboração relativa dos traços contextuais. No exemplo em questão, a sentença 'Faça o mínimo múltiplo comum' é menos explícita do que 'Faça Pedro o cálculo do mínimo múltiplo comum em seguida para resolver a equação $x+\frac{1}{3}=2$'.

Vale aqui destacar que Sperber e Wilson (2001, p. 341) concebem a comunicação como um fenômeno em que um falante/escritor gera um enunciado que representa "uma interpretação pública de um dos seus pensamentos" e em que o ouvinte/leitor gera uma interpretação desse enunciado e, assim, do suposto pensamento original. Desse modo, eles argumentam que "[...] uma elocução é uma expressão interpretativa de um pensamento da pessoa falante e que o ouvinte forma uma suposição interpretativa acerca da intenção informativa da pessoa falante." Em outras palavras, os autores pensam a produção de um estímulo comunicacional como uma interpretação de um pensamento e a interpretação como uma tradução desse pensamento.

Dadas essas considerações, uma representação mental com uma forma proposicional pode ser empregada de um modo interpretativo ou descritivo. No modo interpretativo, a forma proposicional de um enunciado pode ser uma interpretação de algum pensamento que é ou que seria desejável levar em conta, como conhecimento, por exemplo, ou pode ser uma interpretação de algum enunciado ou pensamento atribuído. No modo descritivo, a forma proposicional de um enunciado pode ser uma descrição de um estado de coisas desejável ou pode ser uma descrição de um estado de coisas do mundo real/ficcional.

Há, pelo menos, dois tipos de relações em qualquer enunciado: o primeiro refere-se à relação entre a sua forma proposicional e um pensamento do indivíduo que fala; e o segundo refere-se à relação entre o pensamento e aquilo que é representado por ele. A tese de Sperber e Wilson sobre as relações existentes nas figuras de linguagem e nas forças ilocutórias pode ser resumida da seguinte maneira:

> [...] na metáfora existe uma relação interpretativa entre a forma proposicional de uma elocução e o pensamento que ela representa; na ironia existe uma relação interpretativa entre o pensamento da pessoa falante e os pensamentos ou elocuções atribuídas; numa declaração existe uma relação descritiva entre o pensamento da pessoa falante e um estado de coisas do mundo; em cada pedido feito ou em cada conselho dado existe uma relação descritiva entre o pensamento da pessoa falante e um estado de coisas desejável; em cada interrogativa e em cada exclamativa existe uma relação interpretativa entre o pensamento da pessoa falante e os pensamentos desejáveis. (2001, p. 341-342).

Interpretar a atitude proposicional, portanto, permite atribuir verdade ao próprio enunciado. Para isso, ele precisa ser inserido num esquema de mais alto nível que inclua o ato proposicional em jogo, a saber:

> (22a) P
> (22b) O FALANTE DESEJA QUE __.
> (22c) O FALANTE DESEJA QUE P.
> (22d) O FALANTE DESEJA QUE PEDRO CALCULE O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM EM SEGUIDA PARA RESOLVER A EQUAÇÃO $x+\frac{1}{3}=2$.
> (22e) A PROFESSORA DESEJA QUE PEDRO CALCULE O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM EM SEGUIDA PARA RESOLVER A EQUAÇÃO $x+\frac{1}{3}=2$.

Agora, de posse da descrição (22e), pode-se não somente avaliar a verdade do conteúdo do enunciado (intenção informativa), mas também a verdade da enunciação do próprio enunciado (intenção comunicativa). Contudo, o enunciado da professora pode não se limitar a comunicar essas intenções descritas em (22a-e), mas produzir efeitos mais sutis no nível da implicatura.

Sperber e Wilson (2001, p. 292) distinguem as premissas e as conclusões implicadas no processo inferencial. As premissas implicadas "têm de ser fornecidas pelo ouvinte que ou as tem de recolher da memória ou de construir pelo desenvolvimento de esquemas de suposições recuperadas de memória". As conclusões implicadas "são deduzidas das explicaturas da elocução e do contexto". Neste caso as premissas e conclusões implicadas são identificadas como partes da primeira interpretação inferível e compatível com o princípio de relevância.

No caso, pode-se inferir por *modus ponens* a partir da premissa implicada de que o mínimo múltiplo comum deve ser calculado na equação, que ele é necessário para resolvê-la (conclusão implicada). E, ainda mais sutil, que se o mínimo múltiplo comum é necessário para resolver a equação e a equação contém números fracionários (premissas implicadas), então ele é necessário para resolver outras equações fracionárias (conclusão implicada).

> S_1 – A professora deseja que Pedro calcule o mínimo múltiplo comum em seguida para resolver a equação $x+\frac{1}{3}=2$ (premissa implicada da explicatura do enunciado da professora).
> S_2 – $S_1 \rightarrow S_3$ (inferência por *modus ponens*).
> S_3 – O cálculo do mínimo múltiplo comum é necessário para resolver a equação $x+\frac{1}{3}=2$ (conclusão implicada por *modus ponens* – premissa implicada).
> S_4 – A equação $x+\frac{1}{3}=2$ contém número fracionário (premissa implicada da observação da equação).
> S_5 – $S_3 \wedge S_4 \rightarrow S_6$ (inferência por *modus ponens conjuntivo*). [4]
> S_6 – O cálculo do mínimo múltiplo comum é necessário para resolver equações com números fracionários (conclusão implicada).

3.2.5 Retomando o procedimento de compreensão guiado pela relevância

A meta do ouvinte/leitor é obter uma interpretação que satisfaça sua expectativa de relevância ótima. Assim, presume-se que o estímulo ostensivo utilizado pela pessoa que comunica é o mais relevante entre um conjunto de estímulos que poderia ter sido utilizado para comunicar. Para tanto, com base na codificação linguística e seguindo uma rota de esforço mínimo, o ouvinte/leitor deve enriquecer esses *inputs*, de modo a obter o significado

[4] Por *modus ponens conjuntivo* entende-se uma cadeia de inferência que, dada a verdade de uma conjunta como antecedente de uma condicional, infere-se a verdade de cada um dos termos conjuntos e, em seguida, a verdade da conclusão ($(P \wedge Q) \rightarrow R$; $P \rightarrow R$; R ou $(P \wedge Q) \rightarrow R$; $Q \rightarrow R$; R).

explícito e completá-lo implicitamente, até que a interpretação se conforme com sua expectativa de relevância. São justamente esses passos que são resumidos no que Sperber e Wilson (2001, p. 13) definem por processo, procedimento ou mesmo heurística de compreensão guiada pelo conceito de relevância, que se reapresenta a seguir:

> *Processo teórico da compreensão com base na relevância*
> Seguir um caminho de esforço mínimo na computação de efeitos cognitivos:
> a) considerar hipóteses interpretativas (desambiguações, atribuições de referência, suposições contextuais, implicaturas, etc.) seguindo a ordem de acessibilidade;
> b) parar quando é alcançado o nível esperado de relevância.

Quando nos restringimos a extrapolar esse procedimento à língua natural, cabe pensar qual é a competência dos docentes de matemática em explicar os conteúdos em diferentes formulações linguísticas. Hipoteticamente, o domínio do conteúdo e a experiência de ensino tendem a tornar o professor sucessivamente mais competente em apresentar os conteúdos de várias maneiras, desde que essa seja uma de suas preocupações no processo de transposição didática. Seja como for, os alunos tratarão os estímulos linguísticos do docente como ótimos, como o caminho mais relevante possível graças às habilidades que eles julgam que o docente possua. A relembrar, a presunção de relevância considera que a escolha por um dos registros de representação para tornar manifestas o conjunto de suposições {I} de quem comunica era a melhor escolha. Não sem razão que, muitas vezes, o contato com uma explicação diferente, do mesmo docente em outra circunstância, de outro docente ou mesmo de outro estudante, por exemplo, dá acesso à compreensão desse conteúdo.

Quando extrapolamos esse procedimento para outros registros de representação, ampliam-se as opções de compreensão. Como bem destaca Duval, isso ocorre porque o acesso a diferentes registros de representação de um mesmo objeto funciona de modo similar ao acesso a diferentes formas de explicação. Se os registros de representação recortam os objetos de diferentes modos, o acesso a diferentes registros de representação de um mesmo objeto implicam observá-lo de diferentes ângulos. Por hipótese, assim como uma explicação diferente em língua natural pode ser a chave para a compreensão do conteúdo, isso também pode correr mediante o acesso a diferentes registros de representação. Não sem razão, as pessoas somente compreendem o objeto pelo registro que tem a disposição. Veja-se, por exemplo, o caso de uma pessoa que define ‘extrair a raiz quadrada de um número x’ somente como a determinação de um número y tal que multiplicado por ele mesmo resulta nesse número x, fruto de sua experiência de cálculo, sem compreender que esse número é a raiz, ou seja, o fundamento para a geração de um quadrado geométrico.

Há, contudo, outras consequências. A teoria da relevância assume que os mecanismos de compreensão são idiossincráticos. Estímulos não são relevantes por si mesmos, mas relevantes para um indivíduo. Além disso, estímulos não são relevantes sempre da mesma forma para um mesmo indivíduo, mas relevantes conforme os diferentes contextos cognitivos desse indivíduo durante sua existência. Isso implica dizer que sempre é possível acessar alguma nuance do objeto matemático nas sucessivas experiências dos indivíduos com seus diferentes registros de representação. Logo, mesmo para o docente experiente, há como aprender mais sobre um objeto matemático e sobre formas de ensiná-lo, se ele dominar seus diferentes registros de representação. Desse modo, não apenas as entradas enciclopédicas de itens lexicais podem ser aperfeiçoadas de alguma maneira, mas entradas enciclopédicas de unidades significativas de qualquer outro registro de representação. Isso está na essência do propósito último do princípio cognitivo de relevância, a maximização da relevância dos estímulos para a melhoria da compreensão do mundo.

Além disso, dispor de diferentes registros implica dispor de diferentes ferramentas cognitivas diante de problemas para os quais não se definem previamente os processos de resolução. Em contextos reais, um indivíduo experiente, diante de diferentes formas de abordar um problema, tenderá a escolher a rota mais eficiente (leia-se, relevante). Isso em mente, por exemplo, entre duas rotas que sabidamente são eficazes, ele escolherá aquela que implica menos custos de processamento. Conforme Sperber e Wilson (2001, p. 255), “o que é importante é que, dado o ambiente cognitivo, dado o contexto inicial e dado o estímulo, algumas hipóteses são mais acessíveis do que outras e isso significa que requerem menos esforço de processamento”. É isso que justifica abandonar a soma quando a multiplicação é mais eficiente, abandonar a multiplicação quando a potenciação é mais eficiente e assim por diante. Contudo, vale relembrar aqui os obstáculos que essas ferramentas cada vez mais potentes geram no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que seu domínio implica abandonar procedimentos menos onerosos sob domínio, confiando que as novas rotas serão compensadoras no futuro.[5]

Conhecidos em linhas gerais os aportes da teoria da relevância para tratar do processo pragmático de compreensão dos enunciados, esses aportes são aplicados na próxima seção para processos de conversão de registros de representação.

---

[5] Sobre essa questão, ver a noção de conciliação de metas de Rauen (2014) no próximo capítulo desta tese.

3.3 REVISITANDO A QUESTÃO DA CONVERSÃO

Nesta seção a questão da conversão é revisitada a partir das noções desenvolvidas na seção anterior. Desse modo, diferentes registros de representação serão observados com base no aparato descritivo e explanatório da teoria da relevância. Antes, contudo, vale mencionar que, de acordo com Rauen e Cardoso (2011), os registros de representação semiótica podem ser estruturados no contexto de ensino e aprendizagem da Matemática em dois grupos, conforme podem ser vistos na figura 14.

Figura 14 – Conversões no domínio do ensino e domínio da Matemática

$$\overbrace{[RLN_1 \leftrightarrow \overbrace{(RRA_2 + RRT_3 + RRG_4 + \ldots + RR_n)}^{\textit{domínio da matemática}}]}^{\textit{Domínio do}\ \text{ensino}}$$

Fonte: Rauen e Cardoso (2011).

Segundo os autores, todas as conversões que relacionam o registro da língua natural (RLN) com os demais registros de representação semiótica (na figura, RRA – registro de representação algébrico, RRT – registro de representação tabular, RRG – registro de representação gráfica, e o RR_n – demais registros de representação (entre os quais o registro de representação figural e geométrico) são intrínsecas ao domínio do ensino da Matemática e são denominadas de *conversão do tipo A*. Conversões desse tipo apresentam problemas estruturais contingentes à polissemia da língua natural e às inferências não demonstrativas que caracterizam sua lógica. Visto que a utilização da língua natural é contingente na transposição didática, também são contingentes os problemas de conversão que ela provoca, podendo afetar a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Vale mencionar que a língua natural é um registro tão intrínseco nesse domínio que os docentes de Matemática muitas das vezes ignoram e mesmo não reconhecem a influência dessas conversões no processo de ensino e aprendizagem. As *conversões de tipo B*, por sua vez, relacionam os diversos registros de representação dentro do domínio próprio da matemática (RRA, RRT, RRG, entre outros). Essas conversões apresentam problemas estruturais contingentes à congruência e não congruência entre os registros. Todavia, dado que esses registros representam universos formais dedutivamente válidos, tendem a expurgar a polissemia e a lógica não trivial própria das línguas naturais.

3.3.1 Registro em língua natural

Na seção anterior, o processo de interpretação guiado pela noção de relevância permitiu descrever e explicar como Pedro processa o enunciado “Faça o mínimo múltiplo comum!” da professora, demonstrando como as entradas lexicais, lógicas e enciclopédicas vão se complementando até Pedro desenvolver a explicatura de que a utilização do cálculo do mínimo múltiplo comum permite resolver a questão e, num processo de generalização, a inferência não trivial ou implicatura de que a utilização do mínimo múltiplo comum serve para resolver equações com números fracionários. Agora, para compreender como o mesmo processo se aplica a conversões entre diferentes registros de representação semiótica, toma-se o caso de uma professora que solicita aos alunos que eles “representem algébrica, tabular e graficamente a função f(x) definida nos naturais, tal que f(x) é igual a x ao quadrado mais um”, cuja interpretação pode ser descrita da seguinte maneira:[6]

> (1a) Forma linguística: Represente algébrica, tabular, figural e graficamente a função f(x) definida nos naturais, tal que f(x) é igual a x ao quadrado mais um.
> (1b) Forma lógica: (representar x, y, α_{modo}, β_{modo}, γ_{modo})$\wedge$(ser igual y, z).
> (1c) Explicatura (primeira versão): Represente $\varnothing_x$ [VOCÊ/ALUNO$_x$] algébrica[mente]$_{\alpha modo}$, tabular[mente]$_{\beta modo}$, e graficamente$_{\gamma modo}$ a [VARIÁVEL DEPENDENTE] função f(x) definida no [UNIVERSO DOS NÚMEROS] naturais$_y$, tal que [O VALOR DA VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO] f(x) [NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS]$_y$ é igual a [O VALOR DA VARIÁVEL INDEPENDENTE] x [NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS] [ELEVADO] ao quadrado mais um[A UNIDADE NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS]$_z$.
> (1d) Explicatura (segunda versão): REPRESENTE VOCÊ/ALUNO ALGEBRICAMENTE, TABULARMENTE E GRAFICAMENTE A VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO F(X) DEFINIDA NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS, TAL QUE O VALOR DA VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO F(X) NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS É IGUAL AO VALOR DA VARIÁVEL INDEPENDENTE X NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS ELEVADO AO QUADRADO MAIS UMA UNIDADE NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS.
> (1e) Explicatura (terceira versão): A PROFESSORA SOLICITA QUE VOCÊ/ALUNO REPRESENTE VOCÊ/ALUNO ALGEBRICAMENTE, TABULARMENTE E GRAFICAMENTE A VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO F(X) DEFINIDA NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS, TAL QUE O VALOR DA VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO F(X) NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS É IGUAL AO VALOR DA VARIÁVEL INDEPENDENTE X NO

[6] A rigor, essa representação está mais próxima daquela própria de um ditado ou da exposição oral da tarefa. Admite-se aqui que não se espera que esse exercício fosse escrito sem recurso à formulação algébrica. Algo como: ‘Represente algébrica, tabular e graficamente $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ definida por $f(x)=x^2+1$’.

UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS ELEVADO AO QUADRADO MAIS UMA UNIDADE NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS.

Segue-se desse comando o empenho dos estudantes em resolver a questão. Para isso, uma série de conversões tem de ser mobilizadas. Antes, contudo, para dar conta de representar esses diferentes caminhos de acesso aos conceitos matemáticos, propõe-se uma representação figural composta por um conjunto de em setores circulares em que cada setor representa um registro de representação. Essa representação trata as entradas lexicais de cada registro na região externa de cada setor; as entradas enciclopédicas na região interna de cada setor em intersecção com o conceito de cada objeto matemático representado; e as entradas lógicas como elemento necessário que coordena a interpretação do léxico de cada registro em conceitos e vice-versa na região intermediária de cada setor.

Cada registro de representação a ser mobilizado na resolução desse exercício, por sua vez, ocupa um dos setores circulares concêntricos, de modo o domínio de diferentes registros vai ser representado pela emergência desses setores. Por hipótese, confluente com Duval, quanto maior for o número de registros dominados, maior será o acesso ao conceito matemático. Vale destacar que se admite nessa representação que as arestas dos setores são porosas, de modo a permitir 'diálogos' ou relações que os registros de representação semiótica mantêm entre si. Quando operações ocorrem no interior de cada setor, diz-se haver tratamentos dentro de um mesmo registro; quando elas ocorrem mediante a transposição das fronteiras porosas dos setores, diz-se haver conversões entre diferentes registros.

O primeiro setor representa o registro em língua natural. Destaque-se que, do ponto de vista semântico, o comando da atividade contém duas proposições: a de que "a função é definida nos naturais" e a de que "f(x) é igual a x ao quadrado mais um".

Na próxima figura, apresentam-se as entradas lexicais, lógicas e enciclopédicas do que se denomina em Matemática por campo de definição da função. Veja-se:

Figura 15 – Campo de definição da função no registro da língua natural (RLN)

Forma Linguística (entradas lexicais)	f(x)	∅	definida nos naturais
	|	|	|
Forma Lógica (entradas lógicas)	algo (x)	ser	definida em algo (y)
	|	|	|
Explicatura (entradas enciclopédicas)	O VALOR DA VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO F(X)	SER	DEFINIDO NOS NÚMEROS NATURAIS

Fonte: Rauen e Cardoso (2014).

Na figura seguinte, apresentam-se as entradas lexicais, lógicas e enciclopédicas da relação entre as variáveis dependente e independente na função. Veja-se na Figura 16.

Figura 16 – Relação entre as variáveis dependente e independente da função no registro da língua natural (RLN)

Forma Linguística (entradas lexicais)	f(x)	é igual a[7]	x ao quadrado mais um
	|	|	|
Forma Lógica (entradas lógicas)	algo (x)	ser igual	a algo (y)
	|	|	|
Explicatura (entradas enciclopédicas)	O VALOR DA VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO F(X) NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS	IGUALDADE	O VALOR DA VARIÁVEL INDEPENDENTE X NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS ELEVADO AO QUADRADO, MAIS UMA UNIDADE NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS

Fonte: Rauen e Cardoso (2014).

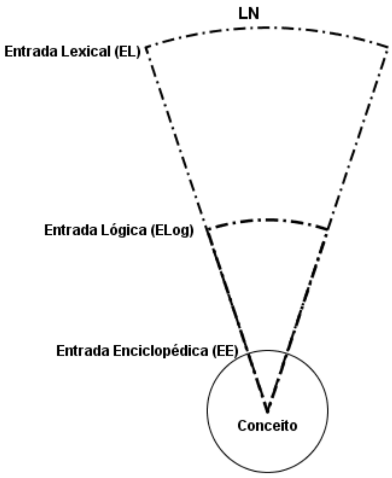
Nesta representação, cabe destacar que se optou por representar as entradas enciclopédicas da função como pertencentes ao universo dos números naturais. Essa opção não é ingênua. Ela decorre do próprio mecanismo de compreensão que assevera que o intérprete segue a interpretação em ordem de acessibilidade. Como o enunciado contém à esquerda (anteriormente, portanto) a sequencia lexical ‘a função f(x) definida nos naturais’, então, tudo que segue é definido no universo dos números naturais. Contudo, como se verá mais adiante, nem sempre o intérprete leva em conta essa restrição – um recorrente erro de interpretação que afeta conversões e tratamentos decorrentes.

O setor próprio do registro da língua natural pode ser representado na Figura 17.

---

[7] A rigor, admite-se aqui uma imprecisão descritiva que visa a preservar o conceito essencial de equivalência que define a noção matemática de equação e, na sequência, preservar a congruência posterior com o registro algébrico. O núcleo do sintagma verbal da sentença enunciada ‘é igual a xis ao quadrado mais um’ restringe-se ao verbo ‘ser’. O sintagma adjetival que o complementa é ‘igual a xis ao quadrado mais um’. O núcleo do sintagma adjetival é ‘igual’ que é complementado pelo sintagma preposicionado ‘a xis ao quadrado mais um’. Por fim, o núcleo do sintagma preposicionado ‘a’ é complementado por um sintagma nominal ‘xis ao quadrado mais um’. Sintaticamente: [S [SN f(x)] [SV [V é] [SA [A igual] [SP [P a] [SN xis ao quadrado mais um]]]]]. Como se pode constatar, houve um deslocamento do adjetivo para a posição própria do verbo.

Figura 17 – Acesso ao conceito matemático a partir do registro da língua natural



Fonte: Elaboração própria com base em Rauen e Cardoso (2011).

Essa figura representa no setor externo o conjunto de unidades significativas do registro de língua natural, ou seja, o conjunto de itens lexicais necessários para expressar nesse registro a função em questão (tal como teria sido lida em voz alta, por exemplo). No setor intermediário, representa-se a forma lógica subjacente à função, ou seja, uma equação que põe em equivalência uma variável dependente em função da definição de variáveis independentes. No círculo interior, descrevem-se as entradas enciclopédicas que são postas numa relação de função: a variável dependente, a variável independente e a relação de igualdade. Repare-se que somente os setores mais externos estão confinados às fronteiras porosas do registro. Isso não ocorre com o círculo interno, porque se admite que o registro apenas intersecta o conceito (a *semiósis* não alcança a *noésis*).

Uma vez conhecida essa forma de representar os diferentes registros, cabe agora compreender como cada um dos registros de representação matemática comporta as três entradas do conceito que são propostas pela teoria da teoria da relevância, pondo em xeque o que constitui essas entradas nos diferentes registros. Para dar conta desses processos, segue-se nas próximas subseções a descrição da função em questão em três registros: algébrico, tabular e gráfico.

3.3.2 Representação da função em linguagem algébrica

Para dar conta da representação algébrica desse exercício hipotético, o estudante precisa converter os comandos em língua natural em unidades significativas do registro algébrico. Nesse registro, a questão precisa ser representada em duas proposições algébricas:

uma que se refere ao campo de definição da função e outra que se refere à relação entre as variáveis dependente e independente.

Na figura a seguir, demonstra-se a representação algébrica do campo de definição da função em questão. No caso, por meio da expressão algébrica $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ quer-se definir que tanto os valores da variável independente da função como os valores da variável dependente estão restritos ao universo dos números naturais. Veja-se.

Figura 18 – Estabelecimento do campo de definição da função

Forma Algébrica (entradas lexicais do registro algébrico)	$f : \mathbb{N}$	$\rightarrow$	$\mathbb{N}$
	|	|	|
Forma Lógica (entradas lógicas)	algo (x) definido em naturais	implica	algo (y) definido em naturais
	|	|	|
Explicatura (entradas enciclopédicas)	OS VALORES DA VARIÁVEL INDEPENDENTE 'X' NA FUNÇÃO ESTÃO DEFINIDOS NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS	NOÇÃO DE IMPLICAÇÃO	OS VALORES DA VARIÁVEL DEPENDENTE 'F(X)' NA FUNÇÃO ESTÃO DEFINIDOS NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS

Fonte: Rauen e Cardoso (2014).

A expressão $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estabelece o campo de definição da função, mas não estabelece qual é a relação entre as variáveis dependente e independente. Essa relação é definida pela expressão algébrica que traduz que o valor da variável dependente equivale ao "valor da variável independente x no universo dos números naturais elevado ao quadrado, mais uma unidade no universo dos números naturais". Veja-se a figura na página seguinte.

Restringindo o olhar apenas à expressão $f(x) = x^2 + 1$, observa-se ela não explicita o campo de definição da função, diferentemente do caso do registro em língua natural, onde isso era possível implicitamente. Desse modo, para que o estudante possa resolver a tarefa, ele precisa não apenas compreender a formulação da função, mas determinar em que universo ela se aplica. Os resultados da atividade estarão corretos não somente os valores da variável dependente forem equivalentes aos valores da variável independente x elevados ao quadrado e acrescidos de uma unidade, mas quando ambas as variáveis forem definidas em números naturais. Se o estudante não perceber essa restrição, corre o risco de tratar a função $f(x) = x^2 + 1$ no universo dos reais, errando a atividade.

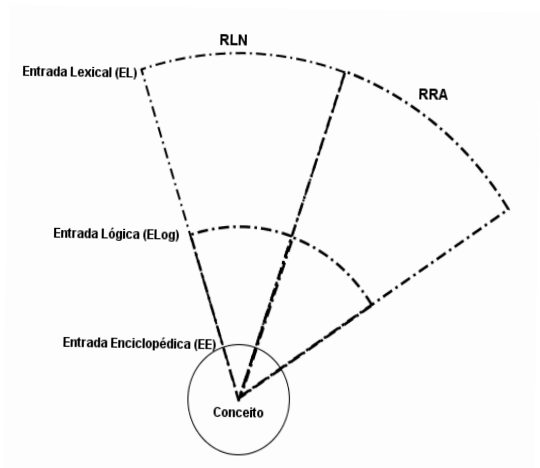
Figura 19 – Estabelecimento da relação entre a variável dependente e independente da função

Forma Linguística (entradas lexicais)	f(x)	é igual a	x ao quadrado mais um
	|	|	|
Forma Lógica (entradas lógicas)	algo (x)	ser igual a	algo (y)
	|	|	|
Explicatura (entradas enciclopédicas)	O VALOR DA VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO F(X)	IGUALDADE	VALOR DA VARIÁVEL INDEPENDENTE X ELEVADO AO QUADRADO, MAIS UMA UNIDADE
	|	|	|
Forma Lógica (entradas lógicas)	algo (x)	ser igual a	algo (y)
	|	|	|
Forma Algébrica (entradas lexicais do registro algébrico)	$f(x)$	$=$	x^2+1

Fonte: Fonte: Rauen e Cardoso (2014).

Vale destacar que a conversão do registro em língua natural para o registro em linguagem matemática tem como consequência não somente a mudança de unidades significativas, mas também a possibilidade de efetuar tratamentos. Embora se possam efetuar operações usando a língua natural, é fácil perceber que a linguagem algébrica é muito mais eficiente para isso. Trata-se da função lógica e sintática essencial desse registro. Além disso, a mera possibilidade de tratamentos promove um deslocamento nas entradas enciclopédicas que dão acesso ao objeto matemático em si. Isso pode ser visto na figura 20 a seguir que emparelha em dois setores os registros em questão.

Figura 20 – Possibilidades de acesso ao conceito em RLN incluindo o RRA



Fonte: Elaboração própria com base em Rauen e Cardoso (2011).

Até o presente momento, os estudantes devem ter sido capazes de representar ‘a função f(x) definida nos naturais, tal que f(x) é igual a x ao quadrado mais um’ em linguagem algébrica, a saber: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f(x) = x^2 + 1$. Na próxima subseção, consideram-se aspectos da conversão desses registros em tabelas.

3.3.3 Registro de representação em linguagem tabular

Na conversão entre os registros em língua natural e algébrico, observa-se que as representações preservam a estrutura sintática ou sintagmática. Em língua natural, diz-se ‘função f(x) definida nos naturais’ e, em linguagem algébrica, diz-se: ‘ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; em língua natural, registra-se ‘f(x) é igual a x ao quadrado mais um’ e, em linguagem algébrica, registra-se: ‘ $f(x) = x^2 + 1$’. Para representar essa informação no registro tabular, é preciso apresentar na primeira coluna, à esquerda, apenas o valor da variável independente ‘x’ e, na segunda coluna, à direita, os valores calculados da variável dependente ‘ $f(x)$’ou ‘ y ’. Além disso, a restrição de as variáveis pertencerem ao universo dos números naturais não se explicita após a configuração dos dados da função na tabela. Essa restrição somente se apresenta quando da escolha dos valores da variável independente que vão ocupando sucessivamente cada linha da primeira coluna.

Figura 21 – Representação das unidades significativas do registro tabular

x	*f(x)*

Fonte: elaboração da autora.

A figura, na página seguinte, representa a conversão da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$em registro tabular (mantendo-se em mente que já houve uma conversão anterior da língua natural para a linguagem algébrica).

Figura 22 – Conversão da função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ em registro tabular

Forma Linguística (entradas lexicais)	f(x)	é igual a	x ao quadrado mais um
	|	|	|
Forma Algébrica (entradas lexicais do registro algébrico)	$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $f(x)$	$=$	$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $x^2 + 1$
	|	|	|
Forma Lógica (entradas lógicas)	algo (x)	ser igual a	algo (y)
	|	|	|
Explicatura (entradas enciclopédicas)	O VALOR DA VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO F(X) NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS	IGUALDADE	VALOR DA VARIÁVEL INDEPENDENTE X NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS ELEVADO AO QUADRADO, MAIS UMA UNIDADE NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS
	|	|	|
Forma Lógica (entradas lógicas)	algo (x)	ser igual a	algo (y)
	|	|	|
Forma Tabular (entradas lexicais do registro tabular)	... | *f(x)* ... | $f(x_1)$ ... | $f(x_2)$ ... | ... ... | $f(x_n)$	Linha divisória das colunas da tabela	x | *f(x)* x_1 | $(x_1)^2+1$ x_2 | $(x_2)^2+1$ ... | ... x_n | $(x_n)^2+1$

Fonte: Rauen e Cardoso (2014).

Se a conversão do registro em língua natural para a linguagem algébrica permitiu entrever o tratamento como uma possibilidade, dado que o registro algébrico se presta por excelência a cálculos; a conversão do registro algébrico para o registro gráfico implica inicialmente uma constrição pelo tratamento, uma vez que esse registro se presta a pôr em correspondência valores arbitrários da variável independente com valores calculados da variável dependente.

Na Figura 23, toma-se como exemplo o cálculo do valor da variável dependente em números naturais caso o valor da variável independente fosse arbitrado em $x = 1$. Na tabela 3, é possível ver também como seria a representação tabular, caso fossem arbitrados os valores de 0 a 4 para a variável independente *x*, a coluna central representando os respectivos tratamentos referentes aos cálculos para a obtenção dos valores da variável dependente *f(x)*.

Figura 23 – Esquematização dos processos de conversões entre os registros de representação, RRA, RLN e RRT em suas entradas lexical, enciclopédica e lógica.

<table>
<tr><td>Explicatura
(entradas enciclopédicas)</td><td>SE O VALOR DA VARIÁVEL INDEPENDENTE FUNÇÃO F(X) NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS É IGUAL A UMA UNIDADE</td><td>ENTÃO O VALOR DA VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO F(X) NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS É IGUAL AO VALOR DA VARIÁVEL INDEPENDENTE X NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS ELEVADO AO QUADRADO MAIS UMA UNIDADE NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS</td></tr>
<tr><td>Forma Lógica
(entradas lógicas)</td><td>Se algo é algo</td><td>Então algo é algo</td></tr>
<tr><td>Forma algébrica
(entradas lexicais do registro algébrico)</td><td>$f : x \to f(x)$
$x = 1$</td><td>$f : x \to x^2 + 1$
$f(x) = x^2 + 1$
$f(1) = 1^2 + 1$
$f(1) = 2$</td></tr>
<tr><td>Forma Tabular
(entradas lexicais)</td><td><table><tr><td>x</td><td>f(x)</td></tr><tr><td>x_1</td><td>$f(x_1)$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>x^2+1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table></td></tr>
</table>

Fonte: Rauen, Cardoso, 2014.

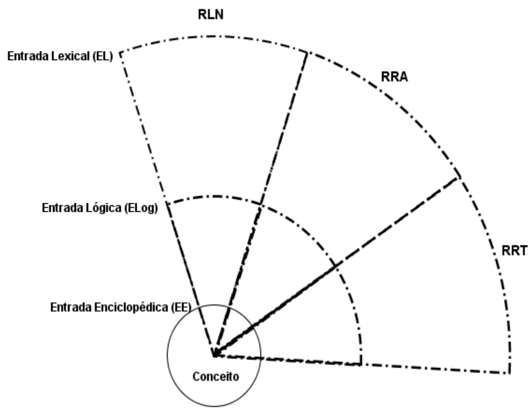
Tabela 3 – Representação tabular da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida $f(x) = x^2 + 1$

x	$f(x) = x^2 + 1$	$f(x)$
0	$(0)^2 + 1$	1
1	$(1)^2 + 1$	2
2	$(2)^2 + 1$	5
3	$(3)^2 + 1$	10
4	$(4)^2 + 1$	17

Fonte: Elaboração da autora.

Uma vez que a elaboração de uma tabela demanda pelos tratamentos algébricos e numéricos, há, por consequência, certa alteração na compreensão da noção de função, especialmente por que os valores da coluna da variável dependente são explicitamente colocados em relação com os valores da variável independente, ou melhor, aqueles valores dependem ou estão em função desses valores. Segue-se disso a inserção de mais um setor na representação em setores circulares das conversões de registros de representação.

Figura 24 – Conjunto de figuras que representam as possibilidades de acesso ao conceito em RLN, RRA incluindo RRT



Fonte: Rauen e Cardoso (2011).

3.3.4 Registro de representação gráfica

A conversão em registro gráfico, tal com o registro tabular, demanda por tratamentos. Uma representação gráfica de uma função registra pontos que coordenam variáveis independentes e dependentes em um plano cartesiano. Criado por René Descartes, um plano cartesiano apresenta dois eixos perpendiculares, tal que, convencionalmente, o eixo horizontal (eixo das abscissas) representa valores da variável independente; e o eixo vertical (eixo das ordenadas) representa os valores da variável dependente. Os valores de cada eixo são representados por divisões equidistantes das linhas, a partir da definição de uma escala, que não necessariamente precisa ter a mesma especificação para os valores representados no eixo das abscissas e no eixo das ordenadas.

No plano cartesiano em R^2, o valor '0' encontra-se no encontro dos eixos, conhecido como origem. Os valores positivos que representam o universo dos números naturais são representados no primeiro quadrante do plano. Cada ponto do plano cartesiano é formado por um par ordenado (x, y), tal que o valor de x representa a variável independente do exemplo em questão, e o valor de y representa a variável dependente $f(x)$.

Dado que a informação relevante do registro gráfico é a de par ordenado e não os valores isolados das variáveis independente e dependente, percebe-se que nenhum dos registros até o momento fornece explicitamente essa informação. A conversão dos três registros anteriores, até agora, redunda na definição de um conjunto n de valores nos dois eixos do plano cartesiano. Porém, o registro gráfico requer a coordenação das duas grandezas variáveis expressas em termos de dependência a partir da representação em pares ordenados.

Para tanto, torna-se necessário retomar o registro tabular e acrescentar nele a constituição dos pares ordenados a partir das entradas permitidas pela lei de formação da função.

3.3.5 Retomando o registro tabular

Como foi visto, a elaboração do gráfico demanda não somente por valores calculados da variável dependente no eixo das ordenadas em função de valores arbitrários da variável independente no eixo das abcissas, mas pelo fornecimento de pares ordenados. Em geral, na maioria dos exercícios de conversões do registro algébrico para o registro gráfico, o registro tabular é utilizado como passo intermediário. Dado que é possível elaborar uma tabela satisfatória para representar a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ sem representá-las como pares ordenados, percebe-se que uma demanda por pares ordenados é uma demanda por uma informação que extrapola o que se registra algebricamente – um típico caso de não congruência. Um docente atento a esse detalhe tem a oportunidade de não apenas explorar essas sutilezas, mas de ampliar o conceito em si mesmo de função, confrontando-o com suas diferentes formas de representação.

Estabelecida a meta de a tabela fornecer dados para a composição de pares ordenados, a tabela tem de conter agora três colunas: a primeira coluna, reservada aos valores da variável independente ‘x’; a segunda coluna, reservada a resposta dos cálculos para a ‘ $f(x)$ ’ou ‘ y ’; e a terceira coluna, reservada à composição de pares ordenados (*x*, *f(x)*), tal que *x* representará os valores da variável independente no eixo das abscissas e *f(x)* representará os valores da variável dependente no eixo das ordenadas no gráfico cartesiano.

Figura 25 – Representação das unidades significativas do registro tabular.

x	*f(x)*	*(x, f(x))*

Fonte: elaboração da autora.

Em outras palavras, o registro tabular revisado agora exige uma representação bidimensional, de tal forma que para cada entrada para a variável independente ‘ x ’ há uma entrada para a variável dependente ‘ $f(x)$ ’ ou ‘ y ’, e uma relação entre estas duas entradas pela lei de formação de ‘ $f(x)$ ’ que possibilita, no caso, uma saída bidimensional na forma de par ordenado ‘ $(x, f(x))$ ’ ou ‘ (x, y) ’.

A figura a seguir representa a conversão da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ nesse novo registro tabular.

Figura 26 – Conversão da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ em registro tabular

Forma Linguística (entradas lexicais)	f(x)	é igual a	x ao quadrado mais um
Forma Algébrica (entradas lexicais do registro algébrico)	$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(x)$	$=$	$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $x^2 + 1$
Forma Lógica (entradas lógicas)	algo (x)	ser igual a	algo (y)
Explicatura (entradas enciclopédicas)	O VALOR DA VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO F(X) NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS	IGUALDADE	VALOR DA VARIÁVEL INDEPENDENTE X NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS ELEVADO AO QUADRADO, MAIS UMA UNIDADE NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS
Forma Lógica (entradas lógicas)	algo (x)	ser igual a	algo (y)
Forma Tabular (entradas lexicais do registro tabulat)	x | $f(x)$ | $(..., f(x))$ x_1 | $f(x_1)$ | $(...,f(x_1))$ x_2 | $f(x_2)$ | $(...,f(x_2))$ ... | ... | ... x_n | $f(x_n)$ | $(...,f(x_n))$	‘primeira linha divisória das colunas da tabela’ e ‘vírgula nos pares ordenados’	x | $f(x)$ | (x, $f(x)$) x_1 | $(x_1)^2+1$ | $(x_1,(x_1)^2+1)$ x_2 | $(x_2)^2+1$ | $(x_2,(x_2)^2+1)$ ... | ... | ... x_n | $(x_n)^2+1$ | $(x_n,(x_n)^2+1)$

Fonte: Rauen e Cardoso (2014).

Em geral, utiliza-se em sala de aula uma forma mais simplificada de construção do registro tabular, em que todas as etapas de construção e de inferências ficam implícitas. Inclui-se neste caso, a necessidade de tratamentos dentro do registro algébrico a partir da substituição dos valores da variável independente ‘*x*’ na lei de formação da função ‘*f(x)*’ para obtenção do valor variável dependente e consequentemente esta substituição possibilita a obtenção de um par ordenado de forma que relaciona a conversão do registro tabular para o registro algébrico.

Neste caso, é necessária inclusão de uma quarta coluna na representação tabular, que contém os respectivos pares ordenados constituídos a partir do campo de definição da função. Veja-se:

Tabela 4 – Representação tabular da função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ ilustrando os pares ordenados (x, y).

x	$f(x) = x^2+1$	$f(x)$	(x,y)
0	$(0)^2 + 1$	1	(0,1)
1	$(1)^2 + 1$	2	(1,2)
2	$(2)^2 + 1$	5	(2,5)
3	$(3)^2 + 1$	10	(3,10)
4	$(4)^2 + 1$	17	(4,17)

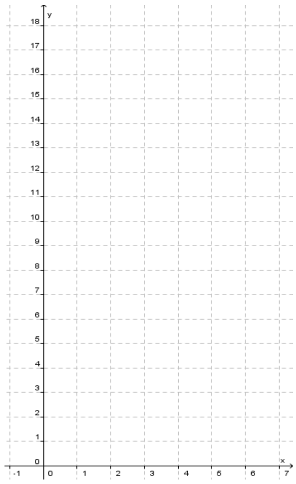
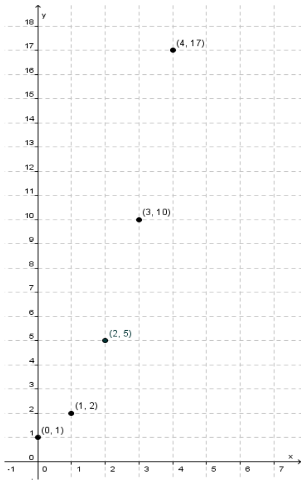
Fonte: Elaboração da autora.

Como se pode ver, a conversão congruente dos dados do registro tabular, decorrentes dos tratamentos algébricos definidos pelo problema em língua natural, para o registro gráfico implica identificar os valores 0, 1, 2, 3 e 4 no eixo das abscissas, e 1, 2, 5, 10 e 17 no eixo das ordenadas. A tabela, inicialmente, não apresenta nenhuma menção sobre o par ordenado, porque essa é uma unidade significativa própria do registro gráfico, e a tarefa, até então, era apenas a de converter os registros de modo o mais congruente possível. Isso põe em evidência o papel fundamental da meta ou objetivo da tarefa em jogo (um aspecto a ser desenvolvido pela noção de conciliação de metas, no capítulo seguinte).

3.3.6 Retomando o registro gráfico

Construída a tabela com a meta de fornecer pares ordenados para o registro gráfico, é fácil perceber que o que se converte não são apenas os resultados da variável dependente em função dos valores arbitrados da variável independente, mas as coordenadas específicas do plano cartesiano que representa o par ordenado desses valores. Em outras palavras, no par ordenado (2,5), o valor da variável independente *x* é registrado graficamente na segunda unidade de medida da linha das abcissas, o valor da variável independente *f(x)* é registrado graficamente na quinta unidade de medida da linha das ordenadas. Entretanto, o que interessa para esse registro é o ponto de intersecção das linhas vertical e horizontal que tem origem nesses valores. O objetivo do registro gráfico é demonstrar a relação entre estas duas grandezas. Este processo complexo de conversão é ilustrado de forma detalhada na Figura 27 conforme segue.

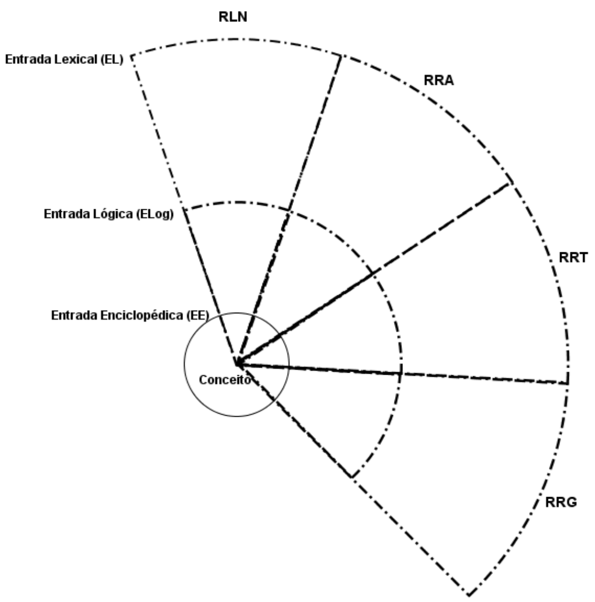
Figura 27 – Esquematização dos processos de conversões entre os registros de representação, RRA, RLN, RRT e RRG em suas entradas lexical, enciclopédica e lógica.

<table>
<tr><td>Forma Linguística
(entradas lexicais)</td><td>f(x)</td><td>é igual a</td><td>x ao quadrado mais um</td></tr>
<tr><td></td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Forma Algébrica
(entradas lexicais do registro algébrico)</td><td>$f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$
$f(x)$</td><td>$=$</td><td>$f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$
x^2+1</td></tr>
<tr><td></td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Forma Tabular
(entradas lexicais do registro tabular)</td><td><table><tr><td>...</td><td>f(x)</td><td>(..., f(x))</td></tr><tr><td>...</td><td>$f(x_1)$</td><td>$(...,f(x_1))$</td></tr><tr><td>...</td><td>$f(x_2)$</td><td>$(...,f(x_2))$</td></tr><tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr><tr><td>...</td><td>$f(x_n)$</td><td>$(...,f(x_n))$</td></tr></table></td><td>‘primeira linha divisória das colunas da tabela’ e ‘vírgula nos pares ordenados’</td><td><table><tr><td>x</td><td>f(x)</td><td>(x, f(x))</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>(0,1)</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>(1,2)</td></tr><tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr><tr><td>x_n</td><td>$(x_n)^2+1$</td><td>$(x_n,(x_n)^2+1)$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td></td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Forma Lógica
(entradas lógicas)</td><td>algo (x)</td><td>ser igual a</td><td>algo (y)</td></tr>
<tr><td></td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Explicatura
(entradas enciclopédicas)</td><td>O VALOR DA VARIÁVEL DEPENDENTE FUNÇÃO F(X) NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS</td><td>IGUALDADE</td><td>VALOR DA VARIÁVEL INDEPENDENTE X NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS ELEVADO AO QUADRADO, MAIS UMA UNIDADE NO UNIVERSO DOS NÚMEROS NATURAIS</td></tr>
<tr><td></td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Forma gráfica
(entradas lexicais do registro gráfico)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Rauen e Cardoso (2014).

Essas complexidades e sutilezas justificam considerar que o acesso ao registro gráfico implica nova compreensão do conceito de função, porque agora se percebem nuances novas que decorrem da noção de coordenadas por pares ordenados que não são antecipáveis nos três registros anteriores. Observe-se que ao lidar com o registro gráfico reformula a compreensão das tabelas, dos tratamentos algébricos e da própria formulação do exercício em língua natural. Posto isso, mais um setor pode ser agregado à representação das conversões.

Figura 28 – Conjunto de figuras que representam os acessos ao conceito a partir do registro da RLN, RRA, RRT e incluindo o RRG



Fonte: Rauen e Cardoso (2011).

3.3.7 A complexidade das conversões entre registros de representação semiótica

Este capítulo visou a demonstrar a complexidade envolvida nos processos de conversão de diferentes registros de representação. Defendeu-se o argumento de que o procedimento de compreensão guiado pela noção de relevância, elaborado para lidar com a língua natural, poderia ser extrapolado para descrever e explicar o processamento de diferentes registros de representação semiótica em matemática. Isso ocorre porque, de modo online, as unidades significativas de cada registro são encaixadas em formas lógicas não proposicionais que são enriquecidas até que se obtenha a explicatura dessas formulações.

Utilizando-se da função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$, foi possível demonstrar como se dá o processamento pragmático em língua natural. O enunciado da função foi encaixado numa forma lógica não proposicional que pôs em relação de equivalência o valor da variável dependente em função do valor da variável independente arbitrável. Essa forma lógica não é proposicional a não ser que se faça algum tratamento e, sabidamente, o registro algébrico é mais eficiente para isso.

Dadas as semelhanças sintáticas entre esses registros, pôde-se converter congruentemente o valor da variável dependente por $f(x)$, a igualdade por $=$ e a definição da função por x^2+1. Em ambos os registros, foi possível perceber que a restrição dos valores da função aos números naturais precisou ser formulada fora da expressão da função $f(x)=x^2+1$ em si. Em ambos os casos, a informação é sintaticamente fornecida à esquerda, compondo o contexto cognitivo de suposições prévias sobre o qual o processamento da função se estabelece.

Converter a formulação em língua natural para a linguagem algébrica possibilita, mas não garante a necessidade de se fazerem os tratamentos necessários para que se possa estabelecer valor de verdade para a função, tornando sua forma lógica proposicional. É na conversão da linguagem algébrica em tabular que essa necessidade se impõe. Embora se possa elaborar uma tabela de modo não proposicional, isto é, elaborando duas colunas destinadas, respectivamente às variáveis independente e dependente e com pelo menos uma linha em branco para ser preenchida, isso não faz sentido. Uma tabela de uma função só faz sentido na medida em que alguns valores calculados da variável dependente sejam postos em relação com alguns valores arbitrados da variável independente, originando um par ordenado. Desse modo, cada linha de uma tabela corresponde a uma proposição que é verdadeira na medida em que expressa a lei de formação especificada na função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida por $f(x)=x^2+1$. Trata-se de uma representação de segunda ordem.

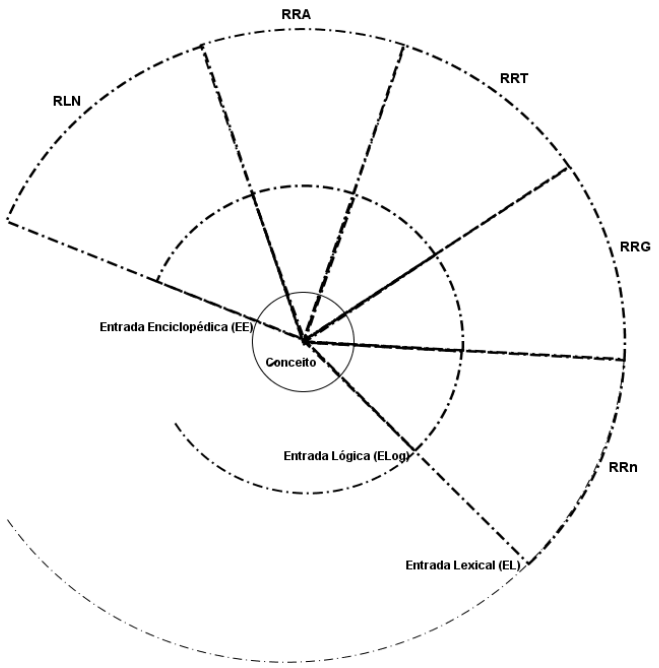
Essa mesma contingência ocorre na conversão dos dados da tabela para o gráfico cartesiano. Contudo, representar os valores da variável independente no eixo das abcissas e os valores da variável dependente no eixo da ordenadas não é o que se pede no registro gráfico, mas o ponto que representa no gráfico os pares ordenados desses valores. Isso impõe rever a meta em jogo na elaboração da tabela. Se a meta passa a ser a de fornecer os pares ordenados para a elaboração de uma representação gráfica, então se faz necessário compor uma terceira coluna contendo os pares ordenados necessários. Isso tem pelo menos duas consequências.

A primeira é que a noção de relevância não explica isoladamente o modo como determinadas conversões devem ser feitas, tal como vimos nas duas opções exequíveis para responder a tarefa que ilustra esta tese. Para isso ser feito, a meta, propósito ou objetivo em questão impõe restrições sobre as tarefas, um assunto que será mais bem explorado no capítulo seguinte.

A segunda é a de que um gráfico é uma representação de terceira ordem da função, uma vez que cada ponto do gráfico representa uma forma lógica proposicional resultante de um tratamento algébrico, que, por sua vez, representa uma lei de formação especificada na fórmula $f(x)=x^2+1$. Assim, a forma lógica proposicional identificada pelo par ordenado (2,5) é verdadeira, na medida em que ela resulta de uma forma lógica proposicional algébrica $f(2) = 2^2 + 1$, e essa forma lógica proposicional algébrica é verdadeira, na medida em que ela exemplifica corretamente a forma lógica não proposicional expressa pela lei de formação $f(x) = x^2 + 1$.

Em síntese, a ilustração demonstra como a conversão de diferentes registros de representação, apesar dos custos de processamento que exige, permite uma apreciação cada vez mais robusta do conceito matemático de função. Dado que os diferentes registros de representação recortam o objeto matemático de diferentes formas, é possível ter acesso a cada vez mais complexas nuances desse objeto. Por hipótese, na proporção em que novos registros de representação são propostos, não apenas novos recortes dos objetos são possíveis, mas novas relações entre os diferentes registros podem ser estabelecidas.

Figura 29 – Conjunto de figuras que representam os acessos ao conceito a partir do registro da língua natural, RRA, RRG, RRT, RRF incluindo RR_n:



Fonte: Rauen e Cardoso (2011)

Se o acesso a diferentes registros de representação, de um lado, amplia as possibilidade de compreensão dos objetos matemáticos, de outro, exige de docentes competências e habilidades comunicativas cada vez mais complexas. O docente de matemática não apenas tem de compreender como esses processos funcionam, mas tem de reconhecer o papel primordial da língua natural como integradora dos demais registros em sala de aula. O docente deve estar consciente que o ‘transitar’ entre registros não acontece demonstrativa ou espontaneamente como se pode ingenuamente pensar num primeiro momento. O que se discute gira em torno de custos e benefícios cognitivos do processamento destes registros num ‘vir a ser’ construído no ambiente cognitivo do aluno.

Duval (2009, p. 105-106) considera que a língua natural constitui um registro à parte, em função não somente “de sua maior complexidade e do número consideravelmente elevado de variações que ela fornece”, mas sobretudo em razão do que ele chamou de “sua prioridade genética sobre os outros registros e de seu papel único em relação à função meta-discursiva de comunicação”. Desse modo, o docente de matemática tem de estar atento ao fato de que a língua natural atua como o elemento mediador na constituição do processo comunicativo em sala de aula e instrumento por meio do qual o docente pode transitar pelos diferentes registros de representação.

Conhecidos os aportes da teoria da relevância aos processos de identificação de unidades significativas, tratamentos e, principalmente, conversões de diferentes registros de representação, o próximo passo desta tese é investigar o papel da noção de meta na escolha de diferentes caminhos para a resolução ou modelação de um problema. Para isso, apresenta-se no próximo capítulo a teoria da conciliação de metas proposta por Rauen (2014).

4 CONCILIAÇÃO DE METAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> Uma afirmativa óbvia sobre o pensamento humano é a que as pessoas variam dramaticamente no que pode ser chamado seu "estilo cognitivo", isto é, sua principal maneira de pensar. (DAVIS; HERSH, 1989, p. 344).

Este capítulo visa a incorporar a teoria de conciliação de metas de Rauen (2014) à discussão desenvolvida nesta tese, partindo da hipótese de que a noção de meta superordena a atribuição de relevância que, por sua vez, superordena a apreensão de unidades significativas, tratamentos e conversões de registros de representação. O capítulo está organizado em duas seções. Na primeira seção, apresenta-se a teoria de conciliação de metas, cujo modelo está organizado em quatro estágios – formulação de uma meta *Q*, e formulação, execução e checagem de uma hipótese abdutiva antefactual *PQ*. Segue-se dessa abordagem teórica a possibilidade de descrever e explicar as atividades em sala de aula como autoconciliações de metas individuais e heteroconciliação de metas entre indivíduos. Na segunda seção, ilustram-se todos os conceitos desenvolvidos nesta tese na interpretação da função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida por $f(x)=x^2+1$, desenvolvida por estudantes da sétima fase de um curso de Licenciatura em Matemática. Segue-se dessa ilustração, na subseção de discussão dos resultados, a descrição e a explicação dos processos cognitivos desenvolvidos por esses estudantes.

4.1 TEORIA DE CONCILIAÇÃO DE METAS

A teoria de conciliação de metas foi desenvolvida em dois artigos seminais. Rauen apresentou sua primeira versão da teoria no simpósio *Relevância, metas e processos ostensivo-inferenciais* da *VI Conferência Linguística e Cognição*, realizada em setembro de 2013 na Universidade de Santa Cruz do Sul, RS. O simpósio redundou na publicação do artigo *Hipóteses abdutivas antefactuais e a modelação proativa de metas* no fascículo dedicado aos estudos de *Cognição e Linguagem* da *Revista Signo* daquele mesmo ano. Neste artigo, Rauen (2013) desenvolve os conceitos centrais de conciliação de metas e de gradação de força de hipóteses abdutivas antefactuais em situações do que ele passou a denominar de autoconciliação individual de metas.

Em 2014, o autor desenvolveu um segundo artigo, incorporando a noção de heteroconciliação de metas. O estudo, intitulado *For a goal conciliation theory: ante-factual abductive hypotheses and proactive modeling*, compõe o fascículo especial sobre teoria da relevância da revista *Linguagem em (Dis)curso* publicado em 2014. Nesta tese, apropria-se da versão off-line em português deste artigo.[8]

No artigo de 2014, Rauen apresenta-se "uma arquitetura descritiva e explanatória para a formulação e a avaliação de hipóteses abdutivas em contextos proativos" partindo dos fundamentos da teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986/1995). O texto expõe o modelo conceitual em quatro estágios. O primeiro estágio dá conta da projeção de uma meta, e os três seguintes dão conta da formulação, da execução e da checagem de uma hipótese abdutiva antefactual. Para ilustrar a teoria, Rauen desenvolve um exemplo no qual um indivíduo pretende abrir uma porta chaveada, para então avaliar processos de auto e heteroconciliação de metas dentro de contextos formados por cinco categorias de hipóteses abdutivas antefactuais: categóricas, bicondicionais, condicionais, habilitadoras e tautológicas.

4.1.1 Fundamentos

Rauen fundamenta a teoria de conciliação de metas nos princípios cognitivo e comunicativo de relevância tais como expostos no capítulo anterior desta tese. Contudo, adere à tese de Lindsay e Gorayska de que o conceito de relevância é um predicado dependente de meta. Os autores defendem que os indivíduos atribuem relevância a *inputs* conectadas com uma finalidade e formulam uma definição formal de relevância dependente de meta, tal como se apresenta a seguir:

> *Definição formal de relevância dependente de meta*
> "P é relevante para G se e somente se G é uma meta e P é um elemento essencial de algum plano que é suficiente para alcançar G". (2004, p. 69).

Por metas, Lindsay e Gorayska definem certas representações simbólicas e abstratas de estados do mundo que podem ser objetos de planejamento. Metas assim definidas podem ser classificadas como cognitivas ou finais, e a maioria delas integra cadeias complexas de metas. Segundo eles, "uma meta cognitiva decorre de, justifica-se por ou contribui para a elaboração ou a execução de metas finais, de maneira que sua especificação associa-se a condições de satisfação que o agente acredita estarem alcançadas quando ele se encontra no estado de meta final" (RAUEN, 2014, p. 2).

---

[8] Dada a complexidade do artigo, o ineditismo das proposições e a constrição de espaço do periódico para desenvolver o tema, segue-se a dificuldade de resenhar o texto, motivo pelo qual será necessário citar muitas das passagens nele contidas.

A correlação entre relevância e metas também pode ser vista em Silveira e Feltes (1999, p. 37), quando elas afirmam que as pessoas prestam atenção a estímulos que, em alguma medida, vêm ao encontro de seus interesses ou se ajustam às circunstâncias do momento. É justamente nesse ponto que Rauen (2013, 2014) reflete sobre a distinção entre reatividade e proatividade que fundamenta sua crítica posterior à teoria da relevância. Para ele, os indivíduos, de fato, podem estar reagindo a estímulos, muitos dos quais nada contribuíram. Contudo, em muitas das circunstâncias, eles podem estar agindo a partir de interesses pré-determinados. Nesses casos, tais *inputs* são avaliados e ajustados a esses interesses. Com base nesta constatação, o autor vai além, sugerindo que os indivíduos podem ser propositivos ou proativos e intervir deliberadamente nesses contextos esperando que essas intervenções contribuam para atingir esses interesses.

É justamente aqui que emerge a crítica à teoria da relevância. Segundo Rauen, o procedimento de compreensão guiado pela noção de relevância, embora eficaz para descrever e explicar a interpretação de *inputs* verbais, consiste numa arquitetura antes reativa de proativa, dado ele é mobilizado pela emergência de um enunciado. Em seus termos, “a meta do emissor é presumida e, em geral, inferida na interpretação, e a meta do receptor restringe-se a mero aperfeiçoamento cognitivo. Além disso, a emergência criativa de hipóteses para a necessária ampliação de contexto é pouco desenvolvida” (RAUEN, 2014, p. 2).

Com base nessa argumentação, o autor defende a hipótese de que a ampliação do contexto cognitivo é abdutiva, e a cognição é movida antes por uma conclusão presumida do que pela emergência de premissas, de maneira que a modelagem dedutiva é apenas parte do processo de avaliação ou de checagem dessas hipóteses abdutivas.

Rauen elabora, então, uma modelação proativa de metas. Sua tese central é a de que os indivíduos produzem, inclusive em casos de interpretação de enunciados, uma *inferência à melhor solução*. Nesse processo, eles escolhem a premissa que melhor concorre para a consecução da meta. Para o autor, “a *presunção de relevância ótima* e o próprio *princípio comunicativo de relevância* nada mais são do que inferências à melhor explicação para a emergência ostensiva de um enunciado” (2014, p. 3).

Rauen define *abdução* como “um processo de raciocínio que parte de uma observação do tipo *x é Q*”, seguida da inferência de “uma hipótese de conexão nomológica entre *P* e *Q*” e da conclusão de uma hipótese particular do tipo “*x* é *P*”. Com base nesse tipo de raciocínio, em geral utilizado para produzir explicações pós-factuais, o autor (2014, p. 3) formula uma explicação aplicável a instâncias pré-factuais, tal como segue:

> Tome-se o caso de uma meta Q qualquer e um indivíduo i que projeta estar nesse estado de meta Q no futuro. Nesse caso, x é Q equivale a um estado x qualquer que satisfará a expectativa de se atingir a meta Q. Ato contínuo, o indivíduo i formula uma hipótese abdutiva de que há uma conexão nomológica entre P e Q e considera uma ação antecedente P como pelo menos suficiente para atingir Q. Segue-se que x é P, e o indivíduo i executa a ação P na expectativa de atingir Q[9].

Seguindo Psillos (2002, p. 7), o autor ressalva que aceitar hipóteses abdutivas antefactuais implica superar três problemas encontrados em hipóteses pós-factuais: o problema de haver múltiplas explicações rivais, o problema da probabilidade de a hipótese abdutiva estar errada, e o problema da natureza da explicação.

No que se refere ao primeiro problema, Rauen admite que uma meta também pode ser atingida por muitas soluções rivais do mesmo modo como se pode explicar um evento por muitas hipóteses rivais. Em ambos os casos, o raciocínio abdutivo não possui ferramentas para restringi-las. Psillos (2002, p. 7-8) pondera, contudo que o sucesso das explicações abdutivas espontaneamente feitas por seres humanos sugere haver "mecanismos para classificar hipóteses por suas virtudes explicativas". Rauen (2014, p. 4) complementa:

> Para ele [Psillos], hipóteses explicativas são melhores quando explicam os fatos, são licenciadas por crenças de fundo, são simples, têm poder unificador, são mais testáveis e, principalmente, implicam novas predições. Esses requisitos, que poderiam ser subsumidos por palavras como experiência, bom senso, expertise, etc., apesar de não algorítmicos, permitiriam a classificação de hipóteses ou a emergência de uma única hipótese tomada como a mais plausível. É o que ocorre, por exemplo, na diagnose de problemas mecânicos ou de doenças por profissionais experientes.

Segue-se disso a extensão da noção de *inferência à melhor explicação* a situações pré-factuais, argumentando haver *inferências à melhor solução*, vinculadas ao que ele denominou de *princípio de plausibilidade*. Veja-se:

> Assim, se uma hipótese abdutiva explicativa H_e é aceita quando explica as evidências e nenhuma outra hipótese rival o faz tão bem como H_e faz; então, uma hipótese abdutiva antefactual H_a é assumida quando sugere atingir uma meta com mais eficiência e nenhuma outra hipótese rival faz isso tão bem como H_a faz. (RAUEN, 2014, p. 4).

---

9 Rauen admite que esse tipo de procedimento é ampliativo, porque ele não garante a verdade da conclusão mesmo a partir de premissas verdadeiras. Para ele, tanto "abduzir causa a um fenômeno observado pode ser uma explicação falsa" quanto "projetar uma hipótese abdutiva antefactual pode redundar em flagrante fracasso".

Além disso, Rauen retoma a noção de relevância para operacionalizar o que denominou de *princípio de relevância*. Segundo ele (2014, p. 4), "a primeira hipótese H_e ou H_a consistente com princípio de relevância, no sentido em que a hipótese H_e ou H_a é aquela que emerge com menor custo para o efeito fixo de explicar um fato ou atingir uma meta, será aquela assumida como verdadeira".

Essa expectativa de verdade, contudo, choca-se com o segundo problema levantado por Psillos em relação aos raciocínios abdutivos. Se a abdução é cancelável e bem podem ser falsas as hipóteses H_e ou H_a, resta justificar quais são as motivações de sua adoção. Segundo Psillos (2002, p. 9 apud RAUEN, 2014, p. 4), "embora a hipótese possa ser razoavelmente aceita como hipótese mais plausível com base em considerações explicativas (abdução), o grau de confiança nessa hipótese está ligado a seu grau de confirmação posterior." Desse modo, inferências abdutivas configuram-se com etapas primeiras com as quais um indivíduo, confrontado com eventos novos, "acrescenta suposições plausíveis ao seu *corpus de crença* (o *conhecimento enciclopédico* da teoria da relevância)". A chave para a noção de conciliação de metas é o fato de que a satisfação posterior dessas expectativas confirma a hipótese abduzida e, quanto mais confirma, mais factual a hipótese se torna.

Por fim, no que se refere ao problema da explicação, Rauen acompanha a observação de Peirce (1975) de que hipóteses abduzidas tornam naturais fatos surpreendentes. O autor sustenta que explicações visam a melhorar a compreensão dos eventos, ou seja, quando o indivíduo consegue mostrar como um evento pode "caber no nexo causal/nomológico das coisas que ele aceita". Rauen (2014, p. 4) assim se expressa sobre o pensamento de Psillos.

> Para ele [Peirce], os indivíduos removem a surpresa quando a aceitação de certas hipóteses explicativas e a sua incorporação a seu *corpus* de crença ajuda a incluir o *evento explanandum e* neste *corpus* de crença. Assim, se a *memória enciclopédica M* é este *corpus de crença*, se *e* é o *evento explanandum* e se *H* é uma *hipótese potencial*, então *H* deve ser aceita como uma explicação potencial de *e*, se *M* sozinho não explica *e*, mas $M \cup H$ o faz (PSILLOS, 2002, p. 10). Isso em tudo converge com a inserção da informação nova ou novamente apresentada no contexto de informações enciclopédicas consideradas pela teoria da relevância.

Vale mencionar, além disso, que a proposta de Rauen alinha-se com o modelo de ação intencional de Tomasello e colaboradores (2005, p. 676-678). Nesse modelo, *meta, ação* e *monitoramento perceptual* compõem um sistema adaptativo circular de autorregulação do organismo com o ambiente. Segundo os autores, o exemplo prototípico de um sistema adaptativo circular de autorregulação é um *termostato*, porque esse sistema monitora a temperatura do ambiente em função de uma temperatura padrão. É justamente essa temperatura que funciona como meta do sistema. Assim, se o agente externo estipula como meta 20ºC, então, os processos de autorregulação do termostato convergem no sentido de prover a solução mais plausível para a obtenção dessa temperatura.

Rauen também empresta dos autores as noções de metas internas e externas. Uma *meta interna*, segundo Tomasello e colaboradores, consiste na representação de estados desejados; uma *meta externa* consiste em certos estados do ambiente que representam a consecução da meta interna.

Além disso, toma de Bratman (1989) a noção de *intenção* como “um plano de ação que o organismo escolhe e se compromete na busca de uma meta.” Conforme interpreta Rauen, o conceito de intenção “inclui tanto a meta como o plano para atingi-la, o que permite atribuir diferentes intenções a uma mesma ação”. Logo, segue-se de uma meta *Q* uma intenção de agir de certo modo para atingi-la.

Por fim, assume de Tomasello e colaboradores a noção de monitoria perceptual da realidade atual, da execução e do resultado, para então retrabalhá-las no que ele vai denominar de *conciliação de metas*. Para esses autores, há três consecuções típicas de uma ação. Quando o estado da realidade não se altera em função da ação do indivíduo, então ocorre um fracasso e, provavelmente, a decepção como resultado emocional dessa consecução. Quando o estado da realidade coincide com a meta, ou seja, quando a meta externa coincide com a meta interna, ocorre um sucesso e, provavelmente, a alegria decorrente dessa consecução. Por fim, quando há um resultado indesejado, os autores afirmam ter havido um acidente e, provavelmente, a consequente surpresa. Os autores sugerem que fracassos e acidentes são tipicamente seguidos por esforços persistentes e muitas vezes variáveis em direção à meta.[10]

Rauen, então, destaca a confluência dessa argumentação com a noção de relevância, tal como desenvolvida por Sperber e Wilson (1986, 1995), na medida em que Tomasello e colaboradores argumentam que o organismo não percebe tudo nesses processos de monitoria, mas atende apenas a aspectos da situação que são relevantes, o que eles denominam de *percepção intencional* ou *atenção seletiva*.

[10] Um estudo consistente sobre consequências lógicas da persistência na consecução de uma meta na arquitetura da teoria da relevância pode ser visto na dissertação de Luciano (2014).

Os autores completam: “Este processo de monitoramento completa, assim, a característica de arranjo circular da ação intencional: o organismo age de modo tornar a realidade (como se percebe) consonante com suas metas”.

4.1.2 Modelando ações proativamente

Uma vez traçados os fundamentos da teoria de conciliação de metas, Rauen (2014, p. 5-11) propõe um esboço de uma teoria de descrição e de explicação da formulação e da avaliação de hipóteses abdutivas antefactuais para a modelação proativa de metas. Para dar conta desse objetivo, ele ilustra o caso de Pedro, que pretende abrir a porta chaveada de sua própria casa. Nesta subseção, a exposição do modelo será parafraseada, retomando-se o caso de Pedro que está diante da demanda de resolver a equação $x+\frac{1}{3}=2$ apresentada no seguinte estágio de tratamento: $x=2-\frac{1}{3}$.

A teoria de conciliação de metas está organizada em quatro estágios. O primeiro desses estágios consiste na *projeção da meta* (interna), assim definida:

> [1] O indivíduo *i* projeta uma meta *Q* em t_1,
>
> tal que:
>
> a) t_1 representa o tempo da projeção da meta *Q*; e
> b) a meta *Q* é um estado futuro ainda não existente em t_1.
> (RAUEN, 2014, p. 5-6).

No caso da resolução da equação, a formulação da meta consiste em algum grau de emergência cognitiva da intenção de resolvê-la. Veja a formulação, denominando-se o indivíduo que se propõe a resolvê-la de Pedro:

> [1] Pedro *i* projeta a meta *Q* de Pedro *i* resolver a equação $x=2-\frac{1}{3}$ em t_1.

A formulação assume que o processo se inicia em t_1, que representa o instante da projeção da meta *Q* de resolver a equação $x=2-\frac{1}{3}$, e a meta *Q* de resolvê-la é uma possibilidade futura, ou seja, ela não existe no tempo t_1, o tempo da projeção da meta *Q*. Em outras palavras, a equação ainda não foi resolvida.

O *output* da consecução desse estágio pode ser representado esquematicamente do seguinte modo:

[1] Q resolver equação, Pedro

O segundo dos quatro estágios propostos por Rauen consiste na *formulação de pelo menos uma hipótese abdutiva antefactual* para atingir a meta Q. Trata-se do que Tomasello e colaboradores chamam de plano de ação intencional.

Segue a formulação desenvolvida por Rauen:

> [2] O indivíduo i abduz uma hipótese antefactual H_a para atingir a meta Q em t_2,
>
> tal que:
>
> a) t_2 representa o tempo da formulação da hipótese abdutiva antefactual H_a;
> b) t_2 sucede t_1;
> c) a hipótese abdutiva antefactual H_a corresponde a uma formulação do tipo “Se P, então Q”, de modo que P é uma ação antecedente e Q é um estado consequente;
> d) no escopo da hipótese abdutiva antefactual H_a, a meta Q é admitida pelo indivíduo i como um estado consequente;
> e) no escopo da hipótese abdutiva antefactual H_a, uma ação antecedente P é admitida pelo indivíduo i como minimamente suficiente para atingir o estado consequente Q;
> f) a hipótese abdutiva antefactual H_a é a primeira formulação consistente com o princípio de relevância, pois é aquela de menor custo de processamento diante do efeito fixo futuro projetado pelo estado consequente Q;
> g) simultaneamente, a hipótese H_a é tomada pelo indivíduo i como a inferência à melhor solução plausível para atingir o estado consequente Q.
> (RAUEN, 2014, p. 6).

Com base nessas instruções pode-se antecipar que:

> [2a] Pedro i abduz a melhor hipótese antefactual H_a para atingir a meta Q de resolver a equação $x = 2 - \frac{1}{3}$ no tempo t_2.

Esta descrição está incompleta porque não determina a ação antecedente P admitida por Pedro como minimamente suficiente para atingir o estado consequente Q de resolver a equação. Para dar conta dessa incompletude, considere-se a hipótese de que a memória enciclopédica de Pedro contém somente o seguinte conjunto restrito de suposições factuais $S_{1\text{-}7}$:

> S_1 – Calcular o mínimo múltiplo comum resolve a equação;
> S_2 – Representar os termos da equação em frações equivalentes resolve a equação;
> S_3 – Representar 1/3 em números decimais resolve a equação;

> S_4 – Permutar os lados da igualdade resolve a equação;
> S_5 – A equação foi digitada no editor de equações;
> S_6 – A equação é uma equação;
> S_7 – A equação não é uma equação.

Rauen, então, sugere que a opção pela melhor hipótese H_a nesse conjunto de suposições factuais $S_{1\text{-}7}$ decorre de quatro critérios que, sucessivamente, vão descartando as hipóteses menos exequíveis.

Segundo o autor, o primeiro critério (exposto na letra c) considera que a hipótese H_a pode ser mapeada por uma formulação hipotética "Se *P*, então *Q*". Essa formulação define que se uma ação antecedente *P* for executada, então um estado consequente *Q* pode ser atingido. Enquanto as suposições factuais $S_{1\text{-}3}$ respeitam esse critério, as suposições factuais $S_{4\text{-}7}$ não permitem ser mapeáveis desse modo, além de serem irrelevantes no sentido defendido por Sperber e Wilson (1986/1995).

A suposição S_7 de que "A equação não é uma equação" contradiz o *input* perceptivo de que há uma equação (a unidade significativa do registro algébrico '=' que representa a igualdade) e, no confronto entre uma suposição proveniente da memória e um estímulo perceptivo, a suposição obtida pela percepção será mantida (salvo patologias). A suposição S_6 de que "A equação é uma equação" é uma tautologia com o estímulo perceptivo, não havendo qualquer ganho cognitivo em processá-la. A suposição S_5 de que "A equação foi digitada no editor de equações" é uma informação que está desconectada com a meta de resolver a equação, pois é difícil de ver qual a contribuição de ela ter sido digitada no editor de equações ou ter sido feito à mão nesse processo.

O segundo critério proposto por Rauen (expresso na letra e) considera que a hipótese H_a associa à formulação "Se *P*, então *Q*" uma ação antecedente *P* minimamente suficiente para abrir a porta. As suposições factuais $S_{1\text{-}3}$ são ações executáveis. Contudo, a suposição S_4 de que "Permutar os lados da igualdade resolve a equação", além de insuficiente, é inútil para resolver a equação.

Rauen sugere que o terceiro e quarto critérios (expressos nas letras f e g) operam em conjunto. Isso sugere que o indivíduo formulará a hipótese abdutiva H_a que melhor concorre para atingir *Q* e for a primeira suposição consistente com o princípio de relevância.

A suposição factual S_3 de que "Representar $\frac{1}{3}$ em números decimais resolve a equação" é exequível, mas não seria a melhor solução $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ requer do estudante o entendimento de que ele necessita dominar as operações envolvendo os números racionais representados em dízimas periódicas. Observe-se que todas essas situações implicam aumento de custo de processamento e perdem relevância diante do efeito fixo de meramente resolver equação.

A suposição factual S_2 de que “Representar os termos da equação em frações equivalentes resolve a equação” é plausível. Contudo, pode não ser o caso de Pedro dominar a noção de equivalência de frações. Mais uma vez, isso demanda aumento no custo de processamento e perde relevância diante do efeito fixo de meramente resolver a equação $x = 2 - \frac{1}{3}$.

Neste contexto restrito de opções, a suposição factual S_1 de que “calcular o mínimo múltiplo comum resolve a equação” seria a melhor solução, pois ela atende a todos os quatro critérios: a) S_1 deixa-se mapear numa formulação hipotética, uma vez que “se Pedro calcular o mínimo múltiplo comum, então ele resolverá a equação”; b) S_1 é uma ação plausível de ser considerada por Pedro como pelo menos suficiente para resolver a equação; c) S_1 converte-se numa hipótese que, dentre o conjunto restrito S_{1-7} de suposições, é aquela de mais baixo custo de processamento diante do efeito fixo de resolver a equação (com frações) para quem não domina o conceito de frações equivalentes; e d) S_1 converte-se numa hipótese que atende o critério de melhor solução, visto que não há razões para ‘Representar os termos da equação em frações equivalentes’ ou para ‘Representar 1/3 em números decimais’ quando se pode calcular o mínimo múltiplo comum para resolver a equação.

Portanto, a hipótese abdutiva H_a que se comporta como melhor solução (mais relevante, pertinente ou plausível) neste contexto *ad hoc* é a de que:

> [2b] Pedro *i* abduz que se Pedro calcular o mínimo múltiplo comum, então Pedro resolverá a equação $x = 2 - \frac{1}{3}$.

O *output* de [2b] (plano de ação intencional) pode ser representado de maneira esquemática como segue:

[1]		Q		resolver equação, Pedro
[2]	P	Q	calcular m.m.c., Pedro	resolver equação, Pedro

O terceiro dos quatro estágios propostos por Rauen refere-se à provável *execução da ação antecedente P*:

> [3a] O indivíduo *i* executa *P* para atingir *Q* em t_3, ou
> [3b] O indivíduo *i* não executa *P* para atingir *Q* em t_3,
>
> tal que:
>
> a) t_3 representa o tempo da execução da ação antecedente *P* no contexto da formulação hipotética “Se *P*, então *Q*”;
> b) t_3 sucede t_2;
> c) [3b] é o modelo de inação pressuposto por [3a];
> d) A inação pode ser voluntária ou involuntária.
> (RAUEN, 2014, p. 9).

Essa descrição considera que: a) há um tempo próprio t_3 da execução da ação; b) t_3 sucede a formulação da hipótese abdutiva antefactual H_a; c) o modelo positivo no qual a ação *P* é executada, por definição, pode fazer emergir o modelo negativo no qual a ação *P* não é executada; e d) apesar da plausibilidade da hipótese, há contextos onde a ação não é possível ou, mesmo sendo possível, não é executada.

A execução é o momento em que Pedro calcula ou não o mínimo múltiplo comum para resolver a equação. Rauen argumenta que o esquema em primeiro plano (que ele considera em geral exclusivo) é o modelo *agentivo* ou *ativo*. Trata-se do esquema da execução da ação *P* no contexto da hipótese H_a. Nesse caso, Pedro calcula o mínimo múltiplo comum para resolver a equação.

Rauen considera que o modelo *não agentivo* ou *passivo* pode ocorrer em pelo menos duas situações. Quando o indivíduo *i* não tem condições de executar a ação *P*, como é o caso de a hipótese H_a ser abduzida, e Pedro perceber em seguida que não sabe calcular o mínimo múltiplo comum. Quando há algum conflito ou problema psicológico (hesitações, medos, boicotes pessoais, obstáculos epistemológicos em relação às operações com os números fracionários, entre outros.) que põe em suspeição metas e/ou planos. Nesse caso, Pedro, embora formule a meta de resolver a equação e a hipótese abdutiva antefactual pertinente de calcular o mínimo múltiplo comum, hesita em proceder ao cálculo.

O *output* ativo do terceiro estágio (ação intencional) pode ser visto a seguir:

> [3a] Pedro *i* calcular o mínimo múltiplo comum para Pedro *i* resolverá a equação $x = 2 - \frac{1}{3}$ em t_3.

Ou, de modo mais esquemático:

[1]		Q		resolver equação, Pedro
[2]	P	Q	calcular m.m.c., Pedro	resolver equação, Pedro
[3]	P		calcular m.m.c., Pedro	

O quarto estágio é a *checagem dedutiva da formulação hipotética*:

> (4a) Considerando-se [2] "Se *P*, então *Q*" e [3a] *P*, o indivíduo *i* checa a consecução *Q'* em t_4, ou
> (4b) Considerando-se [2] "Se *P*, então *Q*" e [3b] ¬*P*, o indivíduo *i* checa a consecução ¬*Q'* em t_4,
>
> tal que:
>
> a) t_4 representa o tempo da consecução da meta *Q*;
> b) t_4 sucede t_3.
> c) (4a) é o modelo de consecução da ação *P* de [3a] e (4b) é o modelo de consecução da inação ¬*P* de [3b];
> d) *Q'* representa o resultado da ação *P* de [3a] e ¬*Q'* representa o resultado da inação ¬*P* de [3b];
> e) *Q'* ou ¬*Q'* é uma realidade em t_4[11].
> (RAUEN, 2014, p. 10).

Segundo Rauen, esse estágio consiste na avaliação ou monitoramento da (in)ação antecedente *P* no escopo dedutivo da formulação hipotética "Se *P*, então *Q*", o que conflui com o módulo dedutivo de Sperber e Wilson (1986, 1995). Assim, no cenário ativo (1a) (Q; Se P, então Q; P), Pedro avalia se a equação é resolvida com o cálculo do mínimo múltiplo comum; e no cenário passivo (1b) (¬Q; Se ¬P, então ¬Q; ¬P), Pedro avalia se a equação não se resolve quando ele não calcula o mínimo múltiplo comum.

O *output* do quarto estágio em (4a) pode ser visto a seguir:

> (4a) Pedro *i* checa a consecução da resolução da equação $x = 2 - \frac{1}{3}$ em t_4.

Ou, de forma mais esquemática:

[1]		Q		resolver equação, Pedro
[2]	P	Q	calcular m.m.c., Pedro	resolver equação, Pedro
[3]	P		calcular m.m.c., Pedro	
[4]		Q'		resolver equação, Pedro

---

[11] Conforme Rauen, a expressão *Q'* destaca que a consecução da meta é sempre em alguma medida diferente de sua projeção. Em descrições mais completas ou em descrições de situações mais complexas as várias instâncias de *Q* poderiam ser indexadas por números Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n, de tal modo que Q_1 representa a emergência da meta inicial.

4.1.3 Avaliação

Conforme Rauen, o *output* do quarto estágio viabiliza avaliar ou monitorar tanto a consecução da meta Q como a hipótese abdutiva antefactual H_a. Nesse processo, ele propõe dois conceitos: o de conciliação de metas e o de confirmação de hipóteses.

Por *conciliação de metas*, Rauen (2014, p. 11) define "o estado Q' do ambiente em t_4 que satisfaz, coincide ou corresponde com a meta Q em t_1, isto é, o resultado da ação P (meta externa) é semelhante ou congruente com o resultado projetado pelo indivíduo i (meta interna)". Diante dessa definição, há quatro possibilidades de consecução:

> Numa *conciliação ativa* (1a), o indivíduo i executa a ação P no contexto da hipótese H_a, e a realidade Q' em t_4 concilia-se com a meta Q em t_1. Numa *inconciliação ativa* (1b), o indivíduo i executa a ação P no contexto da hipótese H_a, e a realidade $\neg Q'$ em t_4 não se concilia com a meta Q em t_1. Numa *conciliação passiva* (1c), o indivíduo i não executa a ação P no contexto da hipótese H_a, e a realidade Q' em t_4, mesmo assim, concilia-se com a meta Q em t_1. Numa *inconciliação passiva* (1d), por fim, o indivíduo i não executa a ação P no contexto da hipótese H_a, e a realidade $\neg Q'$ em t_4 não se concilia com a meta Q em t_1. (RAUEN, 2014, p. 11).

As quatro situações podem ser visualizadas na Figura 30 a seguir:

Figura 30 – Possibilidades de consecução de metas

Estágios	(1a) Conciliação Ativa		(1b) Inconciliação Ativa		(1c) Conciliação Passiva		(1d) Inconciliação Passiva	
[1]		Q		Q		Q		Q
[2]	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q
[3]	P		P		¬P		¬P	
[4]		Q'		¬Q'		Q'		¬Q'

Fonte: Rauen (2014, p. 11)

No caso que se está modelando, as opções propostas por Rauen restringem-se a duas. Pode haver uma conciliação ativa (1a), quando Pedro calcula o mínimo múltiplo comum, e a equação é resolvida, ou uma inconciliação passiva (1d), quando Pedro não calcula o mínimo múltiplo comum (ele não sabe fazer o cálculo, por exemplo), e a equação não é resolvida.[12]

---

[12] Para haver inconciliação ativa (1b), a meta em jogo teria de ser alterada. Pedro poderia estar resolvendo equações e conferindo o resultado em um gabarito. Nesse caso, ele pode ter calculado o mínimo múltiplo comum equivocadamente, razão pela qual ele executa a ação P e o resultado é um fracasso. Para haver uma conciliação passiva, a meta de resolver a questão poderia ser mantida, mas Pedro, seja porque não sabe, seja

Por *confirmação de uma hipótese abdutiva antefactual H_a*, Rauen (2014, p. 11) define "o estado da realidade Q' em t_4 que satisfaz, coincide ou corresponde com a hipótese H_a em t_2. Trata-se do resultado da ação P que reforça a hipótese abdutiva antefactual H_a de que a ação antecedente P causa o estado consequente Q".

O autor argumenta que a avaliação da *hipótese abdutiva antefactual H_a* depende do grau de *confiança* ou *força* atribuído pelos indivíduos à hipótese[13]. Com base nisso, ele formula uma gradação que oscila desde a consideração de hipóteses categóricas, passando por hipóteses bicondicionais, condicionais e habilitadoras, até hipóteses tautológicas.

Por *hipótese abdutiva antefactual categórica*, define-se uma formulação $P \Leftrightarrow Q$, cuja tabela verdade retorna "verdade" somente quando P e Q são verdadeiros.[14] Nesse caso, P e Q são suficientes, necessários e certos, e a única consecução admitida pelo indivíduo é a de uma conciliação ativa (1a).

Por *hipótese abdutiva antefactual bicondicional $P \leftrightarrow Q$*, definem-se casos em que se antecipam como verdadeiros casos em que P e Q são simultaneamente verdadeiros ou falsos. Hipóteses abdutivas categóricas tornam-se bicondicionais nas inexecuções de P. Em contextos bicondicionais, admitem-se inconciliações passivas (1d), e a mera consideração da possibilidade $\neg P \rightarrow \neg Q$, enfraquece a formulação hipotética categórica inicial, pois P e Q passam agora a ser suficientes e necessários, mas não certos.

Por *hipótese abdutiva antefactual condicional $P \rightarrow Q$*, definem-se casos em que a ação antecedente P é suficiente, mas não necessária para o estado consequente Q. Em contextos condicionais, nos quais a implicação material se aplica, há um novo enfraquecimento da força da hipótese abdutiva, pois o indivíduo passa a admitir também as conciliações passivas (1c).

Por *hipótese abdutiva antefactual habilitadora $P \leftarrow Q$*, definem-se casos em que a ação antecedente P é necessária, mas não suficiente para atingir o estado consequente Q.

porque não quer, resolveria não calcular o mínimo múltiplo comum e, por exemplo, colar a resposta do gabarito ou de um colega. Nesse caso, ele atinge a meta mesmo não executando a ação apropriada.

[13] Por *formulação hipotética*, toma-se qualquer proposição parafraseável por enunciados do tipo "Se P, então Q".

[14] Rauen (2014, p. 12) defende a hipótese forte de que hipóteses abdutivas antefactuais H_a emergem em instâncias conscientes ou inconscientes como categóricas *por default*. Isso implica dizer que "o mesmo mecanismo abdutivo funciona tanto em situações automáticas inatas ou aprendidas, quando o indivíduo não tem acesso consciente ao mecanismo, quanto em situações de deliberação, quando a própria hipótese emerge como relevante".

Trata-se de uma ação *P* que habilita, mas não garante a consecução *Q*. Isso permite admitir inconciliações ativas (1b).

Por fim, numa *hipótese abdutiva antefactual tautológica P–Q*, definem-se casos em que ambos *P* e *Q* são suficientes, mas não necessários, modelando situações do tipo “Se P, então possivelmente Q”, onde todos os tipos de consecução são possíveis.

Essas possibilidades podem ser resumidas nas tabelas verdade da Figura 31.

Figura 31 – Tabela de verdade para a modulação de enunciados hipotéticos

Conciliações	Proposições		Categórica	Bicondicional	Condicional	Habilitadora	Tautológica
	P	*Q*	$P \Leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftarrow Q$	*P–Q*
(1a) Conciliação Ativa	V	V	V	V	V	V	V
(1b) Inconciliação Ativa	V	F	F	F	F	V	V
(1c) Conciliação Passiva	F	V	F	F	V	F	V
(1d) Inconciliação Passiva	F	F	F	V	V	V	V

Fonte: Rauen (2014, p. 13)

Argumentando-se que no estágio [2] do modelo a hipótese abdutiva antefactual é tomada pelo indivíduo como categórica por *default* $P \Leftrightarrow Q$, as diferentes situações ilustradas neste estudo podem ser descritas e explicadas da seguinte forma no que se refere à consideração dos efeitos cognitivos.[15]

No caso da *conciliação ativa* (1a), Pedro calcula o mínimo múltiplo comum *P*, e a equação se resolve *Q’*.

[1]	Q	Pedro projeta resolver a equação (meta)
[2]	$P \Leftrightarrow Q$	Certamente, se Pedro calcular o mínimo múltiplo comum, então Pedro resolve a equação
[3]	P	Pedro calcula o mínimo múltiplo comum
[4]	Q’	Pedro resolve a equação (consecução externa da meta)

Em conciliações ativas, o indivíduo atinge a meta *Q* e confirma a hipótese abdutiva antefactual categórica H_a de que calcular o mínimo múltiplo comum resolve equações com números fracionários. Essa hipótese, se ainda possível, é fortalecida e estocada na memória enciclopédica como uma suposição factual a ser acionada em situações futuras. Quanto mais conciliações, menor será o custo de processamento dessa suposição factual e

[15] Rauen (2014) descreve e explica diferentes cenários modelados conforme a força inicial da hipótese abdutiva antefactual, desde as categóricas até as tautológicas. Nesta tese, o cenário ficou restrito à hipótese categórica.

maior a probabilidade de ela ser a primeira hipótese abdutiva a ser tomada como categórica em contextos similares (hábito, experiência, expertise, etc.). Além disso, o indivíduo volta-se a metas proativas ou demandas reativas subsequentes.

Quando o indivíduo considera situações duais do tipo “tudo ou nada”, ele pode armar a arquitetura abdutivo/dedutiva bicondicionalmente $P \leftrightarrow Q$. Neste caso, agir P redundará necessariamente em atingir Q, conciliação ativa, e não agir $\neg P$ redundará necessariamente em não atingir $\neg Q$, inconciliação passiva. Vale a pena observar que a mera consideração de alternativas, por definição, enfraquece a força da hipótese abdutiva antefactual. Em dúvidas ou dilemas, por exemplo, o indivíduo oscila entre agir e não agir, desenhando os respectivos cenários decorrentes (aumento de custo de processamento).

4.1.4 Comunicação e Heteroconciliação de Metas

Até o momento, modelou-se o que Rauen (2014) denomina de autoconciliação de metas. Pedro, ele próprio, projetou a meta de resolver a equação e, além disso, ele mesmo checou se o cálculo do mínimo múltiplo comum permitiria atingi-la. Há casos, contudo, de processos de conciliação deflagrados por mais de um indivíduo, onde se coordenam metas e submetas em comum.

Tome-se como exemplo o caso em que Pedro se depara com a mesma equação, mas não sabe como resolvê-la. Ele projeta a meta de resolver a equação, e a primeira hipótese abdutiva para isso é a de perguntar à professora como fazê-lo. Nesse caso, um obstáculo óbvio é o de que essa meta precisa ser comunicada. É justamente em casos como esse que a arquitetura ostensivo-inferencial desenvolvida pela teoria da relevância entra em funcionamento. Para Pedro resolver a equação, a primeira hipótese abdutiva antefactual é a de comunicar sua dúvida à professora. Segue-se que ele elabora o estímulo ostensivo comunicacional (intenção comunicativa) que lhe permita obter a resposta (intenção informativa) com o menor custo de processamento. Pedro poderia dizer o que segue:

Pedro – Como eu resolvo a equação?

Rauen ressalva que é possível identificar nesse processo uma hierarquia de metas. De um lado, o plano escolhido por Pedro envolve resolver a equação utilizando-se da orientação da professora. Atingir essa submeta requer solicitar essa orientação como subplano. Por outro lado, Pedro pede à professora que ela lhe dê uma orientação por alguma razão: supostamente a de resolver a equação. Assim, observar metas mais gerais explica-se por que alguém tem uma meta particular; e observar planos mais particulares especifica como uma meta é alcançada em termos de ações intencionais.

No caso em tela, a modelação poderia ser a seguinte:

[1]	Q	Pedro projeta resolver a equação (meta);
[2]	P⇔Q	Certamente, se Pedro usar uma orientação da professora, então Pedro resolverá a equação;
[3]	P	Pedro projeta usar uma orientação da professora (submeta);
[4]	O⇔P	Se Pedro pedir uma orientação à professora, então Pedro usará a orientação da professora;
[5]	O	Pedro pede uma orientação à professora (ação);
[6]	P'	Pedro usa a orientação da professora (consecução externa da submeta P);
[7]	Q'	Pedro resolve a equação (consecução externa da meta Q).

Ou, de modo esquemático:

[1]			(Q) resolver equação, Pedro
[2]		(P) usar orientação, Pedro	(Q) resolver equação, Pedro
[3]		(P) usar orientação, Pedro	
[4]	(O) pedir orientação, Pedro	(P) usar orientação, Pedro	
[5]	(O) pedir orientação, Pedro		
[6]		(P') usar orientação, Pedro	
[7]			(Q') resolver equação, Pedro

Do ponto de vista da professora, o primeiro passo consiste em fazer funcionar o mecanismo de interpretação guiado pelo princípio de relevância. Como esperado, seguindo uma rota de esforço mínimo, a professora encaixa a formulação linguística do enunciado de Pedro em uma forma lógica e elabora as respectivas explicaturas[16].

(1) Forma Linguística: Como eu resolvo a equação?
(2) Forma Lógica: (resolver x, y, α_{modo})
(3) Explicatura (1): $\varnothing_x$ [PEDRO$_x$] resolve a equação [$x = 2 - \frac{1}{3}$ $_y$] como$_{modo}$?
(4) Explicatura (2): COMO PEDRO RESOLVE A EQUAÇÃO $x = 2 - \frac{1}{3}$?
(5) Explicatura (3): PEDRO PERGUNTA À PROFESSORA COMO PEDRO RESOLVE A EQUAÇÃO $x = 2 - \frac{1}{3}$.

[16] Sobre a metodologia descritiva, veja-se, por exemplo, Rauen (2011).

A explicatura do enunciado em (5) já é suficiente para a professora perceber o que está em jogo na troca comunicativa.

[1]	Q	Pedro deseja saber como resolver a equação (explicatura);
[2]	Q⇔P	Certamente, se Pedro calcular o mínimo múltiplo comum, então Pedro saberá como resolver a equação;
[3]	P	Pedro deve calcular o mínimo múltiplo comum (implicatura/suposta meta de Pedro).

Dado que a intenção informativa P da professora só faz sentido se ela for elevada a uma intenção comunicativa, ela deve pedir/orientar que Pedro calcule o mínimo múltiplo comum na equação em questão.

[4]	O⇔P	Se a professora pedir que Pedro calcule o mínimo múltiplo comum, então Pedro calculará o mínimo múltiplo comum;
[5]	O	A professora pede que Pedro calcule o mínimo múltiplo comum;
[6]	P’	Pedro calcula o mínimo múltiplo comum (consecução externa da submeta P);
[7]	Q’	Pedro sabe como resolver a questão (consecução externa da meta Q).

Ela, então, diz:

(1) Faça o mínimo múltiplo comum!

Esse enunciado, por sua vez, é processado por Pedro como segue:

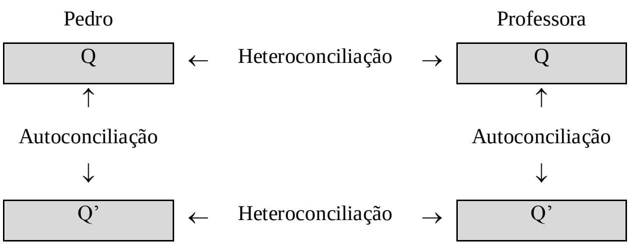
(1) Faça o mínimo múltiplo comum!
(2) (fazer x, y, α_{tempo}, $\beta_{finalidade}$)
(3) Explicatura (1): CALCULE $\varnothing_x$ PEDRO$_x$, O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM$_y$, $\varnothing_{tempo}$ EM SEGUIDA$_{tempo}$ $\varnothing_{finalidade}$ PARA RESOLVER A EQUAÇÃO $x = 2 - \frac{1}{3}$ $_{finalidade}$!
(4) Explicatura (2): CALCULE PEDRO O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM EM SEGUIDA PARA RESOLVER A EQUAÇÃO $x = 2 - \frac{1}{3}$.
(5) Explicatura (3): A PROFESSORA DESEJA QUE PEDRO CÁLCULE O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM EM SEGUIDA PARA RESOLVER A EQUAÇÃO $x = 2 - \frac{1}{3}$.

Nesse caso, se tudo correr bem, Pedro usa adequadamente a orientação da professora, procede ao cálculo do mínimo múltiplo comum e obtém o resultado satisfatório.

Rauen observa que o que acontece nesse processo é uma cadeia complexa de auto e heteroconciliações. A professora e Pedro precisam heteroconciliar metas *Q* e consecuções *Q’* coordenando pelo menos uma submeta para atingir uma meta de nível mais alto e, para isso, devem ser capazes de monitorar, cada qual a seu modo, se as consecuções *Q'* estão conciliadas com as metas *Q* (autoconciliações).

Auto e heteroconciliação de metas podem ser resumidas na figura, a seguir:

Figura 32 – Esquema básico para auto e heteroconciliação de metas



Fonte: Rauen (2014, p. 20)

Rauen (2014, p. 21) considera que esta modelação alinha-se com o argumento de Tomasello e colaboradores (2005, p. 680-681) de que a diferença crucial entre a cognição humana e a de outras espécies é a capacidade humana de participar com os outros em atividades colaborativas com metas e intenções comuns. Tomasello e colaboradores denominam por *intencionalidade compartilhada* ou *intencionalidade "nós"* "as interações sociais colaborativas de indivíduos capazes de se compreenderem como agentes intencionais nas quais compartilham uma meta ou compromisso comum e papéis coordenados de ação para atingi-la".

Segundo Rauen (2014, p. 21), essas atividades colaborativas demandam, de um lado, um alinhamento do indivíduo com os demais para configurar uma meta comum e, de outro, uma diferenciação do indivíduo e do outro que permite compreender e coordenar papéis diferentes, mas complementares na vontade comum. No processo, as metas e as intenções de cada indivíduo incluem em seu conteúdo parte das metas e intenções do outro, e a representação cognitiva da meta contém em sua descrição ambos os interactantes. Além disso, essa representação cognitiva da intenção deve conter a meta pessoal e a meta do outro – a intenção conjunta. No exemplo, Pedro e a professora compartilham a meta pessoal de Pedro resolver a questão e a meta pessoal de que isso seja feito em parceria. Consequentemente, ambos escolhem seu próprio plano de ação, e consideram e coordenam seus planos de ação: o papel da professora de fornecer a orientação e o de Pedro de resolver a equação.

4.2 APLICAÇÃO DOS CONCEITOS

Nesta seção, aplicam-se todos os conceitos desenvolvidos nesta tese na análise de uma de quatro atividades desenvolvidas no ano de 2014 com quatorze estudantes da sétima fase do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Catarinense – Campus Avançado Sombrio (IFC/Sombrio), que são identificados nesta tese apenas por números. Os resultados serão apresentados em quatro subseções. Na primeira subseção, apresentam-se a atividade em si. Na segunda subseção, apresenta-se a descrição hipotética conciliada com a resposta prevista pela pesquisadora. Na terceira seção, apresenta-se a análise das respostas dadas pelos estudantes organizadas em três grupos segundo o critério de semelhança das unidades significativas mobilizadas para responder a questão. Finalmente, na quarta seção, apresenta-se a discussão do conjunto de respostas analisadas segundo a teoria de conciliação e metas, a teoria da relevância e a teoria dos registros de representação semiótica.

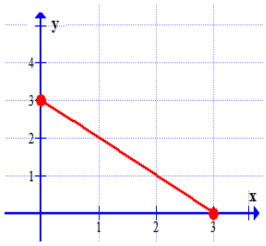
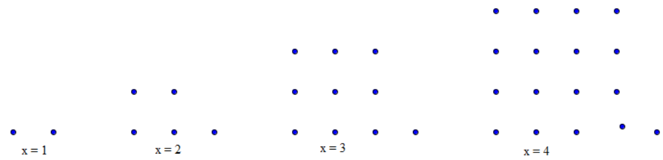
4.2.1 Apresentação das atividades

Essa ilustração consiste num conjunto de atividades que envolviam a identificação de unidades significativas, o tratamento e a conversão de registros de representação semiótica. O exercício foi aplicado pela própria pesquisadora em uma aula da disciplina de Estágio Supervisionado em Matemática III como atividade normal de sala de aula, e a resolução foi elaborada individualmente. Isso implica dizer que essas atividades não foram especialmente projetadas para compor a tese, embora tivessem sido elaboradas num contexto cognitivo em que as discussões que compõem esse estudo estavam em curso. Vale dizer, portanto, que se reconhece aqui que tanto o comando como as próprias atividades merecem alguns reparos.

Destaque-se que todos os conteúdos das atividades já haviam sido desenvolvidos no curso. Por hipótese, portanto, os conceitos envolvidos na resolução já haviam sido acessados previamente por pelo menos algum registro de representação do domínio da Matemática. Posto isso, era de se esperar que os estudantes tivessem condições de resolver as atividades adequadamente.

As atividades partem do pressuposto de que, se um endereço conceitual de um objeto é constituído de entradas lógicas, lexicais e enciclopédicas em diferentes registros de representação, conforme proposto por Rauen e Cardoso (2011), isto deveria emergir nas respostas dos estudantes. Desse modo, os estudantes foram orientados a ler com atenção o comando das atividades e a resolvê-las a partir das potencialidades de cada registro.

Segue-se o comando do exercício e, mais abaixo, as quatro atividades:

> *Comando do Exercício:*
>
> Fundamentados nos conhecimentos que você já teve acesso e construiu em outros momentos, escreva, em cada caso, as informações que os registros de representação apresentam para você. O que primeiro observou ao acessar ao registro de representação. Para isso, em cada caso, descreva todos os passos o mais detalhado possível.
>
> *Primeira Atividade:*
>
> 
>
>
> *Segunda Atividade:*
>
> 
>
>
> *Terceira Atividade:*
>
> $A = \{x \in IN / 1 \leq x \leq 4\}$
>
> *Quarta Atividade:*
>
> Dado $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$

Neste capítulo, analisam-se as respostas dos estudantes à quarta atividade, que foi escolhida em função de sua semelhança com o exemplo desenvolvido no terceiro capítulo. Destaque-se que não é objeto dessa investigação o acerto da questão em si, mas o processo de mobilização de diferentes registros de representação semiótica para a solução da atividade.

Obtidas as respostas, procedeu-se à correção e à devolução dos resultados. Cada aluno pôde comparar posteriormente seu desempenho (autoconciliação) com o desempenho-alvo projetado pela pesquisadora (heteroconciliação). Após a realização da entrega e correção das atividades, solicitou-se que cada estudante justificasse seus procedimentos, na expectativa de verificar a consciência do processo de resolução e dos passos bem ou mal sucedidos.

A resolução das atividades e a justificação das respostas foram então analisadas a partir das três hipóteses de trabalho. A primeira hipótese, asseverando que "relações cognitivas e comunicativas de relevância guiadas pelo conceito de conciliação de metas subjazem a identificação de unidades significativas, o tratamento e a conversão dos registros de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem de matemática". A segunda hipótese, levando em conta que "a presunção de relevância ótima e o procedimento de compreensão guiado pela noção de relevância são aplicáveis à apreensão e ao processamento de unidades significativas de todo e qualquer registro de representação semiótica em matemática, bem como aos seus tratamentos e conversões, considerando a primeira hipótese". E, finalmente, a terceira hipótese, afirmando que "a expertise na coordenação de diferentes registros de representação semiótica em processos congruentes e não congruentes de conversão é indício de uma apreensão mais qualificada dos objetos matemáticos, considerando a primeira e a segunda hipótese".

Nesse contexto de avaliação, cada resposta foi analisada primeiramente a partir da teoria de conciliação de metas de Rauen (2014), passando pela teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995) e terminando com a teoria de registros de representação semiótica de Duval (2009, 2011). Posto isso, apresenta-se na subseção seguinte a análise da atividade para, então, dar conta das repostas dos estudantes.

4.2.2 Análise da atividade

A quarta atividade consiste na apresentação da representação algébrica de uma função quadrática cujo campo de definição está circunscrito no campo dos números naturais, conforme segue[17]:

'Dado $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$'

A quarta atividade foi apresentada aos estudantes para que eles: identificassem na representação algébrica uma função quadrática constituída de grandezas discretas representadas no campo de definição $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dos números naturais; e representassem a função quadrática cujo primeiro valor para a variável independente é $x = 0$.

---

[17] Como já foi antecipado, o exercícios não foram especialmente projetados para compor a tese. Nesta atividade, admite-se aqui que a proposição contém duas sequências lexicais em língua natural 'Dado' e 'definida por', o que certamente introduz alguma imprecisão na formulação – ela não é plenamente algébrica. Uma formulação puramente algébrica poderia ser como segue: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(x) = x^2 + 1$.

O primeiro estágio para analisar o desempenho dos estudantes é o de descrever a resolução ideal da questão a partir da arquitetura fornecida pela teoria de conciliação de metas. Essa modelação fornece uma espécie de engenharia reversa ou *backward* para o processo de resolução da questão. Nesse processo, procede-se à descrição de um conjunto de procedimentos que devem ser executados a fim de se atingir a meta final de resolver a atividade proposta. Veja-se o resultado na figura a seguir:

Figura 33 – Esquema de resolução da quarta atividade a partir da TCM

[1]										Q	Resolver a questão
[2]									P ⇔	Q	Elaborar o gráfico ⇔ Resolver a questão
[3]								O ⇔	P	|	Obter pares ordenados ⇔ Elaborar o gráfico
[4]							N ⇔	O	|	|	Calcular valores de f(x) ⇔ Obter pares ordenados
[5]						M ⇔	N	|	|	|	Definir valores de x ⇔ Calcular valores de f(x)
[6]					L ⇔	M	|	|	|	|	Elaborar a tabela ⇔ Definir valores de x
[7]				K ⇔	L	|	|	|	|	|	Identificar as variáveis⇔ Elaborar a tabela
[8]			J ⇔	K	|	|	|	|	|	|	Caracterizar a função ⇔ Identificar as variáveis
[9]		I ⇔	J	|	|	|	|	|	|	|	Interpretar a fórmula ⇔ Caracterizar a função
[10]	H ⇔	I	|	|	|	|	|	|	|	|	Identificar domínio ⇔ interpretar a fórmula
[11]	H	|	|	|	|	|	|	|	|	|	Identificação do domínio (campo de definição)
[12]		I’	|	|	|	|	|	|	|	|	Interpretação da fórmula
[13]			J’	|	|	|	|	|	|	|	Caracterização da função
[14]				K’	|	|	|	|	|	|	Identificação das variáveis
[15]					L’	|	|	|	|	|	Elaboração da tabela
[16]						M’	|	|	|	|	Definição de valores de x
[17]							N’	|	|	|	Cálculo dos valores de f(x)
[18]								O’	|	|	Obtenção dos pares ordenados
[19]									P’	|	Elaboração do gráfico
[20]										Q’	Resolução da questão

Fonte: Elaboração da autora.

Para compreender o funcionamento deste conjunto de ações propostas para responder corretamente a questão, apresenta-se uma descrição de todas estas etapas da engenharia reversa conforme as definições de cada meta.

A etapa [1] “Resolver a questão” consiste na meta final. A resolução da atividade é a meta geral do processo de resolução, de tal modo que a obtenção da resposta promove o que Rauen (2013, 2014) denomina de autoconciliação de meta e o que Sperber e Wilson (1986/1995) chamam de satisfação de relevância. Como prediz o procedimento de compreensão guiado pela noção de relevância, uma vez obtida uma resposta satisfatória (e, desse modo, uma autoconciliação de metas) nenhuma outra resposta é procurada (a primeira interpretação relevante é a interpretação relevante). Conforme prediz a teoria de conciliação de metas, o grau de satisfação está atrelado ao nexo causal/nomológico que conecta ações e consecuções, de modo que quanto mais categóricos forem esses nexos, maior é a satisfação decorrente da conciliação e, vice versa, quanto menos categóricos forem esses nexos, menor é a satisfação decorrente da conciliação.

A etapa [2] “Se elaborar gráfico, então se resolve a questão” consiste numa primeira hipótese abdutiva antefactual tomada aqui como supostamente categórica para a resolução. Essa solução demanda a conversão mental dos dados registrados algebricamente em registro gráfico, exigindo a coordenação entre esses dois registros. Nessa etapa, “Elaborar um gráfico” converte-se numa submeta ou meta cognitiva necessária para a consecução da meta final que é a resolução da atividade.

A etapa [3] “Se forem obtidos pares ordenados, então é possível elaborar gráfico” consiste numa segunda hipótese abdutiva antefactual que deriva da compreensão de que o registro gráfico de uma função demanda por coordenadas cartesianas. Um estudante que elabora essa hipótese abdutiva antefactual domina as unidades significativas do registro gráfico, porque gráficos consistem de registros de coordenadas estabelecidas pelos pares ordenados. Nesse caso, “Obter pares ordenados” converte-se numa submeta ou meta cognitiva da submeta de “Elaborar o gráfico”.

A etapa [4] “Se forem calculados os valores da variável dependente, então é possível se obterem os pares ordenados” consiste numa terceira hipótese abdutiva antefactual que deriva da constatação de que variáveis dependentes precisam ser calculadas e, dessa maneira, da necessidade de compreender os valores $f(x)$ como função de uma variável independente x. Um estudante que assim procede sugere compreender a contraparte dependente do conceito mesmo de “algo estar em função de algo”. “Calcular os valores da variável dependente $f(x)$”, nessa etapa, converte-se numa nova submeta ou meta cognitiva da submeta anterior de “Obter pares ordenados”.

A etapa [5] “Se forem definidos os valores da variável independente x, então é possível de serem obtidos os valores da variável dependente $f(x)$” consiste numa quarta hipótese abdutiva antefactual que deriva da constatação de que os valores da variável independente são arbitrados. Um estudante que assim procede sugere compreender a contraparte independente do conceito mesmo de “algo estar em função de algo”. “Definir os valores da variável independente x” converte-se numa submeta ou meta cognitiva nessa cadeia de submetas.

A etapa [6] “Se for elaborada uma tabela, então é possível definir os valores de x” consiste numa quinta hipótese abdutiva antefactual que deriva da constatação da função auxiliar que as tabelas podem exercer na consecução da atividade. Essa hipótese exige converter registros gráficos e algébricos em tabulares e vice-versa. Apesar de sua importância, não se trata de uma etapa obrigatória, mas que pode ser acionada devido à recorrência da utilização de tabelas como etapas intermediárias na resolução de questões similares. “Elaborar uma tabela” converte-se, nesse caso, numa submeta ou meta cognitiva.

A etapa [7] “Se for identificada as variáveis que compõem a função é possível elaborar a tabela” consiste numa sexta hipótese abdutiva antefactual que deriva da depuração da fórmula, uma vez que o estudante deve identificar qual variável se comporta como independente e qual variável se comporta como dependente na função. “Identificar as variáveis a partir do seu campo de definição” converte-se em nova submeta ou meta cognitiva nessa cadeia de submetas.

A etapa [8] “Se a função for caracterizada, então é possível identificar as grandezas variáveis” consiste numa sétima hipótese abdutiva antefactual que, embora não seja obrigatória para resolver a função, revela-se recorrente na resposta dos estudantes. Como a demanda da tarefa era a de identificar o que o registro representa, os estudantes viram-se instados a classificar a função a partir de diferentes critérios. Desse modo, “Caracterizar a função” converteu-se em nova submeta nesse processo de resolução.

A etapa [9] “Se a fórmula for interpretada é possível caracterizar a função”, consiste numa oitava hipótese abdutiva antefactual. Essa hipótese é um passo fundamental sem a qual não se dá origem ao processo de resolução do exercício. “Interpretar a fórmula algébrica da função” converte-se em mais numa submeta nesse processo de resolução.

A etapa [10] “Se o campo de definição for identificado, então é possível interpretar a fórmula” consiste numa nona hipótese abdutiva antefactual que deriva da necessidade de identificar os tipos de variáveis envolvidas. No caso, trata-se de identificar que a função põe em correspondência grandezas independentes e dependentes no universo dos números naturais. Esse é o passo fundamental que dá origem ao processo de interpretação do exercício e, no esquema de resolução, consiste na ação que dá origem a toda uma cadeia de inferências necessária para atingir a meta final.

Em resumo, a descrição sugere até aqui que, para resolver integralmente a questão (meta final), é necessário elaborar um gráfico (ação). Para elaborar esse gráfico (submeta) é necessário obter pares ordenados $(x, f(x))$ (ação). Para obter esses pares (submeta), é necessário calcular os valores da variável dependente $f(x)$ (ação). Para calcular esses valores (submeta), é necessário definir os valores da variável independente x (ação). Para definir esses valores (meta), é necessário elaborar uma tabela (ação). Para elaborar uma tabela (submeta) é necessário identificar as variáveis (ação). Para identificar as variáveis (submeta) é necessário caracterizar a função (ação). Para caracterizar a função (submeta) é necessário interpretar a fórmula $f(x) = x^2 + 1$ (ação). E, por fim, para interpretar a fórmula (submeta) é necessário identificar o domínio da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (ação).

O encadeamento de hipóteses abdutivas em relação a metas e submetas agora se reverte em direção ao encadeamento supostamente cronológico em que o estudante executa sucessivas ações em direção à meta final.

A ação [11] “Identificação do campo de definição da função” permite ao aluno identificar que a função está definida no campo dos números naturais. Isso gera inferências tais como: todos os valores arbitrados e calculados serão definidos no campo dos números naturais, a função será crescente, o gráfico consiste de variáveis discretas, etc. Uma falha nessa identificação pode redundar numa classificação equivocada da função, na definição e cálculo de grandezas não naturais, na produção de um gráfico contínuo, entre outras.

A ação [12] “Interpretação da fórmula $f(x) = x^2 + 1$” implica identificar as unidades significativas da fórmula e identificar a relação entre as grandezas variáveis por $x^2 + 1$. Isso permite gerar todos os tratamentos necessários para representar a função. Um erro de interpretação nessa ação gera tratamentos errados. No caso em pauta, o estudante deve inferir que a função será discreta (conforme o campo de definição $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$); que ele deve iniciar o cálculo por $x = 0$; que a função é quadrática ou do 2º grau, uma vez que o maior expoente da variável x é 2; que o valor da constante ‘1’ indica que a função intercepta o eixo das ordenadas nas coordenadas $(0,1)$, dado que $x = 0$ gera o menor valor para $f(x)$, indicado no gráfico como o ponto de partida da função. Um resultado possível dessa interpretação é a conversão adequada da fórmula em língua natural. Algo como: “Trata-se de uma função definida no campo dos números naturais de tal modo que o valor da variável dependente equivale ao quadrado do valor da variável independente mais uma unidade”.

A ação [13] “Caracterização da função” permite ao estudante identificar elementos da função que permitam enquadrá-la em classes determinadas. Ela estará correta se o aluno caracterizá-la como: “função do segundo grau”, “função quadrática”, “função crescente”, “função discreta”. Nesses casos, o estudante está fazendo inferências sobre a explicatura do registro de representação.

A ação [14] “Identificação das variáveis” permite que o aluno identifique corretamente na fórmula quais são as grandezas variáveis para elaborar adequadamente a tabela de valores que correspondem à função dada.

A ação [15] “A elaboração da tabela” decorre de o estudante ter convertido as relações marcadas entre estes registros do registro algébrico para o registro tabular. Somente a partir da identificação das variáveis e da relação entre elas, é que o estudante será capaz de inferir a formulação adequada da tabela, considerando sua disposição em colunas e linhas convencionalmente marcadas. Se o aluno não inferir corretamente os valores das grandezas variáveis e sua representação no registro gráfico, todo processo ficará comprometido.

A ação [16] “Definição de valores de x” implica perceber que os valores de $'x'$ são restringidos pela marcação do campo de definição $f : \mathbb{N}$. Trata-se do conjunto dos números naturais com os valores $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$. No gráfico, esta informação é grafada por pontos discretos, crescentes, cujo primeiro valor será indicado por $(0,1)$.

A ação [17] “Cálculo dos valores de $f(x)$” consiste nos cálculos dos valores da grandeza independente $f(x)$ necessários para a realização de conversões e tratamentos de forma que possibilite que a cada valor escolhido para a variável independente dentro dos naturais seja obtido um único valor para a variável dependente $f(x)$. Para esta conversão, será necessário um conjunto de inferências que estabeleça a relação de dependência entre as duas grandezas variáveis. Além disso, o estudante deve compreender que uma tabela representa a cada entrada de dados correspondente à grandeza independente uma saída contendo o valor calculado da variável dependente, conforme ilustra a tabela 5.

Tabela 5 – Representação tabular da função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	5
3	10

Fonte: Elaboração da autora.

A ação [18] “Obtenção dos pares ordenados” destaca que a conversão do registro tabular para o registro gráfico requer a representação dos valores das grandezas variáveis em pares ordenados, uma vez que o registro gráfico corresponde a um registro em duas dimensões R^2 (plano cartesiano). Neste caso, é preciso inferir que para cada valor da variável independente x corresponde a um único valor para a variável dependente $f(x)$ e que ambos devem ser expressos em pares ordenados $(x, f(x))$. Neste caso, deve-se inserir uma terceira coluna representando esses pares ordenados. Reitere-se que essa terceira coluna só faz sentido em função das demandas da representação gráfica.

Tabela 6 – Representação tabular contendo pares ordenados da função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$.

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
0	1	(0,1)
1	2	(1,2)
2	5	(2,5)
3	10	(3,10)

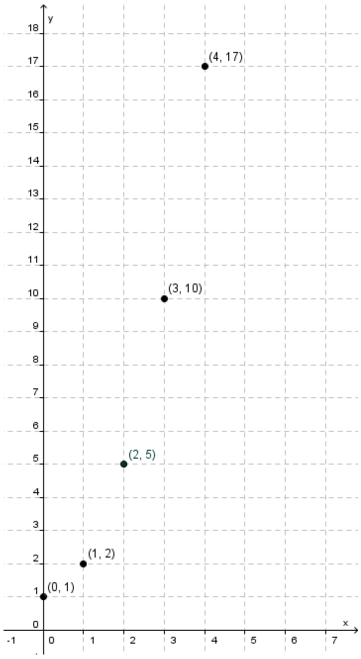
Fonte: Elaboração da autora.

A ação [19] “Elaboração do gráfico” tem a ver com a forma como os pares ordenados são grafados no registro gráfico. Se os valores das grandezas variáveis foram devidamente determinados a partir do registro algébrico e convertidos corretamente para o registro tabular, incluindo os pares ordenados, supostamente, o estudante marcará adequadamente os valores das variáveis no gráfico. Porém, há aqui um grande desafio ao estudante. Ao marcar os pontos no gráfico, ele deverá tratá-los como variáveis discretas, conforme campo de definição expresso explicitamente no registro algébrico da função, mas tornado implícito no registro tabular.[18] Cabe aqui ressaltar que o registro tabular, independente do campo de definição de uma função, sempre expressa a relação entre duas grandezas variáveis na forma de ponto a ponto. Nesses casos, é sempre necessário retornar ao registro algébrico para identificar o campo de definição e decidir se serão grafadas grandezas

[18] O item (a) trata do campo de definição da função. Em sala de aula é muito comum que essa proposição acabe por ser despercebida pelo estudante, apesar de estar explícita na formulação algébrica. O que se percebe, em boa parte desses casos, é que esta informação deixa de ser considerada quando se elabora o gráfico a partir de uma tabela. Isso ocorre porque o registro tabular, geralmente utilizado como intermediário entre o registro algébrico e o registro gráfico, não contém unidades significativas explícitas para o campo de definição da função. Em função disso, tende a ser mais simples definir valores inteiros para a variável independente mesmo no caso de a função ser definida no campo dos números reais. Apesar disso, quando se elabora o gráfico, esse caráter discreto é relevado, e os dados intermediários tendem a ser marcados com linhas. No presente caso, a função deve ser representada graficamente por um conjunto de pontos discretos de acordo com o campo de definição, uma vez que ela fora definida no campo dos números naturais. Apesar disso, bem pode ser o caso de os estudantes tratarem essas grandezas como contínuas no processo de conversão da tabela em gráfico e, desse modo, os gráficos conterem equivocadamente linhas.

discretas ou contínuas no registro gráfico. A figura 34 expressa a representação gráfica da atividade conforme prevista pelo pesquisador.

Figura 34: Representação da resposta da atividade prevista pelo pesquisador



Fonte: elaboração da autora

Por fim, a etapa [20] “Resolução da questão” consiste na conciliação da meta ou satisfação da relevância. Nesse caso, o estudante compara o resultado obtido com sua meta. Nesse ponto, vale lembrar que quaisquer equívocos em quaisquer etapas desse processo podem redundar em erros de resolução. Como prediz a teoria da relevância, o estudante seguirá uma rota de esforço mínimo, executando as operações em ordem de acessibilidade e terminando quando obtiver uma resposta que satisfaça sua expectativa de relevância. Como prediz a teoria de conciliação de metas, o estudante terminará o processo quando houver uma autoconciliação de metas. Conforme essa última teoria, quanto mais categóricas forem as hipóteses abdutivas, mais o estudante estará cego a alternativas de resolução.

A análise, tal como proposta nesta subseção, gera um conjunto de dez critérios que permitirão avaliar as respostas dos estudantes, representando as etapas de 11 a 20 do esquema. Esses critérios comporão uma tabela para identificar quais etapas foram consideradas pelos estudantes na resolução da atividade.

Vejam-se os critérios.

1. Identificação do campo de definição;
2. Interpretação da fórmula;
3. Caracterização da função;
4. Identificação das variáveis;
5. Elaboração da tabela;
6. Definição de valores de x;
7. Cálculo de valores de $f(x)$;
8. Obtenção de pares ordenados;
9. Elaboração do gráfico;
10. Resolução da questão.

No que se refere à conciliação de metas, quaisquer desses critérios podem ser avaliados conforme quatro possibilidades: a) consecuções corretas ‘1’, quando a consecução do estudante heteroconcilia-se com a consecução desejada pelo docente; b) consecuções incorretas ‘0’, quando a consecução do estudante não se heteroconcilia com a consecução desejada pelo docente; c) ‘?’ consecuções prováveis, quando não há elementos suficientes para definir se o estudante executou ou não a ação; e d) inexecuções ‘–’ quando o estudante não considera determinada submeta como necessária para consecução da meta final.

Os passos de [11] a [20] também podem ser analisados com as ferramentas disponibilizadas pela teoria da relevância como uma cadeia de inferências, cujo resultado redunda numa reposta plenamente satisfatória. Uma descrição dessa espécie começa com a decodificação do domínio e da fórmula da função, respectivamente convertidas nas suposições S_1 e S_2:

> S_1 – $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (representação do campo de definição da função obtido da identificação das unidades significativas do registro algébrico);
> S_2 – $f(x) = x^2 + 1$(representação da fórmula da função ou da relação entre as variáveis envolvidas obtidas da identificação das unidades significativas do registro algébrico).

Uma primeira inferência por *modus ponens* a partir de S_1 é a de que a função contém valores discretos, uma vez que ela é definida no campo dos naturais.

> S_1 – $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (premissa implicada);
> S_3 – $S_1 \rightarrow S_4$ (por *modus ponens*);
> S_4 – As grandezas variáveis envolvidas são discretas (conclusão implicada).

Uma segunda inferência obtida por *modus ponens* a partir da identificação do maior expoente da fórmula em S_2 é a de que a função é de segundo grau ou quadrática.

S_5 – O maior expoente da variável independente “x” é 2 (premissa implicada da identificação das unidades significativas do registro algébrico);
S_6 – $S_5 \rightarrow S_7$ (por *modus ponens*);
S_7 – A função é do segundo grau/quadrática (conclusão implicada).

Tomadas as suposições S_1 e S_2 mais uma vez, pode-se inferir por *modus ponens conjuntivo* que a função é crescente.

S_1 – $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (premissa implicada);
S_2 – $f(x) = x^2 + 1$ (premissa implicada);
S_8 – $(S_1 \wedge S_2) \rightarrow S_9$ (por *modus ponens conjuntivo*);
S_9 – A função é crescente (conclusão implicada).

Tomando-se S_2 como premissa, inferem-se as duas variáveis na função.

S_2 – $f(x) = x^2 + 1$ (premissa implicada);
S_{10} – $S_2 \rightarrow S_{11}$ (por *modus ponens*);
S_{11} – Há uma variável independente x e uma variável dependente $f(x)$ na representação algébrica (conclusão implicada);

Identificando-se as variáveis S_{11}, pode-se elaborar uma tabela, definir os valores de x e calcular os valores de $f(x)$.

S_{11} – Há uma variável independente x e uma variável dependente $f(x)$ na representação algébrica (premissa implicada);
S_{12} – $S_{11} \rightarrow S_{13}$ (por *modus ponens*);
S_{13} – A função pode ser convertida em tabela (conclusão implicada);
S_{14} – $S_{11} \rightarrow S_{15} \wedge S_{16}$ (por *modus ponens conjuntivo*);
S_{15} – Pode-se definir os valores de x na primeira coluna (conclusão implicada);
S_{16} – Pode-se calcular os valores de $f(x)$ na segunda coluna (conclusão implicada);

Com base nos valores de x e de $f(x)$ (S_{15} e S_{16}), podem-se determinar os pares ordenados $(x, f(x))$.

S_{15} – Pode-se definir os valores de x na primeira coluna (conclusão implicada);
S_{16} – Pode-se calcular os valores de $f(x)$ na segunda coluna (conclusão implicada);
S_{17} – $S_{15} \wedge S_{16} \rightarrow S_{18}$ (por *modus ponens conjuntivo*);
S_{18} – Pode-se determinar os pares ordenados $(x, f(x))$ na terceira coluna (conclusão implicada).

Com base nos pares ordenados $(x, f(x))$ S_{18}, pode-se elaborar o gráfico.

> S_{18} – Pode-se determinar os pares ordenados $(x, f(x))$ na terceira coluna (premissa implicada);
> S_{19} – $S_{18} \rightarrow S_{20}$ (por *modus ponens*);
> S_{20} – Pode-se elaborar o gráfico cartesiano de $f(x) = x^2 + 1$ (conclusão implicada).

Se as grandezas da função são discretas S_4, os pares ordenados são representados por pontos discretos no gráfico.

> S_4 – As grandezas variáveis envolvidas são discretas (premissa implicada);
> S_{21} – $S_4 \rightarrow S_{22}$ (por *modus ponens*);
> S_{22} – Os pares ordenados representam pontos no gráfico (conclusão implicada).

Antes de continuar, é necessário destacar que a cadeia de inferências pode seguir por inúmeros outros caminhos. Por exemplo, é possível admitir que, se a função é discreta S_4, do segundo grau S_7 e crescente S_9, então o padrão da figura se assemelha a uma curva ascendente de uma parábola.

> S_4 – As grandezas variáveis envolvidas são discretas (premissa implicada).
> S_7 – A função é do segundo grau (premissa implicada);
> S_9 – A função é crescente (premissa implicada);
> S_{23} – $(S_4 \wedge S_7 \wedge S_9) \rightarrow S_{23}$ (por *modus ponens conjuntivo*);
> S_{24} – O padrão da figura se assemelha a uma curva ascendente de uma parábola (conclusão implicada).

Conhecida a análise da questão, na próxima subseção são apresentadas as respostas dos estudantes.

4.2.3 As respostas dos estudantes

Esta subseção apresenta as respostas da atividade proposta aos 14 estudantes que participaram da pesquisa. Para facilitar a análise, seguindo os critérios da teoria de conciliação de metas, da teoria da relevância e dos registros de representação semiótica, as respostas estão organizadas em três grupos: a) grupo de estudantes que se valem do registro gráfico; b) grupo de estudantes que se valem apenas do registro em língua natural para responder a questão; e c) grupo de estudantes que realizam tratamentos numéricos algébricos. A organização de cada grupo de respostas se pautou na semelhança e diversidade de registros mobilizados em cada resposta, considerando, neste caso, o conjunto de unidades significativas mobilizadas em cada conversão ou tratamento para responder a questão.

4.2.3.1 Grupo de estudantes que se valem do registro gráfico

Nesta seção de subseção, serão analisadas as respostas dos estudantes que tentaram converter o registro de representação algébrico para o registro de representação gráfica. Nessas respostas, observam-se outras conversões, tais como RRA em RLN, RRA em RRT e também RRA em RRG. Neste grupo de respostas estão os estudantes 1, 6, 7 e 14.

Estudante 7

A análise se inicia a partir da resposta do estudante 7, por ser aquele que mobiliza a maior diversidade de registros de representação. Ele mobiliza simultaneamente três conversões (RRA em RLN, RRA em RRT e RRA em RRG) e tratamentos implícitos para a determinação dos valores de $f(x)$ quando da substituição dos valores de x.

O estudante 7 produziu as seguintes respostas:

Registro em Língua Natural:
Função de 2º grau

Registro Tabular (esboço implícito de uma tabela)

$f(x) = x^2 + 1$

$f(0) = 1$

$f(1) = 2$

$f(2) = 5$

$f(3) = 10$

Registro Gráfico:

Justificativa:
Primeiramente, identifiquei a função do segundo grau, após estabeleci valores para x para ver se o gráfico é uma função do 2º grau (parábola).

O estudante 7, além de caracterizar a função como do 2º grau, esboçou uma tabela de valores ao listar verticalmente tratamentos algébricos para os valores $x = \{0,1,2,3\}$. Até este momento, sua resolução apresenta-se conciliada com a meta proposta pela pesquisadora. Contudo, ao converter os dados desses tratamentos no gráfico, ele não observa o campo de definição da função restrita aos números naturais $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Embora as coordenadas estejam corretamente estabelecidas no gráfico, ele une os pontos intermediários traçando uma curva ascendente de uma parábola, representando, desse modo, grandezas contínuas. A justificativa do estudante corrobora explicitamente esses procedimentos. Ele “identifica a função do segundo grau”, “estabelece os valores para x”, para então “ver se o gráfico é uma função do 2º grau (parábola)”.

A resposta do estudante 7 sugere, do ponto de vista da conciliação de metas, que ele passou por todas as etapas modeladas (admitindo-se aqui ser questionável o fato de a tabela ter ou não ter sido considerada). A rigor, este estudante é o que mais se heteroconcilia com a resposta inicialmente prevista pela pesquisadora, apesar de ele ter tratado como contínuas as grandezas que deveriam ter sido tratadas como discretas no gráfico cartesiano.

Veja-se o respectivo esquema.

Figura 35 – Esquema de resolução do estudante 7

[1]																			Q	Resolver a questão
[2]																	P	⇔	Q	Elaborar o gráfico ⇔ Resolver a questão
[3]															O	⇔	P		|	Obter pares ordenados ⇔ Elaborar o gráfico
[4]													N	⇔	O		|		|	Calcular valores de f(x) ⇔ Obter pares ordenados
[5]											M	⇔	N		|		|		|	Definir valores de x ⇔ Calcular valores de f(x)
[6]									L	⇔	M		|		|		|		|	Elaborar a tabela ⇔ Definir valores de x
[7]							K	⇔	L		|		|		|		|		|	Identificar as variáveis⇔ Elaborar a tabela
[8]					J	⇔	K		|		|		|		|		|		|	Caracterizar a função ⇔ Identificar as variáveis
[9]			I	⇔	J		|		|		|		|		|		|		|	Interpretar a fórmula ⇔ Caracterizar a função
[10]	H	⇔	I		|		|		|		|		|		|		|		|	Identificar domínio ⇔ interpretar a fórmula
[11]	H		|		|		|		|		|		|		|		|		|	Identificação do domínio (campo de definição)
[12]			I’		|		|		|		|		|		|		|		|	Interpretação da fórmula
[13]					J’		|		|		|		|		|		|		|	Caracterização da função
[14]							K’		|		|		|		|		|		|	Identificação das variáveis
[15]									L’		|		|		|		|		|	Elaboração da tabela
[16]											M’		|		|		|		|	Definição de valores de x
[17]													N’		|		|		|	Cálculo dos valores de f(x)
[18]															O’		|		|	Obtenção dos pares ordenados
[19]																	P’		|	Elaboração do gráfico
[20]																			Q’	Resolução da questão

Fonte: elaboração própria.

A resolução do estudante 7 também pode ser modelada a partir da etapa [11] do esquema pela teoria relevância. As primeiras suposições tratam da necessária interpretação do registro algébrico da função, tais como a identificação do campo de definição e a interpretação da fórmula, que envolve classificá-la como quadrática a partir do maior expoente da grandeza independente, bem como identificar as variáveis e sua classificação quanto à dependência.

S_1 – $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (representação do campo de definição da função/premissa implicada do enunciado do problema no registro algébrico);
S_2 – $f(x) = x^2 + 1$ (representação da relação entre as variáveis envolvidas/premissa implicada do enunciado do problema no registro algébrico);
S_3 – $S_1 \to S_4$ (por *modus ponens*);
S_4 – As grandezas variáveis envolvidas são não negativas (conclusão implicada);
S_5 – $S_2 \to S_6$ (por *modus ponens*);
S_6 – A função é do segundo grau (conclusão implicada);
S_7 – $(S_1 \wedge S_2) \to S_8$ (por *modus ponens conjuntivo*);
S_8 – A função $f(x) = x^2 + 1$ definida por $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é crescente (conclusão implicada);
S_9 – $S_2 \to S_{10}$ (por *modus ponens*);
S_{10} – Há uma variável independente e uma variável dependente na representação algébrica (conclusão implicada);

Finalizada esta interpretação inicial, segue-se um conjunto de inferências para a elaboração dos tratamentos na forma implícita de uma tabela.

S_{10} – Há uma variável independente e uma variável dependente na representação algébrica (premissa implicada);
S_{11} – $S_{10} \to S_{12}$ (por *modus ponens*);
S_{12} – A função pode ser convertida em tabela (conclusão implicada);
S_{13} – $S_{10} \to (S_{14} \wedge S_{15})$ (por *modus ponens*);
S_{14} – Podem-se definir os valores da grandeza x da representação algébrica (conclusão implicada);
S_{15} – Podem-se calcular os valores de $f(x)$ da representação algébrica (conclusão implicada);
S_{16} – $(S_{14} \wedge S_{15}) \to S_{17}$ (por *modus ponens conjuntivo*);
S_{17} – Podem-se determinar os pares ordenados $(x, f(x))$ a partir da determinação dos valores de x e de $f(x)$ (conclusão implicada);

Neste momento, por hipótese, o estudante já dispõe de informações que torna possível inferir a construção do registro gráfico. A elaboração do gráfico implica necessariamente converter as unidades significativas dos tratamentos (implicitamente uma tabela) em pontos representando pares ordenados no gráfico.

S_{17} – Podem-se determinar os pares ordenados $(x, f(x))$ a partir da determinação dos valores de x e de $f(x)$ (premissa implicada);
S_{18} – $S_{17} \to S_{19}$ (por *modus ponens*);
S_{19} – A determinação dos pares ordenados permitem traçar coordenadas no gráfico cartesiano (conclusão implicada);

S_4 – As grandezas variáveis envolvidas são positivas (premissa implicada);
S_{20} – ($S_4 \wedge S_{19} \rightarrow S_{21}$) (por *modus ponens*);
S_{21} – A representação gráfica em pontos é um padrão de linha curva crescente/ascendente de uma parábola (conclusão implicada).

A resposta sugere que o estudante mobilizou, pelo menos parcialmente, o campo de definição. O estudante considerou a natureza das grandezas envolvidas, arbitrando valores não negativos para a variável independente x. Isso pode ser visto na lista de tratamentos. Porém, na conversão dos dados tratados algebricamente para a tabela, parte dessa decodificação se apaga quando ele passa a tratar as grandezas como contínuas ao unir os pontos intermediários entre as coordenadas por uma linha. Desse modo, o campo de definição da função é relevante para a elaboração dos tratamentos, mas deixa de sê-lo na elaboração do gráfico.

Há várias hipóteses para esse comportamento, desde a mera desatenção até a não congruência entre os registros. Sabidamente, tabelas registram grandezas ponto a ponto mesmo no caso de grandezas contínuas (muito mais comuns em sala de aula). Na conversão, é habitual traçar as linhas, ignorando a fragilidade de o registro tabular explicitar o campo de definição. Trata-se de um hábito que se revela equivocado no exercício, porque, de fato, as grandezas eram discretas.

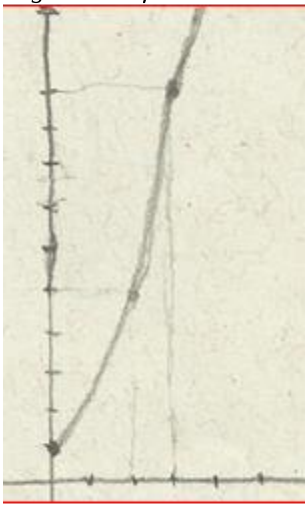
O estudante 7, comentando sobre seu desempenho revela o quanto essa questão é relevante. Ele assim se expressa: “Ainda bem professora que participei desta atividade, pois eu não reconhecia a importância do campo de definição de uma função. Eu sempre traçava o gráfico sem considerar esta informação. Eu iria ensinar errado”. Esse depoimento revela o quanto é importante propiciar aos estudantes estratégias de reflexão sobre os passos necessários para a resolução de problemas, rompendo com práticas que se revelam mais habituais do que conscientes. Como antevê a teoria da relevância, a primeira interpretação é a interpretação relevante e, nesse caso, o hábito de traçar linhas no plano cartesiano sem prestar atenção ao campo de definição precisa ser refletido.

Estudante 6

O estudante 6 produziu a seguinte resposta:

Registro em Língua Natural:
função do 2º grau crescente

Registro Gráfico:



Justificativa:
Meu primeiro entendimento.

Ao analisar o gráfico, observa-se que o estudante calculou os valores de $f(x)$ implicitamente para plotar no gráfico os pares ordenados de referência. Esta suposição é marcada pelo destaque dado no registro de representação gráfica de cada ponto correspondente aos pares ordenados da resposta – no caso $(0,1)$; $(2,5)$ e $(3,10)$. Observe-se que a linha do estudante, além de conectar os pares ordenados, extrapola o par $(3,10)$.

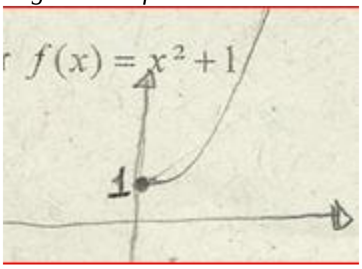
Como a curva se assemelha àquela da resposta correta, sugere-se que o estudante reconhece que a curvatura da função é voltada para cima. Ele interpreta adequadamente a fórmula $f(x) = x^2 + 1$ como 'função do 2º grau', mas ignora o campo de definição. O caminho da resolução sugere o cálculo correto dos pares ordenados. Como o estudante não leva em conta a restrição de a função ter sido definida nos números naturais, isso o leva a traçar uma linha contínua a partir do primeiro par ordenado seguindo os demais pares ordenados marcados no gráfico. Mais uma vez, o campo de definição da função não foi o suficientemente ostensivo para chamar a atenção sobre a natureza das grandezas variáveis envolvidas na atividade. Sua justificativa de que se tratava de seu "primeiro entendimento", infelizmente, pouco acrescenta.

Estudante 1

O estudante 1 produziu a seguinte resposta.

Registro em Língua Natural:
Função do 2º grau, crescente.

Registro Gráfico:



Justificativa:
Pensei em uma função do 2º grau, mas não analisei que ela estava definida no conjunto dos números naturais e tracei o gráfico, que deveria ser pontilhado.

O estudante 1 infere corretamente que se trata de uma função do 2º grau. Embora ele não considere o campo de definição ao traçar a linha curva ascendente de uma parábola, ele leva em consideração corretamente apenas valores não negativos (informação implícita na sua interpretação, mas explícita no registro gráfico).

A conformação da curva ascendente a partir das coordenadas (0,1) sugere que ele calculou pelo menos esse par ordenado. Dado que a curva se assemelha àquela da resposta correta, é possível inferir que ele tenha reconhecido, a partir do registro algébrico, que a curvatura da função é voltada para cima. Não há registros de outros tratamentos realizados pelo estudante nem do uso do registro tabular como intermediário.

O provável caminho de resolução é o que segue:

Figura 36 – Esquema de resolução do estudante 1

<table>
<tr><td>[1]</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Q</td><td>Resolver a questão</td></tr>
<tr><td>[2]</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>P</td><td>⇔</td><td>Q</td><td>Elaborar gráfico ⇔ Resolver a questão</td></tr>
<tr><td>[3]</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>O</td><td>⇔</td><td>P</td><td></td><td>|</td><td>Obter pares ordenados ⇔ Elaborar gráfico</td></tr>
<tr><td>[4]</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>N</td><td>⇔</td><td>O</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>Calcular f(x) ⇔ Obter pares ordenados</td></tr>
<tr><td>[5]</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>M</td><td>⇔</td><td>N</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>Definir valores de x ⇔ Calcular f(x)</td></tr>
<tr><td>[6]</td><td></td><td></td><td>L</td><td>⇔</td><td>M</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>Interpretar fórmula ⇔ Definir valores de x</td></tr>
<tr><td>[7]</td><td>K</td><td>⇔</td><td>L</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>Caracterizar a função⇔ Interpretar fórmula</td></tr>
<tr><td>[8]</td><td>K</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>Caracterização da função</td></tr>
<tr><td>[9]</td><td></td><td></td><td>L’</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>Interpretação da fórmula</td></tr>
<tr><td>[8]</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>M’</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>Definição de valores de x</td></tr>
<tr><td>[9]</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>N’</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>Cálculo dos valores de f(x)</td></tr>
<tr><td>[10]</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>O’</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>Obtenção dos pares ordenados</td></tr>
<tr><td>[11]</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>P’</td><td></td><td>|</td><td>Elaboração do gráfico</td></tr>
<tr><td>[12]</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Q’</td><td>Resolução da questão</td></tr>
</table>

Fonte: elaboração própria

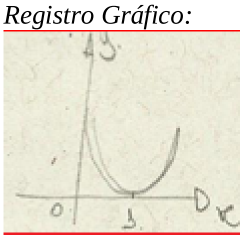
Os passos de [8] a [12] podem ser descritos do ponto de vista da teoria da relevância da seguinte forma.

> S_1 – A relação entre as grandezas variáveis é definida por $f(x) = x^2 + 1$(premissa implicada do enunciado do problema);
> S_2 – O maior expoente de $f(x) = x^2 + 1$ é 2 (premissa implicada do enunciado do problema/identificação do expoente 2 como uma unidade significativa relevante);
> S_3 – $(S_1 \wedge S_2) \rightarrow S_4$ (por *modus ponens conjuntivo*);
> S_4 – A função $f(x) = x^2 + 1$ é função do 2º grau (conclusão implicada);
> S_5 – $S_4 \rightarrow S_6$ (por *modus ponens*);
> S_6 – O gráfico representa uma parábola (conclusão implicada).

O estudante reconhece seu equívoco na devolução da questão, quando justifica: “[...] não analisei que ela [a função] estava definida no conjunto dos números naturais [...]”. Isso sugere que a parte do registro algébrico que define o campo dos números naturais não foi suficientemente ostensiva para restringir a função a esse universo. Consequentemente, ele traça um gráfico considerando as grandezas contínuas que, segundo ele, deveria ser “pontilhado”. Essa resposta sugere imprecisão terminológica, uma vez que ‘traçar’ está sendo tomado como TRAÇAR UMA CURVA COM UMA LINHA CONTÍNUA e ‘pontilhado’ pode tanto ser explicado como REPRESENTAR UMA CURVA COM UMA LINHA PONTILHADA (mantendo a incorreção do gráfico) como REPRESENTAR OS PONTOS DAS COORDENADAS FORNECIDAS PELOS PARES ORDENADOS (corrigindo o gráfico).

Estudante 14

O estudante 14 apresenta a seguinte resposta.

> *Registro em Língua Natural:*
> função do 2º grau
>
> *Registro Gráfico:*
>
> 
>
> *Justificativa:*
> No primeiro instante pensei numa função do 2º grau com a concavidade voltada para cima. E não prestei a atenção no (+1) e no $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ somente me importei com uma função do 2º grau com concavidade voltada para cima.

Ao analisar resposta e justificativa, pode-se considerar que as unidades significativas do registro algébrico que foram ostensivas foram o expoente ‘2’ para a grandeza independente, correspondendo à caracterização da função como do segundo grau, além da suposição implícita no registro algébrico referente a informação de ser uma função do segundo grau com concavidade voltada para cima. A caracterização da função que trata da concavidade da parábola provém do registro algébrico, e é identificada no sinal do coeficiente do termo que tem o x^2 (implicitamente, o valor $+1$).

A resposta deste estudante mostra a conversão do RRA para o RLN e a tentativa de esboço do RRA para o RRG. No entanto, este estudante não inferiu corretamente a influência do termo independente de x no registro algébrico, no caso o 1, que representa o valor da ordenada do ponto que se localiza sobre o eixo das ordenadas, no caso específico no ponto $(0,1)$ e não $(1,0)$ como inferiu incorretamente o estudante 14.

O esquema dessa resolução contém apenas três ações.

Figura 37 – Esquema de resolução do estudante 14

[1]							Q	Resolver a questão
[2]					P	$\Leftrightarrow$	Q	Elaborar o gráfico $\Leftrightarrow$ Resolver a questão
[3]			O	$\Leftrightarrow$	P		|	Caracterizar a função $\Leftrightarrow$ Elaborar o gráfico
[4]	N	$\Leftrightarrow$	O		|		|	Interpretar a fórmula $\Leftrightarrow$ Caracterizar a função
[5]	N		|		|		|	Interpretação da fórmula
[6]			O’		|		|	Caracterização da função
[7]					P’		|	Elaboração do gráfico
[8]							Q’	Resolução da questão

Fonte: elaboração própria

O conjunto de suposições que são mobilizadas pelo estudante não se heteroconcilia com a resposta-alvo. Neste caso, o campo de definição da função $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ é totalmente ignorado, salvaguardando-se intuitivamente que este não ultrapassa, no registro gráfico, os valores negativos para as grandezas envolvidas.

Do ponto de vista da teoria da relevância, a resposta do estudante 14 pode ser descrita por um conjunto de 6 suposições que envolvem apenas informações sobre a fórmula.

S_1 – $f(x)=x^2+1$ (representação da relação entre as variáveis envolvidas/premissa implicada do enunciado do problema no registro algébrico);
S_2 – $S_1\rightarrow(S_3\wedge S_4)$ (por *modus ponens*);
S_3 – A função é do segundo grau (conclusão implicada);
S_4 – O valor do 1 representa o ponto de intersecção da função no eixo das abscissas (conclusão implicada (interpretação incorreta do RRA));

> S_5 – $S_3 \rightarrow S_6$ (por *modus ponens*);
> S_6 – A representação gráfica da função do segundo grau é uma parábola (conclusão implicada).

Na sequência apresenta-se a análise do segundo grupo de estudantes, aqueles que se valem da conversão para o registro de representação em língua natural.

4.2.3.2 Grupo de estudantes que se valem apenas do registro em língua natural para responder a questão

Nessa seção se subseção está o grupo de estudantes que mobilizou apenas unidades significativas do RLN para responder a atividade. Apesar deste grupo de estudantes ter respondido adequadamente a atividade no sentido de terem sido mobilizados pelo menos dois registros de representação, suas respostas, em geral, estão longe de permitir saber o nível de compreensão dos conceitos envolvidos no exercício. A primeira interpretação relaciona-se com a representação em língua natural do registro algébrico, parecendo que o estudante realizou uma mera 'tradução' de registro. Este grupo de respostas corresponde às respostas dos estudantes 3, 4, 5, 8, 9, 11 e 12.

Estudante 3

O estudante 3 apresentou as seguintes respostas.

> *Registro em Língua Natural:*
> Como x está entre os Naturais, qualquer valor estabelecido para x, dentre os naturais, alterará o valor da função.
>
> *Justificativa:*
> Lembrou-me uma função, onde x poderia ser qualquer valor dentre os naturais.

A resposta do estudante está correta em princípio. Na sequência lexical 'como x está entre os Naturais', sugere-se que ele considerou o domínio de definição da função. A sequência 'qualquer valor estabelecido para x, dentre os naturais' sugere não somente que ele reconhece que a variável independente é arbitrada, como também que essa variável deve ser arbitrada entre os números naturais. Por fim, na sequência lexical 'alterará o valor da função', sugere-se que ele reconhece o valor da variável dependente.

Em sua justificativa, ele reforça essa interpretação. A sequência 'Lembrou-me uma função' sugere que ele considera a fórmula como um exemplar de uma função; e a sequência ‘onde x poderia ser qualquer valor dentre os naturais’ reforça que ele está considerando o domínio da função. A resolução do estudante pode ser assim modelada.

Figura 38 – Esquema de resolução do estudante 3

[1]					Q	Resolver a questão
[2]				P	$\Leftrightarrow$ Q	Definir valores de x $\Leftrightarrow$ Resolver a questão
[3]			O	$\Leftrightarrow$ P	|	Identificar as variáveis $\Leftrightarrow$ Definir valores de x
[4]		N	$\Leftrightarrow$ O	|	|	Caracterizar a função $\Leftrightarrow$ Identificar as variáveis
[5]	M	$\Leftrightarrow$ N	|	|	|	Identificar domínio $\Leftrightarrow$ Caracterizar a função
[6]	M	|	|	|	|	Identificação do domínio
[7]		N’	|	|	|	Caracterização da função
[8]			O’	|	|	Identificação das variáveis
[9]				P’	|	Definição de valores de x
[10]					Q’	Resolução da questão

A resolução do estudante envolve quatro submetas: identificar o domínio, caracterizar a função, identificar as variáveis e definir os valores de x. Do ponto de vista da relevância, isso implica a seguinte cadeia de inferências:

> S_1 – $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (representação do campo de definição da função, x está nos naturais/premissa implicada do enunciado do problema no registro algébrico);
> S_2 – $f(x) = x^2 + 1$ (representação da relação entre as variáveis envolvidas/premissa implicada do enunciado do problema no registro algébrico);
> S_3 – $S_1 \rightarrow S_4$ (por *modus ponens*);
> S_4 – Há uma variável independente e uma variável dependente na representação algébrica (conclusão implicada);
> S_5 – $S_1 \rightarrow S_6$ (por *modus ponens*);
> S_6 – Existem valores para $f(x)$ da representação algébrica $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (conclusão implicada).

Apesar da correção da resposta, ela não é suficiente, pois não identifica características importantes da fórmula que permitiriam enquadrá-la como quadrática, ser representada por uma curva ascendente de uma parábola, e assim por diante. Nesse caso é a formulação que parece não ser suficientemente ostensiva. Esse comportamento também ocorre nas respostas dos estudantes 4 e 8.

Estudante 4

> *Registro em Língua Natural*
> Função pertencente nos números naturais.

Justificativa
Não observei o $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Estudante 8

Registro em Língua Natural
Função de número natural.

Justificativa
Não observei a função quadrática.

A resposta dos estudantes 4 e 8 sugerem ter sido ostensivo somente o domínio da função. Paradoxalmente, o estudante 4 contradiz-se ao justificar que ele justamente não observou o campo de definição "Não observei o f : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$" (sic). A justificativa do estudante 8 sugere que ele é capaz de caracterizar corretamente a função a partir do registro algébrico "Não observei a função quadrática".

Seguem as respostas dos estudantes 5, 9 e 12.

Estudante 5

Registro em Língua Natural
Representa uma função de 2º grau, definida no conjunto dos números naturais e com curvatura voltada para baixo.

Justificativa
Eu imaginei um gráfico de uma função de 2º grau, no qual sua curvatura para baixo, semelhante à questão 2.

Estudante 9

Registro em Língua Natural
Trata-se de uma representação de uma função do segundo grau, definida de naturais em naturais.

Justificativa
Essa é a representação de uma função do segundo grau em que seu domínio e seu contradomínio estão definidos no universo dos números naturais.

Estudante 12

Registro em Língua Natural
Função de 2º grau, definida em naturais.

Justificativa
Porque é a forma que a função está definida sendo que o expoente indica o grau de função.

A resposta e a justificativa dos estudantes 5, 9 e 12 sugere que eles levaram em consideração o campo de definição da função e a fórmula (especialmente o expoente). No entanto, há uma inferência incorreta do estudante 5 em relação ao desenho gráfico sem apresentar indícios de utilização de unidades significativas gráficas para a sua construção. O aluno considera que a fórmula redundará num gráfico com concavidade para baixo. Sua justificativa sugere que ele imaginou um gráfico com essas características “Eu imaginei um gráfico de uma função de 2º grau, no qual sua curvatura para baixo [...]”.

Segue-se a descrição dessas respostas do ponto de vista da conciliação de metas.

Figura 39 – Esquema de resolução dos estudantes 5, 9 e 12

```
 [1]                               Q   Resolver a questão
 [2]                          P ⇔ Q   Identificar as variáveis ⇔ Resolver a questão
 [3]                  O ⇔ P       |   Caracterizar a função ⇔ Identificar as variáveis
 [4]          N ⇔ O       |       |   Interpretar a fórmula ⇔ Caracterizar a função
 [5]   M ⇔ N       |       |       |   Identificar domínio ⇔ Interpretar a fórmula
 [6]   M      |       |       |       |   Identificação do domínio (campo de definição)
 [7]          N'      |       |       |   Interpretação da fórmula
 [8]                  O'      |       |   Caracterização da função
 [9]                          P'      |   Identificação das variáveis
[10]                                  Q'  Resolução da questão
```

Fonte: elaboração própria

Conforme a teoria da relevância, o raciocínio poderia ser assim modelado.

S_1 – $f(x) = x^2 + 1$ (representação da relação entre as variáveis envolvidas/premissa implicada do enunciado do problema no registro algébrico);
S_2 – $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (representação do campo de definição da função/premissa implicada do enunciado do problema do registro algébrico);
S_3 – $S_1 \to S_4$ (por *modus ponens*);
S_4 – A função é do segundo grau (conclusão implicada/premissa implicada);
S_5 – $(S_1 \wedge S_2) \to S_6$ (por *modus ponens conjuntivo*);
S_6 – A função $f(x) = x^2 + 1$ definida $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tem curvatura para baixo (conclusão implicada).

Segue, por fim, a análise da resposta do estudante 11.

Estudante 11

Registro em Língua Natural
É uma forma de representar uma função.

Justificativa
Eu entendi que era para dizer o que dizia na função.

A resposta do estudante 11 é evasiva. Dizer que se trata de uma forma de representar uma função, embora correto, não permite identificar quaisquer aspectos relevantes da representação. O suposto esquema de resolução é o que segue.

Figura 40 – Esquema de resolução dos estudantes 11

[1]			Q	Resolver a questão
[2]	P	$\Leftrightarrow$	Q	Interpretar da fórmula $\Leftrightarrow$ Resolver a questão
[3]	P		|	Interpretação da fórmula
[4]			Q’	Resolução da questão

Nos termos da teoria da relevância, o estudante realizou apenas uma inferência:

S_1 – $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ (do registro algébrico, representação do campo de definição da função, x está nos naturais (premissa implicada do enunciado do problema))
S_2 – $f(x)=x^2+1$(do registro algébrico, representação da relação entre as variáveis envolvidas (premissa implicada do enunciado do problema)) ;
S_3 – $(S_1 \wedge S_2) \rightarrow S_4$ (por *modus ponens conjuntivo*);
S_4 – É uma forma de interpretar uma função (conclusão implicada);

Conhecidas as respostas do segundo grupo, seguem as respostas do terceiro grupo, ou seja, aquelas respostas que sugerem a realização de tratamentos numéricos algébricos:

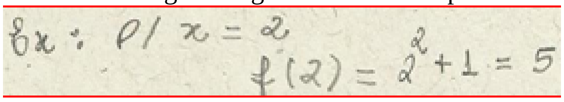
4.2.3.3 Grupo de estudantes que realizam tratamentos numéricos algébricos

Nessa seção se subseção estão classificados os estudantes que realizam tratamentos algébricos, sem remetê-los ao registro gráfico, é o caso dos estudantes 2, 10 e 13. O estudante 2 converteu o RRA na forma de cálculo numérico conciliado com o RLN. Conforme ilustra a resposta a seguir.

Estudante 2

Registro em Língua Natural
Que qualquer nº natural x substituo na função.

Tratamento no registro algébrico com exemplo numérico



Justificativa

Pensei em substituir no lugar do x, números inteiros $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. É uma função definida nos $\mathbb{N}$, onde coloco números naturais no lugar do x e resulta em um novo número natural.

Exceto pela não conversão da função em registro gráfico, este estudante acerta a atividade. Para ele, supostamente considerando domínio e fórmula, é possível substituir qualquer número natural na variável independente “Que qualquer nº natural x substituo na função”. Essa resposta em língua natural é exemplificada pelo tratamento. Ao dizer “Ex. p/ $x = 2$”, ele arbitra um valor para a grandeza independente e procede ao tratamento correto a partir da fórmula para determinação da grandeza dependente:

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$f(2) = 2^2 + 1$$
$$f(2) = 5$$

Em termos de conciliação de metas, esse comportamento pode ser assim descrito:

Figura 41 – Esquema de resolução do estudante 2

[1]											Q	Resolver a questão
[2]									P	⇔	Q	Calcular valores de f(x) ⇔ Resolver a questão
[3]							O	⇔	P		|	Definir valores de x ⇔ Calcular valores de f(x)
[4]					N	⇔	O		|		|	Identificar as variáveis ⇔ Definir valores de x
[5]			M	⇔	N		|		|		|	Interpretar a fórmula ⇔ Identificar as variáveis
[6]	L	⇔	M		|		|		|		|	Identificar domínio ⇔ interpretar a fórmula
[7]	L		|		|		|		|		|	Identificação do domínio (campo de definição)
[8]			M’		|		|		|		|	Interpretação da fórmula
[9]					N’		|		|		|	Identificação das variáveis
[10]							O’		|		|	Definição de valores de x
[11]									P’		|	Cálculo dos valores de f(x)
[12]											Q’	Resolução da questão

Fonte: elaboração própria

Conforme a teoria da relevância, a cadeia de inferências é a seguinte.

S_1 – $f:\ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (representação do campo de definição da função/premissa implicada do enunciado do problema no registro algébrico)
S_2 – $f(x) = x^2 + 1$ (representação da relação entre as variáveis envolvidas/premissa implicada do enunciado do problema no registro algébrico);
S_3 – $S_1 \rightarrow S_4$ (por *modus ponens*);
S_4 – As grandezas variáveis envolvidas são não negativas (conclusão implicada na justificativa);
S_5 – $S_2 \rightarrow S_6$ (por *modus ponens*);
S_6 – Há variável independente e a variável dependente na representação algébrica (conclusão implicada);

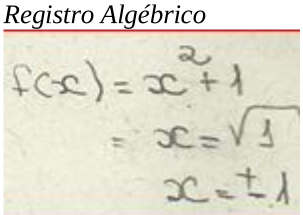
O estudante 2 infere que o registro algébrico possibilita determinar pares ordenados inclusive realiza este cálculo, substituindo os valores de $x = 2$ e obtém na resposta o número 5, mas em nenhum momento este estudante infere que esses valores podem ter a representação tabular ou gráfica.

S_7 – $(S_6 \rightarrow (S_8 \wedge S_9))$ (por *modus ponens*);
S_8 – Definir os valores da grandeza x da representação algébrica $f:\ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; (conclusão implicada);
S_9 – Calcular os valores de $f(x)$ da representação algébrica $f:\ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; (conclusão implicada);
S_{10} – $S_9 \rightarrow S_{11}$; (conclusão implicada);
S_{11} – O valor de x = 2 da variável independente corresponde a y = 5 da variável dependente. (conclusão implicada).

Os últimos dois estudantes, 10 e 13, procedem aos cálculos, mas erram. Eles tentam converter a função do RRA em uma equação que, supostamente, objetiva determinar as raízes. Observe-se que o algoritmo utilizado está incorreto, pois a função em questão, definida no universo dos números naturais não tem raízes naturais.

Estudante 10

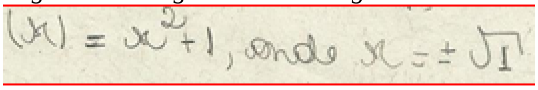
Registro Algébrico


$f(x) = x^2 + 1$
$= x = \sqrt{1}$
$x = \pm 1$

Justificativa
Função dos números naturais, forma errada. Calculei sem atenção, hoje mesmo sem a professora falar saberia calcular.

Estudante 13

Registro em Língua Natural e Algébrico



Função: naturais para natural definida pela função $(x) = x^2 + 1$.

Justificativa

Nesta também no dia veio apenas a leitura, mas a resposta deveria ser mais completa e correta, acho que esse tipo de atividade nos pegou de surpresa e a forma de interpretar acabou ficando errado ou mal explicada.

Estas duas respostas são surpreendentes, porque além de não serem conciliáveis com a resposta-alvo do ponto de vista da heteroconciliação, estão francamente equivocadas do ponto de vista da autoconciliação.

Por hipótese, a descrição para a resposta dada, pode ser assim expressa.

Figura 42 – Esquema de resolução dos estudantes 10 e 13

[1]							Q	Resolver a questão
[2]					P	⇔	Q	Determinar as raízes da função f(x) ⇔ Resolver a questão
[3]			O	⇔	P		|	Igualar a zero ⇔ Determinar as raízes da função f(x)
[4]	M	⇔	O		|		|	Tratar o registro algébrico ⇔ Igualar a zero
[5]	M		|		|		|	Tratamento do registro algébrico
[6]			O’		|		|	Igualdade da função a zero
[7]					P’		|	Determinação das raízes da função f(x)
[8]							Q’	Resolução da questão

Fonte: elaboração própria.

Estes estudantes falham na interpretação da função. É provável que estes alunos ao interpretar o registro algébrico da função tenham sido guiados pela hipotética necessidade de determinação das raízes da função como referência para a elaboração do registro gráfico. Porém ao determinarem tais raízes da função, ou seja, os valores de x para os quais a função é nula, estes alunos realizaram os tratamentos de forma incorreta, pois esta função não tem raízes no campo de definição dos naturais, ou seja, esta função não intersecta o eixo das abscissas. Em sua justificativa, o estudante 10 percebe que sua resolução está incorreta. Em outras palavras, ele não considerou o sinal do termo independente $+1$ que, ao realizar o cálculo da raiz, fica com sinal -1 e, consequentemente, não tem raiz natural. Este estudante, ao retomar a atividade, percebe que suas primeiras inferências em relação ao registro dado estão incorretas. Em sua justificativa, ele assim se manifesta: 'Função dos números naturais, forma errada. Calculei sem atenção, hoje mesmo sem a professora falar saberia calcular'.

O estudante 13 infere que a fórmula se trata de uma função do segundo grau. Ao tentar determinar as raízes, ação inconsistente neste caso, comete um equivoco no algoritmo em si. Isso sugere dificuldade de operacionalização do objeto matemático relacionado com a equação do segundo grau. Sua resolução se assemelha ao caminho desempenhado pelo estudante 10. A diferença está em sua justificativa: 'Nesta também no dia veio apenas a leitura, mas a resposta deveria ser mais completa e correta, acho que esse tipo de atividade nos pegou de surpresa e a forma de interpretar acabou ficando errado ou mal explicada'. Nesta resposta observa-se que o estudante está mais acostumado com uma questão que aponta um caminho de resolução.

Do ponto de vista da relevância, as inferências podem ser assim descritas.

> S_1 – $f(x) = x^2 + 1$(do registro algébrico, representação da relação entre as variáveis envolvidas (premissa implicada do enunciado do problema));
> S_2 – Determinar os valores das raízes de $f(x)$ da representação algébrica (premissa implicada do enunciado do problema)
> S_3 – $S_2 \rightarrow S_4 \wedge S_5$ (por *modus ponens conjuntivo*);
> S_4 – Igualar a equação $x^2 + 1 = 0$ para determinar as raízes (premissa implicada do enunciado do problema)
> S_5 – A solução da equação dada é $x = \pm\sqrt{1}$ (premissa incorreta implicada do enunciado do problema);

Os dois alunos partem da hipótese abdutiva equivocada de que determinar as raízes identificadas na proposição Q, é necessário para resolver a questão. Isso sugere que eles não compreenderam adequadamente o significado das unidades significativas do registro algébrico e, desse modo, suas respostas não se heteroconcilia com a resposta-alvo.

Conhecidas as respostas dos estudantes, é possível discutir em conjuntos os resultados dessa ilustração na subseção seguinte,

4.2.4 Discussão dos resultados

Na subseção destinada à análise da resposta-alvo foi estabelecido um conjunto de dez critérios de análise das respostas dos estudantes. A resolução de cada estudante foi, então, comparada com esses critérios, o que permitiu gerar uma tabela que sintetiza o desempenho dos estudantes. Nesta tabela, as linhas representam os critérios, desde a identificação do campo de definição até a resolução da questão, e as colunas representam o desempenho de cada estudante. Na legenda da tabela estão apresentados os critérios de análise ('1' para a consecução adequada da ação; '0' para a consecução inadequada; '?' para a provável execução da ação; e '–' para a inexecução da ação). Veja-se a tabela.

Tabela 7 – Execuções de metas na apresentação de uma possível resposta para a atividade

Ação	*Estudantes*													
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
1. Identificação do campo de definição	-	1	1	1	1	-	-	1	1	-	-	1	1	-
2. Interpretação da fórmula	1	1	0	-	0	1	1	-	-	0	-	-	0	0
3. Caracterização da função	1	-	-	-	1	1	1	-	1	-	-	1	-	1
4. Identificação das variáveis	1	1	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	0
5. Elaboração da tabela	?	-	-	-	-	?	?	-	-	-	-	-	-	-
6. Definição de valores de x	1	1	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	0
7. Cálculo de valores de f(x)	1	1	-	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	0
8. Obtenção de pares ordenados	?	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	0
9. Elaboração do gráfico	0	-	-	-	-	0	0	-	-	-	-	-	-	0
10. Resolução da questão	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Legenda:
1 corresponde a uma ação heteroconciliadas ou adequada;
0 corresponde a uma ação heteroinconciliada ou inadequada;
? corresponde à provável execução da ação;
– corresponde a uma inexecução da ação.
Fonte: elaboração própria.

As duas primeiras linhas da tabela dão conta das duas proposições que compõem a questão: a de que se trata de uma função restrita ao domínio dos naturais $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (implicando dizer que a função trata de grandezas discretas, dado que o conjunto de números naturais não suporta a continuidade) – P; e a de que se trata de uma função do segundo grau com características expressas na fórmula $f(x) = x^2 + 1$(correspondendo à lei de formação da função) – Q. Somente o atendimento dessas duas proposições configura acerto na atividade.

No que se refere à proposição P, apenas oito estudantes identificaram corretamente o campo de definição [1]. Isso implica dizer que o campo de definição não foi suficientemente ostensivo para ser considerado relevante para seis estudantes. Fazem parte desse último grupo, todos os estudantes que se utilizaram do registro gráfico (estudantes 1, 6, 7 e 14). A hipótese mais razoável para esse comportamento é a da prevalência de funções envolvendo grandezas restritas ao campo dos números reais na escola. Isso justificaria a falta de atenção dos estudantes na elaboração da resposta, mesmo entre aqueles que revelaram melhor desempenho na atividade. Paradoxalmente, os estudantes 4 e 8 somente observaram essa proposição como relevante para produzir suas respostas.

Apenas quatro estudantes interpretaram corretamente a fórmula [2]. Fazem parte desse grupo os três melhores desempenhos entre os estudantes que consideraram o registro gráfico (estudantes 1, 6 e 7), e o estudante 2, que acerta a atividade. A fórmula foi considerada erroneamente pelos estudantes 3, 5, 10, 13 e 14; ignorada pelos estudantes 4, 8, 9, 11 e 12.

Considerando-se somente as duas linhas superiores da tabela, observa-se que apenas o estudante 2 resolveu a questão corretamente. Embora ele não tenha mobilizado mais do que dois registros de representação, foi o único a atender ao décimo critério (linha 10).

Caracterizar a função [3] foi uma ação relevante para sete estudantes e a mais relevante para os estudantes 5, 9 e 12. Isso pode ser parcialmente explicado pelo comando da questão, na medida em que se solicitou expressar o que primeiro viesse à mente ao “ao acessar o registro de representação”. Práticas de classificação são recorrentes em sala de aula, e isso pode ter contribuído para o resultado.

A identificação das variáveis [4] foi feita por 5 estudantes, dentre os quais, os quatro com melhores desempenhos (1, 2, 6 e 7).

Nenhum estudante elaborou explicitamente uma tabela [5] como registro intermediário entre o registro algébrico e o registro gráfico. Contudo, pode-se conjecturar que os três estudantes que desenvolveram o gráfico adequadamente (1, 6 e 7) elaboraram uma tabela implícita. Vale lembrar que o estudante 7 procede a sucessivos tratamentos alinhados verticalmente ao modo de uma tabela.

As etapas [6], Definição de valores de x, [7], Cálculo de valores de f(x), e [8], Obtenção de pares ordenados, foram desenvolvidas corretamente somente pelos estudantes 1, 6 e 7. Nesses casos, essas ações estão a serviço da elaboração do gráfico [9]. Contudo, como já antecipado, a inobservância do campo de definição da função faz com que esses três estudantes tracem linhas entre os pontos do plano cartesiano, implicando ter tratado a função no campo dos números reais. O estudante 14 erra esses procedimentos.

No que se refere à análise global desse exercício, pôde-se constatar que todos os estudantes buscaram alguma solução, mobilizando um conjunto mínimo de inferências. Houve também a mobilização cognitiva de pelos menos dois registros de representação, o algébrico e o da língua natural. A diversidade de soluções demonstra que um mesmo registro de representação pode mobilizar diferentes inferências nos indivíduos dependendo do que estes têm armazenado em seu ambiente cognitivo. Tal característica corrobora a tese de que certos aspectos parciais do objeto dinâmico, no sentido dado por Peirce (1980), tornam-se manifestos a partir das pistas do objeto imediato. Também foi possível observar que nem todos os passos inferenciais revelaram-se explícitos nas respostas. Há casos onde o padrão de curva desenhado pelo estudante deixa implícitos seus tratamentos (estudante 1) e o provável recurso a uma tabela (estudantes 1, 6 e 7).

Outro aspecto a ser observado é o de que nenhum dos estudantes acertou plenamente a atividade, quando se compara seus desempenhos com o desempenho-alvo projetado pela pesquisadora. O estudante 2, de fato, acerta a tarefa no que se refere ao processamento correto das proposições P e Q que compõem a atividade. Contudo, ele se limita a exemplificar um tratamento. Não é possível, portanto, identificar em sua resposta se ele seria capaz de operar com o conceito de função em outros registros de representação.

Para os estudantes que desenvolveram melhor a questão (estudantes 1, 6 e 7), a informação sobre o campo de definição da função $f:\ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ não foi suficientemente relevante para evitar que traçassem curvas nos gráficos, expressando a resposta no campo de definição dos números reais. Guiados pelo conceito de meta, os estudantes elaboraram um plano que, corretamente, incluía a conversão da lei de formação da função em uma representação gráfica pertinente. Contudo, não processaram adequadamente os insumos da atividade, esquecendo-se da primeira proposição e, desse modo, levando em conta somente a segunda, muito provavelmente por ser prevalente o trabalho com gráficos definidos no campo dos números reais na sala de aula.

Em termos lógicos, ocorreu uma regra de *eliminação-e*, segundo a qual diante da verdade de duas proposições conjuntas P e Q, segue-se a verdade de cada uma das proposições em separado. Admitindo-se, por hipótese, que a proposição P equivale ao campo de definição da função $f:\ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; que a proposição Q equivale à lei de formação $f(x) = x^2 + 1$; e que as inferências produtivas para a elaboração do gráfico R decorrem da observação da lei de formação, fácil de ver que a proposição P pode ser esquecida.

$(P \wedge Q) \rightarrow R$
$Q \rightarrow R$
R

Outro aspecto observado nas respostas dos estudantes 1, 6 e 7, reitere-se, é o de que nenhum estudante mobilizou explicitamente o registro de representação tabular como registro intermediário entre o registro algébrico e o registro gráfico. Apenas foram apresentados indícios deste registro pelos estudantes 1, 6 e mais significativamente explícito pelo estudante 7. Questionado posteriormente pela pesquisadora sobre o processo de marcação de coordenadas na elaboração do gráfico, o estudante 6 respondeu que havia realizado os cálculos 'de cabeça', sem registrá-los numa tabela.

Em relação à mobilização de pelo menos dois registros de representação semiótica, hipótese apresentada por Duval como fundamental para uma visão mais consistente dos objetos matemáticos, observam-se em algumas das respostas indícios desta coordenação. Os estudantes que se valem do registro gráfico (estudantes 1, 6 e 7 (mas não o estudante 14)) sugerem ter uma consciência mais apurada do conceito de função. As inferências do estudante 14, contudo, não se conciliam com a resposta-alvo que foi projetada pela pesquisadora.

Entre os estudantes que se valem apenas do registro em língua natural, os dados sugerem ter havido antes a percepção de alguma das características das unidades significativas do registro do que propriamente a operação com conceitos. Em outras palavras, os resultados sugerem que eles são capazes de inferir aspectos relevantes das funções a partir das unidades significativas (por exemplo, que se trata de uma função do 2º grau considerando o maior expoente da variável independente da lei de formação), mas não necessariamente aspectos mais intrínsecos ao objeto em pauta. Não sem motivo, boa parte dos estudantes realizaram inferências apenas relacionadas às proposições P e Q em língua natural como, por exemplo, dizer que se tratava de uma função quadrática definida no campo dos naturais.

Por fim, vale destacar que as teorias postas em contato nesta tese foram capazes de descrever e explicar os fenômenos que ocorreram nesta ilustração. Em primeiro lugar, foi possível demonstrar com a arquitetura da teoria de conciliação de metas de Rauen (2014) que todos os estudantes estabeleceram um plano implícito para a realização da atividade. Os estudantes que projetaram planos envolvendo a elaboração de gráficos, obviamente, produziram resultados mais robustos, que implicaram a coordenação de pelo menos três registros de representação. A despeito do equívoco do esquecimento da natureza das grandezas variáveis constituintes do campo de definição da função, o plano elaborado foi consistente e poderia ter resultado numa solução plenamente conciliada com a solução-alvo.

No interior de cada planejamento, foi possível demonstrar também como o procedimento de compreensão guiado pelo conceito de relevância opera diminuindo custos de processamento. Os estudantes encontraram rotas de menor esforço para dar conta de seus planejamentos. Um dado relevante foi o fato de os três estudantes dispensarem a elaboração de tabelas quando podiam traçar as coordenadas com valores tratados mentalmente (estudantes 1 e 6) ou a partir de uma lista de tratamentos explícitos (estudante 7). O esquecimento da natureza das grandezas variáveis por esses estudantes também pode ser explicado quer pela regra de *eliminação-e*, dado que as generalizações relevantes provêm da lei de formação, como pela recorrência de exercícios com números reais em sala de aula (uma espécie de generalização indutiva ou efeito de treinamento).

Por fim e não menos relevante, guiado pelas noções de meta e de relevância, foi possível demonstrar a importância de não somente identificar as unidades significativas de cada registro (entradas lexicais em termos de relevância), mas tratar e converter registros adequadamente. A ilustração permitiu descrever e explicar como essas operações cognitivas, guiadas por uma relação relevante de custos e benefícios cognitivos estão a serviço de um plano em direção a uma meta conciliável.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese emergiu de anseios da pesquisadora em buscar em outras áreas de conhecimento aportes teóricos que objetivam explicar por que o processo comunicativo em sala de aula muitas vezes não funciona ou, mesmo funcionando, por que não ocorre o processo de aprendizagem esperado pelo professor.

O estudo parte da constatação que os objetos matemáticos necessitam de registros de representação para serem acessados (DUVAL, 2009, 2011) e que a transformação desses objetos de conhecimento em objetos de ensino não prescinde da Língua Natural como registro fundante do processo de comunicação. Duval considera que a compreensão qualificada de um objeto matemático implica a mobilização de pelo menos dois registros de representação, considerando neste processo a identificação das unidades significativas de cada registro mobilizado, os tratamentos e as conversões permitidas nesses registros.

Mobilizar diferentes registros de representação semiótica em Matemática, contudo, implica considerar uma economia de custos e benefícios cognitivos – tal como descrita e explicada pela teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986/1995) – em geral aumentados quando se coordenam diferentes registros de representação. Quando um estudante domina um conjunto de possibilidades de respostas para uma situação problema, por hipótese, escolhe, dentro deste conjunto, aquele que sugere um caminho de menor esforço cognitivo. Todavia, para alcançar essa expertise, o estudante precisa despender maior esforço para dominar essas diferentes rotas de resolução.

Segundo Rauen (2013, 2014), esse paradoxo pode ser explicado, subordinando a noção de relevância a uma noção superordenada de metas a serem conciliadas. Nesse caso, os indivíduos projetam metas finais para as quais lançam hipóteses abdutivas de solução que tanto justificam maiores dispêndios energéticos iniciais, como explicam a escolha por rotas de menor esforço cognitivo quando se domina essas rotas.

Diante desse contexto, este estudo defende a tese de que a noção de conciliação de metas superordena a noção de relevância cognitiva que, por sua vez, superordena a identificação de unidades significativas, os tratamentos e as conversões de diferentes registros de representação semiótica na resolução de qualquer demanda em Matemática.

Mais formalmente, esta tese propôs três hipóteses de trabalho.

A *primeira hipótese de trabalho* asseverou que relações cognitivas e comunicativas de relevância guiadas pelo conceito de conciliação de metas subjazem a identificação de unidades significativas, o tratamento e a conversão dos registros de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

A *segunda hipótese de trabalho* considerou que a presunção de relevância ótima e o procedimento de compreensão guiado pela noção de relevância são aplicáveis à apreensão e ao processamento de unidades significativas de todo e qualquer registro de representação semiótica em matemática, bem como aos seus tratamentos e conversões, considerando a primeira hipótese.

A *terceira hipótese de trabalho* afirmou que a expertise na coordenação de diferentes registros de representação semiótica em processos congruentes e não congruentes de conversão é indício de uma apreensão mais qualificada dos objetos matemáticos, considerando a primeira e a segunda hipótese.

Levando-se em consideração essas hipóteses, esta pesquisa visou a desenvolver e ilustrar uma arquitetura descritiva e explanatória dos processos cognitivos envolvidos nas operações de apreensão de unidades significativas, de tratamento e de conversão de registros de representação semiótica fundamentada nas noções de conciliação de metas e de relevância.

Para dar conta desse objetivo geral, buscou-se: (a) revisar criticamente a teoria de registros de representação semiótica de Duval (2009, 2011); e (b) revisar, propor e ilustrar a aplicação da arquitetura conceitual da teoria de relevância, de Sperber e Wilson (1986/1995) e da teoria de conciliação de metas de Rauen (2014) em casos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, com ênfase nos processos de apreensão de unidades significativas, de tratamento e de conversão de diferentes registros de representação semiótica.

No segundo capítulo desta tese apresentou a teoria de registros de representação semiótica em Matemática. Destacou-se que a Matemática como ciência formal se constitui de objetos abstratos que são acessíveis apenas por meio de representações, cuja objetividade deriva do processo de síntese gerado por sua formalização e demonstração. A formalização da Matemática, contudo, gera inúmeros problemas em seu ensino. O domínio da álgebra, por exemplo, exige do aprendiz competências crescentes de abstração sintática para sua utilização consciente. Em outras palavras, para além dos aspectos semânticos, a linguagem formal exige do aprendiz que ele domine aspectos puramente sintáticos nos quais ele deve operar com símbolos sem qualquer referência a objetos do mundo físico.

Duval (2009, 2011) vai então argumentar que os objetos teóricos da Matemática só são acessíveis por meio de suas representações simbólicas e que qualquer registro de representação semiótica somente recorta parcialmente um objeto. Desse modo, compreender mais plenamente um objeto matemático implica coordenar diferentes registros de representação. Se isso estiver correto, torna-se importante diversificar os registros de representação dos objetos matemáticos durante o processo de ensino da Matemática para potencializar sua aprendizagem.

Contudo, justamente porque os registros recortam o objeto de diferentes formas, sempre haverá alguma diferença de abordagem desse objeto e, no processo de converter informações de um registro de representação para outro registro de representação, haverá certa incongruência. Por exemplo, quando se utiliza a língua natural – um registro que permeia todos os demais registros de representação em sala de aula – para converter uma fórmula algébrica ou vice-versa, sempre haverá alguma falta de congruência. Superar essas incongruências, em geral, implica aumentar custos cognitivos, mesmo que os benefícios cognitivos possam compensá-las.

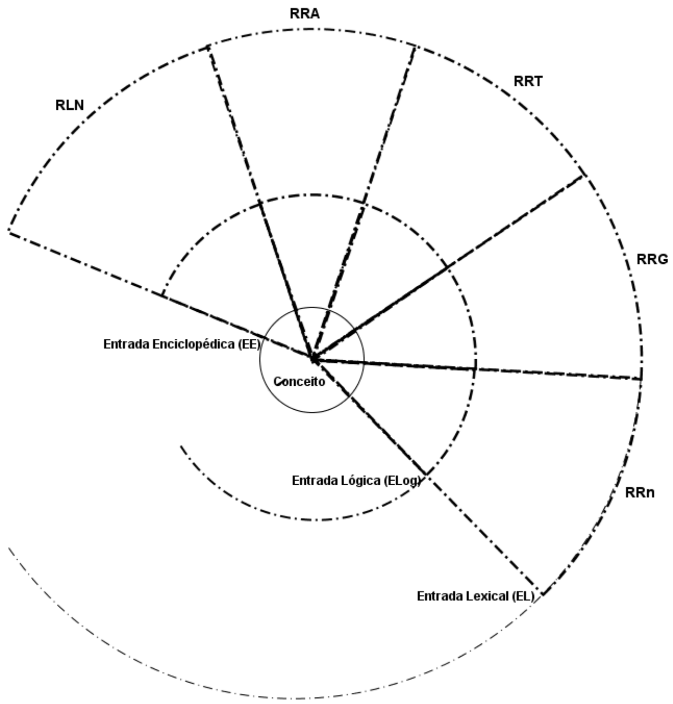
Além disso, o capítulo também considerou os obstáculos de transposição didática dos objetos matemáticos. Argumentou-se que o professor deve estar atento para o fato de que a sucessão aparentemente linear dos conteúdos matemáticos na sala de aula mascara os imensos obstáculos que a humanidade superou para desenvolver a versão da Matemática que se ensina. Vale dizer que os objetos matemáticos são apresentados como se houvessem surgido historicamente sem qualquer crise epistemológica, ou seja, ausentes dos aspectos históricos contraditórios de sua emergência. Não sem motivo, esses obstáculos epistemológicos, em geral, reaparecem em sala de aula como obstáculos de ensino e de aprendizagem.

Para entender o processamento das unidades significativas de cada registro de representação semiótica dos objetos matemáticos, seus tratamentos e conversões do ponto de vista dos custos e benefícios cognitivos, apresentou-se no terceiro capítulo a teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986/1995). Na teoria da relevância, defende-se a tese de que um estímulo será mais relevante quanto maiores forem os efeitos cognitivos obtidos de seu processamento e menores os esforços de processamento despendidos para obter esses efeitos cognitivos. A teoria da relevância estabelece dois princípios: o *princípio cognitivo* de que a mente maximiza a relevância e o *princípio comunicativo* de que enunciados geram expectativas precisas de relevância. Neste caso, o processamento de um *input* linguístico, gráfico, algébrico, entre outros, num contexto cognitivo prévio de suposições pode gerar efeitos de fortalecimento de suposições existentes, de contradição e eliminação de suposições existentes e de combinação com suposições existentes para gerar implicações contextuais. Os estímulos ostensivos na interpretação de um enunciado são otimamente relevantes quando o estudante considera que vale a pena o esforço para processá-lo levando-se em conta às preferências e habilidades do emissor. Neste aspecto, evidencia-se que os conceitos matemáticos já construídos e representados como entradas enciclopédicas poderão ser reforçados, substituídos ou modificados pelo processamento de novas informações.

Com base nesses conceitos, a teoria propõe um procedimento concreto de interpretação guiado pela noção de relevância ótima. Seguindo a segunda hipótese desta tese, o processamento *online* das unidades significativas de quaisquer dos registros de representação semiótica em Matemática mobiliza suposições cognitivas. Seguindo uma ordem de acessibilidade e operando por menor esforço cognitivo, o intérprete considera a primeira suposição condizente com o enunciado da atividade e para quando é alcançado o nível esperado de relevância ótima. Nesse processo é que ocorre, muitas vezes, a mobilização e a coordenação de diferentes registros de representação semiótica e, por hipótese, quanto mais registros se coordenam, mais pistas sobre o domínio do conceito podem ser observadas.

Dado que a teoria da relevância foi concebida para lidar com a língua natural, as noções de entrada lexical, lógica e enciclopédica que, segundo Sperber e Wilson (1986/1995), dão acesso aos conceitos mobilizados na interpretação de enunciados, foram extrapoladas por Rauen e Cardoso (2011, 2014) para os diferentes registros de representação semiótica em Matemática. Isso gerou uma representação contendo três círculos concêntricos, dos quais o círculo externo (incompleto) se reserva às entradas lexicais (unidades significativas), o círculo medial (incompleto) se reserva às entradas lógicas e o círculo interior (completo) se reserva às entradas enciclopédicas. Esses círculos são intersectados por linhas formando diferentes setores, cada setor representando um registro de representação diferente, e as linhas são tracejadas para representar a porosidade entre os diferentes registros, de modo que seja possível transitar entre eles (conversão de registros).

Figura 43 – Conjunto de figuras que representam os acessos ao conceito a partir do registro da língua natural, RRA, RRG, RRT, RRF incluindo RR_n:



Fonte: Rauen e Cardoso (2011)

Com essa figura, pretende-se representar não somente a incompletude da soma dos diferentes registros (por isso o circulo interno está parcialmente preenchido pelos setores); mas, sobretudo, que o domínio de diferentes registros permite acessar os conceitos de diferentes formas e com certo acréscimo qualitativo como prevê Duval (2009, 2011). Por exemplo, dado uma demanda em Matemática e pressupondo que o indivíduo escolherá uma rota de esforço mínimo, um indivíduo que domina quatro registros, por hipótese, pode ter acesso a soluções mais ótimas do que um indivíduo que domina menos registros.

A primeira seção do quarto capítulo desta tese apresentou, por fim, a teoria de conciliação de metas de Rauen (2014). Essa teoria observa a demanda por uma solução matemática como um processo que envolve uma meta final que mobiliza diferentes hipóteses abdutivas de solução. A teoria de conciliação de metas pretende ligar a noção de relevância com a noção de meta, argumentando que, em contextos proativos, a cognição é movida abdutivamente por uma conclusão assumida como verdadeira. Nesse processo, o indivíduo "abduz uma hipótese ou inferência para a melhor solução – princípio de plausibilidade – que simultaneamente é a solução com menor custo diante do efeito fixo de uma meta – princípio da relevância" (RAUEN, 2014, p. 21).

A teoria de conciliação de metas possui quatro estágios (formulação de meta, formulação, execução e checagem de hipótese abdutiva antefactual); quatro tipos de consecuções de acordo com a noção de conciliação de metas (conciliação ativa, inconciliação ativa, conciliação passiva e inconciliação passiva); e cinco arquiteturas para a avaliação de hipóteses abdutivas antefactuais (categóricas, bicondicionais, condicionais, habilitadoras e tautológicas). Além disso, segue-se da abordagem a possibilidade de descrever e explicar autoconciliações de metas (quando um indivíduo formula uma meta e verifica se o resultado da ação concilia-se como essa meta) e heteroconciliações (quando indivíduos coordenam colaborativamente metas e submetas) (RAUEN, 2014, p. 22).

Com base nessas noções, na segunda seção do capítulo quatro, apresenta-se uma ilustração da aplicação das propostas dessa tese num exercício que demandou de quatorze estudantes da sétima fase do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Catarinense, Campus Avançado Sombrio (IFC/Sombrio), que interpretassem o estímulo 'Dado f : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$'. Com base na teoria de conciliação de metas, foi possível modelar por engenharia reversa a meta final da atividade, um conjunto de hipóteses abdutivas e dez critérios ótimos para avaliar a interpretação dos estudantes.

Em seguida, comparou-se a resposta ótima desenhada pela arquitetura guiada pela noção de conciliação de metas com as respostas reais desenvolvidas pelos estudantes. As respostas dos estudantes foram classificadas em três grupos, conforme as unidades significativas dos registros mobilizados na tarefa: o grupo que se vale do registro gráfico, o que se vale somente do registro em língua natural e o que se vale de tratamentos algébricos e numéricos.

Analisadas as soluções desenvolvidas pelos estudantes, elaborou-se uma tabela-síntese contendo os dez critérios de avaliação e o desempenho de cada estudante em cada um desses critérios. Considerou-se que a resposta heteroconciliada com a resposta-alvo da pesquisadora seria aquela que, minimamente, considerasse adequadamente tanto o campo de definição como a lei de formação da função.

No que se refere ao desempenho dos estudantes, foi possível demonstrar que, em geral, todos buscaram alguma solução, mobilizando pelo menos dois registros de representação, o algébrico e o da língua natural, e formulando pelo menos uma inferência relevante. A dispersão das soluções sugere que um mesmo registro de representação semiótica pode viabilizar diferentes premissas e conclusões implicadas (inferências implícitas e explícitas), levando-se em consideração o estoque de suposições cognitivas que compõe o ambiente cognitivo dos indivíduos.

Nenhum dos estudantes acertou plenamente a atividade, quando se comparam seus desempenhos com o desempenho-alvo projetado pela pesquisadora. Apesar de o estudante 2 ter acertado a tarefa no que se refere ao processamento correto das duas proposições da atividade, ele se limita a exemplificar um tratamento. Entre os estudantes que desenvolveram melhor a questão (estudantes 1, 6 e 7), por sua vez, a informação sobre o campo de definição da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ não foi suficientemente relevante para evitar que traçassem curvas nos gráficos, expressando a resposta no campo de definição dos números reais. Embora esses estudantes tivessem projetado um plano adequado que incluía a representação gráfica pertinente da função, acabaram por esquecer que o campo de definição da função havia sido estabelecido no conjunto dos naturais. Isso provavelmente ocorreu porque era a lei de formação da função que permitia gerar as inferências produtivas do gráfico e não o campo de definição da função; ou mesmo porque é prevalente o trabalho com funções no campo dos reais na sala de aula e não o trabalho com funções no campo dos naturais, quando se trata da natureza das grandezas variáveis.

Em relação à mobilização de pelo menos dois registros de representação semiótica, hipótese apresentada por Duval como fundamental para uma visão mais consistente dos objetos matemáticos, observaram-se em algumas das respostas indícios desta coordenação. Os estudantes 1, 6 e 7, que se valem do registro gráfico, são justamente os que sugerem ter uma consciência mais apurada do conceito de função.

Os estudantes que se valem apenas do registro em língua natural sugerem antes ter a percepção de alguma característica relevante das unidades significativas do registro do que propriamente a consciência de operar com o conceito de função em si mesmo. Os resultados indicam que eles são capazes de inferir aspectos relevantes das funções a partir das unidades significativas (por exemplo, que se trata de uma função do 2º grau dado o maior expoente da variável independente da lei de formação), mas não necessariamente aspectos mais intrínsecos ao objeto em pauta.

No que diz respeito à avaliação das teorias mobilizadas neste estudo, pode-se afirmar que elas foram capazes de descrever e explicar os fenômenos ilustrados. Com base na teoria de conciliação de metas de Rauen (2014), foi possível demonstrar que todos os estudantes estabeleceram um plano implícito para a realização da atividade, desde planos simples com um ou dois estágios até planos mais robustos incluindo a elaboração de gráficos e a coordenação explícita de três registros de representação. Esses planos mais robustos, exceto pelo equívoco sobre a natureza das grandezas variáveis que compõe o campo de definição da função, quase foram plenamente heteroconciliados com a resposta alvo projetada pela pesquisadora.

Foi possível demonstrar no interior de cada plano o *modus operandi* do procedimento de compreensão guiado pelo conceito de relevância. Os estudantes foram capazes de promover rotas de esforço mínimo no cômputo de insumos cognitivos com vistas à consecução de seus planejamentos. Isso explicou tanto a correta dispensa de tabelas quando os tratamentos poderiam ser feitos mentalmente, como o incorreto esquecimento da natureza das grandezas quando as inferências relevantes eram derivadas de sua lei de formação.

Finalmente, foi possível demonstrar como as operações cognitivas de identificação das unidades significativas de cada registro de representação semiótica, de tratamentos e de conversões são guiadas por uma relação relevante de custos e benefícios cognitivos que estão a serviço de um plano em direção a uma meta conciliável.

O estudo, enfim, foi capaz de desenvolver e ilustrar uma arquitetura descritiva e explanatória dos processos cognitivos envolvidos nas operações de apreensão de unidades significativas, de tratamento e de conversão de registros de representação semiótica fundamentada nas noções de conciliação de metas e de relevância, revisando criticamente, dessa maneira a teoria de registros de representação semiótica de Duval (2009, 2011).

A pesquisadora, contudo, reconhece que, ao optar por aproveitar um exercício de sala de aula que não foi especialmente projetado para testar a arquitetura, pode ter contribuído para o desempenho dos estudantes ter ficado aquém do desejado no que se refere aos equívocos e a pouca coordenação de registros de representação. Críticas à formulação linguística do comando do exercício e à própria exposição da atividade podem ser traçadas e, seguramente, corrigi-los pode redundar em resultados mais robustos. Todavia, o resultado da ilustração, algo mais próximo das condições do que se realiza no dia-a-dia, não apaga o fato de que os estudantes desenvolveram planos de solução guiados por uma noção mesmo que implícita de meta – “A primeira coisa que eu vejo numa função é o gráfico”, como disse em depoimento posterior, o estudante 6 – e autoconciliaram seus resultados com aquilo que eles julgaram satisfatoriamente relevante – “Não analisei que ela estava definida no conjunto dos números naturais e tracei o gráfico”, como justifica o estudante 1 na própria atividade. Assim, os equívocos cometidos e a pouca coordenação de diferentes registros reforçam o argumento de que a primeira interpretação guiada pela economia de custos governa o processo.

Independente das limitações da ilustração, este estudo permitiu à pesquisadora compreender melhor a complexidade cognitiva das questões envolvidas na resolução de exercícios matemáticos no processo de ensino e aprendizagem. Trata-se de complexidades que extrapolam o domínio mais restrito da Matemática e para as quais somente uma abordagem interdisciplinar que integre a língua natural pode atender. É justamente nesse espaço profícuo de interface que tanto o ensino da Matemática como os estudos da Linguagem podem se beneficiar mutuamente.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ANASTASIOU, Léa das Graças Camargos e ALVES, Leonir Pessate (Orgs.). **Processos de Ensinagem na Universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula**. 5.ed.- Joinville, SC:UNIVILLE, 2005. 144p.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999.

BOYER, Carl B. e MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Tradução Camila Bogéa. – São Paulo: Ática, 2008.

BRITO, Márcia Regina F. de (org.). **Psicologia da educação matemática: teoria e pesquisa**. Florianópolis:Insular, 2005. 280p.

BUZZI, Arcângelo R. **Introdução ao pensar:** O Ser, o Conhecimento, a Linguagem. 24ª edição. Petrópolis: Vozes, 1997.

CARDOSO, Marleide. C. **Os estágios de desenvolvimento e as representações semióticas no contexto do processo de ensino e aprendizagem da matemática**, 2003. 122 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem)-Programa de Pós-graduação em Ciências da Linguagem, Universidade do Sul de Santa Catarina, 2003. Disponível em http://busca.unisul.br/pdf/69872_Marleide.pdf.

CAMPOS, Jorge. Sentido e Referência: A Teoria do Nome Próprio de Frege. Artigo disponível em: http://www.jcamposc.com.br/textos_disciplinas/sentido_e_referencia-a_teoria_do_nome_proprio_de_frege.pdf, acesso em 23/01/2014.

CARVALHO, Castelar de. **Para compreender Saussure**: fundamentos e visão crítica. 7.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1997.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GASCÓN, Josep. **Estudiar matemáticas**: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona, Editorial Horsori, 2000.

CERQUEIRA, Luiz Albert e OLIVA, Alberto. **Introdução à lógica**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1980.

COPI, Irving Marmer. **Introdução à lógica**. Tradução e Álvaro Cabral, 2 ed. São Paulo: Mestre Jou, 1978.

COSTA, Paulo Henrique Silva e SILVA, Mariluze Ferreira de Andrade e. **Semiótica enquanto categoria da representação**: a necessidade formal da categoria da representação em Peirce. Artigo disponível em revista eletrônica http://www.ufsj.edu.br/revistalable. Μετάνοια, São João del-Rei/MG, n.14, 2012. P.180 – 220.

D’Amore, Bruno. **Elementos da didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DAVIS, Philip J. e HERSH, REUBEN. **A experiência Matemática**. Trad. de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitive de la pensée. **Annales de didactique et sciences cognitives**, **v. 5**. Strasbourg: IREM-ULP, 1993. p. 37-65.

______. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. 2 ed. Campinas: Papirus, 2005. p.11-33.

______. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. de Lênio Fernandes Levy e Marisa Roâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

FELLIPO, Ariani Di e SILVA, Bento Carlos Dias-da-. **Modelo de entrada lexical (psico)lingüístico-computacional.** Relatório do Núcleo Interinstitucional de Lingüística Computacional NILC – ICMC – USP, São Carlos, SP, Brasil/Centro de Estudos Lingüísticos e Computacionais da Linguagem CELiC – FCL – UNESP/Ar, Araraquara, SP, Brasil: maio 2004. 17p.

FIORENTINI, Dario. **Formação do professor de matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado e letras, 2003.

FREGE, Johann Gottlob. **Os pensadores**. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

LOPES, Edward. **Fundamentos da Linguística contemporânea**. São Paulo: Cultrix, 1995.

LUCIANO, Suelen Francez Machado. **Relevância e conciliação de metas**: adequação lógica e plausibilidade empírica, 2014. 96 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem)- Programa de Pós-Graduação em Ciências da Linguagem, Universidade do Sul de Santa Catarina, 2014.

MORRIS, Charles W. **Fundamentos da teoria dos signos**. Trad. Paulo Alcoforado e Milton José Pinto. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo. 1976. 92p.

OLIVEIRA, Roberta Pires de. **Semântica formal**: uma breve introdução. Campinas,SP: Mercado de Letras, 2001.

PAIS, Luis Carlos Pais. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PEIRCE, Charles Sanders. **Os pensadores**. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

______. **Semiótica**. São Paulo: Perspectiva, 1977.

PSILLOS, S. Simple the best: A Case for Abduction. In: KAKAS, A. C.; SADRI, F. (eds.). **Computational Logic**: Logic Programming and Beyond. Berlin: Springer-Verlag, 2002. p. 605-626. Disponível em: <http://www.phs.uoa.gr/~psillos/>. Acesso em: 2 set. 2013.

RAUEN, Fábio José. **Roteiros de iniciação científica**: os primeiros passos da pesquisa científica, desde a concepção, até a produção e a apresentação. Palhoça: Ed. da Unisul, 2014 (no prelo).

______. **Roteiros de pesquisa**. Rio do Sul: Nova Era, 2006.

______. Hipóteses abdutivas antefactuais e modelação proativa de metas. **Signo**, Santa Cruz do Sul, v. 38, n. 65, p. 188-204, jul./dez. 2013

______. Relevance and genre: theoretical and conceptual interfaces. In: Charles Bazerman; Adair Bonini; Débora Figueiredo (Orgs.). **Genre in a changing world**. Fort Collins, Colorado, EUA: WAC Clearinghouse; Parlor Press, 2009a. p. 57-77.

______. Influências do registro escrito de perguntas-QU na reescrita de produções textuais: estudo de caso com base na teoria da relevância. In: Jorge Campos da Costa; Vera Wannmacher Pereira (Orgs.). **Linguagem e cognição**: relações interdisciplinares. Porto Alegre: Edipucrs, 2009b. p. 204-232.

______. **Inferências em resumo com consulta ao texto de base**: estudo de caso com base na teoria da relevância. Linguagem em (Dis)curso (Tubarão), v. 5, n. esp., p. 33-57, 2005.

______; CARDOSO, Marleide. C. **Reflexões sobre relevância e registros de representação semiótica em Matemática**. Projeto inédito, 2011.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à filosofia Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar editores, 1974.

SAUSSURE, Ferdinand de. **Curso de Linguística geral**. Organizado por Charles Bally e Albert Riedlinger. Trad. De Antonio Chelini, José Paulo Paes e Izidora Blikstein, São Paulo: Cutrix/USP, 2006.

SILVEIRA, Jane Rita Caetano da; FELTES, Heloísa Pedroso de Moraes. **Pragmática e cognição**: a textualidade pela relevância e outros projetos. 3. ed. Porto Alegre: Edipucrs, 2002.

SPERBER, Dan; WILSON, Deirdre. **Relevância**: comunicação e cognição. Lisboa: Fundação Galouste Gulbenkian, 2001.

______; ______. **Relevance**: communication & cognition. 2nd. ed. Oxford: Blackwell, 1995. [1st. ed. 1986].

STEWART, James. **Cálculo.** Vol. 1. Tradução Antonio Carlos Moretti. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

TOMASELLO, M.; CARPENTER, M.; CALLS, J.; BEHNE, T.; MOLL, H. Understanding and sharing intentions: The origins of cultural cognition. **Behavioral and Brain Sciences**, **v. 28**, 2005, p. 675–735.

WILSON, Deirdre. **Pragmatic theory**. London: UCL Linguistics Dept, 2004. Disponível em http://www.phon.ucl.ac.uk/home/nick/pragtheory/. Acesso em 15 mar. 2005.