UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA
FERNANDO PASSARELI COSTA

QUATÉRNIONS:
CONCEITOS, PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Tubarão/SC
2022

FERNANDO PASSARELI COSTA

QUATÉRNIONS:
CONCEITOS, PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática – Licenciatura da Universidade do Sul de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Dalmo Gomes de Carvalho.

Tubarão/SC
2022

FERNANDO PASSARELI COSTA

QUATÉRNIONS:

CONCEITOS, PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado à obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 09 de dezembro de 2022.

Professor e orientador Dalmo Gomes de Carvalho, MSC.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Prof. Carlos Henrique Hobold, MSC.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Prof. Mário Selhorst, MSC.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Dedico esta monografia a todos os que têm uma sede insaciável pelo conhecimento e aos que buscam dividir esse conhecimento com todos ao seu redor. A todos os que não desistiram de um mundo melhor.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais, Renato Ribeiro Costa e Adriana Corrêa Passareli Costa, que sempre acreditaram no meu potencial e sempre me incentivaram a seguir o caminho dos estudos. Que me proporcionaram um ambiente em que minha curiosidade pelo mundo sempre pudesse, na medida do possível, ser estimulada. Minha eterna gratidão por tudo.

Ao meu irmão e melhor amigo, Bruno Passareli Costa, com quem posso sempre contar para ouvir sobre a minha obsessão do momento. Sem esses momentos, este projeto dificilmente teria sido posto no papel.

Aos meus professores, que ao longo de toda minha trajetória escolar e universitária sempre me incentivaram a dar o meu melhor e sempre me cobraram meu melhor, em especial aos professores Dalmo Gomes de Carvalho, da Universidade do Sul de Santa Catarina (Unisul), meu orientador e com quem posso passar boas horas conversando sobre matemática e ao professor Rubens Starke, da Universidade Federal de Santa Catarina, com quem descobri meu amor pela matemática e com quem espero poder me reencontrar algum dia.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.” Sir Isaac Newton.

RESUMO

Este projeto de pesquisa tem como objetivo reunir informações acerca do conjunto dos números quaternários, ou quatérnions. Tais informações consistem no contexto histórico da sua formulação, de sua definição formal, de suas propriedades aritméticas e algébricas e algumas de suas aplicações. Para tanto, foi realizada uma pesquisa de caráter bibliográfico e qualitativo, buscando em artigos nacionais e estrangeiros as informações necessárias para tal propósito. Dentre os resultados encontrados, destacam-se a não-comutatividade da multiplicação entre quatérnions, fator que implica na sua principal aplicação: a representação de rotações em três dimensões.

Palavras-chave: Quatérnions. Conjuntos Numéricos. Números Imaginários.

ABSTRACT

This research project aims to gather information about the set of quaternary numbers, or quaternions. Such information consists of the historical context of its formulation, its formal definition, its arithmetic and algebraic properties and some of its applications. Therefore, a bibliographic and qualitative research was carried out, searching national and foreign articles for the necessary information for this purpose. Among the results found, the non-commutativity of the multiplication between quaternions stands out, a factor that implies in its main application: the representation of rotations in three dimensions.

Keywords: Quaternions. Numerical Sets. Imaginary Numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conjunto dos números quaternários, apesar de ter sido definido ainda no século XIX, ainda é pouco conhecido e mesmo em cursos da área de exatas o assunto é sequer mencionado, tomando como exemplo o curso de licenciatura em matemática.

Esse fato motivou a escolha desse tema para a elaboração da presente monografia, onde desenvolve-se uma pesquisa bibliográfica exploratória que tem como objetivo encontrar informações sobre as motivações da formulação desse conjunto numérico, quais as principais propriedades que esse conjunto possui e quais as principais aplicações dele.

Para fundamentar a monografia, são utilizadas as definições formais de diversos conjuntos numéricos, como os reais e os complexos, buscando assim compreender como o processo de definição de um conjunto numérico ocorre. Também são apresentadas as formas geométricas de representação de tais conjuntos, uma vez que tal representação é uma ferramenta importante para a compreensão deles.

1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA

O tema escolhido para a monografia é quatérnions, que é apresentado por meio das suas características, bem como das propriedades deste conjunto numérico e de suas aplicações.

1.2 PROBLEMATIZAÇÃO

Como são definidos e quais as principais propriedades desse importante conjunto dos Quatérnions no contexto da matemática?

1.3 JUSTIFICATIVAS

O tema dessa monografia foi escolhido devido à curiosidade sobre um conjunto numérico que não é regularmente estudado dentro do currículo do período da graduação da licenciatura, somando-se ao fato da ausência de publicações sobre o tema em língua portuguesa.

Apesar de termos contato com diversos conjuntos numéricos desde o Ensino Fundamental, os currículos dos cursos de graduação em licenciatura em matemática usualmente se limitam ao estudo do conjunto dos números Reais e dos números Complexos. O estudo desses conjuntos é priorizado devido à ampla gama de conceitos relativos a eles que podem ser utilizados para descrever fenômenos do mundo natural, sendo, portanto, interessantes para estudantes de uma grande diversidade de áreas de estudo.

O conjunto dos Quatérnions, entretanto, apesar de possuir também uma grande gama de aplicações, não consta no currículo regular dos cursos de graduação, principalmente das licenciaturas. Esse fator motivou a pesquisa sobre o modo como se constitui esse conjunto e sobre as propriedades que ele possui.

A partir dessa curiosidade inicial, buscou-se informações sobre a caracterização do conjunto dos números Quaternários, assim como as propriedades que esse conjunto possui, com especial destaque para as propriedades algébricas e as suas aplicações.

1.4 OBJETIVOS

Seguem os objetivos da pesquisa realizada.

1.4.1 Objetivo Geral

Investigar conceitos, propriedades e aplicações do conjunto dos números quaternários.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Buscar a definição formal do conjunto dos quatérnions;
- Descrever algumas das propriedades apresentadas por esse conjunto numérico;
- Apresentar algumas de suas aplicações.

1.5 TIPO DA PESQUISA

Devido ao caráter da monografia, podemos caracterizá-la como um projeto exploratório, pois tem como objetivo a aquisição de informações. De acordo com Gil (2002, p. 41), podemos utilizar a pesquisa exploratória como forma de adquirir "maior familiaridade com o problema e assim conseguir construir hipóteses". Portanto, a pesquisa exploratória é uma maneira eficiente para conseguirmos realizar um levantamento de informações acerca de um determinado problema que desejamos resolver ou hipótese que desejamos testar.

Além disso, segundo Malhotra (2001), a pesquisa exploratória apresenta como características essenciais as informações definidas ao acaso e um processo de investigação flexível e não-estruturado.

A monografia também utiliza como critério a pesquisa qualitativa, uma vez que se busca fazer um levantamento das informações relativas ao assunto, e não uma análise da quantidade de materiais publicados acerca do tema.

Por fim, em relação ao procedimento da pesquisa, podemos dizer que se trata de uma pesquisa bibliográfica, uma vez que foi realizada estritamente por meio de outros materiais publicados acerca do tema.

Portanto, a monografia pode ser caracterizada como um projeto exploratório, qualitativo e bibliográfico.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

No capítulo 1 temos a introdução da monografia, com a apresentação do tema bem como sua delimitação. São apresentados também a justificativa da escolha do tema em conjuntos com os objetivos pretendidos com projeto de pesquisa. Também é apresentado, ao fim do capítulo, o caráter da monografia e o modo como ela está estruturada.

No capítulo 2 serão apresentados os fundamentos teóricos que orientam este projeto pesquisa. Na primeira seção, serão apresentadas a definição de um conjunto numérico, os problemas que essa definição apresentou e maneira encontrada para contorná-los.

Na segunda seção será apresentada a construção formal do conjunto dos números naturais por meio dos axiomas de Peano, bem como o contexto histórico em que o processo de seu desenvolvimento ocorreu.

Na terceira seção será apresentada a definição de número real por meio do axioma fundamental da análise matemática, assim como o detalhamento do significado de cada característica usada para definir tal conjunto.

Na quarta seção, será apresentada a construção dos números complexos como uma extensão do conjunto dos números reais, bem como o contexto histórico em que acontece a discussão sobre a existência desse conjunto. A construção desse conjunto como uma extensão do conjunto dos números reais é fundamental para entendermos a construção dos quatérnions como uma extensão do conjunto dos números complexos.

No capítulo 3, é apresentado o conjunto dos números quaternários através do contexto histórico do seu desenvolvimento. Será apresentado também a sua definição formal como uma extensão do conjunto dos números complexos, bem como algumas de suas propriedades algébricas.

Por fim, temos as considerações finais da monografia, onde são retomados os principais resultados obtidos ao longo do seu desenvolvimento.

2 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Apesar de registros históricos demonstrarem o uso de números desde o início da civilização humana, e da diversidade de classificações para grupos de números diferentes, foi somente na segunda metade do século XIX que surgiu a necessidade de definir-se rigorosamente a noção de conjunto numérico.

A primeira abordagem desenvolvida, posteriormente chamada de *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, estabelece a definição de conjunto simplesmente como "formado de objetos, chamados os seus *elementos*" (LIMA, 2014, p. 2). Por meio desta definição, temos que a relação básica existente de um conjunto e seus elementos se dá por meio da noção de *pertencimento*. Segundo Lima (2014, p.2), "quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A, dizemos que x pertence a A e escrevemos $x \in A$. Se, porém, x não é um dos elementos do conjunto A, dizemos que x não pertence a A e escrevemos $x \notin A$."

Á partir dessa definição, outras noções são desenvolvidas, como a relação de contenção, de união e de intersecção entre dois ou mais conjuntos.

Essa definição, apesar de intuitiva e prática, pode levar a paradoxos ou contradições. O paradoxo mais famoso relacionado à essa abordagem é o Paradoxo de Russell, assim chamado devido ao matemático e filósofo Bertrand Russell, que o descobriu em 1901. Segundo Irvine e Deutsch (2021, tradução nossa):

> Russell's paradox is the most famous of the logical or set-theoretical paradoxes. Also known as the Russell-Zermelo paradox, the paradox arises within naïve set theory by considering the set of all sets that are not members of themselves. Such a set appears to be a member of itself if and only if it is not a member of itself. Hence the paradox.[1]

Os esforços levantados para a resolução dos paradoxos gerados pela Teoria Ingênua dos Conjuntos levaram ao desenvolvimento de uma outra abordagem sobre a teoria dos conjuntos, chamada de *Teoria Axiomática dos Conjuntos*. Essa abordagem consiste em definir um conjunto numérico como um ente matemático que satisfaça uma série de axiomas.

[1] "O paradoxo de Russel é o mais famoso dos paradoxos lógicos ou da teoria dos conjuntos. Também conhecido como paradoxo de Russell-Zarmelo, ele surge da teoria ingênua dos conjuntos ao considerarmos o conjunto de todos os conjuntos que não são membros deles próprios. Tal conjunto aparenta ser um membro de si mesmo se, e somente se, ele não for membro de si mesmo. Por isso o paradoxo."

Assim, existe uma gama de Teorias Axiomáticas dos Conjuntos, cada qual com seus próprios axiomas fundamentais. A mais utilizada atualmente, entretanto, se trata da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha, também abreviada como ZFC, assim chamada devido aos matemáticos Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel, quem definiram o seu conjunto de axiomas fundamentais, conforme Ciesielski (1997, p. 4, tradução nossa):

> The task of finding one “universal” axiomatic system for set theory that agrees with our intuition and is free of paradoxes was not easy, and was not without some disagreement. Some of the disagreement still exists today. However, after almost a century of discussions, the set of ten axioms/schemas, known as the Zermelo-Fraenkel axioms (abbreviated as ZFC, where C stands for the axiom of choice), has been chosen as the most natural.[2]

Essa noção axiomática será importante para a definição do conjunto dos números naturais formulada por Giuseppe Peano, abordada na próxima seção.

2.1 NÚMEROS NATURAIS

A maneira mais comumente utilizada para definir formalmente o conjunto dos números naturais se dá por meio dos chamados Axiomas de Peano, assim chamados em homenagem ao matemático Giuseppe Peano, quem definiu-os em 1889 em seu livro *Arithmetices principia, nova methodo exposita*.

No final do século XIX, havia um movimento intelectual que buscava uma fundamentação rigorosa da matemática por meio da lógica. Tais objetivos eram influenciados sobretudo por Leibniz e seu conceito de *calculus ratiocinator* e encontraram como expoentes nessa época Gottlob Frege e Giuseppe Peano, conforme Eves (1990, p. 621, tradução nossa):

> A still more modern approach to symbolic logic originated with the work of the german logician Gottlob Frege (1848-1925) during the period between 1879 and 1903, and with the studies of Giuseppe Peanno (1858-1932). Peano’s work was

[2] “A tarefa de encontrar um sistema axiomático “universal” para a teoria dos conjuntos que estivesse de acordo com a nossa intuição e livre de paradoxos não foi fácil, e não aconteceu sem alguma discordância, algumas das quais ainda existem hoje. No entanto, depois de quase um século de discussões, o conjunto de dez axiomas/esquemas, conhecidos como axiomas de Zermelo-Fraenkel (abreviados como ZFC, onde C significa o axioma da escolha), foi escolhido como o mais natural deles.”

> motivated by a desire to express all mathematics in terms of logical calculus, and Frege's work stemmed from the need of a sounder foundation for mathematics.[3]

Apesar de consistirem originalmente de nove axiomas, para fins didáticos, eles são comumente apresentados por meio de apenas três. Para Lima (2014, p. 34), os números naturais:

> São dados, como objetos não-definidos, um conjunto N, cujos elementos são chamados números naturais, e uma função s: N $\rightarrow$ N. Para cada n $\in$ N, o número s(n), valor que a função s assume no ponto n, é chamado o sucessor de n. A função s satisfaz aos seguintes axiomas:
>
> P1. s: N $\rightarrow$ N é injetiva. Em outros termos: m, n $\in$ N, s(m) = s(n) $\Rightarrow$ m = n. Ou, em palavras, dois números que têm o mesmo sucessor são iguais.
>
> P2. N − s(N) consta de um só elemento. Ou seja, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Ele se chama "um" e é representado pelo símbolo 1. Assim, qualquer que seja n $\in$ N, tem-se 1 $\neq$ s(n). Por outro lado, se n $\neq$ 1 então existe um (único) n 0 $\in$ N, tal que s(n 0) = n.
>
> P3. (Princípio da Indução). Se X $\subset$ N é um subconjunto tal que 1 $\in$ X e, para todo n $\in$ X tem-se também s(n) $\in$ X, então X = N.

Com esses três axiomas, é possível definir todo o conjunto dos números naturais, além das operações aritméticas básicas que são utilizadas para operar sobre esse conjunto. Entretanto, como tais demonstrações fogem do escopo do trabalho apresentado, serão deixadas de lado.

---

[3] "Uma abordagem ainda mais moderna em relação à lógica simbólica originou-se com o trabalho do lógico alemão Gottlob Frege (1848-1925) durante o período entre 1879 e 1903, e com os estudos de Giuseppe Peanno (1858-1932). O trabalho de Peanno era motivado pelo desejo de expressar toda a matemática em termos de cálculos lógicos, e o trabalho de Frege se originou da necessidade de uma fundamentação mais sólida para a matemática."

2.2 NÚMEROS REAIS

A definição mais comumente utilizada para o conjunto dos números reais é a definição axiomática baseada no conceito de corpo. Segundo Lima (2014, p. 80), o conjunto dos números reais pode ser defino por meio de somente um axioma, chamado de *Axioma Fundamental da Análise Matemática*: “Existe um corpo ordenado completo, R, chamado o corpo dos números reais.”

A partir desse axioma, o conjunto dos números reais pode ser determinado em conjunto com suas operações básicas e com a relação de ordenação de seus elementos. A seguir, será demonstrado o significado dessa definição adotada.

2.2.1 Corpo

Como a definição do conjunto dos números reais se baseia na definição de *corpo*, faz-se necessário explorar tal definição. Segundo Lima (2014, p. 61), “Um corpo é um conjunto K, munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem a certas condições, chamadas os axiomas de corpo”.

De maneira geral, os axiomas de corpo podem ser divididos em duas categorias: os axiomas de adição e os axiomas de multiplicação. Segundo Lima (2014, p. 61-62), os axiomas de adição de um corpo consistem em:

> A1. Associatividade – quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.
> A2. Comutatividade – quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x + y = y + x$.
> A3. Elemento neutro – existe $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$, seja qual for $x \in K$. O elemento 0 chama-se zero.
> A4. Simétrico – todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $x \in K$ tal que $x + (-x) = 0$.

Ainda segundo Lima (2014, p. 62-63), os axiomas de multiplicação de um corpo consistem em:

> M1. Associatividade – dados quaisquer x, y, z em K, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
> M2. Comutatividade – sejam quais forem $x, y \in K$, vale $x \cdot y = y \cdot x$.
> M3. Elemento neutro – existe $1 \in K$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, qualquer que seja $x \in K$. O elemento 1 chama-se *um*.
> M4. Inverso multiplicativo – todo $x \neq 0$ em K possui um inverso x^{-1} , tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Assim, como o conjunto R dos números reais satisfazem estes oito axiomas e como qualquer conjunto que os satisfaça são considerados corpos, o conjunto R dos números reais, munido das operações de adição e multiplicação usuais pode ser considerado um corpo.

2.2.2 Corpos Ordenados

Outra definição importante para compreendermos o conceito de número real é a de corpo ordenado. Segundo Lima (2014, p. 65):

> Um corpo ordenado é um corpo K, no qual se destacou um subconjunto $P \subset K$, chamado o conjunto dos elementos positivos de K, tal que as seguintes condições são satisfeitas:
> P1. A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$.
> P2. Dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

A partir dessa definição de corpos ordenados, podemos então estabelecer a noção de comparação entre dois números quaisquer pertencentes a um conjunto que seja um corpo ordenado. Assim, para Lima (2014, p. 66), “num corpo ordenado K, escreveremos $x < y$, e diremos que x é menor do que y, para significar que $y - x \in P$”.

2.2.3 Corpos Ordenados Completos

A última definição que precisamos compreender para a definição do conjunto dos números reais é a de *corpos ordenados completos*. Para ser um corpo ordenado completo, além de satisfazer os axiomas descritos acima, um conjunto precisa satisfazer, segundo Lima (2014, p. 80) a seguinte definição: “Um corpo ordenado K chama-se completo quando todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset K$, possui supremo em K.”

A definição de supremo de um conjunto é dada por Lima (2014, p. 75-76):

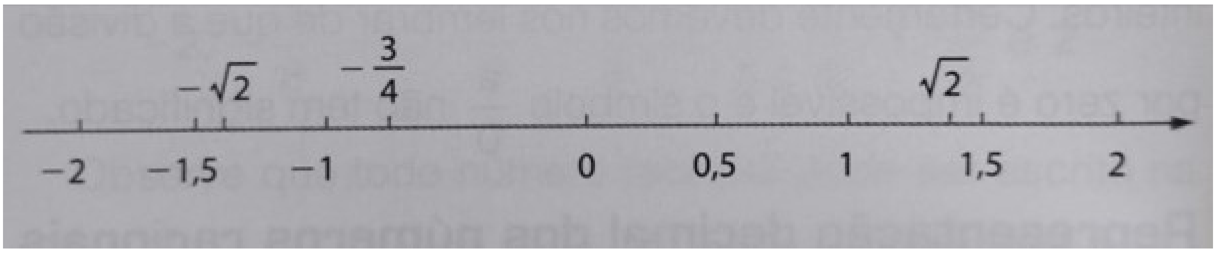
> Sejam K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in K$ chama-se supremo do subconjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em K (…). Assim, para que $b \in K$ seja supremo de um conjunto $X \subset K$, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:
> S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;
> S2. Se $c \in K$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.
> A condição S1 diz que b é cota superior de X, enquanto S2 afirma que qualquer outra cota superior de X deve ser maior do que ou igual a b. A condição S2 pode ser reformulada assim:
> S2’. Dado $c < b$ em K, existe $x \in X$ tal que $c < x$.

Assim, o conjunto dos números reais R é definido como o conjunto que satisfaz todas as definições dadas nas seções anteriores.

2.2.4 Representação geométrica do conjunto dos números reais

O conjunto dos números reais pode ser representado geometricamente e preservando todas as suas propriedades características por meio da chamada *reta real*. Esta reta dispõe os números reais em ordem crescente, e pode ser utilizada para representar, além de números reais, intervalos de números reais. A seguir, segue uma representação da reta real com a indicação de alguns números reais dispostos em ordem crescente:

Figura 1 - Reta Real



Fonte 1: Dante (2012)

2.3 NÚMEROS COMPLEXOS

O conjunto dos números complexos, denotado usualmente por **C**, pode ser definido, segundo Stewart (2016, p. A51) como “uma expressão da forma $a + b\mathbf{i}$, onde a e b são números reais e **i** é um símbolo com a propriedade de que $\mathbf{i}^2 = -1$.” Adicionalmente, segundo Stewart (2016, p. A51), “a **parte real** de um número complexo $a + b\mathbf{i}$ é o número real a e a **parte imaginária** é o número real b.”

Assim, para Stewart (2016, p. A51), “dois números complexos $a + b\mathbf{i}$ e $c + d\mathbf{i}$ são **iguais** se $a = c$ e $b = d$, isto é, se suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais”.

Tal conjunto possui a definição de soma e de multiplicação de tal modo que as propriedades de associatividade, comutatividade e distributividade usuais sejam preservadas. De tal forma, segundo Stewart (2016, p. A51), a soma de dois números complexos é definida pela soma de suas partes reais e imaginárias:

$$(a + b\mathbf{i}) + (c + d\mathbf{i}) = (a + c) + (b + d)\mathbf{i}$$

Da mesma forma, a multiplicação entre dois números complexos é definida preservando a distributividade sobre a adição:

$$(a + b\mathbf{i}) * (c + d\mathbf{i}) = ac + ad\mathbf{i} + bc\mathbf{i} + bd\mathbf{i}^2$$

Como, pela definição apresentada, $\mathbf{i}^2 = -1$, temos então que:

$$(a + b\mathbf{i}) * (c + d\mathbf{i}) = ac + ad\mathbf{i} + bc\mathbf{i} + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i}$$

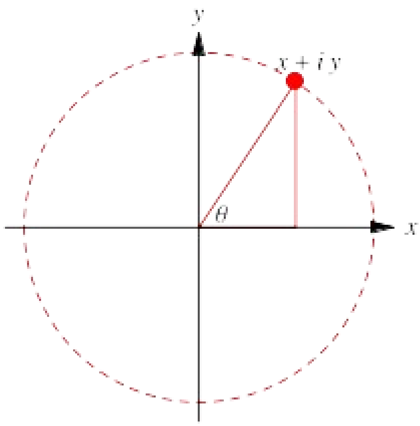
Outros conceitos importantes para tratarmos do conjunto dos números complexos, como *complexo conjugado* e *norma* de um número complexo, por serem pertinentes também para o conjunto dos quatérnios, serão abordados no capítulo seguinte.

2.3.1 Representação geométrica do conjunto dos números complexos

Assim como o conjunto dos números reais, o conjunto dos números complexos pode ser representado por um meio geométrico. Entretanto, como por definição os elementos do conjunto dos números complexos são representados por um número $c = a + b\mathbf{i} \in C$, em que $a, b \in R$, para representarmos esse número c precisamos de um plano, ao invés de uma reta. Este plano possui dois eixos perpendiculares, um representando a componente real e o outro representando a componente imaginária do número complexo.

Segue a ilustração representando o chamado plano complexo, também chamado de diagrama de Argand, em homenagem ao matemático suíço Jean-Robert Argand. Nela, temos representado um número $z = x + y\mathbf{i} \in C$, sendo x o eixo dos números reais e y o eixo dos números imaginários:

Figura 2 - Diagrama de Argand



Fonte 2: Weisstein (2022)

2.3.2 Rotação de um ponto utilizando números complexos

Entre as diversas aplicações dos números complexos está o uso deles para representar a rotação de um ponto em duas dimensões por meio da multiplicação entre dois números complexos. Isso se dá, entre outras coisas, pela possibilidade de representarmos os números complexos em um plano coordenado e de pudermos utilizar a fórmula de Euler para relacionarmos um número complexo com um ângulo.

A fórmula de Euler relaciona um número complexo z = x + yi com um número $re^{i\varphi}$, onde $r = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ e $\varphi = \arg(z)$, isto é, o ângulo formado entre um vetor que parte da origem até o número z e o eixo dos números reais x.

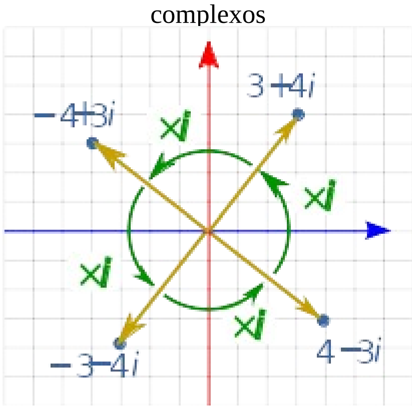
Tomando como exemplo o número c = 3 + 4**i**, desejamos rotacionar o ponto representado pelo número em 90º no sentido anti-horário. Para isso, precisamos encontrar um número z cujo argumento seja de 90º, ou π/2 radianos e que |z| = 1, pois caso contrário, além de rotacionarmos o ponto, também estaríamos também distanciando-o ou aproximando-o da origem. O número que satisfaz essas duas condições é o número z = **i**.

Assim, ao realizarmos a multiplicação c*z, obteremos um número c’ que representa o ponto c rotacionado 90º no sentido anti-horário:

$$c' = c*z = (3 + 4\mathbf{i}) * \mathbf{i} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{i}^2 = 3\mathbf{i} + 4(-1) = -4 + 3\mathbf{i}$$

Através da seguinte imagem, podemos perceber que ao realizar repetidas multiplicações por **i**, estaremos rotacionando o ponto sucessivas vezes, até retornar a sua posição inicial:

Figura 3 - Rotação com números complexos



Fonte 3: Math is Fun (2022)

3 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os principais resultados obtidos no processo de pesquisa para a elaboração presente monografia. Em um primeiro momento são citadas as principais fontes bibliográficas utilizadas ao longo da pesquisa para a sua fundamentação.

Em seguida, são apresentadas as principais motivações que levaram à criação do conjunto dos números quaternários, em conjunto com sua definição formal e algumas de suas propriedades fundamentais.

Na seção seguinte são apresentadas algumas propriedades adicionais do conjunto dos números quaternários, necessárias para a compreendermos a especificidade desde conjunto e a sua principal aplicação, abordada na próxima seção: a descrição do processo de rotação em três dimensões. Nessa seção é apresentado, além da definição da operação de rotação com quatérnions, um exemplo concreto de como tal operação é realizada.

3.1 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Como referências bibliográficas, foram utilizados artigos científicos e livros publicados sobre os temas e conteúdos apresentados.

Como principal referência para as três primeiras seções do capítulo 2, foi utilizado o livro “Curso de Análise”, de Elon Lages Lima, matemático brasileiro e que escreveu uma gama de livros didáticos para o nível superior. Este livro, muito utilizado como livro-texto em cursos de análise real, conta com diversas definições de extrema importância para compreendermos a noção de conjunto dos números reais e de conjunto numérico como um todo.

Na quarta seção do segundo capítulo, a principal referência é a do livro “Cálculo”, de James Stewart. Esse livro, muito utilizado nos cursos de cálculo, apresenta em seu apêndice uma definição bastante intuitiva do conjunto dos números complexos, bem como de suas operações usuais.

Como principais referências para o capítulo 3 foram utilizados o artigo “Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal”, de Simon Altmann para contextualizar historicamente a formulação do conjunto dos quatérnios e apresentar suas propriedades fundamentais e o artigo de Andreyson Bicudo Jambersi e Samuel da Silva chamado “A Sutileza dos Quatérnions no Movimento de Rotação de Corpos Rígidos” para apresentar algumas outras propriedades do conjunto e como a operação de rotação em três dimensões é realizada se utilizando dos elementos dele.

3.2 RESULTADOS OBTIDOS

Nesta seção discute-se o conceito de números quaternários, incluindo o contexto histórico que motivou e levou à sua invenção, as suas propriedades aritméticas e algébricas e as suas aplicações.

3.2.1 Contexto histórico da invenção dos quatérnions

O conjunto dos números quaternários, ou quatérnions, foi inventado pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) ao tentar encontrar uma forma de descrever a rotação de objetos em um espaço tridimensional.

Segundo Altmann (1989, p. 294), Hamilton esteve interessado no conjunto dos números complexos desde o início da década de 1830. Na época, foi descoberto que a multiplicação entre dois números do conjunto dos números complexos poderia ser utilizada para descrever a rotação de um objeto no plano. Hamilton então passou dez anos de sua vida tentando encontrar uma forma de representar a rotação de objetos no espaço tridimensional através da multiplicação de dois números formados por três componentes, sendo duas delas imaginárias, de forma análoga ao conjunto dos números complexos, em que se utilizam duas componentes para representar a rotação em duas dimensões.

O que se seguiu, segundo Altmann (1989, p. 295, tradução nossa), foi o seguinte:

> [In] The morning of that day [16 October 1843] Hamilton, accompanied by Lady Hamilton, was walking along the Royal Canal in Dublin towards the Royal Irish

> Academy, where Hamilton was to preside at a meeting. As he was walking past Broome Bridge (...), Hamilton, in a flash of inspiration, realized that three, rather than two, imaginary units were needed, with the following properties:
> $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = k, \qquad ji = -k$
> and cyclic permutation. As everyone knows, and de Valera was to do almost one century later on his prison wall, Hamilton carved these formulae on the stone of the bridge (…).[4]

Assim, pela própria definição original de Hamilton acerca dos quatérnions, podemos perceber uma propriedade interessante: a multiplicação de duas unidades imaginárias pertencentes ao conjunto dos quatérnions não é comutativa, ou seja, a ordem em que realizamos a operação de multiplicação entre elas altera o seu produto.

3.2.2 Definição e aritméticas dos números quaternários

Segundo Jambersi e Silva (2016, p. 4), um número quaternário pode ser representado por um número $q \in H$, tal que $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, onde q_0, q_1, q_2 e q_3 são números reais e i, j e k são unidades imaginárias que satisfazem as seguintes propriedades:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
$$ij = k = -ji$$
$$jk = i = -kj$$
$$ki = j = -ik$$

A definição de soma e de multiplicação entre números quaternários se dá da mesma forma que pelos números complexos, ou seja, somamos componente à componente e multiplicamos os componentes do números de maneira distributiva usual. Podemos

4 "[Na] manhã daquele dia [16 de outubro de 1843] Hamilton, acompanhado de Lady Hamilton, caminhava junto do Royal Canal em Dublin em direção a Royal Irish Academy, onde Hamilton presidiria um encontro. Conforme caminhava pela Broome Bridge (…), Hamilton, em um flash de inspiração, percebeu que três, ao invés de duas, unidades imaginárias eram necessárias, com as seguintes propriedades: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$ e permutação cíclica. Como todos sabem, e de Valera faria quase um século depois em sua cela de prisão, Halmilton esculpiu essas fórmulas nas pedras da ponte (...)."

demonstrar, portanto, que para dois números quaisquer p, q $\in$ H, apesar de a adição ser comutativa e multiplicação não o é. Sejam $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ e $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, temos para a adição entre eles que:

$$\begin{aligned} p + q &= p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k + q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \\ &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \\ &= (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)i + (q_2 + p_2)j + (q_3 + p_3)k \\ &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k + p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \\ &= q + p \end{aligned}$$

Enquanto para a multiplicação entre eles temos:

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k)\,(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \\ &= p_0q_0 + p_0q_1 i + p_0q_2 j + p_0q_3 k + p_1 i q_0 + p_1 i q_1 i + p_1 i q_2 j + p_1 i q_3 k + p_2 j q_0 + p_2 j q_1 i \\ &\quad + p_2 j q_2 j + p_2 j q_3 k + p_3 k q_0 + p_3 k q_1 i + p_3 k q_2 j + p_3 k q_3 k \\ &= p_0q_0 + p_0q_1 i + p_1q_0 i + p_0q_2 j + p_2q_0 j + p_0q_3 k + p_3q_0 k + p_1q_1 i^2 + p_1q_2 ij + p_1q_3 ik + \\ &\quad p_2q_1 ji + p_2q_2 j^2 + p_2q_3 jk + p_3q_1 ki + p_3q_2 kj + p_3q_3 k^2 \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_0q_2 + p_2q_0 - p_1q_3 + \\ &\quad p_3q_1)j + (p_0q_3 + p_3q_0 - p_2q_1 - p_1q_2)k \end{aligned}$$

Porém, se fizermos na ordem diferente, temos:

$$\begin{aligned} qp &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)\,(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k) \\ &= q_0p_0 + q_0p_1 i + q_0p_2 j + q_0p_3 k + q_1 i p_0 + q_1 i p_1 i + q_1 i p_2 j + q_1 i p_3 k + q_2 j p_0 + q_2 j p_1 i \\ &\quad + q_2 j p_2 j + q_2 j p_3 k + q_3 k p_0 + q_3 k p_1 i + q_3 k p_2 j + q_3 k p_3 k \\ &= q_0p_0 + (q_0p_1 + q_1p_0)i + (q_0p_2 + q_2p_0)j + (q_0p_3 + q_3p_0)k + q_1p_1 i^2 + q_1p_2 ij + q_1p_3 ik \\ &\quad + q_2p_1 ji + q_2p_2 j^2 + q_2p_3 jk + q_3p_1 ki + q_3p_2 kj + q_3p_3 k^2 \\ &= (q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3) + (q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2)\, i + (q_0p_2 + q_2p_0 - q_1p_3 + \\ &\quad q_3p_1)j + (q_0p_3 + q_3p_0 + q_1p_2 - q_2p_1)k \end{aligned}$$

Assim, apesar da componente real permanecer igual, as componentes imaginárias adquirem um valor diferente ao comutarmos a multiplicação, razão pela qual o conjunto dos números quaternários não preserva a propriedade comutativa para a multiplicação.

Uma outra forma de representarmos a multiplicação entre as unidades quaternárias se dá por meio de uma tabela de multiplicação entre tais unidades, com destaque para os valores onde a comutatividade não é satisfeita:

3.2.3 Outras Propriedades dos números quaternários

Figura 4 - Tabela de multiplicação das unidades quaternárias

x	**1**	**i**	**j**	**k**
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Fonte 4: Elaboração do autor (2022)

Assim como no conjunto dos números complexos, existem no conjunto nos números quaternários os conceitos de conjugado e de norma de um número quaternário. O conjugado q’ de um número quaternário $q \in H$, tal que $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ é definido, segundo Jambersi e Silva (2016, p. 4), como:

$$q' = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$$

O conjugado q’ de um número $q \in H$ também pode ser representado, em contraste com o conjunto dos números complexos, com a multiplicação e soma de outros números quaternários, conforme demonstrado:

$$\begin{aligned} q' &= -1/2*(q + iqi + jqj + kqk) \\ &= -1/2*(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k + i(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)i + j(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)j + \\ &\qquad k(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)k \\ &= -1/2*(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k + (q_0i + q_1i^2 + q_2\,ij + q_3\,ik)i + (q_0\,j + q_1\,ji + q_2j^2 + \\ &\qquad q_3jk)j + (q_0\,k + q_1\,ki + q_2\,kj + q_3k^2)k) \end{aligned}$$

$= -1/2*(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k + (q_0 i - q_1 + q_2 k - q_3 j)i + (q_0 j - q_1 k - q_2 + q_3 i)j +$
$(q_0 k + q_1 j - q_2 i – q_3)k)$
$= -1/2*(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k + (q_0 i^2 – q_1 i + q_2 ki - q_3 ji) + (q_0 j^2 - q_1 kj – q_2 j +$
$q_3 ij) + (q_0 k^2 + q_1 jk - q_2 ik – q_3 k)$
$= -1/2*(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k - q_0 – q_1 i + q_2 j + q_3 k - q_0 + q_1 i – q_2 j + q_3 k - q_0 +$
$q_1 i + q_2 j – q_3 k)$
$= -1/2*(-2q_0 + 2q_1 i + q_2 j + 2q_3 k)$
$= q_0 - q_1 i - q_2 j – q_3 k$

Além disso, a norma ou módulo de um número quaternário é definida, também segundo Jambersi e Silva (2016, p. 4), como:

$$|q| = |q’| = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}$$

Estes conceitos são necessários para a definição da noção de recíproco ou inverso de um número quaternário.

Assim como vetores em um espaço vetorial, podemos obter um *quatérnion unitário*, também chamado de *versor* ao dividimos um quatérnion qualquer por sua norma ou módulo. Assim, para todo e qualquer quatérnion $q \in H$, vale que:

$$U_q = \frac{q}{|q|}$$

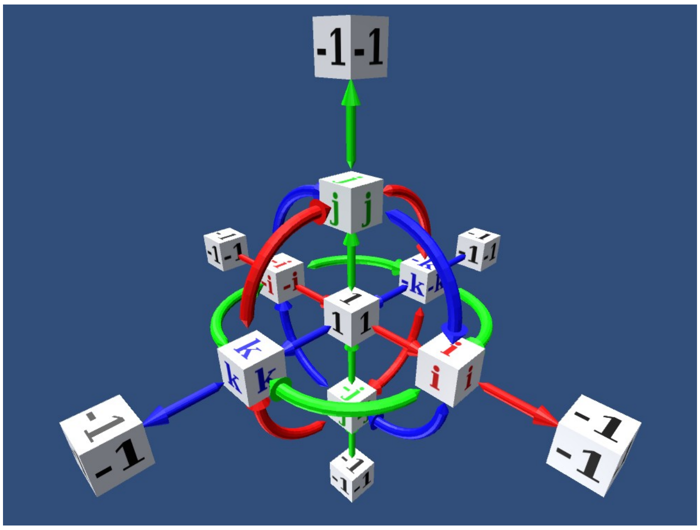
Por fim, temos que para qualquer quatérnion $q \in H$, ao multiplicarmos ele pelo número $q’/|q|^2$, obteremos 1, qualquer que seja a ordem de multiplicação. Assim, podemos definir o *recíproco* ou *inverso* de um quatérnion q como:

$$q^{-1} = \frac{q'}{|q|^2}$$

De tal forma, dado que a multiplicação entre dois quatérnions não é comutativa, podemos deduzir que, dados dois quatérnions não-nulos $p,q \in H$, podemos efetuar a divisão de p por q de duas maneira distintas, a dizer pq^{-1} e $q^{-1}p$, obtendo, normalmente, diferentes resultados, razão pela qual a notação para denotar a divisão de p por q p/q não é utilizada para o conjunto dos quatérnions.

A representação geométrica dos quatérnions é dificultosa, uma vez que os elementos do conjunto dos quaternários são análogos a elementos de R^4, ou seja, seus elementos possuem quatro dimensões. O que é possível é a representação de quatérnions puros de maneira análoga a elementos de R^3 ou a representação de projeções do conjunto dos quatérnions em R^3, como mostra a seguinte imagem, que denota também as regras de multiplicação entre as unidades quaternárias:

Figura 5 - Representação em três dimensões das unidades quaternárias



Fonte 5: Fonte: u/Teraka. Disponível em <https://www.reddit.com/r/Unity3D/comments/42ymse/visualizing_quaternions/>. Acesso em 29 de nov. de 2022.

3.2.4 Aplicações dos números quaternários

A principal aplicação do conjunto dos quatérnions, e motivo da sua criação, é a descrição do processo de rotação de um corpo em um espaço tridimensional, sendo utilizados em computação gráfica, na robótica, para navegação e na mecânica orbital de satélites.

Segundo Jambersi e Silva (2016, p. 4), podemos representar a rotação de um objeto no espaço tomando dois quatérnions puros, ou seja, que possuam somente componentes imaginárias. Um desses quatérnions, chamado **p**, representa um ponto qualquer no espaço sobre o qual a rotação será realizada, enquanto o outro quatérnion unitário, chamado **q**, representa a operação de rotação.

A operação de rotação sobre o quatérnion **p** é dada então, segundo Jambersi e Silva (2016, p. 4), pela seguinte operação de conjugação, onde **p’** representa o quatérnion **p** após a rotação:

$$\mathbf{p'} = q\mathbf{p}q^{-1}$$

O quatérnion q, e consequentemente, q^{-1}, pode ser encontrado por meio da seguinte relação, derivada da fórmula de Euler para a representação dos números complexos:

$$q = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + u sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Onde **u** é um quatérnion unitário puro que indica o eixo sobre o qual a rotação será realizada e α o ângulo de rotação em radianos.

Devido ao fato de os eixos das unidades imaginária de um número quaternário serem perpendiculares entre si, podemos fazer a correspondência entre elas e os eixos coordenados de R^3. Essa correspondência pode ser feita da seguinte maneira: tomando um quatérnion puro $q \in H$, tal que $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$, os valores do eixo x de R^3 são correspondidos pelos valores de q_1, os valores do eixo y são correspondidos com os valores de q_2 e os valores do eixo z são correspondidos com os valores de q_3.

Agora, tomemos como exemplo o ponto $P \in R^3$, tal que P = (0, 1, 0). Esse ponto pode ser representado pelo quatérnion p = 1j, ou simplesmente p = j. Supondo que desejemos realizar a rotação de tal pondo tendo como eixo de rotação o eixo z e que tal rotação seja realizada em um ângulo de 90º no sentido anti-horário, então o quatérnion **u** que indica o eixo de rotação seria **u** = 1k = k e o quatérnion q que utilizaríamos para realizara a operação seria dado por:

$$q = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como visto anteriormente, para encontramos o valor de q’, conservamos o valor da parte real do quatérnion q e invertemos o sinal da parte imaginária. Assim, temos:

$$q' = \frac{\sqrt{3}}{2} - k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para encontrarmos o valor de q^{-1} precisamos dividir q’ pela norma ao quadrado de q, ficando assim com:

$$|q| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}}$$

$$q^{-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{6}{4}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{k \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Assim, para descrevermos o processo de rotação do ponto P, realizamos a seguinte operação com os quatérnions p, q e q^{-1}:

$$q \cdot p \cdot q^{-1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot j \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - k \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + k \cdot j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - k \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{¿} \left(j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - k \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = j \cdot \frac{3}{6} - j \cdot k \cdot \frac{3}{6} - i \cdot \frac{3}{6} + i \cdot k \cdot \frac{3}{6}$$

$$\text{¿} \frac{j}{2} - \frac{i}{2} - \frac{i}{2} - \frac{j}{2} = -i$$

Portanto, após realizarmos a operação de rotação, o ponto P = (0, 1, 0) passou a ser o ponto P’ = (-1, 0, 0), exatamente o ponto P rotacionado em 90º tendo como eixo de rotação o eixo z.

4 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como base teórica para a pesquisa desta monografia, foram apresentados os conceitos fundamentais para a compreensão do conceito de conjunto numérico e das principais maneiras de realizarmos sua definição formal. Foram apresentadas também as definições formais dos conjuntos dos números naturais e dos números reais, desenvolvendo os conceitos necessários para a compreensão de tais definições.

Seguindo a proposta da presente monografia, buscou-se apresentar o conjunto dos números quaternários de maneira geral, apresentando o contexto histórico em que se deu sua criação e os tipos de problemas que buscava-se resolver com sua formulação, a sua definição formal tal qual foi concebida originalmente e algumas de suas propriedades fundamentais, bem como a sua principal aplicação: a descrição do processo de rotação em três dimensões.

Tais informações foram apresentadas por meio de exemplos e demonstrações dos cálculos, de maneira que se espera que fique claro para os leitores da presente monografia a procedência dos resultados matemáticos obtidos e facilite a compreensão dos conceitos apresentados.

Devido à escassez de recursos em língua portuguesa sobre quatérnions, espera-se que a presente monografia se mostre como um texto útil para a consulta e para referência, ao menos introdutória, acerca do conjunto dos números quaternários e que outros estudantes possam utilizá-lo como base para outras pesquisas acerca de tal conjunto.

Tais pesquisas podem ser voltadas tanto para novas aplicações ainda não exploradas dos conjuntos dos quatérnions como para a descoberta de novas propriedades do conjunto, especialmente de propriedades algébricas ou numéricas.

REFERÊNCIAS

ALTMANN, Simon. **Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal**. Mathematics Magazine, Vol. 62, No. 5. dec., 1989, pp. 291-308.

CIESIELSKI, Krzysztof. **Set Theory for the Working Mathematician**. Cambridge University Press, 1997.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto VOAZ Matemática**. 1. ed. – São Paulo: Ática, 2012.

EVES, Howard. **An Introduction to the History of Mathematics with Cultural Conections**. Saunders College Publishing, 1990.

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

IRVINE, Andrew David; DEUTSCH, Harry. **Russell's Paradox**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.). Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/spr2021/entries/russell-paradox/>. Visitado em 30 set. 2022.

JAMBERSI, Andreyson Bicudo; SILVA, Samuel da. **A Sutileza dos Quatérnions no Movimento de Rotação de Corpos Rígidos**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 38, nº 2, 2016.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. v.1. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MALHOTRA, N. **Pesquisa de Marketing**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

MATH IS FUN. **Complex Number Multiplication**. Math is Fun. Disponível em: <https://www.mathsisfun.com/algebra/complex-number-multiply.html>. Visitado em 15 de nov. de 2022.

STEWART, James. **Cálculo**, v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

WEISSTEIN, Eric W. **Argand Diagram**. MathWorld - A Wolfram Web Resource. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/ArgandDiagram.html>. Visitado em 14 de nov. de 2022.