UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

DIEGO LOUREIRO FRANCISCO DE SOUZA

GEOMETRIA:
FRACTAL E EUCLIDIANA NAS CONSTRUÇÕES HISTÓRICAS AFRICANAS

Palhoça

2019

DIEGO LOUREIRO FRANCISCO DE SOUZA

GEOMETRIA:
FRACTAL E EUCLIDIANA NAS CONSTRUÇÕES HISTÓRICAS AFRICANAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dalmo Gomes de Carvalho, Msc.

Palhoça

2019

DIEGO LOUREIRO FRANCISCO DE SOUZA

GEOMETRIA:
FRACTAL E EUCLIDIANA NAS CONSTRUÇÕES HISTÓRICAS AFRICANAS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado à obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Palhoça, 08 de julho de 2019.

_____

Professor e orientador Dalmo Gomes de Carvalho, Msc.
Universidade do Sul de Santa Catarina

_____

Prof. Mário Selhorst, Msc.
Universidade do Sul de Santa Catarina

_____

Profa. Rosana Camilo da Rosa, Msc.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Dedico este trabalho à minha família, tanto a que escolhi quanto a que Deus escolheu para mim.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela saúde, sabedoria, segurança e minha família. Pois sem Ele não teria chegado até aqui.

Agradeço minha mãe pelos puxões de orelha, que me ensinaram a ser o homem que sou. Também agradeço à Darqueli, minha irmã, sempre do meu lado após tantas lutas; como ela disse: “Somos sobreviventes”.

Agradeço minha “Vó Cani”, *In Memoriam*, que além do incentivo à leitura, ensinou-me a importância da ancestralidade, repassando-me um pouco da nossa história e mostrando a grandeza da oralidade.

Agradeço à Denise, minha esposa, família escolhida por mim, por tanta paciência, ajuda nos estudos e fora dele, além de ter me dado dois presentes cujo valor é incomensurável. Agradeço também meus filhos, Alice e Lucas, meus dois maiores presentes vindos de Deus e dados por minha esposa. Agradeço à dona “Cida”, minha sogra, por ficar com as crianças para eu poder realizar este trabalho.

Agradeço a cada professor que tive, dos muito dedicados aos que pareciam desinteressados. Aprendi com cada um deles, uns mais do que outros. Mas nenhum passou pela minha vida sem fazer diferença.

Agradeço ao professor Dalmo pera orientação e principalmente pela paciência, pois sem esses dois ingredientes este trabalho não teria sido feito.

"Talvez no futuro seja possível ensinar algo sobre a história da África. Mas até o momento não há nenhuma ou quase nenhuma: só existe a história dos europeus na África". (Hugh Trevor-Roper, 1965).

RESUMO

Quando se estuda matemática na educação infantil, comumente imagina-se que todas aquelas descobertas vieram dos gregos ou do resto da Europa, com o passar dos anos, ao aumentar os anos de estudos, descobrimos que tivemos contribuições de outros países e culturas para formar a Matemática que temos hoje. Mas mesmo no curso superior existe uma região no globo que aparentemente não contribuiu em nada para o avanço da matemática, pois dela raramente se fala, e quando fala costuma-se diminuir seus feitos. Não estamos falando do Novíssimo Mundo, ou do continente gelado, mas da velha e conhecida África. Esta quando lembrada é só por seus aspectos negativos e suas nações que já foram expoentes no uso, e também no estudo, da matemática, especialmente da geometria. Este trabalho exibe uma pesquisa do uso de Geometria Euclidiana e Geometria Fractal em grandes e pequenas construções antigas no continente africano. Apresentam-se muitas grandes construções egípcias que foram erguidas muito antes dos gregos saberem o que é matemática, e que não foram os únicos africanos, pois sim, o Egito fica na África, a alcançar este nível de conhecimento na construção de grandes monumentos. O trabalho expõe também que mesmo a geometria não euclidiana já tinha um de seus ramos, os fractais, utilizado e disseminado em alguns países do continente africano, mesmo antes dos matemáticos despertarem seu interesse por essa área. Temos a exposição de muitas construções centenárias, não tanto quanto as pirâmides, mas mais antigas do que os estudos dos fractais.

Palavras-chave: Geometria. África. Fractais.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Osso de Ishango, visto de vários ângulos. 17
Figura 2 - Papiro de Rhind. 18
Figura 3 - Um dos diagramas de Euclides. 22
Figura 4 - Fractal de Koch. 26
Figura 5 - Fractal de Mandelbrot 27
Figura 6 - Propriedade de auto semelhança do fractal 28
Figura 7 - Conjunto de Mandelbrot ampliado 29
Figura 8 – Uma mastaba, Saqqara 31
Figura 9 - Pirâmide de Zoser. 32
Figura 10 - Pirâmide Vermelha de Dahshur. 32
Figura 11 - Arquitetura africana: pirâmide de Gizé. 33
Figura 12 - Obelisco na entrada do templo de Lúxor. 34
Figura 13 - Templo da rainha Hatshepsut 1473-1458 a.C. 34
Figura 14 - Pirâmides na Núbia. Menores, mas numerosas. 35
Figura 15 - Topo das pirâmides explodidas por um explorador italiano. 35
Figura 16 – Palácio de Logone Birni (esq.), o caminho do palácio (centro) e insígnia real (dir.). 36
Figura 17 - Vila Ba-Ila no sul da Zâmbia. 37
Figura 18 - Modelo da Vila Ba-Ila. 37
Figura 19 - Aldeias da Etnia Kirdi, fronteira da Nigéria com Camarões. 38
Figura 20 - Iterações da simulação Makoulek. 39
Figura 21 - Aldeia Nankani (esquerda) e uma "zalanga" (direita). 40
Figura 22 - Songhai, em Labbezanga (esquerda) e fractal criado em computador (direita). 41
Figura 23 – Assentamento ao nordeste do Senegal (esquerda) e fractais ramificações (direita). 42
Figura 24 – Mapa das ruas de Cairo (esquerda) e simulação fractal de suas ruas (direita). 42
Figura 25 – Cercado contra o vento em Níger. 43

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9
1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA 10
1.2 PROBLEMATIZAÇÃO 10
1.3 JUSTIFICATIVAS 11
1.4 OBJETIVOS 13
1.4.1 Objetivo Geral 13
1.4.2 Objetivos Específicos 13
1.5 TIPO DA PESQUISA 13
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO 14
2 AS GEOMETRIAS 16
2.1 GEOMETRIA E SUA HISTÓRIA 16
2.1.1 Geometria euclidiana 20
2.1.2 Geometria não euclidiana 23
2.1.2.1 Fractais..... 25
3 ANTIGAS CONSTRUÇÕES AFRICANAS 30
3.1 GEOMETRIA EUCLIDIANA EM CONSTRUÇÕES AFRICANAS ANTERIORES A 700 A.C. 30
3.2 USO DE GEOMETRIA FRACTAL EM CONSTRUÇÕES AFRICANAS 36
4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 44
4.1 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS 44
4.2 RESULTADOS OBTIDOS 46
5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS 50
REFERÊNCIAS 53

1 INTRODUÇÃO

Após a Lei 10.639/03 (BRASIL, 2003), alterada pela Lei 11.645/08 (BRASIL, 2008), tornando obrigatório o ensino da história e cultura afro-brasileira e africana no ensino básico, dirimindo comentários racistas que tentam diminuir a cultura e desenvolvimento negro, como uma maneira de justificar o racismo institucional que permanece desde 14 de maio de 1888. Essas leis foram promulgadas depois de eu já ter terminado o ensino básico, infelizmente não a vi em vigor. E em um país onde o Presidente da República diz: "Os portugueses nem pisavam na África, os próprios negros que entregavam os escravos [...]", ou "[...] Que dívida histórica é essa que temos com os negros"? Ambas ao vivo, quando ainda candidato, no Programa Roda Viva, em 30/07/2018. Não há como desmerecer essa lei. Se ela fosse mais antiga, provavelmente ele não teria aparecido em rede nacional falando tantas besteiras.

Cresci aprendendo que a história dos negros se resumia à escravidão, como se antes disso eles não existissem, não tinham cultura e sem a benevolência do europeu, seriam só um bando de selvagens. Mas para minha surpresa, e de muitos a quem falo, havia sim civilização em todo continente africano; ainda que não fosse como as cidades europeias, elas existiam e foram subjugadas. A intenção da minha pesquisa é mostrar que muitas construções milenares, ou centenárias, africanas já utilizavam geometria euclidiana e fractal, desde pirâmides ainda de pé, passando por reinos não mais existentes, até vilarejos atuais.

Como tantos povos, tantas culturas e histórias distintas, foram considerados subumanos, ou selvagens, mesmo mostrando conhecimento de Astronomia, Agronomia e Matemática? Como dar ouvidos as palavras de filósofos que fui obrigado a estudar, seja na escola, seja para o vestibular? Pois até os "pensadores" padeciam desse preconceito. Veja o exemplo de Montesquieu (1996, p. 257): "É impossível supormos que tais gentes sejam homens, pois, se os considerássemos homens, começaríamos a acreditar que nós próprios não somos cristãos [...]", ou Kant (2012, p. 69):

> O senhor Hume desafia qualquer um a citar um único exemplo em que um negro tenha demonstrado talentos, e afirma: dentre os milhões de pretos que foram deportados de seus países, não obstante muito deles terem sido postos em liberdade, não se encontrou um único sequer que apresentasse algo grandioso na arte ou na ciência, ou em qualquer outra aptidão; [...]

Meu trabalho vem para apresentar outro ponto de vista para história que nos foi contada, e resgatar, por meio de Geometria e de História da Matemática. O respeito que deveríamos ter dado a culturas subvalorizadas. Apresentarei textos e fotos que vão de encontro à história que nos foi contada, textos que contam a história de povos que fizeram muito pela matemática, além de outras áreas, mas não são lembrados pela História, já que a cultura da oralidade não é tão valorizada no mundo moderno.

1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA

Minha intenção com este Trabalho de Conclusão de Curso é transformá-lo em um instrumento que nos ajude a enxergar de maneira diferente alguns povos que tanto contribuíram para o desenvolvimento da Geometria, e por que não, da própria Matemática.

A Geometria foi prontamente escolhida pela afinidade que a maioria das pessoas tem com essa área da Matemática, acredito que por ser algo visual, e mesmo entre os mais leigos é um ramo que regularmente é utilizado para resolver problemas do cotidiano. Fiz questão de delimitar o tema em geometria fractal e geometria euclidiana nas construções históricas africanas desde pequenos vilarejos até grandes monumentos. A escolha por "construções africanas" especificamente é por causa do momento atual do país, onde o preconceito parece ter aflorado, apesar de estarmos em pleno século XXI.

1.2 PROBLEMATIZAÇÃO

Alguns chamam Euclides de "pai da geometria" devido sua contribuição para o estudo dessa ramificação da Matemática. Sabemos que os egípcios, além de outros povos, já tinham conhecimento bastante avançado em Geometria muito antes de Euclides escrever *Os Elementos*.

Assis (2010, p. 7) lembra que de Euclides até Hilbert foram dois milênios, e que o quinto postulado, entre afirmações e refutações, virou a mola propulsora para a descoberta de

outras geometrias, mesmo com as descobertas de Poincaré, que achava que toda geometria é válida quando conveniente. Assis (2010, p. 5) complementa: “Assim, em pleno século XIX, o Axioma das Paralelas ainda não havia sido provado. Contudo, em meio a tantas tentativas, surge uma nova e intrigante geometria, apoiada nos quatro primeiros axiomas de Euclides e na negação do último”.

Uma das áreas de estudo desse novo ramo foi a Geometria Fractal, sendo esse nome dado somente em 1975 por Benoit B. Mandelbrot, sendo este um defensor de que a geometria fractal, e não a euclidiana, refletiria a geometria dos objetos e processos do mundo real.

Sabendo desses detalhes, vêm os questionamentos: Sendo uma geometria de objetos reais, poderiam civilizações antigas ter estudado seu uso para construções? Civilizações distintas no continente africano já sabiam da existência de fractais? Alguma civilização africana já utilizava Geometria Euclidiana antes de Euclides escrever *Os Elementos*?

1.3 JUSTIFICATIVAS

Desde a História Antiga o ser humano vem se adaptando às intempéries impostas pela “Mãe Natureza” com construções tanto de habitações como de templos ou campos de plantio. A arquitetura e a engenharia, usuárias obrigatórias da Geometria, evoluíram muito desde a antiguidade.

O que admitimos como Geometria Euclidiana já era conhecido, e praticado, por outras civilizações muito antes de Euclides ou Pitágoras. Alguns dão aos egípcios o título de pais da geometria, pois têm os primeiros registros do uso dela para uso nas plantações, daí o nome geometria (***geo*** = terra e ***metria*** = medida). Sem tirar nem um pouco do mérito, mas Euclides de Alexandria foi, na verdade, o primeiro a discutir sistematicamente o tema, que já era de conhecimento de matemáticos anteriores a ele, mas não tinham reunido em uma só obra todo o conteúdo e não eram organizados de maneira lógica.

As pirâmides mais antigas datam de mais de 2600 a. C. e seria impossível pensar em construção de pirâmides sem o conhecimento de geometria. Mais ou menos na mesma época o Império Kush, atualmente chamado de Sudão, também construía pirâmides, não com

os mesmos tamanhos, mas em grandes quantidades e com qualidade igual às egípcias. Mas esses fatos sempre foram “esquecidos”, para não dizer omitidos, por arqueólogos europeus e norte-americanos que se negavam a reconhecer essas civilizações negras, graças a um pensamento racista que precisava sustentar o pensamento eugênico.

> Os negros da África não possuem, por natureza, nenhum sentimento que se eleve acima do ridículo. O senhor Hume desafia qualquer um a citar um único exemplo em que um negro tenha demonstrado talentos, [...], não se encontrou um único sequer que apresentasse algo grandioso na arte ou na ciência, ou em qualquer outra aptidão; já entre brancos, constantemente arrojam-se aqueles que, saídos da plebe mais baixa, adquirem no mundo certo prestígio, por força de dons excelentes. Tão essencial é a diferença entre essas duas raças humanas, que parece ser tão grande em relação às capacidades mentais quanto à diferença de cores. (KANT, 2012, p. 69)

Provavelmente não tão antigas quanto as civilizações citadas, encontramos antigas “aldeias” africanas cuja organização é baseada em Geometria Não-Euclidiana, mas especificamente a Geometria Fractal, que pode ser encontrada em diversos países, mas que só começaram a chamar atenção depois do aumento do interesse por esse ramo da Matemática, pois fotos aéreas dessas vilas já existiam há muitos anos, e mapas dessas localidades já existem há mais tempo ainda.

Não há data exata de algumas construções fractais em África. Não havia interesse em cultura africana, exceto a chamada de “selvagem”, até alguns anos atrás. Essas construções remetem à etnomatemática, onde propositalmente, povos africanos criaram aldeias com uso de fractais. Onde dependendo da aldeia, quão mais ao centro for o retângulo construído, mais educada a pessoa deve ser, pois no centro fica a família real, e nos retângulos periféricos a estes ficam os outros nobres, e assim sucessivamente até chegar ao maior retângulo, onde se encontra a população mais simples. O que demonstra uma criação fractal organizada e intencional.

A partir dessa vontade de aprender um pouco mais sobre o conhecimento africano que vem sendo deixado de lado pela História, como se aquelas pessoas não existissem antes da invasão europeia, ou como se escraviza-los tivesse sido uma bondade feita àquele povo que nada tinha de conhecimento ou cultura, exceto práticas selvagens e inferiores ao conhecimento eurocêntrico. Com o advento da Lei 10.639/03 (BRASIL, 2013), ficou mais fácil o acesso a informações sobre a cultura africana, até hoje pouco difundida, e principalmente ensinada nas escolas. Quem sabe se esse conhecimento fosse disseminado anos atrás não veríamos tantos comentários racistas e pessoas influentes a nível nacional falando asneiras em entrevistas, ou palestras.

1.4 OBJETIVOS

Nesta parte, apresento as metas que serão perseguidas ao longo do trabalho, com muito afinco, e que nortearão todas as decisões, tomadas em conjunto, ou de forma individual, sempre no intuito de cumpri-las.

1.4.1 Objetivo Geral

Pesquisar o uso de Geometria Euclidiana e Geometria Fractal em grandes e pequenas construções antigas no continente africano.

1.4.2 Objetivos Específicos

a) Discutir a obra *Os Elementos* de Euclides de Alexandria;

b) Descrever os conceitos de Geometria Fractal;

c) Relatar o uso de Geometria Euclidiana nas construções da antiguidade em países africanos antes do nascimento de grandes matemáticos gregos;

d) Apresentar edificações de vilarejos africanos centenários construídos sob o conceito de Geometria Fractal.

1.5 TIPO DA PESQUISA

Ainda que tenha pontos em comum com outros tipos de pesquisa, como: métodos empíricos e generalização de conclusões; esta pesquisa será interpretada quanto a abordagem

qualitativa. Vejamos: buscamos um ponto final, não testamos um ponto de partida; selecionamos o caso intencionalmente, coletamos dados de uma maneira não tão padronizada, diferentemente de uma estatística; e analisamos os dados interpretativamente e não estatisticamente. A vantagem desse tipo de pesquisa, de acordo com Flick (2013, p. 25) é que "[...] uma análise detalhada e exata de alguns casos pode ser produzida, e os participantes têm muito mais liberdade para determinar o que é importante para eles [...]".

Esta pesquisa aproxima-se bastante do conceito de pesquisa documental, pois utiliza fontes de pesquisa das mais diversificadas (GIL, 2002, p. 46), ainda que em sua grande maioria seja de livros e trabalhos acadêmicos, neste trabalho teremos fontes vindas de sítios da internet e inclusive de vídeo em sítio de "streaming", ou seja, nem todas as fontes receberam um tratamento analítico. Não devendo ser confundido com pesquisa bibliográfica, pois esta se diferencia daquela por ter suas fontes constituídas, em sua maioria, por material impresso localizado nas bibliotecas (GIL, 2002, p. 46). "Os livros de referência também denominados livros de consulta, são aqueles que têm por objetivo possibilitar a rápida obtenção das informações requeridas, ou, então, a localização das obras que as contêm" (GIL, 2002, p. 44).

A outra maneira de classificar esta pesquisa, no quesito objetivo, é como pesquisa descritiva, pois "[...] seu objetivo primordial é a descrição das características de determinada população, ou fenômeno, ou então, o estabelecimento de relações entre variáveis", segundo Gil (2002, p. 42). "Este é o tipo da pesquisa que mais aprofunda o conhecimento da realidade, porque explica a razão, o porquê das coisas. Por isso mesmo é o tipo mais complexo e delicado, já que o risco de cometer erros aumenta consideravelmente" (GIL, 202, p. 43).

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

Perseguindo os objetivos descritos neste projeto, a parte escrita desta pesquisa foi dividida em cinco capítulos. Elas seguem um roteiro considerado comum na metodologia da pesquisa, e também direcionamentos do professor orientador.

No primeiro capítulo encontraremos o que é bem comum em pesquisas acadêmicas como: tema, delimitação deste tema, problematização e justificativas, além dos objetivos perseguidos nesta pesquisa e o tipo de pesquisa realizada.

No capítulo dois já temos os referenciais teóricos, introduzindo a história da geometria, para depois adentrar nas geometrias euclidiana e não-euclidiana, finalizando com uma pequena exposição da geometria fractal.

Ao começar o capítulo três nos deparamos com as grandes construções africanas do passado, onde ao longo do capítulo vê-se o uso de geometria euclidiana, antes do desembarque da matemática na Grécia, e o capítulo termina apresentando a geometria fractal em antigas construções africanas.

No quarto capítulo nos é apresentado e discutido o resultado, especificamente com coleta e tratamento de dados, e o resultado obtido.

No quinto, e último capítulo, são divulgadas as conclusões e as considerações finais.

2 AS GEOMETRIAS

Este é o capítulo onde serão apresentados os conceitos de geometria, tanto a euclidiana como a não euclidiana, onde se encaixam os fractais, e seus desenvolvimentos em épocas tão diferentes. Baseados em pontos de vista de diferentes autores, com o intuito de embasar os questionamentos da pesquisa, foram utilizados vários tipos de fonte de pesquisa bibliográfica; desde o velho e confiável livro físico até vídeos em sítios de "streaming". A fundamentação será mais explicativa o possível, buscando autores renomados e históricos, mas se preocupando em não se tornar enfadonha.

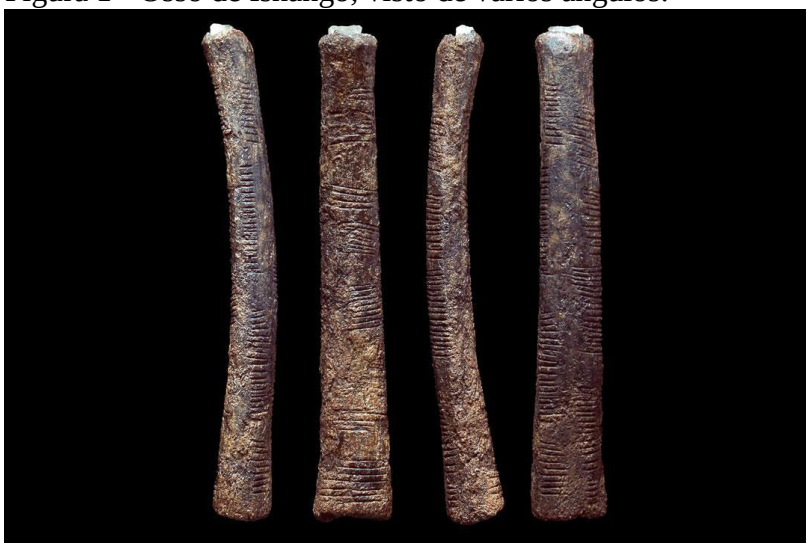
2.1 GEOMETRIA E SUA HISTÓRIA

Impossível falar sobre Matemática sem falar de suas três áreas mais conhecidas, são: álgebra, aritmética e geometria. Contudo, desde os primórdios do que viria a ser matemática, a aritmética já acompanhava o homem antigo, alguns chegam a dizer que a ideia de contar veio com o propósito de controlar a quantidade do gado; outros acreditam que venha antes disso, quando nem mesmo havia a domesticação do gado. Temos a explanação de Roque (2012, p. 24):

> Não é difícil imaginar que as sociedades muito antigas tenham tido noção de quantidade. Normalmente, associa-se a história dos números à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência, e o exemplo mais frequente é o de pastores de ovelhas que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra.

Tomemos como exemplo o osso de Lebombo, dos Montes Libombos, na Suazilândia, datado de aproximadamente 35 mil anos a. C. Quando o homem ainda vivia da caça. Não tão antigo, mas tão importante quanto, temos o osso de babuíno encontrado na fronteira entre Uganda e o Congo (STEWART, 2016, p. 14), chamado osso de Ishango, e é datado de aproximadamente 20 mil anos atrás. Como diz Roque (2012): "Em uma história de números, é difícil escolher um ponto de partida. [...] As fontes para o estudo das civilizações antigas são escassas e fragmentadas".

Figura 1 - Osso de Ishango, visto de vários ângulos.



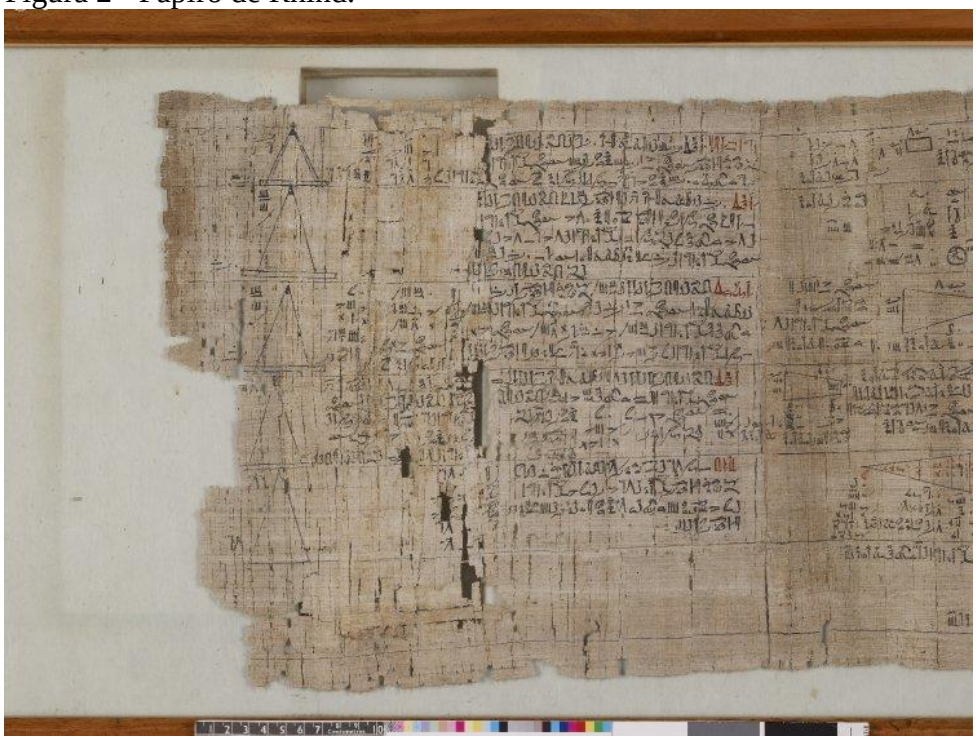
Fonte: Hubin (2014)

Na região do Rio Tigre, atual Iraque, a famosa Mesopotâmia, cerca de 4 mil anos a. C., já havia registro de escrita, e a relação da escrita com a matemática é estreita. Entretanto também são encontrados registro de nomes no antigo Egito na mesma época, e incluía um sistema de numeração (ROQUE, 2012, p. 25). O uso da matemática no antigo Egito é associado a quantificação de bens, para as necessidades administrativas. Outro fato que corrobora para o uso de matemática pelos egípcios é o uso de um calendário quase exato, nessa mesma época, segundo Zanardini (2017, p. 23). Mas ainda há mais registros mesopotâmicos do que egípcios, pois aqueles utilizavam argila, enquanto estes usavam papiro, que são facilmente destruídos por ação do tempo. Além disso, o conhecimento que temos hoje sobre a matemática egípcia, contam Araújo e Silva (2016, p. 1), vem de apenas cinco papiros, sendo os mais importantes os de Rhind e o de Moscou, que datam do século XVIII. Um dos mais antigos registros de uso da matemática para a geometria, o papiro de Rhind, datado de 1650 a. C., sobre os quais Eves (2011, p. 69) escreve sobre o uso de frações pelos egípcios e a determinação da área de um círculo. Roque (2012, p. 26) nos conta que o papiro de Rhind relata que fora copiado de um manuscrito ainda mais antigo. Ainda segundo Roque (2012, p. 55), O sistema decimal egípcio já estava desenvolvido por volta do ano 3000 a.C., ou seja, antes da unificação do Egito sob o regime dos faraós.

Os autores Araújo e Silva (2016, p. 2) complementam: “O papiro Moscou é considerado o segundo papiro matemático mais importante, [...], este papiro contém 25 problemas e nele estão dois resultados notáveis da matemática egípcia: a fórmula para o

volume do tronco de pirâmide e a solução para um problema que alguns acreditam tratar-se da área de um hemisfério".

Figura 2 - Papiro de Rhind.



Fonte: TBM (2018)

Não é raro vermos fundida a história da Matemática com a história da Geometria, afinal, o princípio de ambas está entrelaçado. Como citado antes, há relatos de cálculo de áreas de círculos desde 1850 a. C. (ZANARDINI, 2017, p. 25). Mas vejamos outras provas mais marcantes ainda de que muito antes da escrita desses papiros já era muito avançado o estudo da geometria. As provas não estão em registro escritos, mas em construções tão antigas e bem-feitas, que seria impossível erguê-las sem o conhecimento geométrico.

A construção da Pirâmide de Saqqara, também chamada de Pirâmide dos Degraus, é datada do reinado de Zoser, na III dinastia (aproximadamente 2600 a. C.), o que já seria um grande feito se não fossem as três pirâmides da região de Gisé, erguidas durante a IV dinastia (aproximadamente 2500 a. C.). Relata-nos Mokhtar (2010):

> Muito antes dessa data, de -3000 a -2400 (3000 a. C. a 2400 a. C.), a construção de sepulturas, projetadas como habitações para os mortos, já os havia levado a construir imponentes superestruturas que, com o passar do tempo, vieram a constituir as pirâmides em degraus e, posteriormente, as pirâmides propriamente ditas.

Mas de onde vem essa necessidade de estudar formas geométricas? Não vem da contabilidade de bens, afinal, para isso tinham aritmética já desenvolvida, como foi relatado anteriormente. A resposta seria: para agricultura.

Todos os anos aconteciam as cheias do Rio Nilo, e elas acabavam com a demarcação de terras nas áreas próximas ao rio. E com o conhecimento da geometria empírica, os escribas podiam rapidamente calcular a área de um campo, como nos escreve Mokhtar (2010, p. 141). Ainda relata que com essa informação poderia calcular o volume de grãos, sem utilizar conhecimento abstrato. Mas não pensemos que era algo fixo, engessado; Mokhtar (2010, p. 141) escreve que:

> Entretanto os egípcios conheciam com perfeição o método de calcular a área de um triângulo ou de um círculo, o volume de um cilindro, de uma pirâmide ou de uma pirâmide truncada e, provavelmente, de um hemisfério. Seu maior feito foi o cálculo da superfície do círculo. Procediam pela redução do diâmetro em 1/9 e elevavam o resultado ao quadrado, o que equivalia a atribuir o valor de 3,1605 a π, muito mais exato que o valor 3 dado a π por outros povos da Antiguidade.

Entre 2100 e 1600 a. C., na planície de Salisbury, Stonehenge foi construída e suas rochas colocadas de modo engenhoso e sofisticado, segundo Aragão (2009), "com o objetivo de prever o nascimento do Sol e da Lua, [...], o que é de enorme utilidade para um povo de agricultores, [...]". Mas ainda não foi assim que a matemática, especialmente a geometria, como conhecemos hoje, foi cultivada na Europa.

A história das inundações e o surgimento da geometria é a mais comum contada, originária nos escritos de Heródoto, no século V a. C., mas essa, de acordo com Heródoto (ROQUE, 2012, p. 71), é a origem da geometria que migrou para a Grécia. Tatiana Roque continua sua narrativa informando que tradicionalmente um dos primeiros matemáticos gregos apontados na história foi Tales de Mileto, que teria vivido próximo dos séculos VII e VI a. C, influenciado por mesopotâmicos e egípcios. Mas há estudiosos que acham que como *geometria* pode ser traduzida como *medida da terra* criou-se a ideia de que teria se originado da agrimensura. A autora continua dizendo que historiadores postularam que teria sido Tales a levar a geometria para a Grécia, e para dar mais credibilidade, que o mesmo "teria calculado até mesmo a altura de uma das pirâmides do Egito" (ROQUE, 2012, p. 71), enfatizando a origem empírica da geometria. Diz Roque (2012, p. 72):

> Sem dúvida, os primeiros matemáticos gregos praticavam uma geometria baseada em cálculos de medidas, como outros povos antigos. [...]. É verdade que, com Euclides, a matemática na Grécia parece ter adquirido uma configuração particular,

> passando a empregar enunciados geométricos gerais que não envolvem somente procedimentos de medida.

E é a partir deste ponto, após mesopotâmicos, egípcios e Tales de Mileto, que entramos no ramo mais difundido da geometria, que para muitos, especialmente os leigos, é o único ramo da geometria: a geometria euclidiana.

2.1.1 Geometria euclidiana

Já foi dito que anos após os egípcios e mesopotâmicos desenvolverem uma geometria voltada para os problemas do cotidiano, esse ramo da matemática aporta na Grécia. Alguns dizem que veio com Tales, outros já dizem que veio da interação grega com a mesopotâmia após a expansão de Alexandre, mas não há evidências nítidas da influência mesopotâmica sobre a tradição grega (ROQUE, 2012, p. 40). Na verdade, esse ar de mistério só instiga a investigar mais e mais sobre as origens da geometria. Mas a consenso que após desembarcar em terreno helenístico a Geometria, esta que conhecemos até hoje, se desenvolveu junto com toda a Matemática. As demonstrações e sistematizações em axiomas e teoremas começam a surgir, como é feito até hoje. Começa uma matemática que já não necessita tanto de números, e nem de um uso na prática para ser reconhecida como importante.

A partir desse ponto a Geometria começa a tomar outra forma, e não mudou muito desde o tempo Antigo até hoje, independentemente de referências platônicas, pitagórica ou euclidiana. Muitos teoremas que aprendemos no ensino básico até os dias de hoje, e não há a menor previsão de mudança, vieram da Grécia Antiga. Quantas pessoas já ouviram crianças reclamando de Pitágoras? Pois até hoje, dois milênios e meio depois, seu famoso teorema com os famigerados catetos e hipotenusa é matéria obrigatória em qualquer lugar escola do Brasil. Pitágoras, que viveu no séc. VI e V a. C., criou a escola pitagórica, segundo Aragão (2009, p. 21) foi Pitágoras quem definiu o ponto como unidade com posição e classificava os ângulos nas três categorias que usamos até hoje: agudo, reto e obtuso. Alguns autores acreditam que Pitágoras foi o elo entre Tales e Euclides.

> Geometria Euclidiana é uma área da Matemática que estuda as formas geométricas definidas e indefinidas, bem como suas propriedades. É uma das mais belas áreas da Matemática, pois além de auxiliar na compreensão das coisas do mundo concreto, possibilita construir conceitos matemáticos relacionados a esta área do conhecimento (NIEDERMEYER, KOEFENDER e ROOS, 2009).

Sim, Euclides de Alexandria; este não tão falado nas séries iniciais, que mudou totalmente a maneira como estudamos geometria. Não há como estudar geometria sem ouvir falar de Euclides e seu tão famoso livro, ou conjunto de livros, *Os elementos.* E não há um livro de matemática que mesmo tão antigo continua sendo um sucesso e referência. Berlinski (2018, p. 6) em seu livro *Os elementos de Euclides* afirma:

> *Os elementos* é de longe o mais bem-sucedido dos livros didáticos de matemática. Um livro-texto que sobreviveu por mais de 2 mil anos representa uma realização incomum. A maioria tem uma vida curta e ignominiosa. Eles servem a um propósito, mas não inspiram reverência. *Os elementos,* de Euclides, é diferente. Ninguém jamais encontrou uma maneira melhor de apresentar os elementos da geometria plana; nenhum professor razoável poderia pensar em um substituto. Não existe nenhum.

Berlinski (2018, p. 10) lembra que durante mais de dois mil anos, a Geometria significava Geometria Euclidiana, e Geometria Euclidiana era Os Elementos. Além disso, frisa que este foi o mais antigo texto completo de matemática ocidental tradicional e o mais influente dos livros-texto de Euclides. O próprio autor declara: ”[...] estrutura criada por Euclides é intelectualmente acessível a qualquer um capaz de seguir um argumento” (BERLINSKI, 2018, p. 13).

Crilly (2017, p. 307) nos define que “ao tratar das propriedades de linhas, formas e espaços, o assunto foi formalizado nos *Elementos* de Euclides no século III a.C. A geometria permeia toda a matemática e atualmente perdeu seu significado histórico restrito”. O nome de Euclides é tão ligado ao ensino de geometria que o ramo da matemática descrito em seu livro foi nomeado como Geometria Euclidiana. Não há muitos dados sobre sua vida pessoal, nem mesmo sobre suas influências; há indícios que teria lecionado na biblioteca de Alexandria, deve ter sido influenciado por estudantes de Platão (BERLINSKI, 2018, p. 10), e pode ter frequentado a academia do filósofo. Mas não há muitos dados nem sobre seu nascimento e nem sua morte.

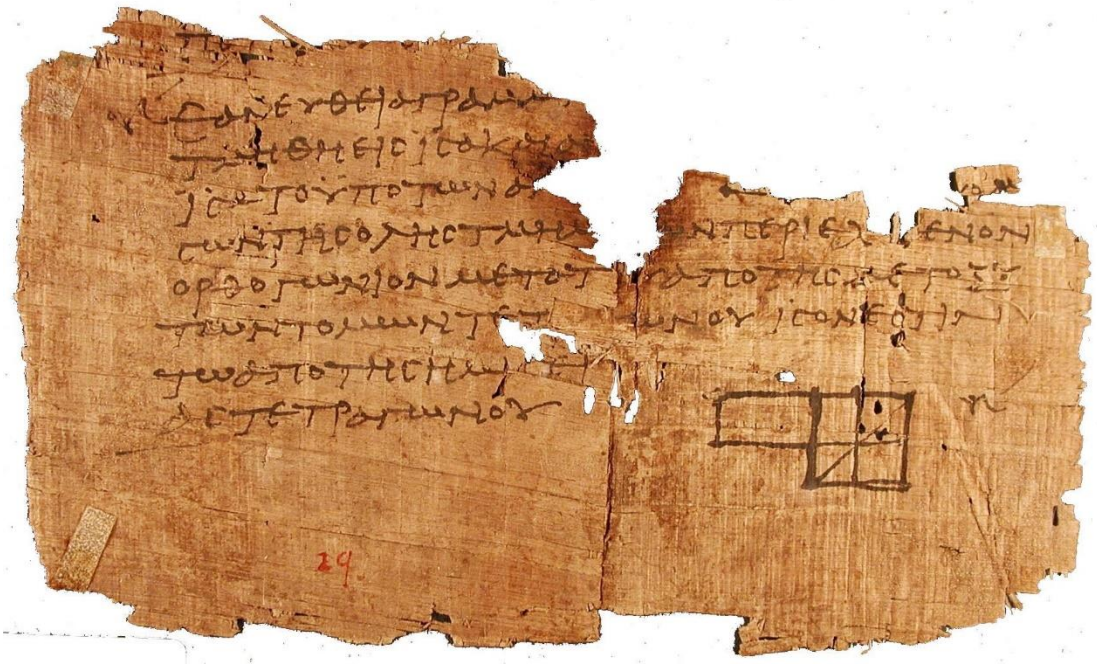
Assis (2010, p. 2) conta que em Atenas localizava-se o Museu de Platão, algo equivalente às universidades de hoje. Ptolomeu I, sucessor de Alexandre, o grande, para alcançar os propósitos de Alexandria, convida o matemático Euclides para assumir o departamento de Matemática. Ao assumir o departamento de matemática da biblioteca de

Alexandria, Euclides altera a produção matemática local ao reunir em *Os Elementos* todo a matemática daquela época. “Euclides foi praticamente um compilador, reunindo em seu trabalho resultados de álgebra elementar, teoria dos números e, principalmente, geometria” (ASSIS, 2010, p. 2).

Euclides estruturou sua obra em treze livros, tratando de diferentes ramos matemáticos, sendo os volumes I ao VI voltados à geometria. Organizou a geometria plana baseando-se nos postulados (CHAQUIAM, 2016, p. 211), onde para seguir para o próximo axioma deve-se aceitar como verdadeiro o axioma anterior, e assim demonstrando as proposições, de forma dedutiva, com a intuição e lógica como parâmetro.

Por dois milênios, geometria e geometria euclidiana foram a mesma coisa, e *Os elementos* era geometria (BERLINSKI, 2018, p. 10). Suas proposições foram o alicerce para o estudo da geometria, e Euclides ordenou sua matéria e a transformou em um sistema (BERLINSKI, 2018, p. 11). Sua obra prima, já que *Os elementos* é uma entro outras de suas obras, marca a vitória da matemática grega, e deu à matemática algo duradouro, em torno de um sistema de axiomas. Berlinski (2018, p. 11) ressalta que Arquimedes foi mais brilhante do que Euclides, mas este último deu à matemática um estilo de vida.

Figura 3 - Um dos diagramas de Euclides.



Fonte: Casselman, (200_)

Na geometria plana as figuras podem ser resumidas a pontos e retas, e ainda assim, muitos dizem ser quase impossível definir ponto, reta e plano, por serem elementos

primitivos da geometria; Couceiro (2016, p. 15) afirma que Euclides não pretendia ensinar geometria, mas mostrar aos estudiosos da área que as verdades geométricas se ordenam no entendimento. Os matemáticos buscaram detalhar os conhecimentos geométricos que dispunham, considerando a ordem lógica. Couceiro (2016, p. 23) cita que Beppo Levi, entendia que os ensinamentos de Sócrates podem ter influenciado a escrita d'*Os elementos*, assim como Platão; e Sócrates morreu em 399 a. C., e Euclides teria vivido entre 360 a.C. e 295 a. C. Para Levi (2008) apud Couceiro (2016, p. 21):

> [...], o modelo euclidiano apresenta sua genialidade ao demonstrar que, com base em noções elementares como ponto, reta e círculo e apenas cinco axiomas que vinculam esses elementos de maneira quase óbvia, é possível desenvolver, de teorema em teorema, toda a geometria clássica, expondo, desse modo, a totalidade da geometria que a humanidade conhecia.

Mesmo com todo reconhecimento, nem tudo são flores. A geometria euclidiana não tratava a generalidade de seus enunciados da mesma maneira (ROQUE, 2012, p. 152), partia de um pressuposto e ia deduzindo o resultado logicamente, além de apresentar uma inconsistência: seu postulado das paralelas, o quinto postulado. A geometria euclidiana apresenta a existência de retas paralelas, que jamais se encontrarão (CRILLY, 2017, 175). Algo inconcebível na geometria projetiva. Vários geômetras, por mais de dois mil anos, tentaram demonstrá-la a partir dos axiomas e postulados, segundo Chaquiam, (2016, p. 214), contribuindo significativamente para o desenvolvimento da matemática moderna, abrindo portas para o surgimento de outras geometrias.

Mas a importância e influência da geometria euclidiana é tão grande que as geometrias modernas são denominadas não-euclidianas. Essas novas geometrias, diferentemente da euclidiana, não se apoiam na intuição. Quando Roque (2012, p. 360) refere-se às concepções de Gauss, diz: "As restrições que os objetos matemáticos deviam sofrer para se adequarem ao espaço euclidiano deviam ser, de acordo com sua concepção, eliminadas".

2.1.2 Geometria não euclidiana

Como visto, devido uma tentativa de provar o quinto postulado de Euclides em *Os elementos*, apareceram outras geometrias, estas denominadas geometrias não-euclidianas. O

quinto postulado, chamado de Axioma das Paralelas, nome dado por Playfair, foi, desde o início, alvo de crítica e contestação. “Para muitos matemáticos, aquilo que Euclides considerava um axioma não passava de uma proposição, podendo ser provado a partir dos axiomas anteriores” (ASSIS, 2010, p. 2). A partir deste ponto começa o desafio para provar o quinto postulado. E o desafio durou séculos, provocando e inquietando os mais diversos matemáticos do mundo. Devido à procura pela prova do axioma, e suas controvérsias, acabaram por dar margem ao surgimento das já citadas novas geometrias (ASSIS, 2010, p. 3).

Às geometrias compete o estudo das propriedades das figuras e do espaço, define Aragão (2009, p. 111), e nem toda figura, ou espaço, é perfeita e regular, como mostra a geometria euclidiana, que é a racionalização da Geometria Intuitiva (ARAGÃO, 2009, p. 25). E com o passar dos anos, mesmo com o uso da geometria euclidiana, o avanço da ciência, em especial da Física, outras formas de geometrias tornaram-se necessárias. Então começa a aparecer a já citada geometria não-euclidiana. Esta começou a ser estudada por matemáticos conhecidos como: Lambert, Legendre e Gauss, contudo, foi o matemático russo Lobatchevski que a construiu pela primeira vez, já no século XIX (ARAGÃO, 2009, p. 115). Independentemente da pesquisa de Lobatchevski, o matemático húngaro Bolyai e seu filho, realizaram pesquisas onde acreditavam no quinto postulado de Euclides.

Dentre os vários substitutivos encontrados para o quinto postulado de Euclides, o mais conhecido e usado nos tempos modernos foi atribuído ao matemático e físico escocês John Playfair. Eves (2014, p. 539) apud Chaquiam (2016, p. 214) resume como: “é o substituto mais comum nos atuais textos elementares de geometria: Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta”.

Independente disso, e acredita Aragão (2009, p. 111) que sem conhecer o trabalho do russo e dos húngaros, Riemann, além de modificar o quinto postulado de Euclides, cria uma nova geometria, perfeitamente lógica, conhecida como geometria de Riemann. ”Ele fundamentou a discussão em bases mais gerais, introduzindo o conceito no qual o mundo, espaço e o tempo são variedades particulares, na medida de sua curvatura [...]” (ARAGÃO. 2009, p. 112), saindo de uma dimensão bidimensional para um de qualquer dimensão. Sua importância foi tamanha que foi fundamento para a teoria da relatividade de Einstein. Nas inúmeras tentativas de se provar o quinto postulado de Euclides, de acordo com Coutinho (2018, p. 5), das substituições do postulado das paralelas surgem dois tipos clássicos de geometria não-euclidiana: a geometria hiperbólica e a geometria elíptica.

> [...] o matemático alemão Carl Friedrich Gauss convenceu-se de que o Axioma das Paralelas não era uma proposição. Mais que isso, o príncipe dos matemáticos (como Gauss é atualmente reconhecido), foi o primeiro a perceber claramente a possibilidade de haver uma geometria igualmente lógica e precisa, contudo diferente daquela proposta por Euclides. (ASSIS, 2010, p. 4)

O desenvolvimento da geometria não-euclidiana foi o resultado do trabalho árduo de muitos matemáticos ao longo dos anos; Chaquiam (2016, p. 214) destacou entre eles: Girolamo Saccheri, Johann Heinrich Lambert; Adrien-Marie Legendre; Nicolai Ivanovitch Lobachevsky; Janos Bolyai e Bernhard Riemann. Ainda de acordo com Chaquiam (2016, p. 221): "A lentidão no processo de publicação do trabalho de Bolyai fez com que o mérito da descoberta da existência de outras geometrias ficasse com Lobachevsky, pois publicou seus trabalhos antes, [...]". Contudo, o próprio Chaquiam (2016, p. 196) afirma que "As anotações de Gauss mostraram posteriormente que ele antecipou a geometria não-Euclidiana, 30 anos antes de Bolyai e Lobachevsky".

Citando trechos de uma grande matemática americana, Marjorie Senechal, temos Nunes (2006, p. 73):

> [...], o Estudo da forma tem estado historicamente esmagado debaixo da geometria, a qual durante muitos anos foi dominada pelos postulados, axiomas e teoremas de Euclides. Tal como Shakespeare não é suficiente para a literatura e Copérnico não é suficiente para a astronomia, também Euclides não é suficiente para a geometria.

As duas geometrias apresentadas, hiperbólica e elíptica, não são as únicas geometrias não-euclidianas, pois podemos encontrar várias, sendo algumas delas derivadas das duas supracitadas, contudo existem outras, independentes, com os mais variados nomes; alguns com nomes bem diferentes, como: Geometria do Motorista de Táxi (LEIVAS e SOUZA. 2016), comum no estudo de topologia. E dentre essas variedades, há uma nova geometria não euclidiana, veremos por que é nova, independentemente das duas clássicas, chamada de geometria fractal.

2.1.2.1 Fractais

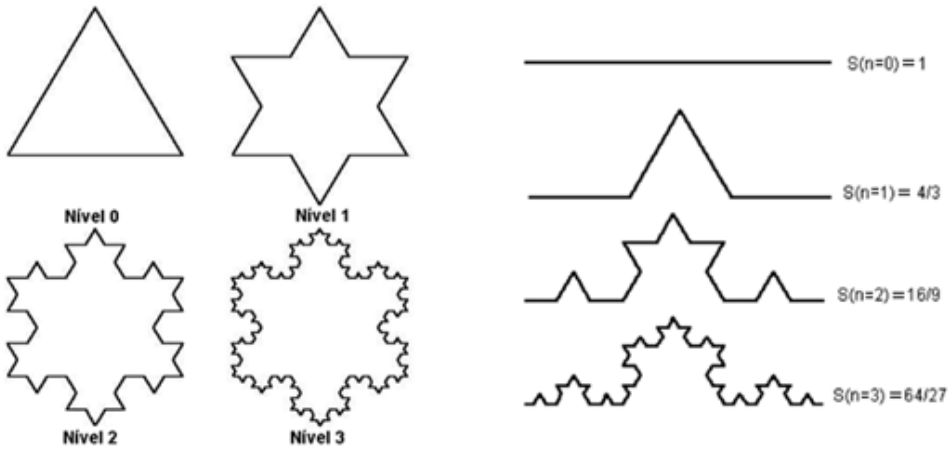
Desde a Grécia Antiga o conceito de dimensão vem sendo analisado, onde eles acreditavam se tratar de três. Com o passar dos anos, paulatinamente foi introduzido o

conceito de *n* dimensões do espaço matemático; na física a teoria espaço-tempo já utiliza a quarta dimensão, e versões recentes da teoria das cordas já aceita 10, 11 e 26 dimensões, segundo Crilly (2017, p. 151), que diz que, incursões têm sido feitas em dimensões fracionárias com formatos fractais estudando-se diversas medidas diferentes. De acordo com Assis et al (2008):

> Finalmente, a dimensão de um fractal, ao contrário do que ocorre na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um valor inteiro. Nela, um ponto possui dimensão zero, uma linha possui dimensão um, uma superfície possui dimensão dois e um volume possui dimensão três. No caso da dimensão fractal, ela é uma quantidade fracionária, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém.

Franco e Vejan (2009) nos contam que Weierstrass, em 1872, encontrou uma função contínua em todo seu domínio, mas que não era diferençável em nenhum ponto. Com o avanço da computação, hoje podemos ver que essa função pode ser chamada de fractal. Helge Von Kock definiu em 1904, não concordando com a definição vaga de Weierstrass, de maneira mais geométrica e com uma função similar, esta, hoje em dia, conhecida como floco de neve de Koch, que é o resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro de um triângulo inicial (FRANCO e VEJAN, 2009). Sempre que novos triângulos são adicionados, o perímetro aumenta, "[...] e como consequência se aproxima do infinito, dessa maneira o fractal abrange uma área finita dentro de um perímetro infinito" (FERNANDES, 2007 apud FRANCO e VEJAN, 2009).

Figura 4 - Fractal de Koch.



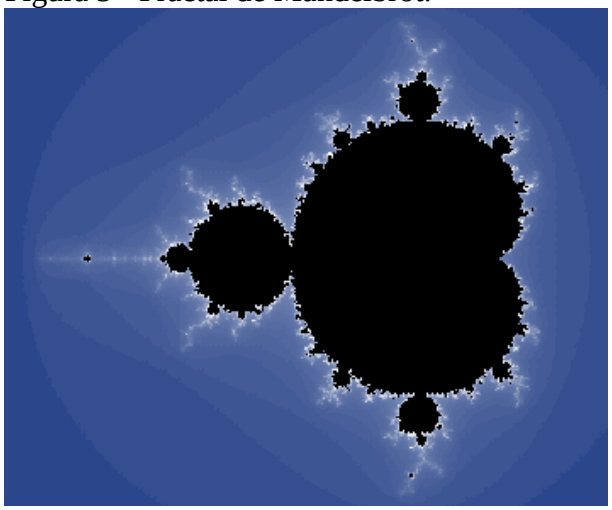
Fonte: ASSIS et al (2008, p. 5)

Há outras sugestões de definição de fractais encontradas, como a apresentada por Franco e Vejan (2009) resumindo uma citação: "Um conjunto é fractal se possuir alguma

forma de autossimilaridade ainda que aproximada, onde a sua dimensão seja maior que a dimensão topológica, e este conjunto possa ser expresso por meio de um procedimento recursivo ou interativo".

Mesmo aparentando uma grande complexidade, os fractais podem ser encontrados em todo o universo natural, de nuvens, plantas, relâmpagos, até a distribuição das galáxias, como na arte e na matemática (FRANCO e VEJAN, 2009). Vale lembrar que conceito de fractal pode ser encontrado em vários ramos da ciência e utilizado em problemas reais, pois como lembram Franco e Vejan (2009), "[...] se estende por um vasto campo interdisciplinar como: Biologia, Geografia, Medicina, Música, Economia, Indústria Cinematográfica, Análise de Imagens por Satélite, Meteorologia, Geologia e outros".

Figura 5 - Fractal de Mandelbrot.



Fonte: Alfeld (1998)

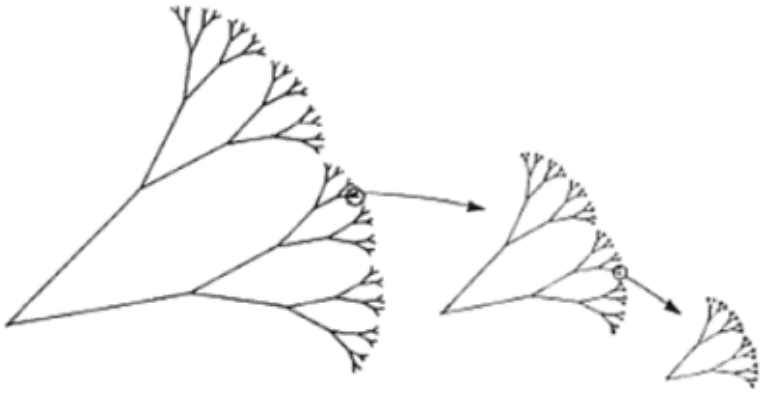
Existe um grupo de conjuntos chamados Conjunto de Julia, que surgem após estudos sobre processos interativos envolvendo números complexos. Foram apresentados em 1918 por Gaston Julia e Pierre Fatou, que não dispunham de computador na época (NUNES, 2006, p. 48). Computador que hoje consegue mostrar graficamente os resultados para essa interação de números complexos.

Na representação algébrica, um número complexo representa-se por $z = a + bi$, com a e $b \in R$ em que a é a parte real de z: $a = Re(z)$ e b, o coeficiente da parte imaginária de z: $b = Im(z)$ (NUNES, 2006, p. 10). Consideremos a função $Z_{n+1} = (Z_n)^2 + c$, onde c um ponto fixo no plano complexo. Nunes (2006, p. 50) afirma que "o conjunto de Fatou e Julia pode ser visto como um conjunto que se repete em diferentes escalas de ampliação, no entanto a semelhança destes conjuntos não é exata". E Nunes (2006, p. 50) continua sua afirmação ao

dizer que Mandelbrot, tentando generalizar os conjuntos de Julia, descobriu a criação de uma imagem no plano complexo onde catalogava os conjuntos de Julia.

Adiante, Assis et al (2008) nos diz que o emprego do termo *fractal* é localizado em 1975, quando Benoit Mandelbrot o utilizou pela primeira vez. Antes de terminar sua mais famosa obra, que será falada adiante, Mandelbrot quis encontrar um nome para a geometria com que buscava representar as formas da natureza. Utilizando um dicionário latino encontrou do adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar. Foi assim criada a palavra *fractal* (ASSIS et al, 2008).

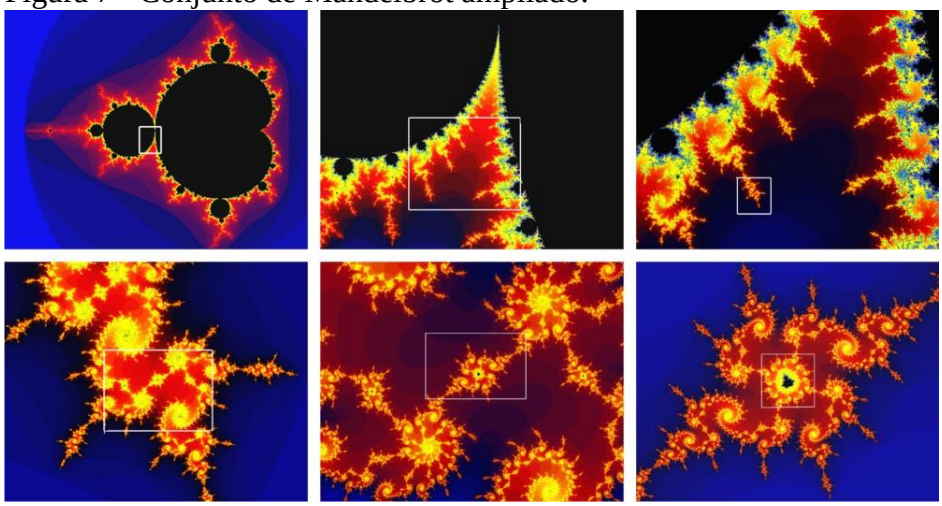
Figura 6 - Propriedade de auto semelhança do fractal.



Fonte: Assis et al (2008, p. 2)

O potencial dos fractais é amplo, por exemplo: “Fractais podem muito bem ser o meio matemático para modelos do tipo objetos naturais, como o crescimento de plantas ou a formação de nuvens” (CRILLY, 2017, p. 157 e 158). Além disso, o referido autor também afirma que os fractais já foram aplicados desde crescimento de organismos marinhos até espalhamento de cidades modernas. Crilly (2017, p. 155) também nos conta que o francês Benoit Mandelbrot em 1975, não foi o primeiro a estudar tal tipo de geometria, já que temos alguns estudos de Poincaré e Cayley um século antes. Uma das peculiaridades é apresentada por Crilly (2017, p. 155): “No conjunto de Mandelbrot, vemos ainda outra propriedade-chave dos fractais, a da autossimilaridade. Se você der um *zoom* no conjunto, não saberá ao certo qual o nível de ampliação porque você vai ver apenas mais conjuntos de Mandelbrot”.

Figura 7 - Conjunto de Mandelbrot ampliado.



Fonte : Sedrez; Pereira (2012)

"Os fractais que surgem por meio dos computadores são belos, fascinantes e possuem uma infinita estrutura e complexidade, chamando a atenção das pessoas pela sua estética, sendo assim reconhecido até pelo mundo das artes" (NIEDERMEYER; KOEFENDER e ROOS, 2009). A geometria fractal poderia ser inserida no currículo da matemática no ensino básico. Seria motivador e integrador. A aplicabilidade do estudo dos fractais em áreas como a arte, a ciência e a tecnologia alavancaria uma procura maior pelo tema (NUNES, 2006, p. 73).

3 ANTIGAS CONSTRUÇÕES AFRICANAS

No capítulo anterior foi feita uma pequena explanação sobre a geometria euclidiana e não-euclidiana, em especial a geometria fractal. Neste capítulo o foco será em construções muito antigas ao longo do continente africano, muito antes dos primeiros registros de matemática na Grécia Antiga, concluindo com o uso de geometria fractal, até os dias atuais, em aldeias isoladas.

3.1 GEOMETRIA EUCLIDIANA EM CONSTRUÇÕES AFRICANAS ANTERIORES A 700 A.C.

Mesmo sendo lembrados sempre por suas pirâmides, outras construções egípcias, utilizando uma geometria já muito avançada, ainda mais quando falamos das proporções das construções, também se destacaram. Barbosa (2013, p. 4) afirma que "No fim do quinto milênio as habitações tornaram-se retangulares e as sepulturas também, indícios de que elas são concebidas como moradas". Gralha (2009, p. 12) apud Barbosa (2013, p. 4) "os indícios dos primeiros cultos e templos datam do quarto milênio a.C." Levando em conta que os empregados e os escravizados, que construíram as grandes obras, não tinham o conhecimento moderno de construção civil ou geometria, como a conhecemos hoje, dispunham de conhecimento empírico. Logo, quem comandava as obras tinha de saber geometria, e como Cunha (2005, p. 10) nos informa:

> A construção das pirâmides do antigo Egito também é um exemplo da grande contribuição dada pelos povos africanos à engenharia e à arquitetura. A matemática envolvida nessas construções é realmente impressionante. O uso de coordenadas retangulares para desenhar curvas e a precisão de até 0,07º aplicada no traçado de ângulos demonstra o avançado estágio da matemática nesse país africano.

Autores como Berlinski (2018, p. 12) lembram que os egípcios que construíram as pirâmides certamente "sabiam algo sobre pirâmides, e não eram pouco sofisticados", pois seu conhecimento intuitivo sobre medidas e mensuração não poderia ser reduzido a mera especulação. Doberstein (2010, p. 96) ao falar do conhecimento matemático dos egípcios

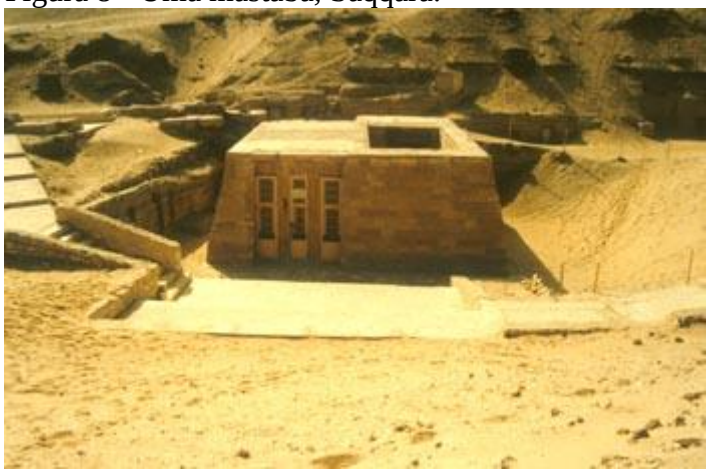
aparenta subestimar seu conhecimento ao dizer que “Na matemática, por exemplo, eles não iam muito além das quatro operações, e mesmo assim com recursos rudimentares e pouco econômicos, pois não conheciam o zero”. Mas complementa afirmando que:

> Na geometria é que seus conhecimentos parecem ter sido mais adiantados. Podiam calcular a área de um círculo pelo conhecimento de seu diâmetro e conheciam bem as propriedades do trapézio e do cilindro. Isso era o suficiente para construir as pirâmides e colocar em posição os pesados blocos de pedra. (DOBERSTEIN, 2010, p. 96)

Diferentemente de Reis (2018, p. 24) que afirma que abordando com mais frequência as questões do cotidiano egípcio, percebe-se que a matemática teve um tratamento mais elevado, de maneira que sua evolução e consequentemente sua “abstração” se sofisticou, atingindo um nível que o autor denomina de “pré-álgebra”.

Zoser (ou Djoser), faraó da III dinastia (de 2900 a. C. até 2280 a. C.), devido o clima político e união do Egito, pode começar uma era de grandes obras arquitetônicas utilizando pedra revestida, como: a pirâmide em degraus e o complexo funerário em Saqqara, de acordo com Mokhtar (2010, p. 29). Estes feitos arquitetônicos foram realizados pelo arquiteto Imhotep, numa área de 15 ha, na forma de um retângulo de 544m por 277m e ele ainda introduziu notável inovação substituindo a pedra pelo tijolo (MOKHTAR, 2010, p. 46). Além dos templos, existiam outras construções famosas como: Mastabas, túmulos retangulares, de pedra ou tijolos, que serviam de câmaras funerárias abaixo de sua base e hipogeus, que eram túmulos escavados nas rochas, com galerias e corredores.

Figura 8 - Uma mastaba, Saqqara.



Fonte: Tyldesley (2011)

"Sabe-se que a pirâmide propriamente dita, símbolo solar que contém, ou cobre, a cripta funerária onde repousa a múmia real, é apenas um elemento do complexo que constitui a sepultura real completa" (MOKHTAR, 2010, p. 47). Encontrava-se também, além das pirâmides, um templo baixo e havia parede em toda a volta da construção.

Figura 9 - Pirâmide de Zoser.

Fonte: Sullivan (2001)

Não foi instantâneo chegar ao conhecimento da construção de pirâmides. Não há documentos, ou informações que digam como eles saíram de pirâmides de degraus, e deslocadas, para as pirâmides que conhecemos (MOKHTAR, 2010, p. 131), além de outros templos precisos, em tão poucos anos. Snefru, fundador da IV dinastia, edificou uma pirâmide em Meidum, construindo em degraus, depois realizou obras até chegar no formato de pirâmide verdadeiro (MOKHTAR, 2010, p. 47), sendo a pirâmide Vermelha a terceira pirâmide construída por ele (DOBERSTEIN, 2010, p. 89).

Figura 10 - Pirâmide Vermelha de Dahshur.

Fonte: foto de Sturge / Kustec (2019)

"Os sucessores de Snefru, Khufu (Quéops), Khafre (Quéfren) e Mankaure (Miquerinos) são conhecidos principalmente pelas três pirâmides que erigiram no alto do promontório de Gisé, 10 km a sudoeste do atual Cairo" (MOKHTAR, 2010, p. 47). A pirâmide de Quéops é a maior construção de uma única peça feita pelo homem e, segundo Mokhtar (2010, p. 47), "devido à perfeição do trabalho, à precisão do projeto e à beleza das proporções continua a ser considerada a primeira das Sete Maravilhas do mundo".

Não podemos resumir as grandes construções egípcias às pirâmides, na XVIII dinastia parece ter sido de grandes e belíssimas obras de arquitetura, há o templo de Lúxor, que como nos descreve Mokhtar (2010, p. 58) era "considerada a mais bela de todas as construções do Novo Império" (período entre os anos de 1550 a. C. até 1070 a. C.). O Templo de Luxor, que data de 1400 a. C., é um complexo de templos de arenito localizado em Lúxor, conhecida como Tebas, onde cinco outros grandes templos podem ser encontrados.

Figura 11 - Arquitetura africana: pirâmide de Gizé.

Fonte: Parra (2017) / Fotografia da CORDON PRESS.

Os obeliscos eram também outras formas de arquitetura egípcia. Tinham o formato de colunas com lados lisos e em sua ponta seu formato era triangular (piramidal). Sua principal função era o cunho religioso, de acordo com Barbosa (2013, p. 11), que diz que os antigos egípcios chamavam os obeliscos de *Theken*, que significava "raios de sol". Sendo o mais antigo com cerca de 4.000 anos. Muitas vezes os egípcios consideravam o obelisco com

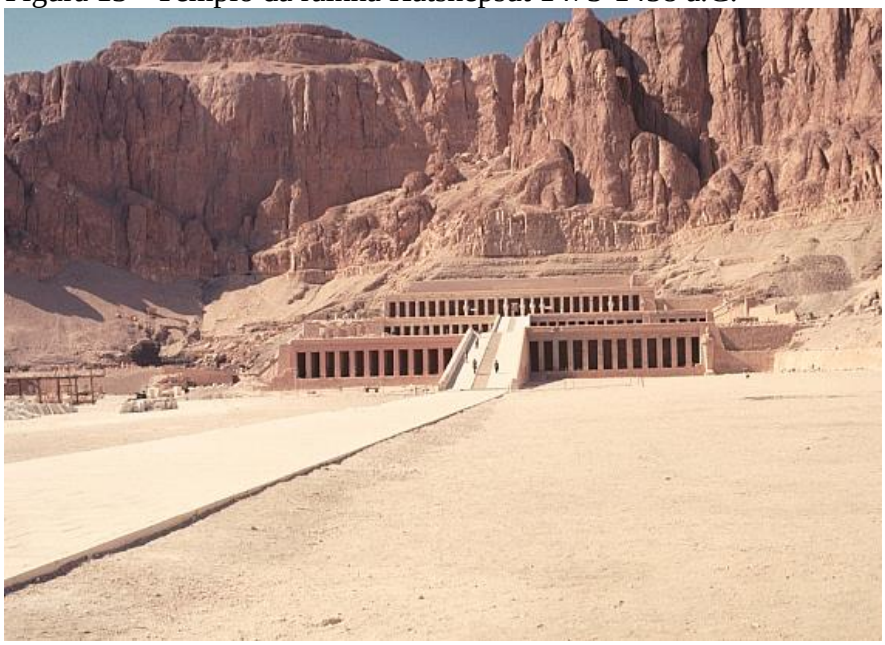
o próprio deus solar, para o qual deviam encaminhar oferendas. Mokhtar (2010, p. 147) nos conta que: “As proporções, medidas e orientação exatas das câmaras e dos corredores das pirâmides, sem falar no talhe e na ereção dos gigantescos obeliscos de pedra maciça, indicam uma grande habilidade técnica, de raízes muito antigas”.

Figura 12 - Obelisco na entrada do templo de Lúxor.

Fonte: World Monuments Fund.

.

Figura 13 - Templo da rainha Hatshepsut 1473-1458 a.C.



Fonte: Sullivan (2001)

Não eram somente os egípcios que dominavam esse tipo de arquitetura, e consequentemente, esse tipo de geometria. O Império Kush, conhecidos também como

cuxitas, são os reis ancestrais da linhagem que efetivou a união do Egito e do Sudão, conhecida na história como XXV dinastia do Egito ou dinastia etíope 750 a. C. Ainda de acordo com Mokhtar (2010, p. 274), os cuxitas, também chamados de núbios, ocupavam ainda que parcialmente o Alto Egito.

Figura 14 - Pirâmides na Núbia. Menores, mas numerosas.

Fonte: Sorin Furcoi/Al Jazeera, 2015.

Figura 15 - Topo das pirâmides explodidas por um explorador italiano.

Fonte: Sorin Furcoi/Al Jazeera, 2015.

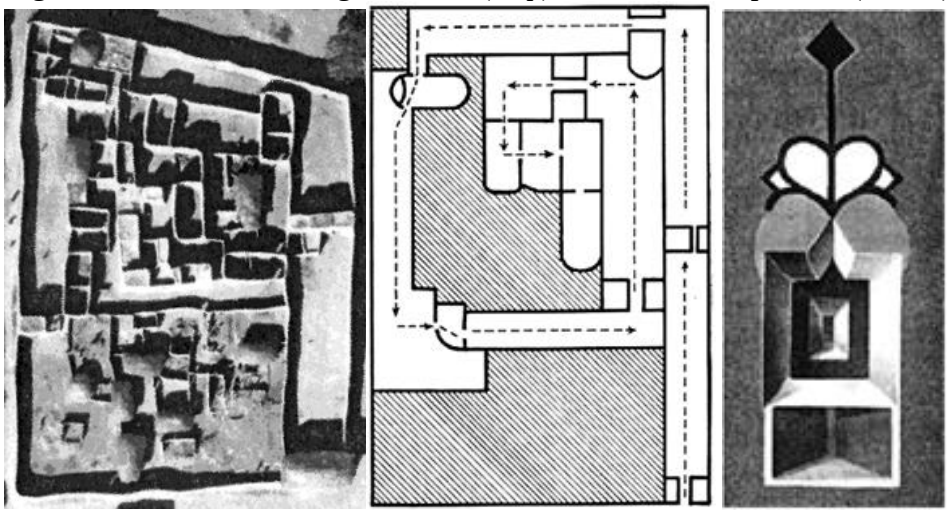
Só foi falado de construções imóveis. Os egípcios, e os núbios, não se destacaram somente pela construção de grandes obras. Temos os barcos egípcios, além de bigas, e armas, que não serão exploradas nesta pesquisa para não se torne demasiadamente prolongada.

3.2 USO DE GEOMETRIA FRACTAL EM CONSTRUÇÕES AFRICANAS

De acordo com Eglash (2007, 02:43): “A natureza usa sistemas ditos auto-organizados. Mas em 1980, ocorreu de eu perceber que se você pega uma fotografia aérea de uma vila africana, você vê fractais”, se referindo a vila de Logone Birni, em Camarões, “[...] e, naturalmente, eu tive que ir à África perguntar as pessoas por quê”? Eglash (2007, 03:46) também nos conta que questionou se sabiam o que estava fazendo, ou se era algo aleatório, recebeu como resposta do chefe da vila: “Ah, Sim! Nós conhecíamos isso: um retângulo dentro de um retângulo, nós já sabíamos tudo sobre isso”. E complementa:

> E ocorre que a própria insígnia real tinha um retângulo dentro de um retângulo, e o caminho interno pelo palácio é de fato como essa espiral. E a medida que você segue pelo caminho, você precisa ser mais e mais refinado. Então eles mapeiam a escala social numa escala geométrica; é um padrão consciente. Não é inconsciente como o fractal de um formigueiro. (EGLASH, 2007, 03:51)

Figura 16 – Palácio de Logone Birni (esq.), o caminho do palácio (centro) e insígnia real (dir.)



Fonte: Eglash (1999, p. 22-23)

Há uma vila no sul da Zâmbia, o povo Ba-Ila, construída com aproximadamente 400 metros de diâmetro, assemelhando-se a um imenso anel. Eglash (2007) compartilha: “Os anéis que representam os cercados familiares ficam mais e mais largos à medida que você vai para trás e aí você tem o anel do chefe aqui em direção ao fundo e o anel da família do chefe neste anel”. A explicação do formato, com enormes anéis, e com uma reta inscrita, é porque ele é cortado em “zonas ativas”, que são substituídas por um modelo idêntico, mas menor. Repete-se em cada uma das zonas ativas do novo modelo, resultando na forma da aldeia.

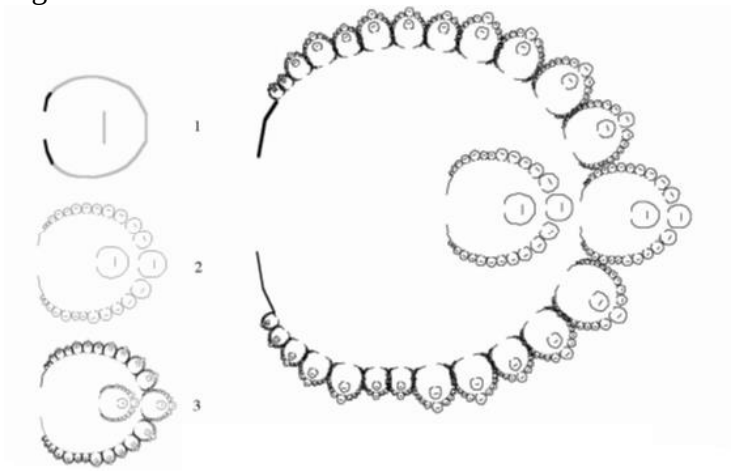
Figura 17 - Vila Ba-Ila no sul da Zâmbia.

Fonte: Eglash (1999, p. 27)

> Então aqui está um pequeno modelo. Aqui há uma casa com um altar sagrado, aqui a "casa das casas" o cercado familiar, com os humanos aqui onde o altar sagrado deveria estar e aqui a vila como um todo – um anel de anéis de anéis, com a família agregada do chefe aqui, a família do chefe aqui, e aqui há uma minúscula vila desse tamanho. Bem, mas você deve perguntar: "como as pessoas cabem nessa vila desse tamanho"? Isto é porque eles são espíritos. São os ancestrais. E, naturalmente, os espíritos têm uma miniatura da vila, na vila deles, certo? (EGLASH, 2007, 04:50)

O site Matemática é fácil (MEF, 2016) diz que cada parte do anel, formado por outros círculos, são casas das famílias, com um altar nos fundos. No portão principal são os pequenos armazéns, espalhando-se em torno do anel, criando construções progressivamente maiores, até chegar na "casa do pai", em frente ao portão, que é a maior de todas, onde mora o chefe da tribo, intitulado "kulela", o "curandeiro e aquele que acalenta", explica Matemática é fácil (2016): "[...], com uma relação ecoada por todos e os laços espirituais em todas as escalas, e é estruturalmente mapeado através da arquitetura auto similar".

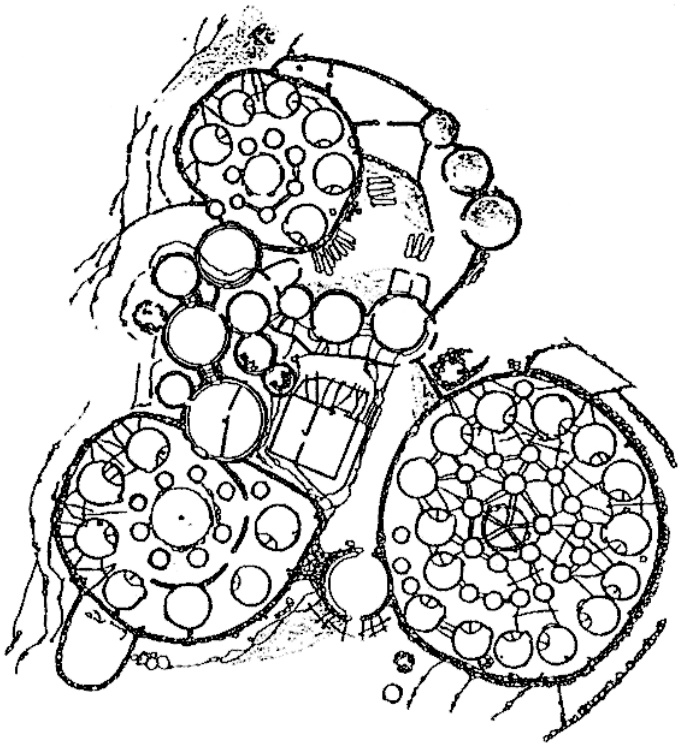
Figura 18 - Modelo da Vila Ba-Ila.



Fonte: Fonte: Eglash (1999, p. 27)

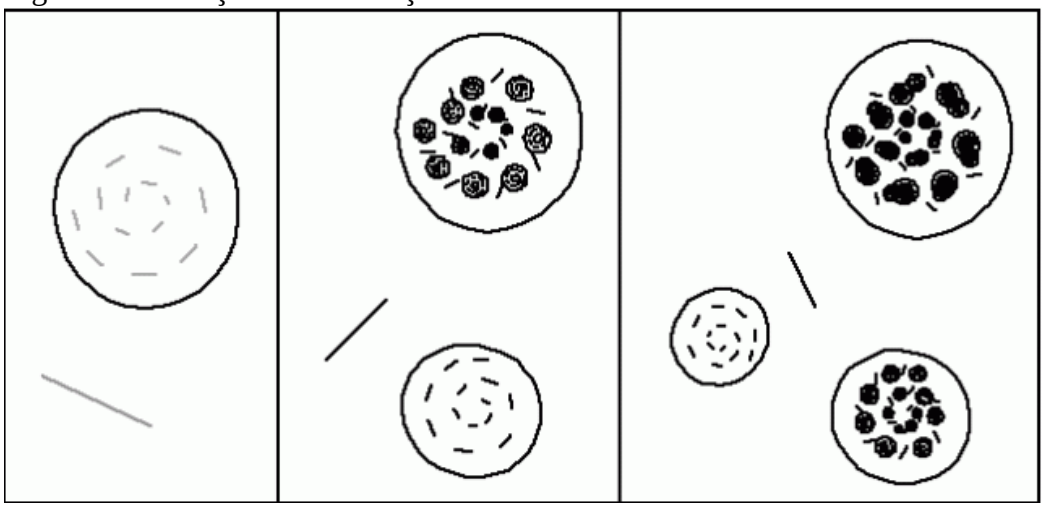
Nas montanhas de Mandara, próximo à fronteira da Nigéria com Camarões, vivem diversas etnias autointituladas “Kirdi”. Utilizam o fractal “Mokoulek”, como descreve o site Matemática é fácil (MEF, 2016): “com pequenos silos circulares e celeiros circulares maiores em espiral dentro de três grandes recintos de pedra, que fazem outro espiral a partir de um ponto central que é a parte quadrada”. Os celeiros não são dispostos de forma aleatória, mas sim “a expansão de um processo quantitativo e deliberado” (MEF, 2016), onde há algo parecido com um algoritmo geométrico determinando como o sistema se expande para acomodar o crescimento, transformando o volume em números de silos e estes alocados em espirais, de acordo com a fertilidade no campo.

Figura 19 - Aldeias da Etnia Kirdi, fronteira da Nigéria com Camarões.



Fonte: Eglash (1999, p. 30)

Figura 20 - Iterações da simulação Makoulek.

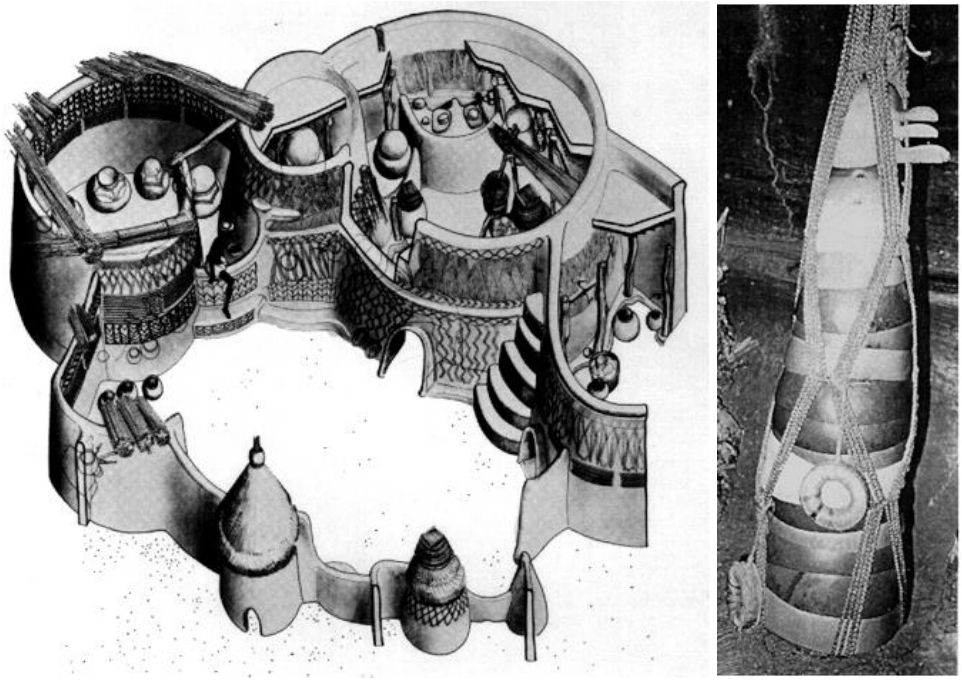


Fonte: Eglash (1999, p. 30)

> Então, quando cheguei ao povoado, eu disse: vocês podem me levar até o edifício quadrado? Eu penso que tem algo acontecendo lá. E comecei a me dar conta que aqueles ciclos de fertilidade eram como os ciclos recursivos do algoritmo geométrico que constrói a aldeia. E que a recursividade em algumas dessas aldeias continuava até escalas bem pequenas. (EGLASH, 2007, 05:47)

Em (MEF, 2016) apresenta outros exemplos, aparentemente baseado no livro *African Fractals* de Ron Eglash. Um deles é a aldeia Nankani em Mali, onde é construída por uma série fractal de cilindros. Com cilindros que ficam menores à medida que a construção segue no sentido anti-horário em torno do pátio central. O site Matemática é Fácil ainda informa que, dentro do cercado da família, potes são empilhados na lareira, e a menor cabaça contém a alma da mulher. E eles demonstram se importar mais uma vez com a infinidade pois acreditam que "quando ela morre, eles têm uma cerimônia aonde eles quebram essa pilha chamada "zalanga" e sua alma sai em direção à eternidade" (MEF, 2016).

Figura 21 - Aldeia Nankani (esquerda) e uma "zalanga" (direita).



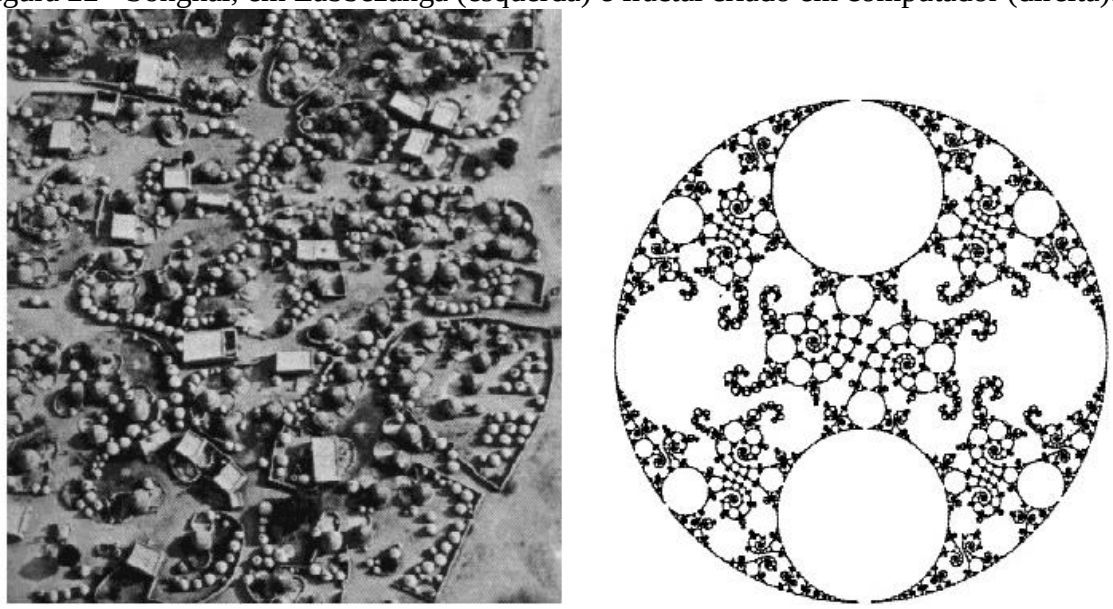
Fonte: Eglash (1999, p. 33)

Então Eglash (2007, 06:42) começa a se questionar sobre os povos “indígenas” e suas construções. E coletando fotografias aéreas de arquiteturas nativo-americanas e do sul do Pacífico. E percebeu que somente as construções africanas eram fractais.

> Não é possível que africanos usem realmente geometria fractal, certo? Não tinha sido inventada até os anos setenta. Então algumas dessas coisas, de quando andei pelas ruas de Dakar perguntado as pessoas “Qual é o algoritmo? Qual é a regra para fazer isto”? e elas diziam: “Bom, nós apenas fazemos isso porque parece bonito, seu bobo”. Mas algumas vezes, não era este o caso. Em alguns casos, de fato, havia algoritmos, e algoritmos sofisticados. Então numa escultura Manghetu, você verá essa geometria recursiva. (EGLASH, 2007, 08:40)

Nem toda construção africana com formato circular tem uma localização voltada para centralização, como mostrado em Mokoulek. Um exemplo que é abordado por Eglash (1999, p. 31) é o da Aldeia de Songhai, em Labbezanga, em Mali, onde de uma imagem aérea pode-se ver ruas circulares com casas circulares sem foco algum. Eglash (1999, p. 31) compara a fotografia das ruas com uma imagem fractal onde é possível ver que o foco central não significa que não há autossimilaridade, afinal, diferentemente da geometria euclidiana, onde simetria depende da similaridade entro de uma escala, na geometria fractal pode ser baseado em assimetrias entre diferentes escalas; olhando por esse lado, e analisando a imagem aérea de Labbezanga, Eglash (1999, p. 31) afirma que a vila representa a escala de lei de potência característica de fractais.

Figura 22 - Songhai, em Labbezanga (esquerda) e fractal criado em computador (direita).

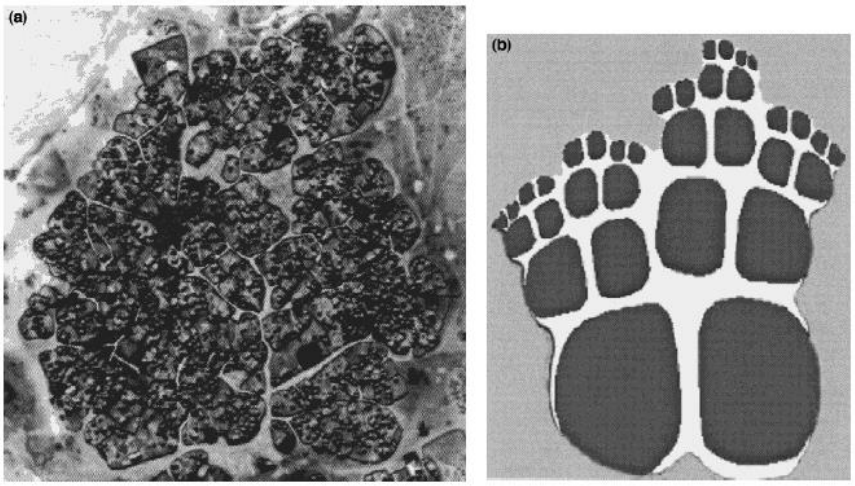


Fonte: Eglash (1999, p. 32)

Ainda de acordo com Eglash (1999, p. 31-32), a informação que teria recebido é que os edifícios retangulares que podem ser vistos da imagem aérea são devidos à influência islâmica, mas que os prédios anteriores era todos circulares. Com a ajuda de um programador foram realizados testes quantitativos da foto aérea, confirmando que "a arquitetura de Songhai pode ser caracterizada por uma fractalização dimensional semelhante à do computador" (EGLASH, 1999, p. 31-32). E complementa dizendo que arranjos circulares densos são comuns pelo lado ocidental da África.

Por outro lado, enquanto as construções circulares africanas se aglomeram circularmente, os caminhos que levam por entre os vilarejos e assentamentos não são circulares, mas sim parecidos com os "brônquios que oxigenam os alvéolos redondos dos pulmões", e suas rotas que ligam e alimentam esses vilarejos circulares por vezes tomam a forma ramificada (EGLASH, 1999, p. 34). Em momento algum o autor tenta minimizar a organização dos vilarejos quando utiliza esta metáfora, como se estivesse comparando as construções com "traços inconscientes de esforço mínimo", conta Eglash (1999, p. 34), já que o autor diz que os critérios para os projetos são evidentemente conscientes nas comunidades onde há edifícios circulares próximos a retangulares, já que eles podem optar por manter ou não as ramificações. Na figura abaixo poderemos ver um assentamento no nordeste do Senegal e o fractal de ramificações que foi criado a partir de sua foto utilizando suas ruas como ramificações.

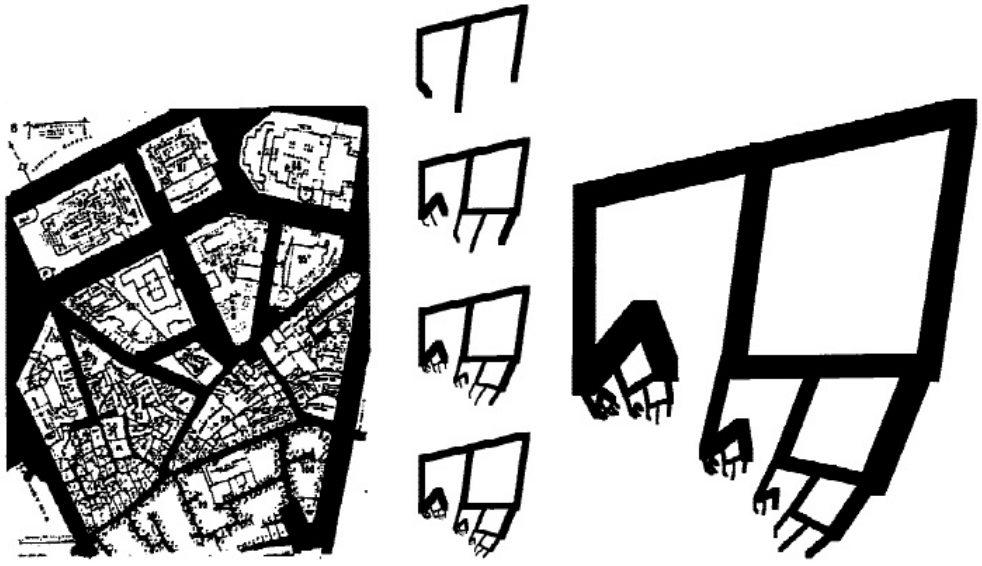
Figura 23 – Assentamento ao nordeste do Senegal (esquerda) e fractais ramificações (direita).



Fonte: Eglash (1999, p. 35)

Outros exemplos dados foi o caminho de ramificações de Banyo, em Camarões (EGLASH, 1999, p. 36), cuja foto não foi anexada, e o mapa com as ruas do Cairo, no Egito (EGLASH, 1999, p. 37) que poderá ser vista na próxima figura apresentada.

Figura 24 – Mapa das ruas de Cairo (esquerda) e simulação fractal de suas ruas (direita).

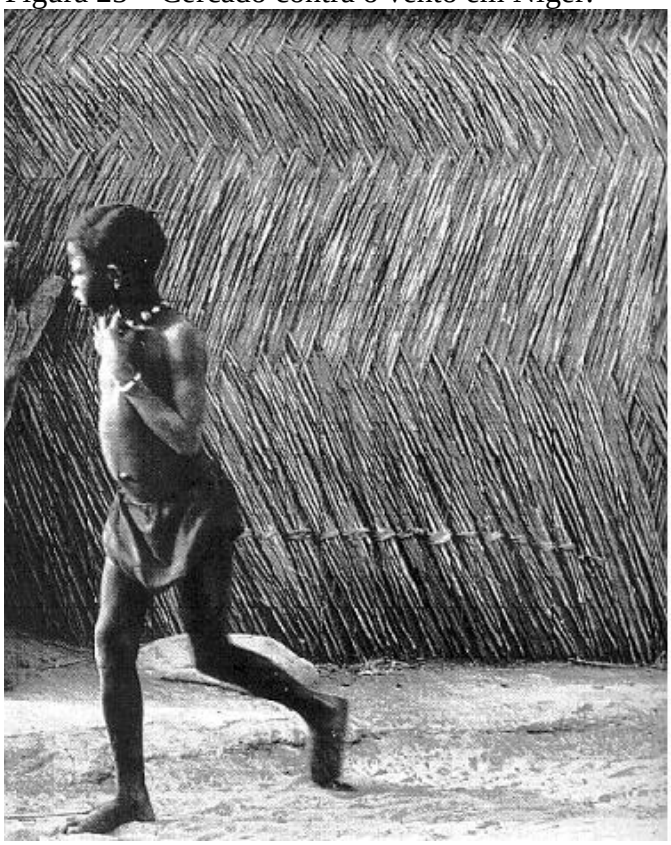


Fonte: Eglash (1999, p. 37)

Eglash, (2007, 09:41) nos conta que em Mali, próximo a Bamako, encontrou um homem que fabricava cercas fractais. Perguntou por que só ele as fabricava. E como resposta, o homem disse, entre outras coisas, que se fosse em um ambiente de selva utilizaria outros materiais, mas ali como tem muito vento e poeira, precisava daquele modelo. E que por experiência, eles sabiam que quanto mais alto, mais forte é o vento. Em seu livro *African*

Fractals: Modern Computing and Indigenous, Eglash (1999, p. 71-73) chega a chamar a cerca de “windscreen”, traduzido literalmente como “para-brisas” devido sua construção.

Figura 25 – Cercado contra o vento em Níger.



Fonte: Eglash (1999, p. 72)

Ao longo de seu livro African Fractals, Eglash continua apresentando casos de uso de fractais espalhados pelo continente africano, destes podemos citar algumas grandes construções como: o quarteirão Nkong-Mondo, na cidade de Edea em Camarões (EGLASH, 1999, p. 82); as estruturas triangulares e retangulares das construções nômades da Mauritânia (EGLASH, 1999, p. 115); o assentamento de Mlomp, no Senegal (EGLASH, 1999, p. 163); a Clínica Comunitária de Kitwe, na Zâmbia (EGLASH, 1999, p. 220), que é um exemplo de construção após 1975; construções do grupo francês ENDA na área rural de Burkina Faso (EGLASH, 1999, p. 226).

Outros exemplos assim como os casos acima descritos também trazem fotografias, mas não foram exemplificadas, como disse antes, para evitar que o trabalho se tornasse maçante.

4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este é o ponto da pesquisa onde devemos trazer os resultados obtidos, lembrando que desde o início foi traçado um objetivo, quer seja um objetivo mais genérico, quer seja um bem mais específico; agora também é o momento de analisar se este objetivo foi ou não alcançado ao longo do trabalho realizado, notando que como o tipo de pesquisa foi bibliográfica, devemos nos ater aos resultados alcançados pelos autores que influenciaram esta pesquisa.

Os resultados encontrados pelos autores referenciados deverão ser comparados entre si com a finalidade de descobrir se eles se complementaram ou divergiram em relação aos objetivos propostos.

4.1 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Existem várias técnicas de coletas de dados, contudo nesta pesquisa o instrumento de coleta de dados foi a análise documental.

> A análise documental e a observação participante mostraram-se como técnicas eficazes, complementares e úteis para subsidiar estudos que pretendam utilizar-se da abordagem qualitativa para compreensão científica dos fenômenos sociais da atualidade. (KANTORSKI; LUIS; SOUZA, et al. 2011, p. 221)

Na pesquisa qualitativa são aplicadas algumas estratégias de amostragem, dentre elas: amostragem por cotas, amostragem casual ou amostragem intencional.

A despeito de a pesquisa apresentar uma amostragem conveniente, de acordo com as sugestões de Patton (2002, apud FLICK, 2013, p. 82), escolhendo os casos que são mais facilmente acessíveis, e ser um caso politicamente importante, este processo de amostra se mostra mais próximo de uma amostragem teórica. Segundo Glaser e Strauss (1967, apud FLICK, 2013, p. 81):

> A amostragem teórica é o processo de coleta de dados para a geração de teoria em que o analista coleta, codifica e analisa conjuntamente com seus dados e decide que dados coletar e seguida e onde encontrá-los para desenvolver sua teoria a medida em que ela emerge.

Ainda de acordo com Flick (2013) a amostragem e a integração de material adicional só ficarão completas quando atingirem a "saturação teórica" de uma categoria ou grupo de caso, diferentemente de uma amostragem estatisticamente orientada.

A pesquisa documental foi o procedimento técnico usado na pesquisa. Ocorreu durante o estudo, com consultas em publicações, em busca de uma fundamentação teórica. Seguindo o tipo de pesquisa que foi realizado, a coleta de dados foi feita em diversas mídias, dentre elas podemos citar: Palestra em vídeo, sites na internet, livros, revistas (eletrônicas) e publicações avulsas (artigos, teses e dissertações). Para a definição de quais seriam utilizadas, e quais serviriam de leitura a título de conhecimento e quais seriam descartadas, foram feitas buscas em sites de busca, em sites de vídeos, em biblioteca particular, em biblioteca (digital) da universidade e "biblioteca" de terceiros.

> "As técnicas de coleta de dados têm em comum o fato de serem aplicadas diretamente às pessoas. Mas há dados que, embora referentes a pessoas, são obtidos de maneira indireta, que tomam a forma de documentos, como livros, jornais, [...], que são obtidos de maneira indireta" (GIL, 2008).

Devido falta de tratamento analítico em alguns documentos, algumas análises sobre seus dados tornam-se necessárias. De acordo com Gil (2002, p. 88): "Essa análise deve ser feita em observância aos objetivos e ao plano da pesquisa e pode exigir, em alguns casos, o concurso de técnicas altamente sofisticadas". Não basta escolher um tema para iniciar uma pesquisa bibliográfica, necessita de problematização, não é algo mecânico; necessita de reflexão sobre o material lido, das experiências, da aprendizagem no meio universitário e cultural (SEVERINO, 2001 apud GIL, 2002, p. 89).

A pesquisa necessita que haja uma delimitação do tema, conta Gil (2002, p. 89), necessita que o universo da pesquisa seja determinado. Devido ao grande volume de material que pode ser encontrado, sua interpretação torna-se imprescindível.

4.2 RESULTADOS OBTIDOS

Por se tratar de uma pesquisa documental, os resultados obtidos virão dos trabalhos que guiaram esta pesquisa.

Um dos resultados preliminares, antes de adentrarmos no tema de Euclides, foram as afirmações encontradas onde vários autores concordam que a matemática surgiu no Egito e na Mesopotâmia, e que o conhecimento deles era bem mais avançado na área de geometria do que muitos pensam. Temos Aragão (2009, p. 22) falando do conhecimento dos egípcios e babilônios e tendo suas ideias entrando em um consenso com autores como Roque (2012, p. 13), ou Zanardini (2017, p. 21) que ainda lembra que o progresso da matemática "caracterizava-se por uma grande necessidade de embasamento prático, que veio principalmente da agricultura". Com isso percebemos que os autores concordam que a matemática, inclusive a geometria não vem da Grécia, indo além, e dizendo que os gregos aprenderam com os egípcios, e não com os mesopotâmicos.

Essa informação é importante e combina com a opinião de outros autores como os já citados Zanardini (2017, p. 28) e Roque (2012, p. 71), com afirmações até mesmo polêmicas ao suspeitarem que Pitágoras foi influenciado pela matemática egípcia ao introduzir na cultura grega uma matemática abstrata. É quase unanimidade, e podemos citar Roque (2012, p. 87) e Aragão (2009, p. 24), dentre outros, que concordam que Euclides não criara *Os Elementos*, mas teria compilado de matemáticos anteriores; alguns pesquisadores chegam a dizer que outros gregos contribuíram mito mais para o desenvolvimento da geometria, sendo Euclides meramente um compilador. Lembrando que não diminuem seu trabalho ou importância, e enaltecem seu trabalho de "reunidor" do conhecimento matemático de sua época.

Percebe-se que nenhuma dessas informações faz que com Euclides e sua grande obra, Os Elementos, perca credibilidade. Chaquiam (2017, p. 211) nos lembra que além de reunir em poucos livros todo o conhecimento de geometria da época, Euclides organiza a geometria plana nos livros baseando-se em "métodos axiomáticos ou postulacionais". Outros pesquisadores como Berlinski (2018, p. 10), ou Roque (2012, p. 111), lembram o grande feito de Euclides afirmando que " durante mais de 2 mil anos, geometria significou geometria euclidiana, e a geometria euclidiana, e a geometria euclidiana era *Os Elementos"*. O que é

verdade, e o resultado dos esforços de formalização da matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada fez o trabalho de Euclides tão essencial.

Ao chegar nos resultados da pesquisa sobre fractais, nos deparamos com Chaquiam (2017, p. 214), Crilly (2017, p. 113) e Assis (2010, p. 3) concordando que as tentativas frustradas ao longo dos séculos para provar o quinto postulado de Euclides, o postulado das paralelas, foi o que resultou na descoberta de geometrias não euclidianas, e dentre estas encontra-se a geometria fractal. Fernandes (2007) apud Franco e Vejan (2009, p6) sintetiza essas informações em: “esses objetos foram construídos para mostrar que existiam objetos matemáticos interessantes além das curvas e superfícies regulares da geometria tradicional”.

Não foi possível chegar a um denominador comum quando o assunto é definição do que seria fractal; todos os autores pesquisados têm um conceito de fractal similar, mas diferente, não chegando a uma ideia única. Ainda assim, todos concordam com um ponto na definição: que “um conjunto é fractal se possuir alguma forma de autossimilaridade ainda que aproximada”. Franco e Vejan (2009, p. 6) e Assis (2016, p. 3) concordam com essa afirmação e complementam a explicação dizendo que “a autossemelhança é identificada quando uma porção, de uma figura ou de um contorno, pode ser vista como uma réplica do todo, numa escala menor”. Esta é a palavra mais repetida quando estudamos fractais chegando a ser considerado unanimidade: autossemelhança. Utilizando o conjunto de Mandelbrot, como exemplo e der um *zoom* no conjunto, não saberíamos ao certo se estamos vendo o conjunto completo ou só um pedado dele que foi ampliado várias vezes.

Quando adentramos nos resultados de pesquisa do uso da geometria euclidiana nas grandes construções egípcias, encontramos muitas referências, aliás, este tópico foi o mais fácil de encontrar referência teórica. Contudo, quando falamos em construções em outros países africanos, a quantidade de trabalhos em língua portuguesa está muito aquém da quantidade de trabalhos sobre o Egito. O trabalho de Mokhtar (2010) é um dos mais completos quando falamos sobre história da África, mas muito simplório quando falamos em matemática em continente africano.

Todos os autores concordam ao dizer que o conhecimento da geometria egípcia era bem avançado para a época, com Doberstein (2010, p. 96). Encontramos registros de que os egípcios demostravam um conhecimento avançado em geometria, calculando áreas de um círculo pelo conhecimento de seu diâmetro, além de conhecimento das propriedades de outras figuras, corroborando com Mokhtar (2010, p. 202):

> Entretanto os egípcios conheciam com perfeição o método de calcular a área de um triangulo ou de um círculo, o volume de um cilindro, de uma pirâmide ou de uma pirâmide truncada e, provavelmente, de um hemisfério. Seu maior feito foi o cálculo da superfície do círculo.

Mokhtar (2010, p. 202), assim como outros autores, foi enfático ao dizer que a geometria egípcia era empírica. Outros autores como Reis (2018, p. 24) que não só repete o que foi dito pelos outros autores, como complementa ao dizer que a matemática egípcia era frequente no cotidiano egípcio por ter um tratamento aplicado, mas "ela foi evoluindo e consequentemente a abstração foi se sofisticando, [...]".

Como dito, ao falarmos de outras construções africanas, o material fica mais escasso, sendo necessário a visita em sítios estrangeiros, e um dos poucos que nos fala bastante sobre essas outras culturas africanas foi Mokhtar (2010, p. 159), que exemplifica:

> A civilização egípcia impregnou as culturas africanas vizinhas. Isso fica claro a partir dos achados arqueológicos no antigo território do pais de Kush: pirâmides reais foram construídas em el-Kurru, Nuri, Djebel Barkal e Meroe, testemunhando a magnitude da influência egípcia sobre a África.

Os trabalhos sobre fractais africanos são praticamente todos derivados dos trabalhos publicados por Ron Eglash. Poucos sítios da internet são independentes, contudo não falam sobre as grandes construções ou organizações e sim sobre jogos e objetos menores.

Eglash (2007, 03:11) divide conosco como teve a ideia de ir à África começar sua pesquisa, e de onde veio a ideia; que tudo começou ao ver fotografias aéreas de cidades africanas e se perguntar o porquê daquilo. No princípio a dúvida sobre a capacidade daqueles povos em construir tal formato o fez questionar:

> E finalmente, bem, isso não é apenas intuição? Não é realmente um conhecimento matemático. Os africanos não podem realmente estar usando a geometria fractal, certo? Não foi inventado até a década de 1970. Bem, é verdade que alguns fractais africanos são, na minha opinião, pura intuição. [...]. Mas às vezes, esse não é o caso. Em alguns casos, haveria algoritmos e algoritmos muito sofisticados. (EGLASH, 2007, 07:54)

Como vimos através das pesquisas, a ideia de africanos construindo, ou descobrindo, algo antes de europeus, seja na geometria tradicional ou nas novas, ainda é visto como um sacrilégio. O paradigma de que a Europa é o cérebro da humanidade é inquebrável, já virou um dogma. Mas basta que alguns pesquisadores resolvam sair do terreno da segurança e avancem em áreas não exploradas, muitas vezes por falta de interesse geral, que grandiosidades de outras culturas vão aparecendo. Neste caso foi no continente africano. E os

outros continentes? E as inúmeras culturas devastadas por guerras? Como que conta a história é o lado vencedor, não importa o que o lado perdedor sabia antes de ser derrotado. Mas se importar, é só se apropriar, e ninguém vai se preocupar em contar sobre isso.

5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi elaborada após alguns acontecimentos que chamaram minha atenção sobre o conhecimento, ou deveria dizer desconhecimento, da maioria das pessoas que conheço quando relacionado à matemática e história da matemática, daí o tema foi escolhido, muito antes de chegar ao final do curso. Os acontecimentos políticos ocorridos nos últimos tempos ajudaram na definição de qual seria a limitação do tema. Pois em um primeiro momento, a pesquisa original se trataria de geometria além da Grécia, não focando em um só continente.

A intenção original era realizar uma pesquisa sobre as grandes contribuições, de todos os continentes, ao longo da história para a formação da geometria que temos hoje. Mas com os discursos de ódio se espalhando pelo país, com a naturalização do racismo como se fosse um "exercício da liberdade", e com a generalização das famosas "fake news" em todas as redes sociais, me vi compelido a procurar uma pesquisa onde pudesse descobrir, já que não sou arrogante ao ponto de achar que já sabia tudo sobre o que pesquisei; e que não parasse por aí. A pesquisa também deveria trazer à luz conhecimento que teríamos que ter aprendido ao longo dos anos, mas que por vários motivos não foram repassados.

Dessa maneira a pesquisa ingressou em pesquisa da matemática no continente africano, antes das primeiras manifestações sobre estudo da matemática pelos gregos. Pois se fossemos pesquisar pela matemática na África após os gregos, os créditos sempre recairiam sobre os helênicos, como se nenhuma outra descoberta após eles fosse realmente descoberta, mas apenas compilações. Mesmo sabendo que inúmeras civilizações nunca tiveram contato com a cultura grega até a era das Grandes Navegações.

Após a pesquisa não é difícil concluir que não existe a chance da matemática como a conhecemos ter vindo de um só lugar, diferentemente do que muitas pessoas pensam. Como disse antes, a ideia da pesquisa veio do desconhecimento de muitas pessoas que conheço. Acredito que não seja só uma experiência minha ouvir a resposta de que foram os gregos que inventaram a matemática, quando questionados sobre de onde teria vindo a matemática. Outros acreditam que foram os gregos juntos com os egípcios, como se as duas civilizações tivessem coexistido na época da construção das pirâmides.

Gostaria de ter tido mais tempo para poder fazer entrevistas, e poder dividir com os leitores desta pesquisa a proporção de pessoas que quando perguntados sobre civilizações

africanas que contribuíram para a matemática, respondem: nenhuma. Já seria um disparate se levarmos em conta que existiram impérios africanos que foram importantíssimos, especialmente na área de astronomia, mas não levam crédito, pois não se compartilha a história da África em lugar algum neste país, muito menos sobre história da matemática. Mas a pior parte fica para o final, onde a maioria não consegue relacionar o Egito com a África, como se fossem lugares distintos. Imaginemos se eu afirmasse que egípcios não tinham olhos azuis e cabelos lisos, como Hollywood tenta mostrar, mas eram negros? Puxa vida! Começaria uma guerra.

Após a pesquisa, chega-se à conclusão que o assunto é complexo demais para ser finalizado em uma só pesquisa, já que não temos muitos trabalhos nacionais relacionados ao continente africano, e um exemplo foi que a pesquisa relacionada aos fractais, tanto os fractais em si como os encontrados em continente africano, foi baseada em sua maioria em trabalhos de autores estrangeiros, no caso dos fractais africanos, todos os livros, artigos e reportagens, ainda que nacionais, são oriundos dos trabalhos de Ron Eglash, enquanto em relação à história da matemática foi encontrado em muitas obras nacionais.

Conclui-se também que o único motivo de não termos informações sobre as contribuições africanas, ou de qualquer outro povo, para a construção da matemática atual é pela educação eurocêntrica que sempre recebemos. Não é de se estranhar a raridade dos estudos arqueológicos sobre os núbios, já que os próprios arqueólogos já chegaram a conclusão que muita coisa descoberta foi omitida da história por puro preconceito. E se a arqueologia com suas colossais construções que podem ser vistas por qualquer transeunte consegue omitir, ou mudar, fatos da história, imaginemos na matemática, onde os escritos em papiros são destruídos pelo tempo, acreditando-se que foi só o tempo que os destruiu. Ou alguns conhecimentos que tradicionalmente na África são repassados via oral, de família em família.

Como dito antes, não foi exaurido o tema, pois eu mesmo no fim da terceira parte informo que o Dr. Ron Eglash relaciona mais um grande número de construções africanas utilizando fractais que não relacionei, pois fugiriam da delimitação, ou que não pesquisei para evitar uma pesquisa muito alongada e enfadonha. Outro exemplo é quando eu digo no fim da segunda parte que os egípcios e núbios não construíram somente pirâmides e templos, mas também barcos e armas. Logo, ainda há muita coisa para se pesquisar, e mais ainda para se descobrir.

Como não há maneira de mudar o passado, e não há como difundir as informações obtidas nesta e outras pesquisas aos que já saíram da escola, exceto àquelas pessoas que se

interessam pelo assunto, o que podemos fazer para uma boa difusão do conteúdo aprendido seria simplesmente cumprir a lei. Pois como dito antes, com o advento da lei 10.639/03 (BRASIL, 2003), alterada pela Lei 11.645/08 (BRASIL, 2008), hoje em dia as crianças e adolescente têm muito mais acesso a cultura afro e afrodescendente, sem contar com os recursos da internet e redes sociais para compartilhamento de informação e cultura, e não de ódio e "fake news" como temos visto ultimamente. Mas tem de ser cobrado o cumprimento das leis supracitadas, para que não se tornem leis mortas em determinados estados do Brasil. E assim, quem sabe daqui a alguns anos, com conhecimento mais abrangente sobre a cultura de outros povos, neste caso do povo africano, tenhamos mais pesquisadoras voltando seu tempo e vontade de descobrir para pesquisas relacionadas à África e suas contribuições para a matemática, ou melhor, para a humanidade. E neste dia, se este dia chegar, dificilmente teremos o desprazer de ouvir um Presidente da República transmitindo mentiras com ruídos de racismo em rede nacional.

REFERÊNCIAS

ALFELD, Peter. **Understanding Mathematics**. Department of Mathematics - University of Utah. 1998. Disponível em: <http://www.math.utah.edu/~alfeld/math/mandelbrot/mandelbrot.html>. Acesso em: 23 maio 2019.

ARAGÃO, Maria José. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009. 212 p. Versão Digital - Disponível na Biblioteca Virtual Unisul.

ARAUJO, Joselito Elias de; SILVA, José V. do Nascimento. **Demonstração de uma situação exótica usando o estudo de pirâmides**. Campina Grande: Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências, 2016, p. 7. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conapesc/trabalhos/TRABALHO_EV058_MD4_SA91_ID755_04052016223130.pdf>. Acesso em: 28 maio 2019.

ASSIS, Thiago Albuquerque de et al. **Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais**. Rev. Bras. Ensino Fís., São Paulo, v. 30, n. 2, 2008. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000200005> Acesso em: 12 abr. 2019.

ASSIS, Elias Santiago de. **Geometrias não euclidianas: Uma breve introdução**. 2010. (Apresentação de trabalho/Seminário). Disponível em: <http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/mc31.pdf>. Acesso em 02 jun. 2019.

BARBOSA, Michelle de Kássia Fonseca. **O sagrado no antigo Egito.** Diversidade religiosa/ Revista discente do PPGCR-UFPB. João Pessoa: 2013, v.3, n.1. Disponível em: <http://www.periodicos.ufpb.br/ojs/index.php/dr/article/view/15376>. Acesso em: 18 mai. 2019.

BERLINSKI, David.; **Os Elementos de Euclides**; tradução Carlos Carina; revisão técnica Marco Moriconi. Rio de Janeiro: Zahar, 2018. 160 p.

BRASIL. Lei 11.645/08 de 10 de março de 2008. Diário Oficial da União, Poder Executivo, Brasília

BRASIL. Lei 10.639/03 de 09 de janeiro de 2003. Diário Oficial da União, Poder Executivo, Brasília

CASSELMAN, Bill. **One of the oldest extant diagrams from Euclid**. Mathematics Department - The University of Britsh Columbia. Foto de William Casselman. Disponível em: <https://www.math.ubc.ca/~cass/euclid/papyrus/papyrus.html>. Acesso em: 24 maio 2019.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos: história e matemática em sala de aula.** SBEM-PA. Belém: SBEM, 2017. 241 p. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/historia_matematica.pdf >. Acesso em: 12 maio 2019.

COUCEIRA, Karen Cristine U. dos Santos. **Geometria euclidiana.** [Livro eletrônico]. Curitiba: Intersaberes, 2016. 210 p. Disponível na Biblioteca Virtual da Unisul.

COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não euclidianas** / 3. Ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2018. 168 p. Versão Digital - Disponível na Biblioteca Virtual Unisul.

CRILLY, Tony. **50 ideias de matemática que você precisa conhecer**; tradução Helena Londres. São Paulo: Planeta, 2017. 216 p.

CUNHA, Lázaro R. P. **Contribuição dos povos africanos para o conhecimento científico e tecnológico universal.** Salvador: Secretaria Municipal de Educação e Cultura, 2005. Disponível em: <http://www.acaoeducativa.org.br/fdh/wp-content/uploads/2012/11/contribuicao-povos-africanos.pdf >. Acesso em: 14 mai. 2019.

DOBERSTEIN, Arnoldo W. **O Egito antigo** [recurso eletrônico] / Arnoldo Walter Doberstein. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2010. 174 p. Disponível em:< http://www.pucrs.br/orgaos/edipucrs/>. Acesso em 24 abr. 2019.

EGLASH, Ron. **African Fractals: Modern Computing and Indigenous Design**. New Brunswick: Rutgers University Press, 1999. 272 p.

EGLASH, Ron. **Os fractais no coração dos desenhos africanos**. 2007. (16m48s). Disponível em: <https://www.ted.com/talks/ron_eglash_on_african_fractals>. Acesso em: 10 mar. 2019.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, Sp: Editora da Unicamp, 2011. 848 p.

FLICK, Uwe. **Introdução à metodologia de pesquisa: um guia para iniciantes**; tradução: Magda Lopes; revisão técnica: Dirceu da Silva – Porto Alegre: Penso, 2013. 256 p.

FRANCO, Valdeni Soliani; VEJAN, Margareth Pangoni. **Geometria não euclidiana** / **geometria dos fractais**. PDE 2008/2009 - Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná. Curitiba, 2009. Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2207-8.pdf>. Data de acesso: 11 mai. 2019.

FURCOI, Sorin. **Al Jazeera – Pictures of Sudan's forgotten Nubian pyramids.** 2015. Disponível em: <https://www.aljazeera.com/indepth/inpictures/2015/04/forgotten-pyramids-sudan-150405062541595.html>. Acesso em: 23 maio 2019.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. - São Paulo : Atlas, 2008

HUBIN, Thierry. **PR_ISHANGO_02.** Royal Belgian Institute of Natural Sciences. 2014. Disponível em: <https://www.naturalsciences.be/en/content/prishango02nl>. Acesso em: 29 maio de 2019.

KANT, Immanuel. **Observações sobre o sentimento do belo e do sublime. Ensaio sobre as doenças mentais**. Formato eletrônico. Lisboa: Edições 70, 2012. 120 p.

KANTORSKI, Luciane Prado; LUIS, Margarita A. Villar; SOUZA, Jacqueline de. **Análise documental e observação participante na pesquisa em saúde mental**. Revista Baiana de Enfermagem – Salvador: Anais da Revista Baiana de enfermagem, v. 25, n. 2, 2011. p.221-228. Disponível em:<https://portalseer.ufba.br/index.php/enfermagem/article/view/5252/4469 > Acesso em: 13 maio 2019.

KUSTEC, Lilly. **The American School Visits Egypt**. Foto de Charles Sturge. American School of Classical Studies at Athens. 2019. Disponível em: <https://www.ascsa.edu.gr/news/newsDetails/ascsa-visits-egypt>. Acesso em: 29 maio 2019.

LEIVAS, José C. Pinto; SOUZA, Helena Machado de. **Geometria do táxi: uma investigaçã o com estudantes do ensino médio**. Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática, S ão Paulo: 2016. 12 p. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5844_2 477_ID.pdf>. Acesso em: 10 mai. 2019.

MEF – Matemática é fácil. **A matemática no continente africano – Os fractais.** 2016. Disponível em: <https://www.matematicaefacil.com.br/2016/07/matematica-continente-africano-fractais.html>. Acesso em 20 maio 2019.

MOKHTAR, Gamal. **História geral da África, II: África antiga.** 2.ed. rev. Brasília: UNESCO, 2010. 1008 p.

MONTESQUIEU. Charles de Secondat, Baron de. **O Espírito das Leis**; tradução de Cristina Murachco. 2 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

NIEDERMEYER, Catiana Inês; KOEFENDER, Catiane; ROOS, Liane T. Wendling; **Geometria Fractal e Ensino de Matemática**, Ijuí: Trabalhos X EGEM, 2009. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_52.pdf> Acesso em 09 Mar. 2019.

NUNES, Raquel S. Rebelo. **Geometria Fractal e Aplicações. Tese à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto**. Departamento de Matemática Pura. Porto: 2006. Disponível em: <https://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Data de acesso: 11 mai. 2019.

PARRA, José Miguel. **Standing Tall: Egypt's Great Pyramids.** National Geographic. Foto da CORDON PRESS. 2017. Disponível em: <https://www.nationalgeographic.com/archaeology-and-history/archaeology/giza-pyramids/>. Acesso em: 24 maio 2019.

PEREIRA, Alice T. Cybis; SEDREZ, Maycon Ricardo. **Forma Fractal – Geometria Fractal**. Universidade Federal de Santa Catarina. 2012. Disponível em: <http://wright.ava.ufsc.br/~alice/hiperlivros/Forma_Fractal_html1342098574%20Folder/scos/cap3560/4.html>. Acesso em: 24 maio 2019.

REIS, Alex Marques dos. **A matemática Egípcia – Solução de alguns problemas algébricos do papiro de Rhind**. Trabalho de Conclusão de Curso - Orientado por Dr. Henrique Marins de Carvalho. São Paulo: IFSP, 2018. Disponível em:< http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/167151/mod_resource/content/0/Alex%20Marques%20dos%20Reis.pdf >. Acesso em 12 mai. 2019.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 409 p.

STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números: a matemática do zero ao infinito**; tradução George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2016. 384 p.

SULLIVAN, Mary Ann. **Mortuary Temple of Queen Hatshepsut (page 1 of 2 pages)**. 2001. Disponível em: <https://www.bluffton.edu/homepages/facstaff/sullivanm/egypt/deirelbahri/deirelbahri.html>. Acesso em: 29 maio 2019.

SULLIVAN, Mary Ann. **Stepped Pyramid and Mortuary Precinct of King Zoser**. 2001. Disponível em: <https://www.bluffton.edu/homepages/facstaff/sullivanm/egypt/saqqara/zoser/zoser.html>. Acesso em: 29 maio 2019.

TBM – The British Museum. **The Rhind Mathematical Papyrus**. 2018 (last update). Disponível em: <https://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details/collection_image_gallery.aspx?assetId=766120001&objectId=117389&partId=1>. Acesso em: 23 maio 2019.

TYLDESLEY, Joyce. **Development of Pyramids Gallery**. BBC. 2011. Disponível em: <https://www.bbc.co.uk/history/ancient/egyptians/pyramid_gallery_02.shtml>. Acesso em: 24 maio 2019.

WMF - WORLD MONUMENTS FUND. **Luxor Temple.** 2017. Disponível em: <https://www.wmf.org/project/luxor-temple>. Acesso em: 24 maio 2019.

ZANARDINI, Ricardo A. Deckmann. **Um breve olhar sobre a história matemática**. Livro eletrônico. Curitiba: Intersaberes, 2017. Disponível na Biblioteca Virtual da Unisul.