UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

GUILHERME ROSSI DE MELO

ANÁLISE PRAGMÁTICO-COGNITIVA DE EFEITOS DO REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Tubarão

2020

UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA
GUILHERME ROSSI DE MELO

ANÁLISE PRAGMÁTICO-COGNITIVA DE EFEITOS DO REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciências da Linguagem.

Prof. Dr. Fábio José Rauen (Orientador)

Tubarão
2020

M46 Melo, Guilherme Rossi de, 1985-

Análise pragmático-cognitiva de efeitos do registro de representação semiótica na resolução de sistemas lineares por estudantes do ensino médio / Guilherme Rossi de Melo. – 2020.

120 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Pós-graduação em Ciências da Linguagem.

Orientação: Prof. Dr. Fábio José Rauen

1. Semiótica. 2. Aprendizagem cognitiva. 3. Sistemas lineares. I. Rauen, Fábio José, 1965-. II. Universidade do Sul de Santa Catarina. III. Título.

CDD (21. ed.) 401.41

Ficha catalográfica elaborada por Carolini da Rocha CRB 14/1215

GUILHERME ROSSI DE MELO

ANÁLISE PRAGMÁTICO-COGNITIVA DE EFEITOS DO REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Esta Dissertação foi julgada adequada à obtenção do título de Mestre em Ciências da Linguagem e aprovada em sua forma final pelo Curso de Mestrado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 3 de julho de 2020.

____
Professor e orientador Fábio José Rauen, Doutor.
Universidade do Sul de Santa Catarina

presente por videoconferência
____
Professora Marleide Coan Cardoso, Doutora.
Instituto Federal de Santa Catarina

presente por videoconferência
____
Professora Suelen Francez Machado Luciano, Doutora.
Universidade do Sul de Santa Catarina/Faculdade SENAC

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Fabio José Rauen, pela orientação, dedicação, confiança e incentivo.

Ao Instituto Federal de Santa Catarina pela valorização e incentivo à capacitação e qualificação dos professores.

Ao colega Daniel Faustino pela cooperação técnica na programação do software do experimento.

Aos professores do curso de Mestrado em Ciências da Linguagem que oportunizaram ambientes inventivos para produção textual e pesquisa.

Aos colegas do curso de Ciências da Linguagem e do Grupo de Pesquisa em Pragmática Cognitiva, pelos diversos olhares sobre os tópicos abordados.

A Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina e a direção da escola de Educação Básica Irmã Maria Teresa que viabilizaram o acesso aos estudantes.

Aos estudantes do primeiro ano da escola Irmã Maria Teresa que aceitaram de bom grado participar do experimento proposto.

E, por fim, agradeço a todos que de modo direto ou indireto participaram dessa jornada.

Muito obrigado!

RESUMO

Analisamos nesta dissertação, a partir de uma perspectiva pragmático-cognitiva, efeitos dos registros algébrico, linguístico e pictórico na ordem e na mobilização de estratégias de resolução de sistemas lineares possíveis e determinados. Para atingir esse objetivo, mobilizando as noções teóricas de registros de representação semiótica (DUVAL, 2009, 2011), relevância (SPERBER; WILSON, 1986, 1995), e conciliação de metas (RAUEN, 2014), realizamos um experimento de caráter exploratório em duas etapas. A primeira etapa consistiu em propor que estudantes do primeiro ano do Ensino Médio escolhessem e resolvessem três problemas envolvendo sistemas lineares apresentados em registro algébrico, linguístico e pictórico. A segunda etapa consistiu em aplicar um protocolo verbal para investigar a ordem e os métodos de resolução dos problemas conforme a perspectiva dos estudantes. As evidências sugerem predileção pelos registros pictórico e linguístico, desempenho superior nesses registros – ainda que insuficiente – e mobilização abdutiva de estratégias menos que formais com diferentes níveis de desempenho de conhecimentos matemáticos incluindo soluções criativas *ad hoc*.

Palavras-chave: Pragmática Cognitiva. Conciliação de Metas. Relevância. Registros de Representação Semiótica. Sistemas Lineares.

ABSTRACT

We analyze in this study, from a pragmatic-cognitive perspective, the effects of algebraic, linguistic, and pictorial registers on the order and mobilization of possible and determined linear systems resolution strategies. In achieving this objective, we mobilize the theoretical notions of registers of semiotic representation (DUVAL, 2009, 2011), relevance (SPERBER; WILSON, 1986, 1995), and goal-conciliation (RAUEN, 2014), and conducted a two-step exploratory experiment. The first step was to propose that first-year high school students choose and solve three problems involving linear systems shown in algebraic, linguistic, and pictorial registers. The second step was to apply a verbal protocol to investigate the order and methods of problem-solving from the students' perspective. The evidence suggests a predilection for pictorial and linguistic registers, superior—albeit insufficient—performance on these registers and abductive mobilization of less-than-formal strategies with different levels of mathematical knowledge performance including *ad hoc* creative solutions.

Keywords: Cognitive Pragmatics. Goal-Conciliation. Relevance. Registers of Semiotic Representation. Linear systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Desafio tênis, meninos e apitos ... 10
Figura 2 – Desafios matemáticos obtidos na internet ... 11
Figura 3 – Desafio Hamburguer, batatas fritas e molho ... 12
Figura 4 – Conversão do problema de Dante (2018, p. 139) para o registro pictórico ... 14
Figura 5 – Representação do problema de Dante (2018, p. 139) em três registros ... 14
Figura 6 – Equação sincopada e sua transliteração para notação simbólica moderna ... 20
Figura 7 – Sistema linear apresentado de forma pictórica ... 35
Figura 8 – Conversões para o registro algébrico dos problemas da seção 2.2 ... 37
Figura 9 – Congruência entre versões do problema em língua natural e versão algébrica ... 38
Figura 10 – Arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas ... 54
Figura 11 – Relação para auto e heteroconciliação de metas ... 61
Figura 12 – Tela 1 ... 65
Figura 13 – Tela 2 ... 66
Figura 14 – Tela 3 ... 66
Figura 15 – Tela 4 ... 67
Figura 16 – Tela 5 ... 68
Figura 17 – Tela 6 ... 68
Figura 18 – Tela 7 ... 69
Figura 19 – Tela 8 ... 69
Figura 20 – Tela 9 ... 70
Figura 21 – Tela 10 ... 70
Figura 22 – Escolhas de registros dos estudantes nas três etapas de decisão ... 73
Figura 23 – Gráfico acumulado da primeira e segunda escolha dos estudantes ... 74
Figura 24 – Problema em registro pictórico modificado ... 78
Figura 25 – Resoluções dos estudantes E_{59}, E_{65}, E_{78}, E_{83}, E_{84} e E_{86}. ... 85
Figura 26 – Resolução do estudante E_{77} ... 86
Figura 27 – Resolução do problema linguístico pelo estudante E_{81}. ... 87
Figura 28 – Resolução do problema linguístico pelo estudante E_{80}. ... 87
Figura 29 – Resolução do problema linguístico pelo estudante E_{67} ... 88
Figura 30 – Resolução do problema algébrico pelo estudante E_{55} ... 90
Figura 31 – Resolução do problema algébrico pelos estudantes E_{55} e E_{65}. ... 90

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Gráfico de equação linear com uma incógnita 22
Gráfico 2 – Gráfico de equação linear com duas incógnitas 22
Gráfico 3 – Gráfico de equação linear com três incógnitas.. 23
Gráfico 4 – Exemplo de retas concorrentes... 25
Gráfico 5 – Exemplo de retas coincidentes 25
Gráfico 6 – Exemplo de retas paralelas 26
Gráfico 7 – Análise das respostas do problema em registro pictórico 77
Gráfico 8 – Análise das respostas do problema em registro língua natural 84
Gráfico 9 – Análise das respostas do problema em registro algébrico.................................... 89

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Possibilidades de consecução de metas 59
Tabela 2 – Possibilidades de sucesso na consecução de planos de ação intencional 60
Tabela 3 – Ordem de resolução das atividades... 73

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **10**

2 REVISÃO DA LITERATURA **18**

2.1 SISTEMAS LINEARES 18

2.1.1 Definição e classificação **20**

2.1.2 Métodos algébricos de solução **26**

2.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA 30

2.2.1 Atividades cognitivas fundamentais **31**

2.2.2 Conversão e congruência **36**

2.3 TEORIA DA RELEVÂNCIA 39

2.3.1 Do conceito de relevância ao procedimento de compreensão **39**

2.3.2 A noção de inferência **43**

2.3.3 Explorando o mecanismo de compreensão **49**

2.4 TEORIA DE CONCILIAÇÃO DE METAS 52

2.4.1 Arquitetura abdutivo-dedutiva **53**

2.4.2 Conceitos essenciais **59**

3 ANÁLISE DAS EVIDÊNCIAS **63**

3.1 METODOLOGIA 63

3.2 ORDEM DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS 72

3.3 ANÁLISE DA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS 76

3.3.1 Problema apresentado em registro pictórico **76**

3.3.2 Problema apresentado em língua natural **83**

3.3.3 Problema apresentado em registro algébrico **88**

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS **93**

REFERÊNCIAS **98**

APÊNDICES **101**

APÊNDICE A – AUTORIZAÇÃO DA SECRETARIA DA EDUCAÇÃO **102**

APÊNDICE B – CIÊNCIA E CONCORDÂNCIA DAS INSTITUIÇÕES **103**

APÊNDICE C – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA **105**

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO **112**

APÊNDICE E – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO **114**

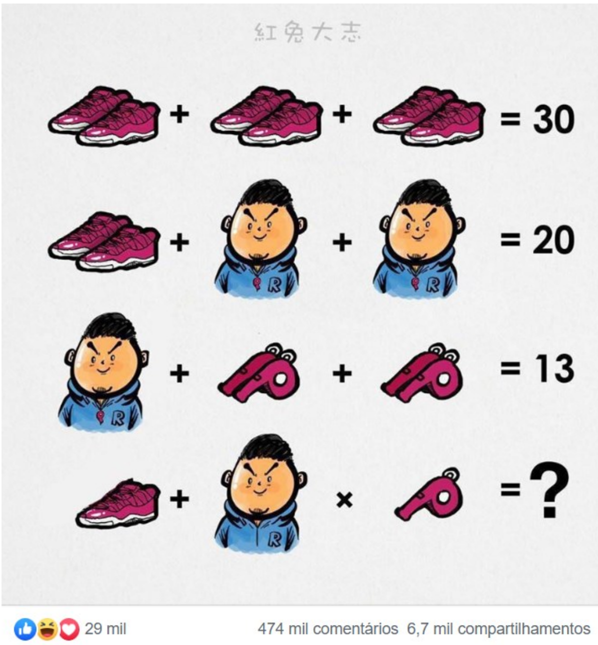
APÊNDICE F – EXCERTOS DE ENTREVISTAS **115**

1 INTRODUÇÃO

Diante dos avanços tecnológicos dos meios de comunicação e do crescente acesso à informação, situações-problema envolvendo matemática, antes restritas à escola ou a publicações mais específicas, têm sido amplamente compartilhadas na forma de desafios de entretenimento. Entre os problemas mais populares estão sistemas lineares relativamente simples cujas incógnitas são substituídas por figuras (doravante problemas pictóricos).

Na figura 1, a seguir, temos um exemplo desse tipo de problema no qual incógnitas tipicamente usadas em resoluções formais na escola como x, y e z são substituídas, respectivamente, por figuras de tênis, meninos e apitos.

Figura 1 – Desafio tênis, meninos e apitos



Disponível em: https://bit.ly/2y2RTxG. Acesso em 15 maio 2020.

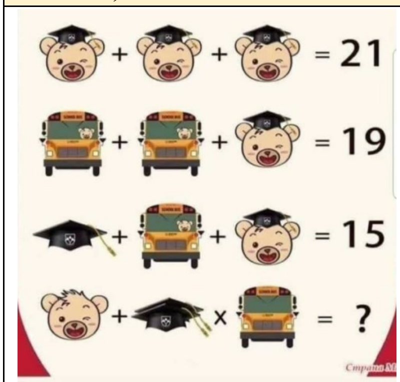
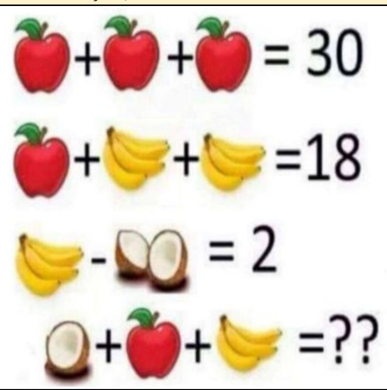
A primeira linha de problemas dessa espécie, apresenta, em geral, uma relação quase trivial entre pictogramas de objetos e valores. Como podemos verificar na figura, o valor de cada par de tênis é 10. Essa característica leva a crer que a solução do problema é também trivial, sugerindo que o valor de cada menino é 5 na segunda linha, o valor dos apitos é 4 na terceira linha e o valor da soma é 19 na quarta linha.

Todavia, basta uma análise mais atenta para perceber que o problema passa de pares de tênis e de apitos para tênis e apitos individuais na quarta linha. Isso sugere rever nossa primeira solução apressada para 12. Mas isso não é tudo. Um olhar ainda mais atento destaca que, além de os tênis e os apitos não estarem apresentados aos pares na quarta linha, o menino não está usando o apito em volta do pescoço, e o sinal de adição foi rotacionado para representar uma multiplicação – operação prioritária em relação à adição. Isso sugere rever nossa segunda solução da quarta linha para 11, pois a expressão aritmética correspondente a linha é $5 + 3 * 2$.

Podemos assim afirmar que esse desafio contém diversas armadilhas ou "pegadinhas", ou seja, aspetos deliberadamente escondidos, cuja descoberta promove engajamento em direção à solução. Com 474 mil comentários, 29 mil reações e 6,7 mil compartilhamentos, um número seguramente parcial, uma vez que esse problema foi disseminado em outros locais na internet, podemos afirmar que se trata de um sucesso de adesão dos participantes da rede social em que é inserido.

Além disso, não apenas soluções divergentes de um mesmo problema se disseminam nas redes sociais, gerando debates cíclicos, uma vez que esses problemas emergem e ressurgem, mas há também disseminação de paráfrases. Como diversos desafios matemáticos, identificamos problemas similares, com variações em relação às operações aritméticas, complexidade e quantidade de armadilhas, como podemos ver na figura a seguir:

Figura 2 – Desafios matemáticos obtidos na internet

Urso, estudante e ônibus [(1)]	Maçãs, bananas e cocos [(2)]	As flores [(3)]
		

(1) Disponível em: https://bit.ly/2XjuFNQ. Acesso em: 15 maio 2020.
(2) Disponível em: https://bit.ly/2yP8y8z. Acesso em: 15 maio 2020.
(3) Disponível em: https://bit.ly/2T6f8OQ. Acesso em: 15 maio 2020.

A popularidade desse tipo de problema não passou despercebida pelo mercado publicitário como podemos ver a seguir.

Figura 3 – Desafio Hamburguer, batatas fritas e molho

Disponível em: https://bit.ly/2T5oqKO. Acesso em: 15 maio 2020.

Neste exemplo, a empresa escolheu o formato de desafio para apresentar os preços de hambúrgueres, batatas fritas e molhos. A estrutura é idêntica ao primeiro exemplo. Se três hambúrgueres custam 60 reais na primeira linha, então podemos concluir que cada hambúrguer custa 20 reais. De posse dessa informação, calculamos que o molho custa 3 reais, a porção de batatas fritas custa 6 reais, e a resposta do desafio é 38, através da operação $20 + 3 * 6$.

À luz da matemática, esses desafios podem ser classificados como sistemas lineares possíveis e determinados – caracterizados por serem solúveis, e essa solução ser única – cujos métodos formais de resolução demandam por conhecimentos algébricos. A álgebra, unidade pertencente à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), relaciona-se ao desenvolvimento e à análise de modelos matemáticos, bem como à identificação de regularidades e padrões, interpretação e transição entre as diversas representações gráficas (BRASIL, 2018, p. 270).

A linguagem algébrica é um dos tópicos apresentados aos estudantes do Ensino Fundamental. No decorrer do aprendizado, espera-se que o estudante associe essa linguagem com outras formas de representação dos objetos matemáticos. Todavia, em geral, os estudantes encontram severas dificuldades para atender a essa demanda.

Conforme Duval (2003, p. 21):

> Numerosas observações nos permitem colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida.

Em Brandt e Moretti (2014), há uma reflexão sobre as dificuldades que se apresentam no processo de ensino e aprendizagem da matemática quando se aborda o funcionamento cognitivo. Os autores (2014, p. 24) analisam as atividades cognitivas que embasam esse funcionamento, como este funcionamento é apresentado e quais são os requerimentos necessários para a resolução de problemas. Essa investigação é essencial para compreender a razão dessas dificuldades e para buscar sua superação.

Um registro usual de apresentação de sistemas lineares em livros escolares e certames é o de língua natural, em geral, consistindo na apresentação de situações-problemas através de enunciados compondo pequenos textos. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$$

pode ser apresentado na forma de um problema de contagem de galinhas e coelhos em um quintal, como pode ser visto em Dante (2018, p. 139):

> Em um quintal há galinhas e coelhos.
> Há 7 cabeças e 22 patas.
> Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos?

Como já destacamos, outro formato de representação de sistemas lineares é o de pictogramas. Conforme Moro (2016, p. 24):

> O pictograma compõe um conjunto de símbolos gráficos ligados a objetos, representações e conceitos. Sua manifestação pode ser encontrada desde a antiguidade pré-histórica. Ele possui também a função comunicativa de mediador de uma mensagem. A forma como receptores o percebe pode até ser diferente, mas, mesmo assim, a comunicação é estabelecida.

Para esse autor, o pictograma incorpora aspectos não verbais das incógnitas na resolução de problemas geralmente em termos de uma simbologia próxima das vivências do estudante. Em termos gerais, o uso de figuras geométricas, de cachos de banana a diversos objetos do cotidiano, pertence à cultura e ao contexto dos indivíduos.

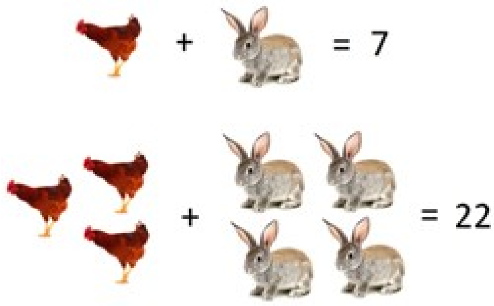
O uso de pictogramas é usual em livros didáticos do Ensino Fundamental I, quando a noção de número é condicionada à existência de objetos e à relação cardinal ou ordinal existente entre eles, dando, portanto, uma breve noção de sentido do número.

Conforme Cebola (2002, p. 223):

> Uma ideia que normalmente surge é a de que os números são aquilo que permite contar e, como tal, responder a questões do tipo: "Quantos são?". Desta forma, o número é encarado como o *cardinal* de um dado conjunto, isto é, descreve a quantidade dos seus elementos. No entanto, o número pode ser usado num sentido diferente, por exemplo, se dissermos que numa corrida participam três crianças, o três é o cardinal, mas se mencionarmos que o João chegou em terceiro lugar, o três já não é encarado da mesma forma mas antes como *ordinal* do número, ou seja, como a ideia que o permite localizar numa dada sequência. (itálicos no original).

Por exemplo, poderíamos representar o exemplo de Dante (2018, p. 139) pictoricamente com certa adaptação que conserva o nível de dificuldade da seguinte forma:

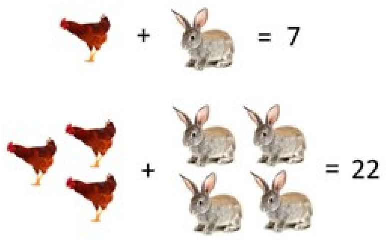
Figura 4 – Conversão do problema de Dante (2018, p. 139) para o registro pictórico



Fonte: Elaboração nossa.

Conhecidas essas distintas representações desse mesmo problema, poderíamos dispô-las lado a lado, na figura 5, a seguir, e questionar a partir de qual dessas representações o indivíduo escolheria resolver o problema.

Figura 5 – Representação do problema de Dante (2018, p. 139) em três registros

Representação Algébrica	Representação em Língua Natural	Representação Pictórica
$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$	Em um quintal há galinhas e coelhos. Há 7 cabeças e 22 patas. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos?	

Fonte: Elaboração nossa.

Em uma primeira mirada, perceberemos que as representações algébrica e pictórica são similares. A rigor, a representação pictórica pode ser mais bem caracterizada como uma versão híbrida, pois consiste numa representação algébrica cujas incógnitas[1] x e y foram substituídas, respectivamente, pelas figuras de galinhas e coelhos. Consequentemente, uma predileção pela representação pictórica se justificaria em função do conteúdo semântico/pragmático dessa representação em detrimento da simbologia abstrata e puramente sintática de uma representação puramente algébrica. Todavia, esse apelo à dimensão semântico/pragmático também ocorre na versão em língua natural, de modo que competências com o trato de textos e certa aversão por matemática, independentemente forma como os problemas são apresentados poderiam fazer preferir a versão em língua natural do problema. Vice-versa, competências de raciocínio formal poderiam levar a preferir a versão algébrica, entre outros motivos porque dispensaria o indivíduo de converter ou traduzir as informações pictóricas e textuais para variáveis sintáticas que já estão explícitas na versão algébrica – um custo de processamento injustificado.

Observe-se que a potência da representação álgebra para o tratamento desses problemas é evidente, mas essa potência de tratamento é obtida às custas de abstração. Incógnitas como x, y ou z representam formal e sintaticamente qualquer conteúdo semântico ou pragmático, demandando do intérprete raciocinar a partir desses símbolos e de modo independente de qualquer instancia mais particular.

A potência da língua natural e da versão pictórica é justamente permitir essa proximidade. A despeito da esquisitice de contar galinhas e coelhos pelo número de patas, está-se falando na versão textual do problema de galinhas e coelhos em um quintal. A despeito da esquisitice de meramente apresentar figuras de galinhas e coelhos, ainda assim faz mais sentido tratar unidades de galinhas e coelhos do que unidades de incógnitas sintáticas abstratas x e y.

Postas essas questões, parece-nos evidente que a forma como se apresentam os problemas interfere no engajamento dos indivíduos. A prevalência de problemas que substituem incógnitas do registro algébrico por pictogramas nas redes sociais e o sucesso como esses problemas geram comentários, reações e compartilhamentos parece sugerir vantagens evidentes dessa formatação sobre versões puramente algébricas. Mas isso se sustentaria se dispuséssemos em igualdade de condições de escolha problemas de dificuldade similar nessas três versões? Os indivíduos não poderiam escolher a representação algébrica nesses casos justamente porque ela dispensaria qualquer esforço de conversão ou tradução? Ou mesmo escolher a representação em língua natural justamente por que ela está mais próxima do modo

[1] Convencionamos representar incógnitas por x e y, representações intermediárias dos problemas em registro em língua natural e pictórico são apresentadas na seção 2.2.1

como processamos histórias ou aprendemos conteúdos de matemática nos primeiros anos do ensino fundamental, ou seja, dada a frequência como problemas desse tipo são apresentados linguisticamente para serem resolvidos algebricamente na escola?

Feitas essas observações, questionamos qual seria o impacto do registro de representação na ordem e nas estratégias de resolução de problemas envolvendo sistemas lineares, se problemas de mesma complexidade fossem apresentados pictórica, linguística e algebricamente para estudantes que já são capazes de lidar formalmente com sistemas lineares. Ou seja, estamos tentando verificar se, em iguais condições, o sucesso da versão pictórica (e, talvez, da versão linguística) sobre a algébrica se replicaria entre, por exemplo, estudantes do primeiro ano do ensino médio.

Admitindo registros de representação iluminam aspectos distintos que limitam ou potencializam o tratamento, estamos pondo em xeque as estratégias de resolução dos problemas pelos estudantes. Ingressantes do ensino médio devem ser capazes de tratar sistemas lineares por um dos três métodos formais de resolução – adição, comparação e substituição – superando, portanto, estratégias *ad hoc* entre as quais a de tentativa e erro. Se esse é o caso, eles deveriam ser capazes de converter os problemas apresentados em registro pictográfico e linguístico numa formulação algébrica, mobilizando adequadamente esses registros nos termos da teoria de registros de representação semiótica de Duval (2003, 2009, 2012).

Nessa pesquisa, assumiremos que estratégias de solução funcionam como hipóteses abdutivas antefactuais em direção à consecução de metas nos termos da teoria de conciliação de metas de Rauen (2014). Em outras palavras, considerando a meta de resolver os problemas apresentados nesses diferentes registros, os estudantes mobilizariam de seu ambiente cognitivo prévio estratégias de consecução ótima que, em seguida, seriam executadas e checadas, encerrando o processamento quando as respostas efetivas se conciliassem com o estado de meta projetado. Coerente com a teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995), essas estratégias consistiriam num equilíbrio ótimo de efeitos cognitivos maximizados e esforços de processamento minimizados. Trata-se, portanto, de estratégias relevantes ou eficientes.

Se os estudantes, de fato, operam com estratégias formais de resolução e, em alguma medida, formulam versões algébricas dos problemas, as condições sendo iguais, o registro algébrico deveria ser preferido aos demais. Isso ocorreria porque, numa resolução formal, a representação algébrica do problema demandaria apenas por tratamento, enquanto as versões pictórica e linguística demandariam por conversões seguidas de tratamentos.

Todavia, parte do sucesso de versões pictóricas na internet pode ser explicada pelo nível de exigência demandado pelas questões. A rigor, os problemas populares demandam por tratamentos mais simples que podem favorecer estratégias de tentativa e erro ou estratégias *ad hoc* com diferentes graus de criatividade. Em outras palavras, a conversão dos problemas para o registro algébrico não ocorre entre outros motivos porque os estudantes não mobilizariam métodos formais de resolução. Se esse é o caso, a ordem da resolução pode ser outra e mesmo favorecer os registros pictóricos e linguístico porque eles, como vimos, são mais significativos dentro de um contexto.

Assim, propomos como **objetivo geral** verificar se, em igualdade de condições, os registros de representação algébrico, pictórico e linguístico interferem na ordem e nas estratégias de resolução de sistemas lineares possíveis e determinados.

Para atingir esse objetivo, propomos a realização de um experimento em duas etapas. A primeira etapa consiste em propor a estudantes do primeiro ano do Ensino Médio que escolham e resolvam três problemas envolvendo sistemas lineares a serem diferenciados uns dos outros por serem apresentados em registro algébrico, linguístico e pictórico. A segunda etapa, consiste em desenvolver um protocolo verbal para investigarmos a ordem e os métodos de resolução dos problemas conforme a perspectiva dos próprios estudantes.

Do ponto de vista textual, estruturamos a apresentação da pesquisa em mais três capítulos. No segundo capítulo, desenvolvemos a revisão teórica sobre os sistemas lineares e sobre as teorias de registros de representação semiótica, de relevância e de conciliação de metas. No terceiro capítulo, apresentamos a metodologia da pesquisa e a análise das evidências. No quarto capítulo, desenvolvemos as considerações finais do estudo.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo, dividido em quatro seções, foi reservado à revisão da literatura sobre tópicos envolvidos nesta dissertação. Na primeira seção, apresentamos definição, tipologia e tratamentos algébricos de sistemas lineares. Na segunda seção, destacamos a teoria de registros de representação semiótica de Duval, destacando aspectos relacionados a identificação de unidades significativas, de tratamento e de conversão de problemas passíveis de serem tratados por sistemas lineares. Na terceira e na quarta seção, por fim, pomos em evidência os conceitos e a arquitetura descritivo-explanatória da teoria da relevância de Sperber e Wilson e da teoria de conciliação de metas de Rauen, correlacionando-as com o processamento pragmático-cognitivo desses tipos de problemas.

2.1 SISTEMAS LINEARES

Sistemas lineares são um dos principais temas de álgebra linear e desempenham papel fundamental em Matemática e em outras ciências, com destaque às exatas e às engenharias. Conforme Anton e Busby (2006, p. 59), há diversas situações concretas de aplicação de sistemas lineares "nas engenharias, na análise econômica, nas imagens de ressonância magnética, na análise de fluxo de tráfego, na previsão do tempo e na formulação de decisões ou de estratégias comerciais".

A emergência histórica dos sistemas lineares não foi centralizada em um povo, região ou período. São diversas as contribuições que trespassam barreiras geográficas, temporais e até notacionais, resultando assim nas definições apresentadas nos livros didáticos atuais. Os registros mais antigos relacionados com esse tema datam aproximadamente de 250 a.C. com o livro *Chui-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte matemática* (BOYER, 1974, p. 143). De acordo com Boyer, esse livro contém 246 problemas sobre terras, sociedades, agricultura, engenharia, impostos, equações, e propriedades dos triângulos retângulos. No oitavo capítulo do livro, é apresentada a solução de problemas sobre equações lineares tanto para um número positivo quanto para um número negativo. Em especial, o último problema é um sistema com quatro equações e cinco incógnitas de solução impossível ou indeterminada.

Diante do interesse de registro linguístico dos problemas matemáticos para representar objetos e correspondências de ordem numérica, diferentes povos definiram notações algébricas próprias. Conforme Baumgart (1992, p. 3), a palavra “álgebra” se referia, originalmente, a equações, mas assume, atualmente, significado muito mais amplo. Para melhor definir a álgebra, convém dividi-la em duas fases: *álgebra antiga* (elementar) e *álgebra moderna*[2] (abstrata). A fase antiga (elementar), que compreende o período de 1.700 a.C. até 1.700 d.C. aproximadamente, caracteriza-se pelo desenvolvimento progressivo do conceito, da notação e dos métodos de resolução de objetos algébricos. Ao analisar a notação algébrica que foi desenvolvida nesse período, o autor concebe três estágios: o *retórico* (ou verbal), o *sincopado* (abreviações de palavras) e o *simbólico*.

Baumgart (1992, p. 4) apresenta um problema elaborado na época do rei Hammurabi (1.700 a.C.) para exemplificar a notação retórica. Para isso, o texto, originalmente registrado em escrita cuneiforme e em notação sexagesimal, precisou ser transliterado em alfabeto latino e convertido em notação indo-arábica:

> Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura.

Esse problema pode ser representado por equações. Primeiramente, podemos representar o comprimento por x e a largura por y. Ciente de que o comprimento e a largura foram multiplicados e somados, podemos escrever as equações $xy = 252$ e $x + y = 32$, assumir que o problema trata de um retângulo e inferir que não há possibilidade de atribuir valores negativos às incógnitas[3].

De acordo com Baumgart (1992, p. 9), Diofanto foi um matemático grego que utilizou as técnicas de parametrização[4] para resolver suas equações, as assim chamadas *equações diofantinas*[5]. Ele deu início ao simbolismo moderno ao abreviar palavras e tentar simplificar a notação matemática naquele período, porque havia, à época, dificuldades na

---

[2] A álgebra moderna estuda principalmente estruturas matemáticas como anéis, corpos e grupos. Esses conteúdos são usualmente estudados em cursos de nível superior.

[3] Um estudante com conhecimento de álgebra básica e de resolução de equações poderia resolver essa situação da seguinte forma. Ele montaria um sistema de equações, isolaria uma das incógnitas, substituiria a incógnita isolada na outra equação e resolveria a equação de segundo grau resultante. Neste exemplo, obteria como soluções os valores $x = 14$ e $y = 18$ ou vice-versa.

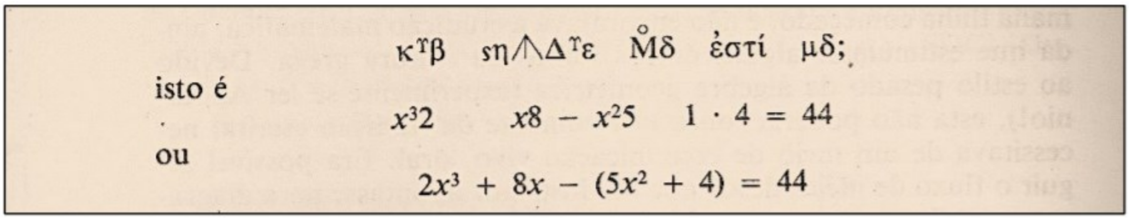
[4] Para Baumgart (1992, p. 4), os babilônios sabiam utilizar o método de substituição, mas frequentemente preferiam utilizar um método paramétrico, ou seja, relacionar as incógnitas x e y a uma nova incógnita (ou parâmetro) t.

[5] Equação polinomial que permite a duas ou mais incógnitas assumirem apenas valores inteiros. Nos problemas nessa forma, há menos equações do que incógnitas.

transmissão dos conceitos matemáticos somente através de terminologias apresentadas em grego que demandavam pela explicitação de um mestre.

Vejamos, a seguir, como percursor da notação *sincopada*, a notação simbólica utilizada por Diofanto e sua transliteração para notações modernas.

Figura 6 – Equação sincopada e sua transliteração para notação simbólica moderna


κ^Tβ ςη⋀Δ^Tε M̊δ ἐστί μδ;

isto é

$x^3 2 \quad x8 - x^2 5 \quad 1 \cdot 4 = 44$

ou

$2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$

Fonte: Baumgart (1992, p. 10).

Conforme Baumgart (1992, p. 12), a notação *simbólica* como conhecemos hoje foi difundida principalmente na Europa a partir do renascimento e sua utilização visava a facilitação de intercâmbios informativos[6].

2.1.1 Definição e classificação

Cientes das evoluções notacionais que permearam a história da matemática, exploraremos os principais conceitos que envolvem os sistemas lineares. Antes de qualquer aprofundamento, vale um esforço didático para apreender o conceito básico de equação linear, visto que um sistema linear é o conjunto dessas equações.

Por *equação linear* define-se a expressão de uma igualdade cujo expoente das incógnitas é 1, ou seja, trata-se de uma equação de primeiro grau. Para compreender melhor esta distinção, observemos os seguintes exemplos:

(a) $2x + 3y - z = 12$
(b) $x^2 + 5z = 0$
(c) $5x + 7y = 15 - z$
(d) $4xy = 1$
(e) $(1{,}02)^x = 2$

---

[6] Apesar de 500 anos de esforços de padronização, ainda há, por exemplo, conflitos de notação de decimais e milhares. No Brasil, '5,127' é um número que está no intervalo entre '5' e '6'. Nos Estados Unidos, o mesmo número é lido como '5.127', ou seja, um número no intervalo entre '5.000' e '6.000'.

O exemplo (a) é uma equação linear com coeficientes 2, 3 e -1, um termo independente 12 e envolve as incógnitas x, y e z, cujo expoente é 1. O exemplo (b) não é uma equação linear, pois o expoente da incógnita x é diferente de 1 ou seja x^2. Trata-se, portanto, de uma equação do segundo grau. O exemplo (c) é uma equação linear, mas não está escrita na forma padronizada, ou seja, $5x + 7y + z = 15$. Essa equação tem coeficientes 5, 7 e 1, um termo independente 15, e envolve as incógnitas x, y, z com expoente 1. O exemplo (d) não é uma equação linear, pois envolve o produto de duas incógnitas $4xy$. O exemplo (e), por fim, não é uma equação linear pois a incógnita está posicionada no expoente $(1{,}02)^x$. Trata-se, portanto, de uma equação exponencial.

Utilizando a notação de Iezzi e Murakami (2004, p. 115) em *Fundamentos da matemática elementar*, é possível formalizar matematicamente a definição de uma equação linear. Desse modo, chamamos de equação linear com incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ toda equação que se apresenta na forma $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b$.

Nessas equações, os números $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ pertencem ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e são chamados de *coeficientes*; e a incógnita 'b', também pertencente ao conjunto dos números reais, é chamada de *termo independente*.

A *definição da solução* para uma equação linear consiste em uma sequência ou ênupla ordenada de números reais $(\gamma_1, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ que seja verdadeira para a equação $a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b$.

Estratégias para solucionar equações lineares dependem da complexidade e da quantidade de incógnitas. Supor que toda equação linear terá somente uma solução é um erro comum aos estudar os métodos de solução de equações lineares.

Vejamos três exemplos resolvidos abaixo:

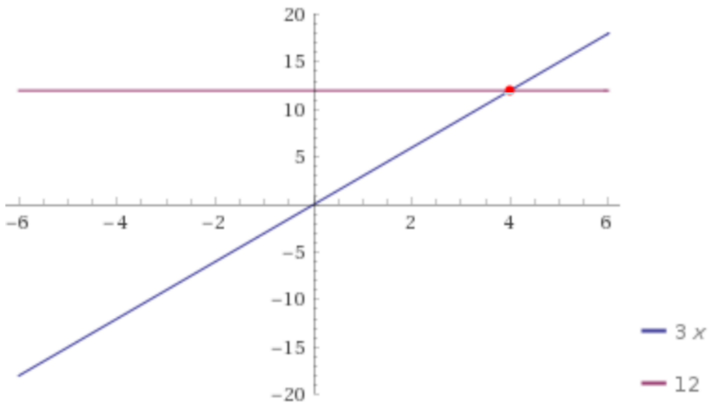
(a) $3x = 12$
(b) $x + y = 10$
(c) $3x - y + 4z = 8$

Para solucionar o problema (a), basta utilizar as propriedades algébricas da própria equação, dividindo os dois lados da equação pelo coeficiente 3.

$$3x = 12$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Nesse problema, notamos que não há qualquer outro valor diferente de 4 que, multiplicado por 3, resulta em 12. Uma forma de representar essa unicidade de solução é a forma gráfica como apresentado no gráfico a seguir. A solução da equação equivale ao ponto $(4,12)$, onde ocorre a intersecção das duas retas que formam o sistema.

Gráfico 1 – Gráfico de equação linear com uma incógnita

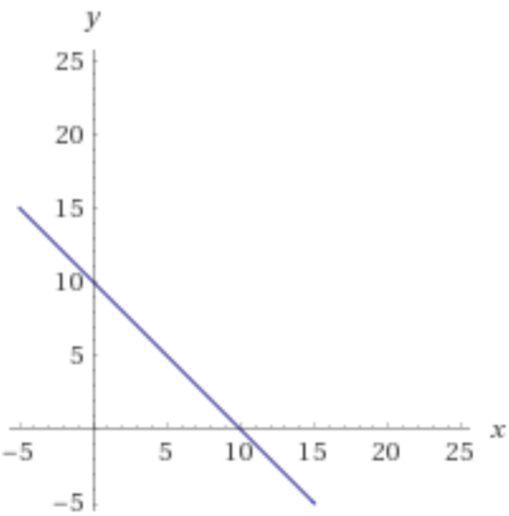


Fonte: Elaboração nossa.

Por experiência em sala de aula, ao se depararem com a equação '$x + y = 10$', os estudantes tendem a sugerir a solução mais equilibrada, ou seja, atribuindo o valor '5' para cada incógnita. Diante do par (x, y) é trivial aceitar $(5,5)$ como solução, mas os pares $(6,4)$, $(9,1)$ e $(-4,14)$ também satisfazem a equação. O que acontece aqui é que há infinitas soluções.

O gráfico a seguir representa satisfatoriamente o que expusemos, uma vez que os pontos que compõem a reta representam todas as infinitas soluções para a equação '$x + y = 10$'.

Gráfico 2 – Gráfico de equação linear com duas incógnitas

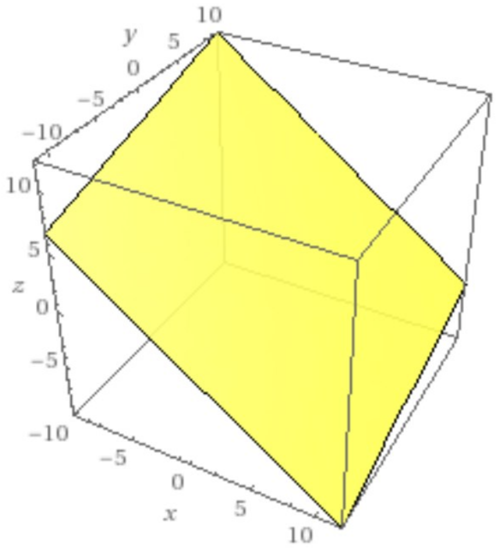


Fonte: Elaboração nossa.

No exemplo (c), de forma similar ao exemplo anterior, podemos assumir que a equação $3x - y + 4z = 8$ tem infinitas soluções. Um trio que satisfaz essa equação é $(1, -1,1)$ ou $(0,0,2)$ ao utilizar o zero para facilitar os cálculos necessários.

O gráfico a seguir representa algumas dessas soluções:

Gráfico 3 – Gráfico de equação linear com três incógnitas



Fonte: Elaboração nossa.

Para resolver sistemas lineares, é necessário agrupar as equações, alinhando as incógnitas. Em matemática utiliza-se a representação ‘{’ para simbolizar a reunião de equações organizadas dessa forma. A seguir, apresentamos quatro exemplos de sistemas lineares. Os três primeiros são do tipo $2x2$, pois envolvem duas equações com duas incógnitas. Os dois últimos são do tipo $3x3$ e $4x4$, envolvendo, respectivamente três e quatro equações e incógnitas.

(a) $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 3x - 6y = 24 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ 4x - 10y = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 3y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} -x + 2y - 4z + 8t = -12 \\ 2x + 2y - 2z + t = 0 \\ x - 3y + 2z - t = 15 \\ 2x + 6y - 3z + 4t = 10 \end{cases}$

Formalmente, de acordo com Iezzi e Murakami (2004, p. 116), um sistema que apresente uma quantia $m \geq 1$ de equações lineares e n incógnitas representando os índices $x_1, x_2, \dots, x_n$ em conjunto é considerado linear como segue:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Dado que nosso trabalho será desenvolvido com estudantes do primeiro ano do ensino médio, restringiremos nossa apreciação aos sistemas $2x2$ representados, em um contexto restringido ao conjunto dos números reais, por retas[7] no plano cartesiano. Essas retas, por sua vez, podem ser concorrentes, coincidentes ou paralelas. Retas concorrentes se caracterizam por conter um ponto de intersecção, retas coincidentes caracterizam-se por infinitos pontos de intersecção e retas paralelas se caracterizam por ausência de pontos de intersecção.

Em *retas concorrentes*, as coordenadas da intersecção entre as retas indicam que há somente uma solução, como podemos ver no exemplo (a):

$$\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$$

Podemos exemplificar a conversão entre os registros através do registro gráfico, o comportamento das respectivas retas pode ser visto no gráfico 4 na página seguinte.

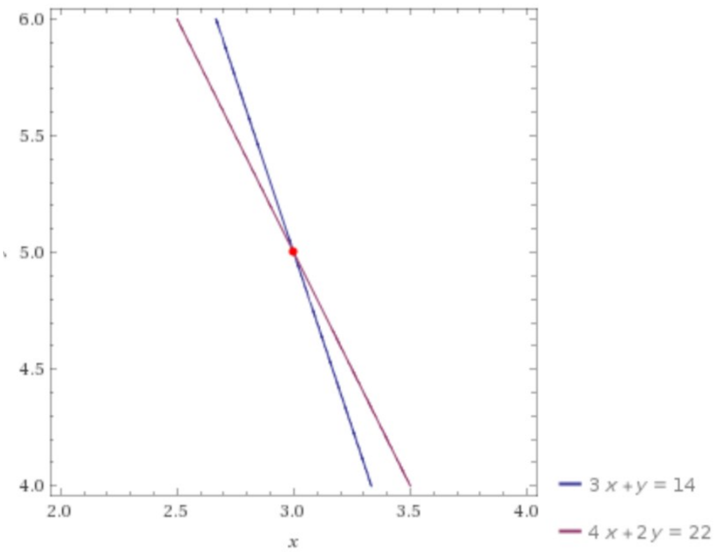
Conforme o gráfico, podemos concluir que esse sistema dispõe somente de uma solução $(3,5)$ e sistemas que possuem esse comportamento são classificados como *sistemas possíveis determinados* (SPD).

Em *retas coincidentes*, as coordenadas da intersecção entre as retas indicam que há infinitas soluções, como podemos ver no exemplo (b) e seu respectivo gráfico.

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 3x - 6y = 24 \end{cases}$$

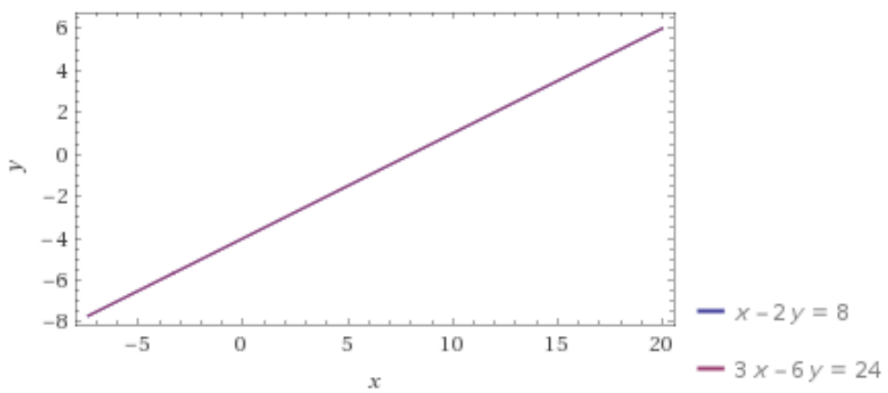
[7] Ciente que a representação pictórica e língua natural correspondem a pares ordenados discretos, utilizamos retas suporte do conjunto dos números reais a fim de melhor ilustração.

Gráfico 4 – Exemplo de retas concorrentes



Fonte: Elaboração nossa.

Gráfico 5 – Exemplo de retas coincidentes



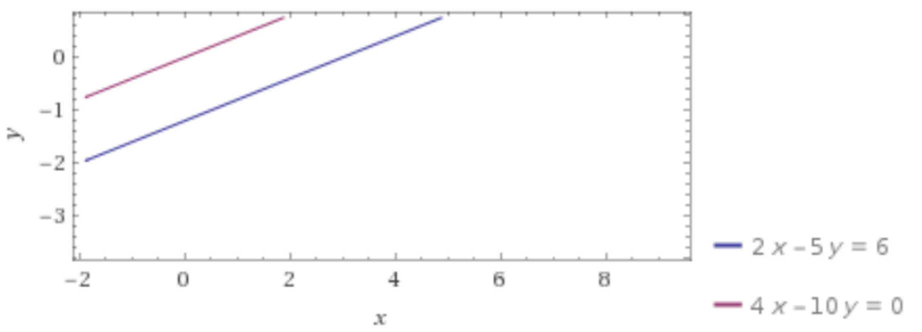
Fonte: Elaboração nossa.

Note que a segunda equação corresponde à multiplicação da primeira equação por 3. Como as soluções remetem aos pontos de coincidência entre as retas, podemos afirmar então que há infinitos pontos em comum, ou seja, infinitas soluções. Um sistema com essas características é chamado de *sistema possível e indeterminado (SPI)*, pois conseguimos obter uma solução, mas ela não é única.

Em *retas paralelas*, não há intersecção entre as retas como se percebe na equação e no gráfico a seguir:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ 4x - 10y = 0 \end{cases}$$

Gráfico 6 – Exemplo de retas paralelas



Fonte: Elaboração nossa.

Aqui temos uma situação em que as retas são paralelas, ou seja, não há solução para o sistema linear. Podemos identificar que a segunda linha foi multiplicada por dois em todos os coeficientes, mas o termo independente resulta em zero. Um sistema com esse comportamento é chamado de *sistema impossível (SI)*, porque não há soluções para satisfaçam as equações lineares simultaneamente.

2.1.2 Métodos algébricos de solução

Definidos e classificados os sistemas lineares, partimos então para os métodos algébricos de solução. Solucionar um sistema é encontrar valores para as incógnitas de modo que todas as equações do sistema sejam satisfeitas simultaneamente.

A formalização do conceito solução de uma equação linear é definida por uma busca a valores para as incógnitas de modo que todas as equações sejam sentenças verdadeiras, ou seja, a sequência ou ênupla ordenada de valores reais $(\gamma_1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é a solução de um sistema linear S se for solução de todas as equações de S.

Iezzi e Murakami (2004, p. 117) generalizam assim essa situação:

$$
\begin{array}{ll}
a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + a_{13}\gamma_3 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1 & \text{(sentença verdadeira)} \\
a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + a_{23}\gamma_3 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2 & \text{(sentença verdadeira)} \\
a_{31}\gamma_1 + a_{32}\gamma_2 + a_{33}\gamma_3 + \cdots + a_{3n}\gamma_n = b_3 & \text{(sentença verdadeira)} \\
\ldots & \\
a_{m1}\gamma_1 + a_{m2}\gamma_2 + a_{m3}\gamma_3 + \cdots + a_{mn}\gamma_n = b_m & \text{(sentença verdadeira)}
\end{array}
$$

Os métodos científicos que usualmente são utilizados na resolução de sistemas lineares com duas incógnitas, problemas de complexidade menor que compõem as situações-desafio que iremos analisar, são os de substituição, comparação e adição[8].

O sistema a seguir será utilizado para apresentar cada um desses métodos:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$$

Utilizando o *método de comparação*, isolamos uma das incógnitas nas duas equações viabilizando a comparação entre as igualdades, como podemos ver a seguir.

Para a equação na primeira linha temos:

$$\begin{aligned} & x + 2y = 8 \\ & x + 2y + (-x) = 8 + (-x) \\ & 0x + 2y = 8 - x \\ & 2y = 8 - x \\ & 2y\left(\frac{1}{2}\right) = (8 - x)\left(\frac{1}{2}\right) \\ & \frac{2y}{2} = \frac{8}{2} - \frac{x}{2} \\ & y = \frac{8 - x}{2}. \end{aligned}$$

Para a equação na segunda linha temos:

$$\begin{aligned} & 4x + y = 11 \\ & 4x + y + (-4x) = 11 + (-4x) \\ & 0x + y = 11 - 4x \\ & y = 11 - 4x. \end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema obtemos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{8 - x}{2} \\ y = 11 - 4\mathrm{x} \end{cases}$$

Como temos exatamente o mesmo coeficiente e a mesma incógnita no lado esquerdo das duas equações, podemos então igualar o outro lado a fim de calcular o valor incógnito ou desconhecido de y.

---

[8] Vale ressaltar, entretanto, que os indivíduos também podem e usualmente tendem a utilizar procedimentos de tentativa e erro, isto é, vão sucessivamente testando valores para as incógnitas até obterem a solução do sistema. Neste estudo, esse procedimento de senso comum não será abordado como um método propriamente dito.

$$\frac{8-x}{2} = 11 - 4\mathrm{x}$$
$$\frac{8-x}{2}(2) = (11 - 4\mathrm{x})(2)$$
$$8 - x = 22 - 8x$$
$$8 - x + (8x) = 22 - 8x + (8x)$$
$$8 + 7x = 22 + 0x$$
$$8 + 7x - 8 = 22 - 8$$
$$7x = 14$$
$$7x\left(\frac{1}{7}\right) = 14\left(\frac{1}{7}\right)$$
$$\frac{7\mathrm{x}}{7} = \frac{14}{7}$$
$$\mathrm{x} = 2$$

Utilizando tratamentos algébricos adequados para determinar o valor de x, basta usá-lo em qualquer equação do problema para calcular o valor da incógnita y.

$$4x + y = 11$$
$$4(2) + y = 11$$
$$8 + y = 11$$
$$8 + y + (-8) = 11 + (-8)$$
$$\mathrm{y} = 11 - 8$$
$$y = 3$$

No *método de adição*, somam-se as duas equações a fim de eliminar uma incógnita. Caso a soma não resulte nessa eliminação, pode-se multiplicar todos os termos de qualquer equação por um valor diferente de zero.

Em nosso exemplo, inicialmente multiplicaremos a segunda linha por -2

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x(-2) + y(-2) = 11(-2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 8 \\ -8x - 2y = -22 \end{cases}$$

Agora, somamos as equações termo a termo eliminando assim uma incógnita.

$$x + (-8x) + 2y + (-2y) = 8 + (-22)$$
$$-7x + 0y = -14$$
$$-7x(-1) = -14(-1)$$
$$7x = 14$$
$$7x\left(\frac{1}{7}\right) = 14\left(\frac{1}{7}\right)$$
$$\frac{7x}{7} = \frac{14}{7}$$
$$x = 2$$

Substituição análoga ao método anterior resulta igualmente em $y = 3$.

$$x + 2y = 8$$
$$2 + 2y = 8$$
$$2 + 2y + (-2) = 8 + (-2)$$
$$2y = 6$$
$$2y\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{2y}{2} = \frac{6}{2}$$
$$y = 3$$

No *método de substituição*, isola-se uma das incógnitas de uma equação, por exemplo $x + 2y = 8$. Isolando a incógnita x, obtemos a equação $x = 8 - 2y$.

$$x + 2y = 8$$
$$x + 2y + (-2y) = 11 + (-2y)$$
$$x = 8 - 2y$$

Assim, substituímos por $8 - 2y$ a incógnita x da equação $4x + y = 11$.

$$4x + y = 11$$
$$4(8 - 2y) + y = 11$$
$$32 - 8y + y = 11$$
$$32 - 7y = 11$$
$$32 - 7y + (-32) = 11 + (-32)$$
$$-7y = -21$$
$$-7y\left(-\frac{1}{7}\right) = -21\left(-\frac{1}{7}\right)$$
$$\frac{7y}{7} = \frac{21}{7}$$
$$y = 3$$

De posse do valor de y, basta usá-lo em qualquer das equações do sistema para obter o valor numérico de x, conforme visto nos dois exemplos anteriores.

$$4x + y = 11$$
$$4x + 3 = 11$$
$$4x + 3 + (-3) = 11 + (-3)$$
$$4x = 8$$
$$4x\left(\frac{1}{4}\right) = 8\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$$
$$x = 2$$

Conhecidos em linhas gerais os sistemas lineares, cabe agora explorar aspectos próprios de sua representação, porque esses aspectos têm impactos significativos nas formas imbricadas de tratamento, como resolvemos os sistemas, e de conversão, como traduzimos a representação desses sistemas em outras representações. A teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2012), que exploraremos na próxima seção, foi especialmente projetada para lidar com essas questões.

2.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dado que formal, a mobilização do conhecimento matemático é realizada exclusivamente através de representações. De acordo com Duval (2013), o fato de os objetos matemáticos serem abstrações implica que seu acesso só é possível através de sistemas simbólicos que, na medida em que progridem em complexidade, exigem custos progressivamente maiores para sua aprendizagem.

Para Duval (2011), um *sistema semiótico* é um conjunto de signos organizado segundo convenções, e um *registro de representação semiótica* é cada sistema semiótico que viabiliza funções cognitivas de comunicação, cognição e tratamento de um objeto matemático. Sistemas semióticos assim definidos dispõem de regras próprias de formação apresentando relações internas que permitem identificar e comunicar os objetos representados. Assim, sistemas semióticos distintos aumentam as capacidades da cognição, pois viabilizam diversas formas de representar um mesmo objeto matemático.

Em nível cognitivo, segundo ele, não é possível obter uma representação completa do objeto matemático representado nem mesmo contabilizando todas as representações produzidas ou a serem produzidas pela humanidade. Isso ocorre porque cada representação ilumina aspectos específicos dos objetos. Entretanto, apesar dessa impossibilidade, um indivíduo pode apropriar-se de aspectos progressivamente destacados pelas distintas representações ao dispor delas de modo consciente e eficiente.

Diante disso, Duval (2009) afirma que a transformação do conhecimento matemático em saber somente poderá ser realizada pela mobilização espontânea de registros semióticos distintos de um mesmo objeto matemático. Porém, o autor ressalva, esse acesso não é nada trivial, em especial para uma grande parte dos estudantes.

> Estes, frequentemente, não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes: a escrita algébrica de uma relação e sua representação geométrica sobre uma reta ou no plano, o enunciado de uma fórmula em francês e a escritura dessa fórmula sob forma literal etc. (DUVAL, 2009, p. 18).

Nesse contexto, a compreensão em matemática decorre da relação inseparável entre *semiósis* – a representação do objeto – e *noésis* – o objeto representado. Ou seja, ela emerge da intersecção de *semiósis* e *noésis*, visto que, reiteramos, as representações de um objeto não são suficientes para a apreensão integral de um objeto matemático.

> O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. Se é chamada "semiose" a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e "noésis" a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a noésis é inseparável da semiose. (DUVAL, 2012, p. 270).

O autor caracteriza a semiose por meio de três atividades cognitivas fundamentais, conforme veremos na próxima seção.

2.2.1 Atividades cognitivas fundamentais

Segundo Duval (2012), três atividades cognitivas fundamentais caracterizam a semiose: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

A *formação de uma representação identificável* está relacionada com as regras de formação próprias do registro cognitivo, que remetem ao reconhecimento de padrões definidos e podem, desse modo, ser comparadas à descrição de algo.

Por exemplo, ao analisar o sistema linear $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$, um estudante necessita reconhecer, entre outras, as seguintes unidades significativas componentes do problema para defini-lo como um sistema de equações lineares:

a) a unidade significativa 'x' representa uma variável incógnita;
b) a unidade significativa 'y' representa uma variável incógnita;
c) números sucedidos por incógnitas são coeficientes;
d) números sucedidos por incógnitas representam multiplicação de fatores;
e) o conjunto de números e incógnitas são monômios;
f) coeficientes implícitos equivalem a 1;
g) expoentes implícitos equivalem a 1;

h) a unidade significativa '+' representa uma operação de adição;
i) a unidade significativa '=' representa uma igualdade;
j) '$x + 2y$' é um polinômio;
k) '$4x + y$' é um polinômio;
l) '$x + 2y = 8$' é uma equação polinomial;
m) '$4x + y = 11$' é uma equação polinomial;
n) '$x + 2y = 8$' é uma equação linear;
o) '$4x + y = 11$' é uma equação linear;
p) o símbolo '{' representa a constituição da relação de agrupamento;
q) um sistema composto por equações lineares é um sistema linear.

O *tratamento* de uma representação é a transformação dessa representação no mesmo registro onde ela foi formada, ou seja, uma transformação interna a um registro. Por exemplo, os três métodos operacionais formais que foram utilizados na resolução do sistema linear $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ apresentado na seção anterior – o método da substituição, o método da comparação e o método da adição – são transformações algébricas do sistema que se caracterizam por conservar o registro. Em termos simples, trata-se de transformações algébricas de uma representação algébrica.

Cientes de que problemas matemáticos podem ser representados por quaisquer registros de representação, mas o registro algébrico é, em geral, o mais potente para resolvê-los, podemos inferir que pode ser vantajoso converter a representação do problema para esse registro mais potente. Assim, para Duval (2012, p. 272), a *conversão* é uma transformação que parte de uma representação semiótica em determinado registro em direção a uma representação semiótica em um registro de chegada, conservando total ou parcialmente o conteúdo inicial. Trata-se, portanto, de uma transformação externa ao registro de partida, ou seja, o registro da representação a ser convertido.

Uma conversão contingente em sala de aula é aquela entre representações registradas em língua natural e representações registradas em linguagem algébrica. Esse é o caso, por exemplo, da interpretação de problemas apresentados na forma de textos ou, em um movimento inverso, o caso da verbalização em sala de aula do resultado de um sistema linear que foi recém calculado pelo professor na lousa.

Diversos são os problemas matemáticos envolvendo sistemas lineares que são representados em língua natural nos livros didáticos e que demandam por serem convertidos para a linguagem algébrica para serem tratados. Vejamos o exemplo abaixo:

Em um quintal há galinhas e coelhos.
Há 7 cabeças e 22 patas.
Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos.
(DANTE, 2018, p. 139).

O primeiro passo para a conversão do problema em um sistema linear é inferir a partir da informação de que “há 7 cabeças” que uma das equações deve expressar a adição de galinhas e coelhos, ou seja, *a quantidade de galinhas mais a quantidade de coelhos é igual a 7.* Para isso, o estudante precisaria identificar as unidades significativas do registro em língua natural de partida e pareá-las com unidades significativas do registro algébrico de chegada. Nesse caso, o estudante poderia parear *galinhas* com uma incógnita qualquer, por exemplo uma representação intermediária como ‘g’, coelhos com ‘c’, a ideia de adição com ‘$+$’ e a ideia de igualdade com ‘$=$’, de modo que a equação $g + c = 7$ poderia representar algo como *a quantidade de galinhas mais a quantidade de coelhos é igual a 7 animais*[9].

A informação “há 22 patas”, por sua vez, demanda por inferir que *a quantidade de patas de galinhas mais a quantidade de patas de coelhos é igual a 22 patas.* Representar algebricamente essa situação é mais sofisticado. Ela demanda, por exemplo, lembrar que “galinhas têm duas patas” e “coelhos têm quatro patas”[10]. Munido dessa informação e considerando que ‘g’ representa a quantidade de galinhas, pode-se então representar como ‘$2g$’ a quantidade de patas de galinhas e, dado que ‘c’ representa coelhos, representar por ‘$4c$’ a quantidade de patas de coelhos. Segue disso que a equação $2g + 4c = 22$ representa algo como *A quantidade de patas das galinhas mais a quantidade de patas dos coelhos é igual a 22 patas.*

Por fim, ciente de que são os mesmos animais mencionados em cada uma das equações do problema, um estudante buscaria descobrir qual quantidade de galinhas e coelhos validariam as duas afirmações simultaneamente: *A quantidade de galinhas mais a quantidade de coelhos é igual a 7 animais* e *A quantidade de patas das galinhas mais a quantidade de patas dos coelhos é igual a 22 patas*. A representação matemática dessa validação é o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} g + c = 7 \\ 2g + 4c = 22 \end{cases}$$

Obtida a formulação algébrica, um professor poderia tratá-la na lousa pelo método da substituição, isolando, por exemplo, o termo g na primeira equação:

$$\begin{cases} g + c = 7 \\ 2g + 4c = 22 \end{cases}$$
$$g + c + (-c) = 7 + (-c)$$
$$g = 7 - c$$

---

[9] A rigor, há um acarretamento aqui: galinhas e coelhos são animais ou mesmo animais domésticos.

[10] Como veremos na seção 2.3, trata-se de suposições que compõem a memória enciclopédica do indivíduo.

Substituindo g, você determina o valor de c. O professor poderia substituí-lo, por exemplo, na segunda equação:

$$\begin{aligned}
&2(7-c)+4c=22\\
&14-2c+4c=22\\
&14-2c+4c+(-14)=22+(-14)\\
&2c=8\\
&\frac{2c}{2}=\frac{8}{2}\\
&c=4
\end{aligned}$$

Obtido o valor de g, ele poderia usá-lo na primeira equação para obter o valor de c:

$$\begin{aligned}
&g+c=7\\
&g+4=7\\
&g+4+(-4)=7+(-4)\\
&g=3
\end{aligned}$$

Calculados os valores de g e c, o professor produziria muito provavelmente uma interpretação em língua natural desses resultados – conversão da representação em linguagem algébrica de partida numa representação em língua natural de chegada.

Por exemplo, a informação '$g = 3$' seria convertida em algo como 'três galinhas', e a informação '$c = 4$' seria convertida em algo como 'quatro coelhos', de modo que o resultado do tratamento do sistema $\begin{cases} g+c=7 \\ 2g+4c=22 \end{cases}$ poderia ser, entre outras formas, anunciado assim:

> "Há 3 galinhas e 4 coelhos neste quintal".

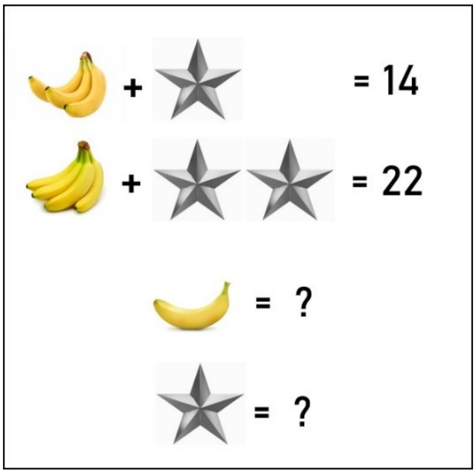
Conforme apresentamos na introdução dessa dissertação, outro registro de representação semiótica largamente utilizado nos meios de comunicação para representar sistemas lineares é o registro pictórico[11]. Supostamente, ao modo de um problema registrado em língua natural, um problema apresentado de forma pictórica demanda por uma conversão para a representação algébrica para ser tratado otimamente.

---

[11] A rigor, não se trata aqui de uma representação exclusivamente pictórica, mas híbrida. Isso ocorre porque somente as unidades significativas convertíveis em incógnitas e seus respectivos valores são representadas por figuras de bananas e estrelas nesse sistema, exceto nas linhas 3 e 4. Operadores de adição e de igualdade, a adição dessas incógnitas nas duas equações e o valor incógnito dessas incógnitas nas linhas 3 e 4 são representados por operadores algébricos '+' e '=', números '14' e '22' e o sinal de interrogação próprio do registro em língua natural '?'.

Vejamos um exemplo.

Figura 7 – Sistema linear apresentado de forma pictórica



Fonte: Elaboração nossa.

Primeiramente, um estudante poderia identificar as unidades significativas ‘desenho da banana’ e ‘desenho da estrela’ e pareá-las com variáveis incógnitas de sua escolha. Utilizando representações intermediárias em prol de diminuir a não-congruência dentre os registros, podemos, por exemplo, representar uma banana por ‘b’ e uma estrela por ‘e’. Feito isso, a conversão da primeira linha resulta na equação ‘$3b + e = 14$’ e a conversão da segunda linha resulta na equação ‘$4b + 2e = 22$’.

O sistema linear a seguir representa esse problema:

$$\begin{cases} 3b + e = 14 \\ 4b + 2e = 22 \end{cases}$$

Formalizado o sistema, podemos resolvê-lo, por exemplo, pelo método da adição, multiplicando por ‘-2’ os valores da primeira equação:

$$\begin{cases} 3b + e = 14 \\ 4b + 2e = 22 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -6b - 2e = -28 \\ \quad 4b + 2e = 22 \end{cases}$$
$$-6b + 4b + 2e - 2e = -28 + 22$$
$$-2b + 0e = -6$$
$$-2b\left(-\frac{1}{2}\right) = -6\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{2b}{2} = \frac{6}{2}$$
$$b = 3$$

Em seguida, podemos substituir o valor de b, por exemplo, na primeira equação:

$$3b + e = 14$$
$$3.(3) + e = 14$$
$$9 + e = 14$$
$$9 + e = 14$$
$$9 + e + (-9) = 14 + (-9)$$
$$e = 5$$

Portanto uma banana vale 3 unidades e uma estrela vale 5 unidades.

2.2.2 Conversão e congruência

Parafraseando Duval (2008, p. 16), Cataneo (2020, p. 32) destaca que a conversão tem diferentes impactos conforme se olhe de um ponto de vista que privilegia a linguagem matemática ou a cognição. Conforme o primeiro ponto de vista, a conversão serve para "escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados serão mais econômicos (rápidos) e potentes ou, então, para se obter um segundo registro que serve de suporte aos tratamentos executados em outro registro". Conforme o segundo ponto de vista "é justamente a capacidade de realizar conversões que sugere a compreensão no processo de aprendizagem". Todavia, a coordenação de diferentes registros é complexa, em especial quando as representações nos diferentes registros não são congruentes.

Duval (2012, p. 283) caracteriza *congruência* de representações em diferentes registros através de três critérios:

a) a possibilidade de uma correspondência "semântica" de elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar;
b) a univocidade "semântica" terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada;
c) a organização das unidades significantes: as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações.

Vale destacar aqui que a conversão de representações entre registros não deve ser classificada categoricamente como congruente ou não congruente, mas numa escala contendo graus de congruência entre as representações nos registros de partida e de chegada. Para ver como isso ocorre, vale retomar os problemas apresentados nessa seção como exemplos de conversão.

Figura 8 – Conversões para o registro algébrico dos problemas da seção 2.2

Representação em língua natural	*Representação algébrica intermediária*	*Representação algébrica usual*
Em um quintal há galinhas e coelhos. Há 7 cabeças e 22 patas. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos.	$\begin{cases} g + c = 7 \\ 2g + 4c = 22 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$
Representação pictórica	*Representação algébrica intermediária*	*Representação algébrica usual*
	$\begin{cases} 3\mathrm{b} + \mathrm{e} = 14 \\ 4\mathrm{b} + 2\mathrm{e} = 22 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$

Fonte: Elaboração nossa.

Ao analisar essas conversões a partir dos critérios de congruência, verificaremos que há correspondência semântica em ambos os casos, pois a cada unidade significativa das representações em língua natural e pictórica pode-se associar uma unidade elementar no registro algébrico. Além disso, pode-se dizer que há univocidade semântica terminal nesses problemas, pois a cada incógnita presente nas representações de partida corresponde uma única incógnita no registro de representação de chegada.

Todavia, é no último critério – o da organização das unidades significativas – que os dois problemas são diferentes. O problema pictórico está organizado ao modo de um sistema algébrico. Ele se limita a substituir as incógnitas por imagens e a acrescentar o comando da questão nas últimas linhas[12].

[12] Aqui, é importante destacar que, embora essa conversão pode ser caracterizada como congruente, não pode ser caracterizada como absolutamente trivial, pois é preciso inferir da imagem de bananas em um cacho, por exemplo, que a informação pertinente é a quantidade de bananas desse cacho '$3x$'.

Analisando esse critério na conversão do problema representado em língua natural para uma representação no registro algébrico, a organização das unidades significativas apresenta uma correspondência "sintática" muito frágil. A necessidade de diversas inferências na conversão dificulta os pareamentos porque essa conversão é praticamente incongruente. Tanto esse é o caso que na explicação da conversão desse problema apelamos praticamente por uma conversão reversa congruente abstrata e, sobretudo, artificial. Na figura a seguir, é possível comparar essas versões.

Figura 9 – Congruência entre versões do problema em língua natural e versão algébrica

Versão Original Incongruente	Versão Algébrica	Versão Abstrata Congruente
Em um quintal há galinhas e coelhos. Há 7 cabeças e 22 patas.	$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$	A quantidade de galinhas mais a quantidade de coelhos é igual a 7 animais. A quantidade de patas das galinhas mais a quantidade de patas dos coelhos é igual a 22 patas.

Fonte: Elaboração nossa.

Com base no que vimos nessa seção, se assumirmos que a resolução ótima de sistemas lineares passa necessariamente pelo registro algébrico, então problemas representados em outros registros tendem a demandar por mais custos cognitivos de processamento do que problemas apresentados diretamente em registro algébrico[13].

Por outro lado, se assumirmos que conversões congruentes são mais triviais do que conversões incongruentes, respeitados os graus, então problemas que demandam por conversões menos congruentes tendem a demandar por mais custos cognitivos de processamento do que problemas que demandam por conversões mais congruentes[14].

Uma vez que essas operações envolvem uma economia de efeitos cognitivos a serem maximizados e esforços de processamento a serem minimizados, tal como defendido pela teoria da relevância, cabe agora explorar seus principais conceitos.

[13] Isso poderia pôr em xeque a popularidade do registro pictórico, salvo se essa mediação for dispensável.

[14] Isso poderia favorecer a popularidade do registro pictórico, especialmente porque sua estrutura é híbrida.

2.3 TEORIA DA RELEVÂNCIA

A fim de descrever e explicar como os seres humanos processam estímulos comunicacionais ostensivos em língua natural, a teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995) propõe que, orientados pela noção teórica de relevância, os indivíduos depreendem o significado das sentenças enunciadas a partir da decodificação dos estímulos linguísticos e, em geral, inferem o significado último dos falantes a partir do significado das sentenças enunciadas.

Conforme resume Wilson (2004, lição 3, p. 1), a teoria da relevância leva em conta quatro suposições básicas sobre a comunicação humana. Segundo a autora, em geral, "cada enunciado tem uma variedade de interpretações linguisticamente possíveis, todas compatíveis com o significado decodificado da sentença". Todavia, ela destaca que "nem todas essas interpretações são igualmente acessíveis ao ouvinte" em determinado momento, ou seja, nem todas essas interpretações têm a mesma probabilidade de serem lembradas pela audiência. Esse problema é contornado, porque a audiência está equipada "com um critério único e muito geral para avaliação das interpretações à medida que elas ocorrem, aceitando-as ou rejeitando-as como hipóteses sobre o significado do falante". Finalmente, ela argumenta que esse critério – o critério de consistência com o princípio de relevância, como veremos adiante – é poderoso o suficiente para eliminar todas as interpretações rivais, a exceção de uma (ou algumas interpretações semelhantes), de tal sorte que a audiência "tem o direito de assumir que a primeira hipótese que o satisfaz (se alguma) é a única plausível".

2.3.1 Do conceito de relevância ao procedimento de compreensão

O conceito de relevância que sustenta essa arquitetura teórica baseia-se no princípio de que, num contexto de recursos escassos, a cognição humana foi engrenada pela evolução a selecionar informações potencialmente relevantes. Em outras palavras, a cognição tende a fazer o uso mais eficiente da atenção e dos recursos de processamento, alocando atenção automaticamente a *inputs* potencialmente relevantes e tendendo a processá-los de modo mais produtivo (WILSON, 2004, lição 4, p. 1).

Segue dessa tendência, o *princípio cognitivo de relevância*:

> **Princípio cognitivo de relevância**
> A cognição humana tende a ser dirigida para a maximização da relevância. (WILSON, 2004, lição 4, p. 1, negrito no original).

Essa eficiência cognitiva se manifesta pela maximização da depreensão de efeitos cognitivos e pela minimização de esforços cognitivos necessários para depreender esses efeitos cognitivos. Assim, a relevância de um estímulo é maior, quando os efeitos são maiores e quando os esforços cognitivos necessários para os obter são menores. Em igualdade de condições, uma informação nova ou novamente apresentada à cognição que produza mais efeitos contextuais ou que requeira menos esforço de processamento, será mais relevante do que uma informação rival que produz menos efeitos cognitivos ou que demanda mais esforço.

Wilson (2004, lição 3, p. 3) afirma que uma suposição contextual é relevante em um contexto cognitivo quando interage com esse contexto cognitivo para gerar efeitos de fortalecimento, de contradição ou de combinação. No caso de fortalecimento de uma suposição contextual, a informação fornece evidências de reforço de uma suposição. No caso de contradição, a informação fornece evidências contrárias para uma suposição contextual, enfraquecendo-a e, muitas das vezes, eliminando-a. No caso de uma combinação com uma suposição contextual, a informação gera implicações contextuais: “conclusões dedutíveis da conjunção da informação nova e do contexto, mas nunca da informação nova ou do contexto sozinhos” (WILSON, 2004, lição 3, p. 3).

Por sua vez, em cada processamento de informação, há um custo, entre outros fatores, associados à recentidade e à frequência de uso e a complexidades linguísticas e lógicas. Consequentemente informações menos recentes ou frequentes, ou mais complexas linguística e logicamente tendem a ser mais difíceis de processar[15].

Vale dizer que nenhuma entrada de dados, seja externa (visões, sons, enunciados, ações) ou interna (pensamentos, memórias, conclusões de inferências), é relevante por si mesma, mas é relevante em relação a um contexto individual de informações antigas. Em função disso, a noção de relevância é mais bem definida como relevância para um indivíduo

> **Relevância para um indivíduo**
> a) em igualdade de condições, quanto maiores os efeitos cognitivos (de um input para um indivíduo que o processa), maior a relevância (ao indivíduo no momento);
> b) em igualdade de condições, quanto menor o esforço de processamento requerido para derivar esses efeitos, maior a relevância (do input ao indivíduo no momento). (WILSON, 2004, lição 3, p. 9, negrito no original).

---

[15] Conforme Sperber e Wilson (2001, p. 193), há três casos teóricos em que podem faltar efeitos contextuais que justifiquem os esforços despendidos para os obter: uma suposição nova ou novamente apresentada pode não se conectar com informações antigas; ela pode estar presente no contexto em um grau de certeza que não é afetado por um novo processamento; e ela é demasiado fraca para modificar esse contexto.

Explorando o princípio cognitivo de relevância, Sperber e Wilson, definem um *princípio comunicativo de relevância*, segundo o qual estímulos comunicacionais geram expectativas precisas de relevância:

> **Princípio Comunicativo de Relevância**
> Cada enunciado (ou outro estímulo ostensivo) cria a presunção de sua própria relevância ótima. (2001, p. 242, negrito dos autores).

Para Sperber e Wilson (2001, p. 65), um enunciado é classificado como estímulo com dois níveis de intenção: uma *intenção informativa* projetada para informar alguma coisa a alguém e uma *intenção comunicativa* de chamar a atenção para essa intenção informativa. Trata-se de uma classe de fenômeno deliberadamente projetada para realizar efeitos contextuais específicos.

Desse modo, alguém que queria gerar um efeito cognitivo específico, precisa produzir um estímulo que seja processado otimamente. Estímulos que tornam uma intenção informativa mutuamente manifesta ou *estímulos ostensivos* produzem efeitos cognitivos sutis que satisfazem duas condições: atrair a atenção dos receptores e fazer incidir a atenção sobre as intenções da pessoa que comunica.

Conforme a teoria, mesmo que indivíduos compartilhem contextos, eles mantêm ambientes cognitivos distintos. A comunicação tem a ver com a partilha de informações e as capacidades inferenciais e perceptuais de cada um. Assim, Sperber e Wilson (2001, p. 79) propuseram a noção de *fato manifesto* como algo que os indivíduos são capazes de "representar mentalmente e de aceitar a sua representação como verdadeira ou provavelmente verdadeira" e a noção de *ambiente cognitivo* como um "conjunto de fatores manifestos" (p. 80) e, com base nessas noções, uma definição de comunicação enquanto *alteração de ambientes cognitivos*.

No processamento de informações, a relação entre esforço despendido e recompensa é regulada pela capacidade de tornar manifesto uma intenção de tornar manifesto algo. Sperber e Wilson (2001, p. 94) justificam que não há motivação para um esforço em fenômeno qualquer, a não ser que pareça suficientemente relevante a essa pessoa e mereça sua atenção. Justamente por isso, tornar manifesto a intenção de tornar alguma coisa manifesto é caracterizado como um comportamento *ostensivo*. Assim, eles definem que em uma comunicação inferencial ostensiva

> a pessoa que comunica produz um estímulo que torna mutuamente manifesto à pessoa que comunica e aos receptores que a pessoa que comunica tenciona, por meio desse estímulo, tornar manifesto ou mais manifesto aos receptores um conjunto de suposições {I}. (2001, p. 112).

Nesse processo, reconhecendo que relevância máxima é uma expectativa muito exagerada e que relevância mínima é uma expectativa muito frágil, Sperber e Wilson (2001, p. 242) definem que aquilo que se pode esperar numa troca comunicacional, assumindo que é mutuamente manifesto que os estímulos fornecidos foram os mais relevantes, é o que eles denominam de presunção de relevância ótima, definida nos seguintes termos:

> **Presunção de relevância ótima**
> O enunciado (ou outro estímulo ostensivo) será:
> 1a. Ao menos relevante suficiente para merecer o esforço de processamento do ouvinte;
> 1b. O mais relevante compatível com as habilidades de preferências do falante. (SPERBER; WILSON, 2001, p. 242, negrito dos autores).

Note-se que, em situações de desapontamento nas expectativas de relevância na comunicação, considera-se que o comunicador teve a intenção de produzir estímulos ótimos. Para Sperber e Wilson (2001, p. 244):

> Quando os destinatários ficam frustrados nas suas expectativas de relevância, raramente consideram como explicação possível que a pessoa se comunica não está na realidade a tentar ser optimamente relevante. Seria o mesmo que supor que a pessoa que parece estar a comunicar não está realmente a dirigir-se a eles e que possivelmente não esteja mesmo a comunicar de modo algum.

Observe-se que a cláusula (1b) da presunção de relevância ótima destaca que o ouvinte para de considerar interpretações rivais após encontrar uma interpretação relevante. Isso sugere um *procedimento*, *heurística* ou *mecanismo de compreensão orientado pela noção teórica de relevância*, assim definido pelos autores:

> **Procedimento de compreensão guiado pela relevância**
> Siga um caminho de menor esforço ao computar efeitos cognitivos:
> a) Considere interpretações (por exemplo, atribuições de referência, contextos etc.) na ordem de acessibilidade;
> b) Pare quando sua expectativa de relevância é satisfeita (ou abandonada).
> (WILSON, 2004, lição 4, p. 8, negrito no original, tradução de Fábio José Rauen).

De acordo com esse procedimento, ao apresentar um problema matemático em três registros de representação semiótica distintos, esperamos que, seguindo uma rota de esforço mínimo, estudantes maximizem os efeitos cognitivos processando os enunciados linguísticos, algébricos e pictóricos em ordem de acessibilidade, e parando quando sua expectativa for satisfeita.

2.3.2 A noção de inferência

Antes de exemplificar como opera o mecanismo de interpretação orientado pela noção teórica de relevância em um estímulo comunicacional em língua natural, abriremos um parêntese para aprofundar a noção de inferência.

Primeiramente, vale destacar que a maior parte da comunicação humana é intencional, ou seja, motivada pela intenção de alargar e modificar ambientes cognitivos mútuos que os seres humanos partilham uns com os outros. O modelo de comunicação proposto por Sperber e Wilson (2001) é fundamentalmente inferencial, pois um indivíduo que comunica ostensivamente visa ao reconhecimento da sua intenção informativa. Em outras palavras, ele pretende que o interlocutor forme suposições com base nas evidências fornecidas por seu comportamento ostensivo. Essa qualidade não demonstrativa do processo de compreensão é assim definida por Sperber e Wilson (2001, p. 115):

> Em primeiro lugar, supusemos implicitamente que o processo da compreensão inferencial não é demonstrativo: argumentamos que a comunicação pode falhar mesmo nas melhores circunstâncias possíveis. Pode acontecer ao receptor a circunstância de nem poder descodificar nem deduzir a intenção comunicativa da pessoa que comunica.

Eles (2001, p. 119) definem inferência como um:

> [...] processo pelo qual uma suposição é aceite como verdadeira ou provavelmente verdadeira pela força de verdade ou da verdade provável de outras suposições. É assim uma forma de fixação daquilo em que se acredita.

Os autores sugerem que as representações conceptuais devem ter propriedades lógicas, pois diversos processos centrais do pensamento são inferenciais[16]. A forma lógica, como definido por Sperber e Wilson (2001, p. 125), é o que assegura que uma representação conceitual seja estabelecida em um processo lógico:

> Uma forma lógica é uma fórmula bem formada, um conjunto estruturado de constituintes que passa pelas operações lógicas formais determinadas pela sua estrutura. Como já dissemos, aquilo que faz uma distinção entre as operações lógicas e as outras operações formais é o facto de elas serem preservadoras da verdade: uma dedução feita a partir de uma representação verdadeira *P* dá origem a uma representação verdadeira *Q*.

---

[16] Ao lado de representações de propriedades não lógicas como os sentimentos, por exemplo.

Formas lógicas podem ser proposicionais, se forem semanticamente completas e capazes de serem classificadas como verdadeiras ou falsas, e não proposicionais quando forem sintaticamente completas, mas semanticamente incompletas.

De acordo com os autores, através dos desdobramentos de esquemas de suposições organizadas na memória enciclopédica e atribuição de referência, a mente humana é capaz de processar uma informação não proposicional e enriquecê-la a uma forma lógica proposicional.

Tomemos o seguinte enunciado de um professor como exemplo:

> Represente graficamente um sistema linear com duas incógnitas.

No início do processamento, esse enunciado será decodificado a partir de uma forma lógica não proposicional e, em seguida, completado até se obter uma suposição com o respectivo ato de fala.

> (a) Represente graficamente um sistema linear com duas incógnitas. (Forma lógica não proposicional)
> (b) Represente [VOCÊ/ESTUDANTE] graficamente um sistema linear com duas incógnitas. (Forma lógica proposicional)
> (c) O professor solicita que _____. (Esquema de suposição)
> (d) O professor solicita que VOCÊ/ESTUDANTE represente graficamente um sistema linear com duas incógnitas. (Suposição com respectivo ato de fala)

No processo de interpretação, a cognição opera com *suposições factuais*, ou seja, suposições básicas consideradas como descrições verdadeiras do mundo. Conforme Sperber e Wilson (2001, p. 137-138), há quatro formas básicas de suposições factuais, cada qual com distintos graus de força:

> Por *input* perceptual (visual, auditivo, olfativo, tátil etc.);
> Por *input* linguístico (decodificação linguística);
> Pela ativação de suposições estocadas na memória (conhecimento enciclopédico e outros) ou esquemas de suposições que podem ser completados com informação contextual;
> Por deduções, que derivam suposições adicionais. (itálico no original).

O mecanismo dedutivo elaborado por Sperber e Wilson (2001) trabalha através da aplicação de deduções e de suas suposições derivadas. Para os autores (2001, p. 174), uma função central do mecanismo dedutivo é realizar a derivação das implicações contextuais de quaisquer informações reapresentadas no contexto de informações antigas.

Para obter deduções de conclusões de modo não trivial e não demonstrativo nesse mecanismo, Sperber e Wilson (2001) sugerem haver somente regras de eliminação do tipo *eliminação-e*, *eliminação-ou* e *modus ponens*.

Na regra de *modus ponens*, o argumento tem um par de premissas. A primeira premissa é uma afirmação condicional: P implica Q; Se P, então Q. A segunda premissa é a de que P é verdadeiro. A partir dessas duas premissas, conclui-se pela verdade de Q.

Entrada de dados (input):	P
	Se P então Q $(P \rightarrow Q)$
Resultado (output):	Q

Vejamos um exemplo:

(a) Se Pedro isolar a incógnita, então Pedro resolve a equação.
(b) Pedro isola a incógnita
(c) Pedro resolve a equação

Na regra de *eliminação-e*, a entrada de dados é uma única premissa resultando em uma das duas conjuntas constituintes do enunciado:

Input:	$P \wedge Q$
Output:	P

ou

Input:	$P \wedge Q$
Output:	Q

Vejamos um exemplo:

(a) "$f(x)$ é igual a 7" e "$f(x)$ é uma função constante"
(b) "$f(x)$ é igual a 7"

ou

(a) "$f(x)$ é igual a 7" e "$f(x)$ é uma função constante"
(c) "$f(x)$ é uma função constante"

Adicionalmente, podemos combinar a regra de *eliminação-e* com o *modus ponens*, possibilitando a regras de *modus ponens conjuntivo*.

(a) $(P \wedge Q) \rightarrow R$
(b) P
(c) $Q \rightarrow R$

ou

(a) $(P \wedge Q) \rightarrow R$
(b) Q
(c) $P \rightarrow R$

Vejamos um exemplo:

(a) "Se eu escrever a equação e isolar a incógnita, então eu resolvo o problema"
(b) "Eu escrevi a equação"
(c) "Se eu isolar a incógnita, então eu resolvo o problema"

ou

(a) "Se eu escrever a equação e isolar a incógnita, então eu resolvo o problema"
(b) "Eu isolei a incógnita"
(c) "Se eu escrever a equação, então eu resolvo o problema"

Na regra de *eliminação-ou*, também chamada de *modus tollendo ponens*, toma-se um par de premissas, uma sendo a disjunção e a outra, e a negação de uma disjunta, resultando assim em outra disjunta.

Input: $P \vee Q$
$\neg P$
Output: Q

ou

Input: $P \vee Q$
$\neg Q$
Output: P

Vejamos um exemplo:

(a) "Um número natural escolhido é par ou um número natural escolhido é ímpar".
(b) "O número natural escolhido não é par".
(c) "O número natural escolhido é ímpar".

ou

(d) "Um número natural escolhido é par ou um número natural escolhido é ímpar".
(e) "O número natural escolhido não é ímpar".
(f) "O número natural escolhido é par".

Sperber e Wilson (2001, p. 144) dividem as informações que podem ser armazenadas dentro da memória do mecanismo dedutivo em três tipos distintos: lógico, enciclopédico e lexical. A *entrada lógica* contém um conjunto de regras de dedução aplicadas às formas lógicas que constituem um conceito. A *entrada enciclopédica* contém um conjunto de informações sobre os objetos, acontecimentos ou propriedades que representam o conceito e está relacionada às características presentes na memória do indivíduo. A *entrada lexical* contém informações sobre o conceito através da linguagem natural, isto é, a expressão do conceito por meio de palavras.

Sperber e Wilson (2001) propõe um mecanismo dedutivo através de um sistema formal de dedução com o fim de reproduzir com precisão o sistema utilizado em inferências espontâneas pelos seres humanos, como visto em (2001, p. 156):

> O mecanismo que estamos a considerar é um autómato com uma memória e a capacidade de ler, escrever e apagar as formas lógicas, de fazer a comparação das duas propriedades formais, de as armazenar na memória e de conseguir recolher as regras de dedução que se encontram nas entradas lógicas dos conceitos.

Os autores (2001, p. 156) assim definem como as deduções são feitas. Primeiro, coloca-se na memória do mecanismo um conjunto de suposições que irão constituir os axiomas ou teses iniciais de dedução. Em seguida, o mecanismo lê cada uma dessas suposições e recolhe as entradas lógicas de cada um dos seus conceitos constituintes. Mais adiante, o mecanismo aplica qualquer regra cuja descrição estrutural é satisfeita por essa suposição. Por fim, anota a suposição resultante dentro da sua memória como uma tese derivada.

Antes de armazenar uma suposição dentro da memória, o sistema dedutivo verifica a possibilidade de redundâncias ou contradições nas suas derivações e, então, verifica se essa suposição se encontra na memória. Caso afirmativo, o mecanismo não sobrescreverá essa suposição, reforçando assim as teses e regras de dedução utilização na sua derivação para que não a repita. Se a negação da suposição está na memória, interrompe-se o mecanismo, e o processo continua após a resolução dessa contradição.

O mecanismo de dedução tem como função analisar e manipular o conteúdo conceitual das suposições através de regras de eliminação ligadas às entradas lógicas dos conceitos. Como tese central, os autores indicam que no processamento dedutivo de uma suposição é somente computado implicações não triviais.

Para Sperber e Wilson (2001, p. 159-160), uma implicação lógica é não trivial quando "um conjunto de suposições $\{P\}$ implica logicamente e não trivialmente uma suposição Q se, e apenas se, quando $\{P\}$ for o conjunto das teses iniciais numa derivação em que existam apenas regras de eliminação, Q pertence ao conjunto das teses finais"[17].

[17] Para os autores, implicações triviais não desempenham qualquer papel no processamento da compreensão.

Quando inserimos um conjunto de suposições na memória do mecanismo, todas as regras dedutivas das entradas lógicas ligadas aos conceitos são acionadas. Segundo os autores (2001, p. 168), essas regras dedutivas podem ser analíticas e sintéticas. Uma regra analítica, por exemplo a regra de *eliminação-e*, elenca uma única suposição na entrada de dados; uma regra sintética, por exemplo a regra de *modus ponendo ponens*, constitui-se de duas suposições separadas como entrada de dados: uma suposição condicional e a afirmação do antecedente.

Dadas as regras de dedução, os autores (2001, p. 169) classificam as implicações em analíticas e sintéticas. No primeiro caso, uma suposição é implicada analiticamente por um conjunto de suposições se e somente se ela for uma das teses finais de uma dedução em que as teses iniciais sejam o conjunto de suposições e foram usadas somente regras analíticas. Implicações sintéticas usam somente regras sintéticas.

Assim, os autores (2001, p. 172) classificam três tipos de implicação lógica de uma suposição: implicações triviais, que não são diretamente computadas pelo mecanismo dedutivo; implicações analíticas, que são necessárias e suficientes para a sua compreensão; e implicações sintéticas, que se relacionam principalmente com exploração máxima de uma informação.

Como antecipamos, há quatro origens para as suposições na memória do mecanismo dedutivo: percepção, decodificação linguística, memória e implicação contextual. Intuitivamente, suposições derivadas ou recuperadas da memória são informações antigas, e suposições derivadas da percepção ou da decodificação linguística são informações *de novo* e tornam-se antigas em decorrência do seu processamento.

Para Sperber e Wilson (2001), como já mencionamos, enunciados são sinais codificados usados na comunicação ostensiva. Enunciados que não se comportam como estímulos ostensivos são meros ruídos ou rabiscos, que não merecem atenção. Segue disso que atos de comunicação ostensiva carregam sempre uma presunção de relevância.

Conforme Silveira e Feltes (2002, p. 39):

> Um enunciado, ao atingir o nível da atenção do ouvinte, conduz à construção e à manipulação de representações conceituais. Desse modo, fenômenos que estão no foco de atenção do ouvinte – via ostensão do estímulo-enunciado – podem originar suposições e inferências no nível conceitual.

É de interesse do comunicador fornecer um enunciado que ele acredita ser mais relevante e é de interesse da audiência considerar que o comunicador forneceu o melhor enunciado, caso contrário, não haveria motivações suficientes para processá-lo.

Através da relação entre uma informação antiga e outra nova, Sperber e Wilson (2001, p. 173) definem o conceito de *contextualização.* Considerando $\{P\}$ uma informação nova e $\{C\}$ uma informação antiga, a dedução baseada na união de $\{P\}$ e $\{C\}$ é chamada de *contextualização de* $\{P\}$ *no contexto* $\{C\}$ que pode dar origem a novas conclusões que não são deriváveis somente de $\{P\}$ ou $\{C\}$.

A definição formal é apresentada assim pelos autores (2001, p. 173):

> Implicação contextual
> Um conjunto de suposições $\{P\}$ implica contextualmente uma suposição Q no contexto $\{C\}$ se, e apenas se
> (i) A união de $\{P\}$ e $\{C\}$ implica Q não trivialmente;
> (ii) $\{P\}$ não implica não trivialmente Q, e
> (iii) $\{C\}$ não implica não trivialmente Q.

Uma informação nova implicada através da interação de $\{P\}$ com $\{C\}$ não pode ser implicada somente de uma suposição, ela advém como resultante da união entre as suposições $\{P\}$ no contexto $\{C\}$.

Através da derivação de implicações contextuais, Sperber e Wilson (2001, p. 174) apresentam um papel fundamental do mecanismo dedutivo:

> Uma função central do mecanismo dedutivo é, portanto, a de fazer a derivação, espontânea, automática e inconscientemente, das implicações contextuais de quaisquer informações apresentadas de novo dentro de um contexto de informações antigas. Em igualdade de condições, quanto maior for o número de implicações contextuais, mais essa nova informação irá melhorar a existente representação do mundo do indivíduo.

2.3.3 Explorando o mecanismo de compreensão

Conhecido o funcionamento do mecanismo dedutivo, podemos explorar o procedimento de compreensão orientado pela relevância. Seguindo esse mecanismo, um indivíduo, resolvendo um problema apresentado em língua natural, busca alcançar uma relevância ótima partindo do significado linguístico do enunciado, desenvolvendo-o em nível explícito e implícito através de um caminho com menor esforço até que esses procedimentos resultem em uma interpretação que atenda sua expectativa de relevância.

Conforme Rauen (2018, p. 203) “chegar a uma interpretação global é questão de mutuamente ajustar contextos, conteúdos explícitos e efeitos cognitivos potenciais, de modo a satisfazer as expectativas de relevância geradas pelo enunciado”. Silveira e Feltes (2002, p. 56) resenham que o processo pragmático inferencial de interpretação em três níveis: forma lógica, na dependência da decodificação linguística; explicatura, em que a forma lógica é desenvolvida através de processos inferenciais de natureza pragmática; implicatura, em direção a construção de inferências pragmáticas.

Rauen (2008, p. 203) assim complementa:

> Vale dizer que no processo de interpretação de um enunciado a forma linguística enunciada encaixa-se, em nível representacional, em uma forma lógica. Por forma lógica define-se um conjunto estruturado de conceitos em linguagem do pensamento (FODOR, 1983). Essa forma lógica é geralmente não proposicional (uma vez que é semanticamente incompleta e dela não se pode atribuir um valor de verdade). Com dados contextuais ou pragmáticos, essa forma lógica é enriquecida por inferências até obter-se uma explicatura do enunciado. Por explicatura, então, entende-se uma forma lógica proposicional, uma proposição semanticamente completa para a qual se pode atribuir valor de verdade. Por vezes, a forma lógica proposicional ou explicatura não é a interpretação pretendida pelo falante/escritor e equivale a uma premissa implicada que, combinada com o contexto cognitivo do indivíduo, gera dedutivamente uma conclusão implicada

De acordo com Silveira e Feltes (2002, p. 57), explicatura é uma combinação de traços codificados linguisticamente com traços conceituais inferidos através do contexto. A forma lógica é a base para a construção de uma representação proposicional completa, alcançada por meio de um processo dedutivo que envolve informações contextuais.

Retomemos como exemplo o problema de Dante (2018, p. 139), destacando para análise o comando da questão em negrito

> Em um quintal há galinhas e coelhos.
> Há 7 cabeças e 22 patas.
> **Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos?**
> (DANTE, 2018, p. 139)

Para efeitos de exposição, na versão (1a) a seguir, apresenta-se a forma linguística do enunciado. Na versão (1b), apresenta-se a descrição semântica da forma lógica subjacente de (1a), segundo a qual há uma conjunção de duas proposições copulativas ($ser\ x, y$): uma dessas proposições refere-se à quantidade de galinhas e a outra refere-se à quantidade de coelhos. Na versão (1c), as entradas lógicas da forma lógica são preenchidas, compondo a descrição da explicatura de (1a). Nessa descrição, ocorre a complementação do sentido dos itens lexicais ‘galinhas’ e ‘coelhos’, uma vez que se trata de galinhas e coelhos de um quintal com sete cabeças e vinte e duas patas. Nas versões (1d-f), apresenta-se a explicação expandida incluindo o ato de fala subjacente, segundo o qual o autor da questão deseja saber algo (1d); a proposição P é esse algo que o autor da questão deseja saber (1e); e, finalmente, a explicatura (1c) é essa proposição P que o autor da questão deseja saber. Como se trata de uma pergunta do tipo $Qu - P$, o que o autor da questão quer saber efetivamente é uma conjunção de proposições que encontre a quantidade correta de galinhas e coelhos no quintal com sete cabeças e vinte duas patas.

(1a)	Forma linguística:	Quantos são as galinhas e quantos são os coelhos?
(1b)	Forma lógica:	(ser x, QU-) ∧ (ser x, QU-)
(1c)	Explicatura:	quantas são as galinhas [DO QUINTAL COM SETE CABEÇAS E VINTE E DUAS PATAS] e quantos são os coelhos [DO QUINTAL COM SETE CABEÇAS E VINTE E DUAS PATAS]
(1d)	Ato de fala:	*O AUTOR DA QUESTÃO DESEJA SABER* _______
(1e)		*O AUTOR DA QUESTÃO DESEJA SABER* ***P***
(1f)		*O AUTOR DA QUESTÃO DESEJA SABER* QUANTAS SÃO AS GALINHAS DO QUINTAL COM SETE CABEÇAS E VINTE E DUAS PATAS E QUANTOS SÃO OS COELHOS DO QUINTAL COM SETE CABEÇAS E VINTE E DUAS PATAS.

Assumindo que essa questão se insere num capítulo de livro sobre sistemas lineares e/ou em uma aula sobre esse tema, é possível que ela se encaixe numa cadeia de inferências formada por premissas e conclusões implicadas. Uma premissa implicada poderia ser a suposição S_1 segundo a qual "o exercício sobre a quantidade de galinhas e coelhos faz parte de uma aula de cálculo de sistemas lineares". A outra premissa implicada nessa cadeia S_2 é o próprio ato de fala (1f) derivado da interpretação da forma lógica do comando da questão. Assumindo que essa suposição S_2 é uma suposição nova e que a suposição S_1 é uma suposição antiga, a contextualização de S_2 em S_1 poderia gerar por *modus ponens conjuntivo* a conclusão implicada S_3 segundo a qual "É necessário montar um sistema linear para resolver o exercício sobre a quantidade de galinhas e coelhos".

> S_1 – O exercício sobre a quantidade de galinhas e coelhos faz parte de uma aula de cálculo de sistemas lineares (*premissa implicada* derivada da análise do contexto);
> S_2 – O autor da questão deseja saber quantas são as galinhas do quintal com sete cabeças e vinte e duas patas e quantos são os coelhos do quintal com sete cabeças e vinte e duas patas (*premissa implicada* derivada da interpretação da forma lógica do comando da questão);
> S_3 – É necessário montar um sistema linear para resolver o exercício sobre a quantidade de galinhas e coelhos é (*conclusão implicada* por *modus ponens conjuntivo*: $S_1 \wedge S_2 \rightarrow S_3$);

Apresentados os principais aspectos sobre a teoria da relevância, estamos em condições de argumentar que a definição de caminhos de resolução envolve a economia de efeitos cognitivos e custos de processamento. Por hipótese, diferentes registros geram diferentes efeitos cognitivos e demandam por diferentes custos de processamento. Como o efeito cognitivo essencial de resolver a questão é fixo nesta investigação, julgamos ser essencial analisar a tarefa em termos de planos de ação intencional tais como propostos pela teoria de conciliação de metas de Rauen (2014).

2.4 TEORIA DE CONCILIAÇÃO DE METAS

Uma vez que existem diferentes registros de representação semiótica de mesmos objetos matemáticos, vale questionar por que o indivíduo escolhe operar com determinado registro. Parte da resposta é contemplada pela teoria da relevância, na medida em que esta teoria sugere que determinado registro é mais eficiente do que outro. Todavia, a teoria da relevância é uma abordagem pragmático-cognitiva que restringe o olhar à recepção das representações, ou seja, trata-se de uma abordagem prevalentemente reativa.

A teoria de conciliação de metas, por sua vez, procura abordar a ação humana, inclusive a de caráter comunicacional, por um viés proativo, descrevendo-a e explicando-a em função das metas dos indivíduos. Para Rauen (2014), a cognição é orientada por metas, enquanto conclusões presumidas num futuro mais distante, e se move em direção à emergência de hipóteses abdutivas antefactuais num futuro mais imediato, que contêm premissas convenientes em direção à consecução dessas metas. Nesse contexto, a modelagem dedutiva da interpretação de estímulos ostensivos fornecida pela teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995) pode ser concebida como parte do processo de avaliação ou de checagem dessas hipóteses abdutivas.

2.4.1 Arquitetura abdutivo-dedutiva

Rauen (2014), em teoria de conciliação de metas, propõe uma modelação da agência humana em quatro estágios: projeção de uma meta e formulação, execução e checagem de uma hipótese abdutiva antefactual, de tal modo que do primeiro ao terceiro estágio o modelo é abdutivo e do segundo ao quarto estágio o modelo é dedutivo. No que diz respeito ao objeto dessa dissertação em linhas gerais, a teoria antecipa que, diante dos problemas que demandam soluções por sistemas de equações lineares, os indivíduos, guiados pela meta de resolvê-los, abduzirão as ações antecedentes ótimas com as quais, por hipótese, acreditam obter a solução para cada caso.

Conforme Rauen (2014), a *abdução* é um tipo de raciocínio que parte de uma observação do tipo x é Q, passa pela emergência de uma hipótese de conexão causal ou nomológica entre P e Q, e termina pela geração de uma conclusão particular de que x é P.

Em geral, a literatura apresenta exemplos de *abduções explicativas*, nas quais se infere *ex-post-facto* ou *a posteriori* uma causa antecedente P como explicação de um fato consequente Q. Por exemplo, alguém observa um carro em movimento a uma certa distância x é Q e abduz como causa antecedente P do movimento que alguém dirige o carro. Segue então que a existência de um motorista P é a causa mais plausível para Q, ou seja, x é P, embora isso possa muito bem ser falso porque o carro pode ser teleguiado.

Rauen (2014) argumenta que essa arquitetura é aplicável para o que ele denomina de *abduções antefactuais* ou *a priori*. Ele observa o caso de um indivíduo i que projeta uma meta Q para o futuro. Nessa situação, x é Q representa a um certo estado x no futuro que atenderá a expectativa de alcançar um estado de meta Q [estágio 1]. Ato contínuo, o indivíduo i abduzirá uma ação antecedente ótima P que ele considera plausível para atingir esse estado de meta Q [estágio 2]. Segue-se assim que x é P, e o indivíduo i, embora não haja garantia absoluta de sucesso, tende a executar a ação P na expectativa de atingir Q [estágio 3].

Justamente pelo fato de a hipótese abdutiva antefactual P é Q passar a ser assumida como uma premissa maior no plano de ação intencional apesar de sua falibilidade [estágio 2], os três últimos estágios do modelo são em geral tratados pelos indivíduos como dedutivos. Dessa forma, a ação antecedente x é P é assumida como premissa menor [estágio 3], justificando a conclusão particular que x é Q [estágio 4].

A figura a seguir apresenta a arquitetura abdutivo-dedutiva do modelo:

Figura 10 – Arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas

Abdução		[1]		Q
	Dedução	[2]	P	Q
		[3]	P	
		[4]		Q'

Fonte: Rauen; Rauen (2018, p. 3156)
Nota: Q' representa a consecução da meta Q.

De acordo com Rauen (2014, p. 599)[18], o primeiro estágio da arquitetura consiste na projeção cognitiva da meta, assim definida:

> [1] O indivíduo i projeta uma meta Q em t_1.

tal que:

> a) t_1 representa o tempo da projeção da meta Q; e
> b) a meta Q é um estado futuro ainda não existente em t_1.

Tome-se o caso de um estudante resolvendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$$

Nesse caso, a meta final pode ser representada assim:

> [1] O aluno i projeta a meta Q de o aluno i resolver o sistema $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$ em t_1.

A formulação assume que o processo inicia em t_1, que representa o instante da projeção da meta Q de resolver o sistema $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$, e a meta Q de resolvê-la é uma possibilidade futura, ou seja, ela não existe no tempo t_1, o que representa que o sistema ainda não foi resolvido.

O esquema a seguir representa o *output* desse estágio:

[1]	Q	Resolver o sistema linear, estudante

[18] Nesta dissertação, nós nos utilizamos de traduções elaboradas pelo próprio autor e, conforme os textos mais recentes que utilizam a arquitetura, formatamos as incógnitas em símbolos de equação.

Conforme Rauen (2014, p. 599), o segundo estágio consiste na emergência de pelo menos uma hipótese abdutiva antefactual para atingir a meta Q:

> [2] O indivíduo i abduz uma hipótese antefactual H_a para atingir a meta Q em t_2,

tal que:

> a) t_2 representa o tempo da formulação da hipótese abdutiva antefactual H_a;
> b) t_2 sucede t_1;
> c) a hipótese abdutiva antefactual H_a corresponde a uma formulação do tipo "Se P, então Q", de modo que P é uma ação antecedente e Q é um estado consequente;
> d) no escopo da hipótese abdutiva antefactual H_a, a ação antecedente P é admitida pelo indivíduo i como pertinente;
> e) no escopo da hipótese abdutiva antefactual H_a, uma ação antecedente P é considerada pelo indivíduo i como solução ótima para atingir o estado consequente Q.[19]

De acordo com essas instruções, pode-se constatar que:

> [2a] o aluno i abduz a melhor hipótese antefactual H_a para atingir a meta Q de resolver o sistema $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$ em no tempo t_2.

Parafraseando o autor, a descrição [2a] está incompleta, pois não determina a ação antecedente ótima P para alcançar o estado consequente Q de resolver o sistema linear. Para ver como isso ocorre, vamos arbitrar que o ambiente cognitivo do estudante é composto exclusivamente pelo conjunto S_{1-7} de suposições contextuais.

> S_1 – Aplicar o método de adição resolve o sistema;
> S_2 – Aplicar o método de comparação resolve o sistema;
> S_3 – Obter o ponto de intersecção das retas no gráfico resolve o sistema;
> S_4 – Multiplicar o sistema por 10 resolve o sistema;
> S_5 – O sistema linear não é um sistema linear;
> S_6 – O sistema linear é um sistema linear;
> S_7 – O sistema linear foi escrito em uma página branca.

---

[19] Rauen adotou nos primeiros textos da teoria uma noção de inferência à melhor solução influenciado pela noção de inferência à melhor explicação de Harman (1965). Em textos mais recentes, o autor tem adotado o que ele denomina de "uma noção menos restritiva de inferência à solução ótima". Textualmente, "Esse deslocamento é necessário para demarcar que a solução *ad hoc* encontrada pelo indivíduo é sempre aquela que ele acredita ser melhor em função das constrições contextuais e de seu repertório de preferências e habilidades" (2019, p. 10, nota 6). Esse deslocamento, segundo o autor "evita discussões em torno de uma noção epistêmica de melhor solução" porque "as soluções nem sempre são as melhores, mas aquelas plausíveis no contexto dessas constrições e repertórios".

Dadas essas informações, o autor argumenta que a escolha da hipótese ótima H_a nesse conjunto de suposições factuais S_{1-7} decorre de quatro critérios que habilitam o descarte das hipóteses menos exequíveis. O primeiro critério (definido na letra c) expõe que a hipótese H_a será mapeada através de uma formulação hipotética no formato "Se P, então Q", de forma que se uma ação antecedente P for executada, então um estado consequente Q pode ser atingido. No contexto arbitrariamente restrito de suposições factuais S_{1-7}, pode-se identificar que as suposições S_{5-7} não condizem com esse critério.

Além disso, as suposições S_{5-7} são irrelevantes nos termos de Sperber e Wilson (1986, 1995). O suporte físico do registro do sistema linear S_7 é irrelevante para a solução, pois pouco importa se ela está escrita ou impressa numa página seja de qual cor, apresentada numa tela de computador, escrita a giz num quadro-negro, projetada num slide etc. Também não há ganho cognitivo em processar a tautologia de dizer que um sistema linear é um sistema linear S_6 ou sua contradição S_5.

Conforme o critério d, a ação deve ser pertinente. As suposições S_{1-4} são possíveis. Entretanto, a suposição S_4 "multiplicar o sistema por 10 resolve o sistema", é uma ação que, embora matematicamente correta, não auxilia a resolver o sistema, consistindo num acréscimo de esforço de processamento injustificável nesse contexto.

Conforme o critério e, a ação antecedente precisa ser ótima. Como veremos, as suposições S_{1-3} são exequíveis, mas têm custos de processamento distintos. A suposição S_3 de obter o ponto de intersecção das retas demanda por uma conversão do registro algébrico para o registro gráfico que não se justifica[20], quando é plausível resolver o sistema diretamente no registro algébrico, além de assumir o domínio da representação gráfica de equações lineares e a compreensão das unidades significativas do plano cartesiano. A suposição S_2 de aplicar o método de comparação considera que o aluno domina um método no qual a complexidade da manipulação algébrica depende dos valores atribuídos aos coeficientes.

Dado que, no contexto arbitrariamente restrito de suposições S_{1-7}, as suposições S_{2-3} demandam um esforço cognitivo maior quando comparadas à suposição S_1 de aplicar o método da adição, essa é hipótese abdutiva ótima. Assumindo que o indivíduo i é racional, a suposição S_1 é aquela que atinge a solução do sistema com o menor custo de processamento justificável:

> [2b] O participante i abduz que se o participante aplicar o método de adição, então o participante resolverá o sistema $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$.

[20] Consideramos aqui estudantes que não dispõem/dominam recursos gráficos tecnológicos.

Esse estágio pode ser assim representado:

[1]		Q		Resolver o sistema linear, estudante
[2]	P	Q	Aplicar o método de adição, estudante	Resolver o sistema linear, estudante

Conforme Rauen (2014, p. 601-602), o terceiro estágio relaciona-se à ação

> [3a] O indivíduo i executa P para atingir Q em t_3, ou
> [3b] O indivíduo i não executa P para atingir Q em t_3,

tal que:

> a) t_3 representa o tempo da execução da ação antecedente P no contexto da formulação hipotética "Se P, então Q";
> b) t_3 sucede t_2;
> c) [3b] é o modelo de inação pressuposto por [3a];
> d) A inação pode ser voluntária ou involuntária.

Esse estágio corresponde ao tempo t_3 próprio da execução da ação antecedente P. Esse tempo t_3, que deriva da formulação da hipótese abdutiva antefactual H_a, implica um modelo positivo no qual a ação P é executada e um modelo negativo no qual a ação P não é executada[21]. De acordo com Rauen, o modelo *agentivo* ou *ativo* fica em primeiro plano e, em geral, é exclusivo. Em nosso exemplo, trata-se do tempo próprio em que o aluno utiliza do método de adição para resolver o sistema:

> [3a] O participante i aplica o método da adição para o participante i resolver o sistema $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$ em t_3.

Ou, de forma esquemática:

[1]		Q		Resolver o sistema linear, estudante
[2]	P	Q	Aplicar o método de adição, estudante	Resolver o sistema linear, estudante
[3]	P		O estudante aplica o método de adição	

[21] De acordo com o autor, pelo menos duas situações podem ocorrer no modelo não agentivo ou passivo. O indivíduo i não dispõe de condições para executar a ação P, como o caso da hipótese H_a a ser abduzida, o participante nota em seguida a apresentação do sistema que não sabe utilizar o método de adição. Outra situação a ser destacada é algum conflito ou obstáculo epistemológico que conduz a uma incerteza das metas atribuídas. Nessa situação, mesmo que o aluno defina a meta em resolver o sistema e a hipótese H_a adequada para utilizar o método de adição, o indivíduo i não opera o cálculo.

O quarto estágio se refere à checagem dedutiva da formulação hipotética (RAUEN, 2014, p. 602-603):

> (4a) Considerando-se [2] “Se P, então Q” e [3a] P, o indivíduo i checa a consecução Q' em t_4, ou
> (4b) Considerando-se [2] “Se P, então Q” e [3b] $\neg P$, o indivíduo i checa a consecução $\neg Q'$ em t_4,

tal que:

> a) t_4 representa o tempo da consecução da meta Q;
> b) t_4 sucede t_3.
> c) (4a) é o modelo de consecução da ação P de [3a] e (4b) é o modelo de consecução da inação $\neg P$ de [3b];
> d) Q' representa o resultado da ação P de [3a] e $\neg Q'$ representa o resultado da inação $\neg P$ de [3b];
> e) Q' ou $\neg Q'$ é uma realidade em t_4.

Rauen (2014, p. 603) afirma que “esse estágio consiste na avaliação ou monitoramento da (in)ação antecedente P no escopo dedutivo da formulação antedutiva ‘Se P, então Q’, o que conflui com o módulo dedutivo de Sperber e Wilson (1986, 1995)”. No cenário ativo (1a) (Q; Se P, então Q; P), o indivíduo i avalia a resolução do sistema com a aplicação do método de adição. No cenário passivo (1b) ($\neg Q$; Se $\neg P$, então $\neg Q$; $\neg P$), o indivíduo i constata a que o sistema não se resolve.

Pode-se verificar o *output* do quarto estágio em (4a) a seguir:

> (4a) O participante i checa a consecução da resolução do sistema $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$ em t_4.

Ou então de forma esquemática:

[1]		Q		Resolver o sistema linear, estudante
[2]	P	Q	Aplicar o método de adição, estudante	Resolver o sistema linear, estudante
[3]	P		O estudante aplica o método de adição	
[4]		Q'		O estudante resolve o sistema linear

2.4.2 Conceitos essenciais

Para o autor, no quarto estágio, há a possibilidade de avaliar/monitorar tanto a consecução da meta Q como a hipótese antedutiva H_a. Diante essa etapa de checagem surgem dois conceitos essenciais: *conciliação de metas* e *confirmação de hipóteses*.

Por *conciliação de metas*, conforme Rauen (2014, p. 603), define-se "o estado Q' do ambiente em t_4 que satisfaz, coincide com ou corresponde com a meta Q em t_1, isto é, o resultado da ação P (meta externa) é semelhante ou congruente com o resultado projetado pelo indivíduo i (meta interna)".

Observado esse conceito, há quatro possibilidades:

Tabela 1 – Possibilidades de consecução de metas

Estágios	(1a) Conciliação Ativa		(1b) Inconciliação Ativa		(1c) Conciliação Passiva		(1d) Inconciliação Passiva	
[1]		Q		Q		Q		Q
[2]	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q
[3]	P		P		$\neg P$		$\neg P$	
[4]		Q'		$\neg Q'$		Q'		$\neg Q'$

Fonte: Rauen (2014, p. 604).

Numa *conciliação ativa* (1a), o indivíduo i executa a ação P no contexto da hipótese abdutiva H_a, e a realidade Q' em t_4 concilia-se com a meta Q em t_1. Nesta circunstância, o estudante aplica o método de adição e resolve o sistema.

Numa *inconciliação ativa* (1b), o indivíduo i executa a ação P no contexto da hipótese abdutiva H_a, e a realidade $\neg Q'$ em t_4 não se concilia com a meta Q em t_1. o estudante aplica o método de adição, mas não consegue resolver o sistema.

Numa *conciliação passiva* (1c), o indivíduo i não executa a ação P no contexto da hipótese abdutiva H_a, e, mesmo assim, a realidade Q' em t_4 concilia-se com a meta Q em t_1. Por exemplo, o estudante pode obter a resolução ou resultado do professor ou de um colega sem executar a ação antecedente.

Na última possibilidade (1d), denominada *inconciliação passiva*, o indivíduo i não executa a ação P no contexto da hipótese abdutiva H_a, e a realidade $\neg Q'$ em t_4, obviamente, não se concilia com a meta Q em t_1. Nessa situação, o estudante não utiliza o método de adição e, como esperado, não consegue resolver o sistema.

A *confirmação de uma hipótese antefactual* H_a é definida por Rauen (2014, p. 604) como “o estado da realidade Q' em t_4 que satisfaz, coincide ou corresponde com a hipótese H_a em t_2. Trata-se do resultado da ação P que reforça a hipótese abdutiva antefactual H_a de que a ação antecedente P causa o estado consequente Q”.

Através desse conceito, Rauen (2014) elabora uma gradação de força relacionada a conexão entre estados consequentes e as ações antecedentes de uma hipótese H_a, que vai desde um nível categórico, passando pelos níveis bicondicional, condicional e habilitador, até um nível tautológico.

A tabela a seguir sintetiza essas possibilidades:

Tabela 2 – Possibilidades de sucesso na consecução de planos de ação intencional

Tipos de Conciliação	Ação Antecedente P	Estado Consequente Q	Hipótese Categórica $P \Leftrightarrow Q$	Hipótese Bicondicional $P \leftrightarrow Q$	Hipótese Condicional $P \longrightarrow Q$	Hipótese Habilitadora $P \longleftarrow Q$	Hipótese Tautológica $P - Q$
Conciliação Ativa	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Inconciliação Ativa	Sim	Não	Não	Não	Não	Sim	Sim
Conciliação Passiva	Não	Sim	Não	Não	Sim	Não	Sim
Inconciliação Passiva	Não	Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim

Fonte: Cardoso, Cataneo e Rauen (2019, p. 4)[22].

Rauen (2014) define *hipótese abdutiva antefactual categórica* pela formulação $P \Leftrightarrow Q$. A tabela de consecuções indica como “plausível” apenas quando P e Q sejam verdadeiros. Diante isso, a ação antecedente e o estado consequente são suficientes, necessários e certos, sendo a única consecução aceita pelo indivíduo i é uma conciliação ativa (1a).

Quando a ação antecedente P e o estado consequente Q são simultaneamente verdadeiros ou falsos há uma *hipótese abdutiva antefactual bicondicional* $P \leftrightarrow Q$. Hipóteses abdutivas categóricas tornam-se bicondicionais nas inexecuções de P. Nessas situações é admitido inconciliações passivas (1d), e P e Q passam agora a ser suficientes e necessários, mas não certos, pois a simples consideração da possibilidade $\neg P \longrightarrow \neg Q$ enfraquece a formulação hipotética categórica inicial.

Por *hipótese abdutiva antefactual condicional,* simbolizada por $P \longrightarrow Q$, Rauen define uma situação em que P é suficiente, mas não necessário para Q. Nesses casos, admitem-se conciliações passivas (1c), mas há um enfraquecimento da força da hipótese abdutiva, inviabilizando inconciliações ativas (1b).

[22] Na tabela 2, cada ‘sim’ representa casos de consecução das ações antecedentes P, de consecução de estados consequentes Q e de razoabilidade prática de cada uma das hipóteses abdutivas antefactuais nos cenários dispostos. Cada não representa os cenários opostos.

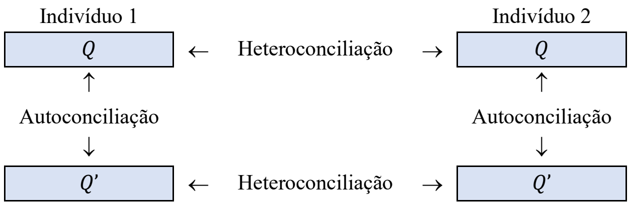
Por *hipótese abdutiva antefactual habilitadora* $P \longleftarrow Q$, Rauen define situações em que a ação P é necessária, mas não suficiente para lograr o estado Q. Essa ação P habilita, mas não garante a consecução Q, de sorte que inviabiliza conciliações passivas (1c), mas possibilita inconciliações ativas (1b)

E, por fim, por *hipótese abdutiva antefactual tautológica* $P - Q$, Rauen define situações em que P e Q não são certos, necessários ou suficientes. Essa hipótese modela situações do tipo "Se P, então possivelmente Q", permitindo assim todos os tipos de consecuções possíveis.

Conforme Rauen (2014), essa arquitetura abdutivo/dedutiva modela tanto o que ele denomina por autoconciliação de metas, quando um indivíduo checa, ele mesmo, a consecução das ações, quanto heteroconciliação de metas, quando se faz necessário coordenar com outros indivíduos metas e submetas em comum.

Em situações colaborativas, o êxito do processo relaciona-se a uma cadeia complexa de auto e heteroconciliações. A figura 11, a seguir, representa essas questões:

Figura 11 – Relação para auto e heteroconciliação de metas



Fonte: Rauen (2014, p. 613, tradução do autor)

Conforme Rauen (2014, p. 613):

> Essas atividades colaborativas demandam um alinhamento de cada indivíduo com os outros indivíduos para formar a meta comum, bem como uma diferenciação de si e dos outros para compreender e coordenar papéis diferentes, mas complementares na vontade comum. Nesse processo, metas e intenções de cada interagente devem incluir parte das metas e intenções dos outros em seu conteúdo, e a representação cognitiva da meta contém tanto o indivíduo como os outros. Além disso, a representação cognitiva da intenção deve conter a meta pessoal e a meta dos outros – a intenção conjunta.

Como apresentado na introdução, problemas de sistemas lineares em registro pictórico são usualmente compartilhados em diversas plataformas de comunicação. Ao se deparar com um problema com essas características, há autoconciliação quando o usuário avalia individualmente sua solução e heteroconciliação quando a solução é compartilhada na internet. Na escola, a agência é colaborativa quando, considerando metas de ensino e de aprendizagem, envolve professor e estudantes, equipes de estudantes, entre outras possibilidades.

Quaisquer que sejam as possibilidades de heteroconciliação, elas mobilizarão atividades comunicacionais descritas e explicadas em teoria de conciliação de metas como uma tríade de metas, intenções práticas superordenando intenções informativas, e intenções informativas superordenando intenções comunicacionais. Por exemplo, se a meta prática Q de um professor é a de que que o estudante resolva um sistema linear pelo método da adição, como prevê a teoria de conciliação de metas, a hipótese abdutiva antefactual de nível mais alto é a de que ele deve informar isso P, como também prevê a teoria da relevância. Nesse contexto, se a meta informacional de nível intermediário é informar o estudante de que ele deve usar o método da adição P, a hipótese abdutiva antefactual de nível mais baixo é a de que ele deve comunicar isso mediante um estímulo comunicacional ostensivo O, como preveem ambas as teorias.

Essa arquitetura pode ser vista a seguir[23]:

... ... R – Resolver o sistema linear, Estudante
[1] ... ... Q – Usar o método da adição para resolver o sistema linear, Estudante
[2] ... P – Informar o estudante que o estudante deve usar o método da adição para resolver o sistema linear, Professor
[3] O – Comunicar o estudante que o estudante deve usar o método da adição para resolver o sistema linear, Professor
[4] O – O professor comunica o estudante que o estudante deve usar o método da adição para resolver o sistema linear.
[5] ... P' – O professor informa o estudante que o estudante deve usar o método da adição para resolver o sistema linear.
[6] ... ... Q' – O estudante usa o método da adição para resolver o sistema linear.
... ... R' – O estudante resolve o sistema linear.

Ao apresentar a um estudante três problemas envolvendo sistemas lineares com grau de dificuldade semelhante em três registros de representação distintos – em língua natural, algébrico e pictórico – qual seria a ordem de escolha para resolução assumindo que os diferentes registros possuem características próprias que poderiam influenciar as preferências? Conforme a teoria da relevância e a teoria conciliação de metas, o registro algébrico seria um bom candidato como escolha inicial, pois bastaria tratar as equações dispostas em um registro amplamente abordado no ambiente escolar. Os problemas em língua natural e pictórico implicam conversão e, provavelmente, incrementos de custos de processamento para interpretar as unidades significativas dos registros de partida e lidar com prováveis incongruências sintático-semânticas. A presunção de que o registro algébrico seria escolhido preferencialmente, contudo, assume a internalização de competências e habilidades de resolução formal de sistemas lineares. Entretanto, isso pode ser garantido ou resoluções de senso comum do tipo tentativa e erro prevalecem como hipótese abdutiva antefactual mesmo entre estudantes do ensino médio que já conhecem os métodos formais de resolução? O sucesso de problemas pictóricos na internet sugere pôr em xeque essa presunção. No próximo capítulo, investigamos essa questão.

[23] O esquema a seguir é uma versão simplificada daquele apresentado para ilustrar o caso de autoconciliação. Nesta representação, explicitam-se apenas metas e submetas.

3 ANÁLISE DAS EVIDÊNCIAS

Neste capítulo apresentamos, em três seções, a metodologia da pesquisa e a análise das evidências produzidas. A primeira seção destaca os aspetos metodológicos, trazendo hipóteses e cada um dos passos necessários para a sua consecução. A segunda seção destaca evidências sobre a ordem de resolução dos problemas. A terceira seção, por fim, observa os processos cognitivos para a resolução dos três tipos de exercícios.

3.1 METODOLOGIA

Esta dissertação integra a linha de pesquisa "Pragmática Cognitiva e Ensino de Matemática e Ciências" do "Grupo de Pesquisa em Pragmática Cognitiva" (GPPC) do Programa de Pós-Graduação em Ciências da Linguagem. Como outros trabalhos dessa linha, a pesquisa visa a estabelecer uma interface entre ciências da linguagem e ensino de matemática e ciências destacando modos contextualizados de produção de significação. As investigações dessa linha procuram desenvolver conceitos da teoria de conciliação de metas e da teoria da relevância em conexão com a teoria de registros de representação semiótica. Especificamente, este estudo visa a verificar se, em igualdade de condições, os registros de representação semiótica algébrica, pictórica e linguística interferem na ordem e nas atividades de determinação das unidades significativas, de tratamentos e de conversões necessárias para a resolução de sistemas lineares possíveis e determinados.

Uma vez que fomos motivados pela suposta predileção por problemas pictóricos na rede de computadores, a fim de obter evidências sobre as preferências e os processos cognitivos relacionados a resolução de sistemas lineares, constatamos que a escolha dos participantes e das situações-problema estavam intrinsecamente associadas. Não seria possível pensar nas atividades sem pensar em participantes que estivessem potencialmente capacitados a resolvê-las formalmente pelos métodos de substituição, comparação e adição. Em função disso, decidiu-se investigar o desempenho de estudantes do primeiro ano do ensino médio, uma vez que, de acordo com os parâmetros da BNCC (2018), eles estariam aptos a resolver problemas que envolvessem sistemas lineares usualmente apresentados nos anos finais do ensino fundamental e habituados a lidar com problemas apresentados na forma de texto nos livros didáticos.

Conforme a revisão da literatura, assumindo que os estudantes estão habilitados a operar com os métodos formais de resolução, é razoável supor predileção pelo registro algébrico, uma vez que ele não demandaria por processos de conversão. Além disso, seguindo essa perspectiva, a opção pela versão em língua natural prevaleceria sobre a pictórica, uma vez que, embora ambas exijam conversão, a versão pictórica supostamente demandaria por uma interpretação em alguma medida mediada pela língua natural.

Essas hipóteses, contudo, assumem a presunção discutível de que, de fato, os estudantes utilizariam os métodos formais de resolução. Caso os métodos a serem mobilizados abdutivamente sejam menos que formais, a preferência dos registros pode ser outra, incluindo aquela que favorece o pictórico e mesmo o linguístico sobre o algébrico. Se não é o caso de o indivíduo converter o problema para o registro mais potente de resolução, não há por que advogar a prevalência desse registro nessas situações. Admitindo que essa perspectiva rival faz algum sentido, uma hipótese razoável seria a de que, diante de condições isonômicas, os estudantes iriam preferir resolver o problema pictográfico para, em seguida, resolver o problema em língua natural e, por último, resolver o problema em registro algébrico.

Para verificar quais dessas hipóteses prevalece, optamos por realizar um estudo com 30 estudantes do primeiro ano do ensino médio da Escola de Educação Básica Irmã Maria Teresa[24] (EEBIMT), envolvendo, portanto, uma escola pública urbana situada no bairro Ponte do Imaruim da cidade de Palhoça em Santa Catarina.

O estudo foi organizado em duas etapas. Na primeira etapa, os estudantes se propuseram a resolver três problemas envolvendo sistemas lineares diferenciados uns dos outros por serem apresentados em registro algébrico, linguístico e pictórico. Na segunda etapa, procedemos a um protocolo verbal retrospectivo imediato com o qual investigamos a ordem e os métodos de resolução dos problemas na perspectiva dos estudantes. Embora o estudo apresente características experimentais, ressalvamos que se qualifica mais apropriadamente como estudo de caso de caráter exploratório, pois não estamos interessados "em generalizar os dados obtidos, mas em aprofundar as nuances, buscando descrever mais profundamente a constituição intrínseca daquilo que está pesquisando" (RAUEN, 2015, p. 99).

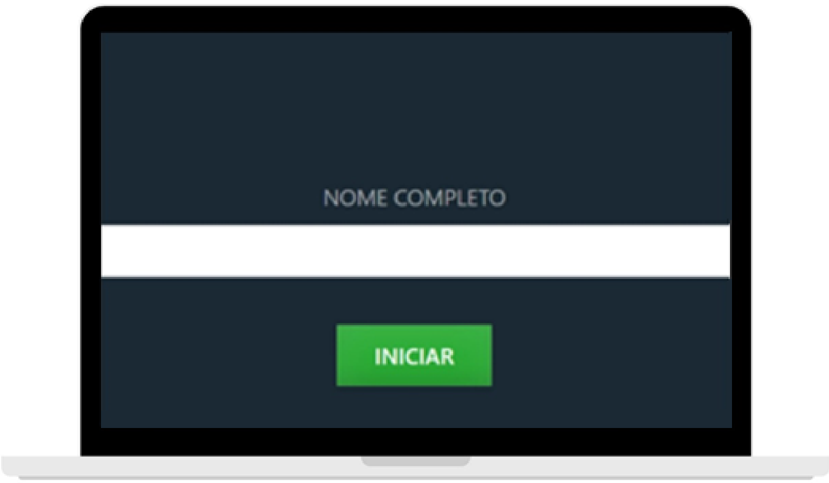
[24] O nome da Unidade Escolar, inaugurada em 26 de abril de 1955, é uma homenagem a Agmes Kock, professora e irmã da Congregação da Irmãs da Divina Providência, por sua contribuição à formação dos educadores catarinenses. Em 2008, a escola iniciou uma fase de transição, deixando gradativamente de atender ao Ensino Fundamental e passando a atender ao Ensino Médio nos três turnos letivos. Em 2019, a escola dispunha de aproximadamente 1.450 estudantes e 60 profissionais em educação.

Do ponto de vista cronológico, o primeiro passo para a consecução do estudo foi o de aprofundar leituras de convergência entre ensino e aprendizagem de matemática e ciências da linguagem. Nesse esforço, exploramos conceitos próprios da teoria de registros de representação semiótica de Duval (2009, 2011), da teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995) e da teoria de conciliação de metas de Rauen (2014). Além disso, analisamos trabalhos recentes do Grupo de Pesquisa em Pragmática Cognitiva com características similares: Andrade Filho (2013, 2020), Cardoso (2015) e Cataneo (2020). O resultado desse esforço consistiu na elaboração do capítulo destinado à revisão da literatura desta dissertação.

Em seguida, elaboramos um aplicativo contendo dez telas para obter as evidências. Essa providência se justificou pelas funcionalidades disponibilizadas por um programa especificamente dimensionado para a tarefa. O aplicativo permitiu contabilizar o tempo despendido em cada tela, viabilizou a aleatoriedade na disposição das atividades nos três registros escolhidos e organizou os dados para análise.

A tela inicial do aplicativo ou tela 1 possui um campo e um botão de ação. No campo NOME COMPLETO, solicitamos que o participante digitasse seu nome completo. Os nomes dos estudantes foram correlacionados com um código de identificação ou ID único, viabilizando expor as evidências sem divulgar os nomes dos participantes. No botão INICIAR, o participante inicia atividade, e o sistema aciona um relógio interno oculto que registra o tempo da atividade.

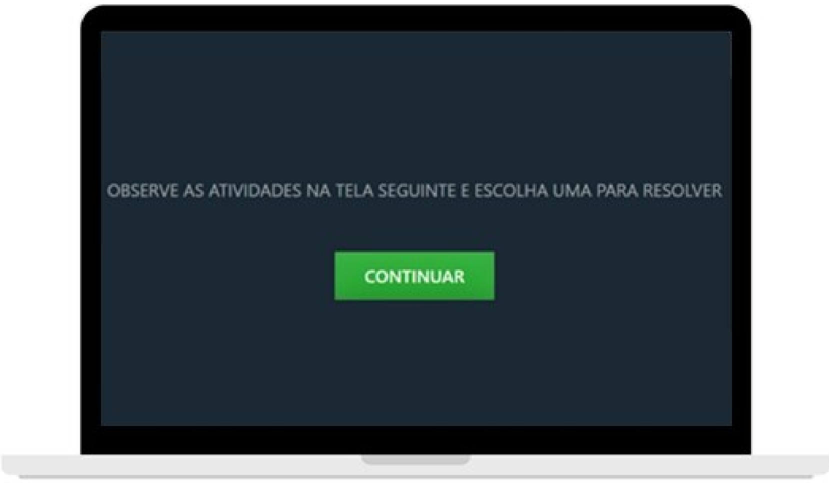
Figura 12 – Tela 1



Fonte: Ilustração de tela a partir de aplicativo elaborado pelo autor.

Após clicar no botão INICIAR, o participante é direcionado à segunda tela.

Figura 13 – Tela 2



Fonte: Ilustração de tela a partir de aplicativo elaborado pelo autor.

A segunda tela contém uma frase de comando com o seguinte texto: OBSERVE AS ATIVIDADES NA TELA SEGUINTE E ESCOLHA UMA PARA RESOLVER e um botão de ação CONTINUAR. A clicar nesse botão, o aluno irá para a próxima tela.

Figura 14 – Tela 3

Fonte: Ilustração de tela a partir de aplicativo elaborado pelo autor.

Na tela 3, o aplicativo apresenta três problemas aleatoriamente distribuídos à direita, ao centro e à esquerda. A aleatoriedade da disposição visou neutralizar seu efeito na ordenação das resoluções que poderia fazer prevalecer, por hipótese, a escolha do problema à esquerda. Trata-se de três problemas envolvendo sistemas lineares que, convertidos ao registro de representação algébrico, apresentam graus de dificuldade idênticos.

O problema algébrico consiste no sistema linear $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ que apresentamos na seção 2.1 desta dissertação. O problema em língua natural, que diz respeito à contagem de galinhas e coelhos em um quintal, foi retirado de Dante (2018, p. 139), apresentado na introdução e analisado na seção 2.2 dessa dissertação. O problema em registro algébrico utiliza bananas e estrelas para representar incógnitas de um sistema linear e foi apresentado e resolvido na seção 2.2 dessa dissertação.

Abaixo de cada problema há o botão de ação ESCOLHER com o qual o participante decide qual será o primeiro problema a ser resolvido. A tela também conta com o botão de ação DESISTIR. Se o participante optar por clicar no botão DESISTIR, o aplicativo abre uma janela de confirmação. Caso o participante confirme a desistência, a atividade se encerra, e o relógio interno marca o tempo despendido e registra as consecuções.

Arbitrando para efeitos de ilustração que o participante escolheu o problema pictórico para resolver em primeiro lugar, ele é conduzido para respectiva a tela 4.

Figura 15 – Tela 4

Fonte: Ilustração de tela a partir de aplicativo elaborado pelo autor.

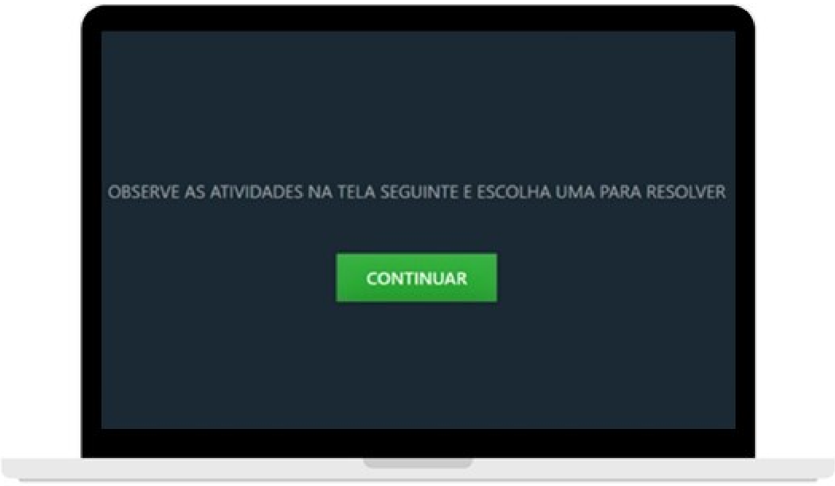
A tela 4 contém uma réplica ampliada do problema e, logo abaixo, duas caixas de entrada para digitar a resposta para as incógnitas “banana” e “estrela”. Nesse momento, o participante tem à disposição folhas brancas, lápis e borracha para resolver o problema. Os registros grafados nessas folhas foram catalogados e arquivados para análise.

Abaixo das caixas de resposta, há dois botões de ação. O botão FINALIZAR, apresentado em cinza, somente é habilitado depois de o participante preencher as caixas de resposta, de maneira que não é possível clicá-lo enquanto não forem respondidas as duas perguntas do problema. Depois de digitar as respostas, esse botão se torna verde e é possível continuar a atividade, ressalvando que o participante não sabe se, após clicar no botão FINALIZAR, ele terminará a atividade ou ela continuará.

Além disso, se o participante clicar no botão DESISTIR, ele somente deixa de responder o problema em pauta, mas não de responder as demais atividades.

Independente do botão escolhido, o participante segue para a tela 5.

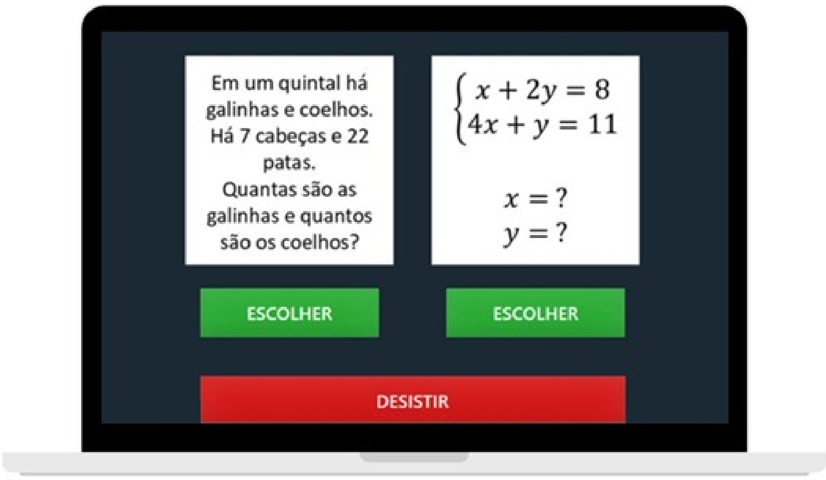
Figura 16 – Tela 5



Fonte: Ilustração de tela a partir de aplicativo elaborado pelo autor.

A tela 5 é idêntica à tela 2, com mesma frase de comando e mesmo botão de ação CONTINUAR. Ao clicar nesse botão, o participante segue para a tela 6.

Figura 17 – Tela 6

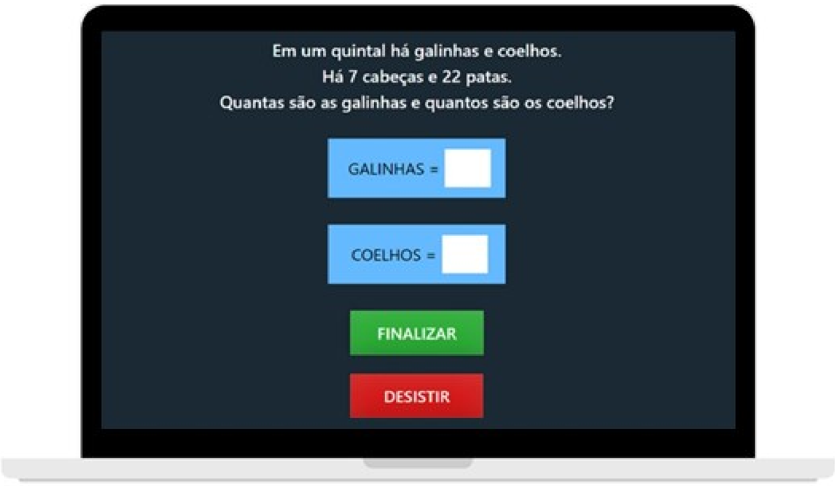


Fonte: Ilustração de tela a partir de aplicativo elaborado pelo autor.

A tela 6 é equivalente à tela 3, exceto por uma diferença: a atividade escolhida deixa de estar disponível. As duas atividades restantes são apresentadas em ordem aleatória e são acompanhadas pelo botão de ação verde ESCOLHER. Abaixo de ambas as atividades, há um botão de ação vermelho DESISTIR com as mesmas funcionalidades do botão DESISTIR da tela 3.

Arbitrando que o participante escolhe o problema em língua natural, ele segue para a tela 7, contendo uma réplica desse problema.

Figura 18 – Tela 7

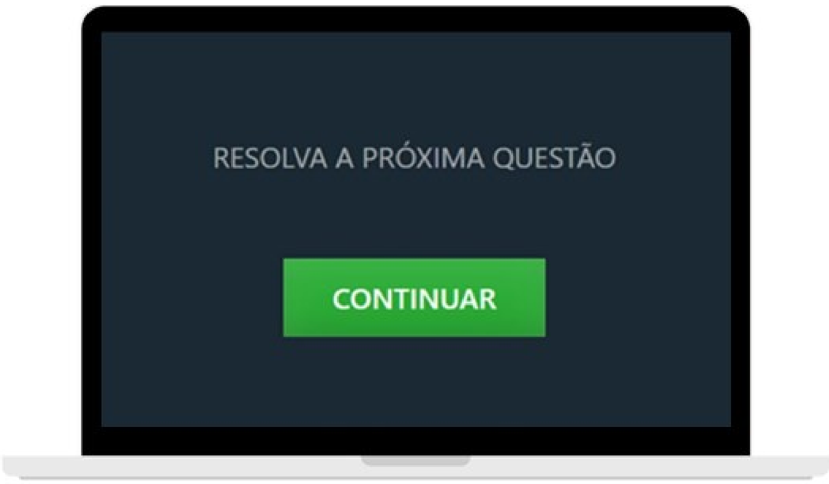


Fonte: Ilustração de tela a partir de aplicativo elaborado pelo autor.

A tela 7 apresenta a atividade escolhida com as respectivas caixas de respostas para as incógnitas “galinha” e “coelho”, e os respectivos botões de ação FINALIZAR e DESISTIR com as mesmas funcionalidades da tela 4.

Independente do botão escolhido, o participante segue para a tela 8.

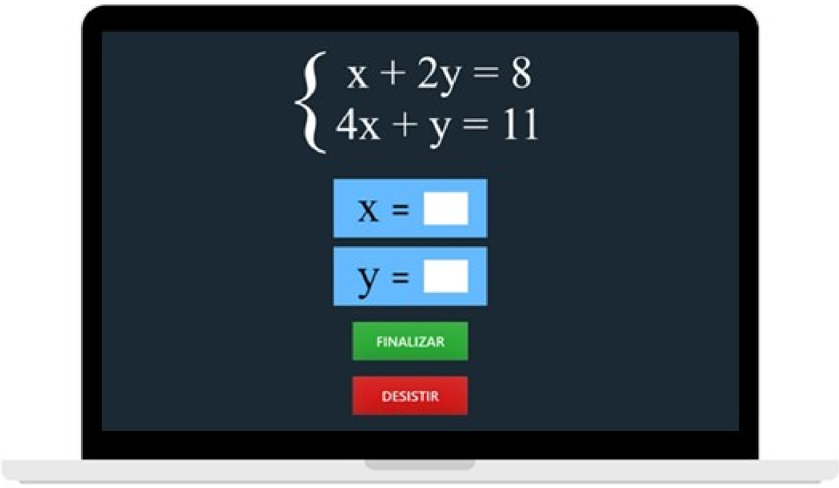
Figura 19 – Tela 8



Fonte: Ilustração de tela a partir de aplicativo elaborado pelo autor.

A tela 8 terá uma frase de comando RESOLVA A PRÓXIMA QUESTÃO acompanhada pelo botão de ação CONTINUAR, que o conduz à tela 9.

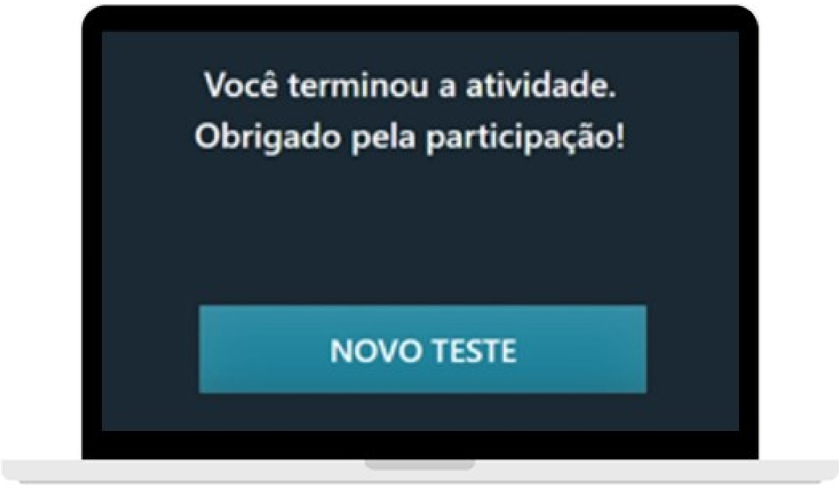
Figura 20 – Tela 9



Fonte: Ilustração de tela a partir de aplicativo elaborado pelo autor.

Em nossa sequência arbitrária, a tela 9 contém o problema em registro algébrico e respectivas caixas de respostas para as incógnitas "x" e "y" e botões de ação FINALIZAR e DESISTIR com as mesmas funcionalidades das telas 4 e 7. Clicando em FINALIZAR ou DESISTIR, o participante segue para a última tela.

Figura 21 – Tela 10



Fonte: Ilustração de tela a partir de aplicativo elaborado pelo autor.

A tela informa 10 ao participante que ele finalizou a atividade proposta VOCÊ TERMINOU A ATIVIDADE e agradece sua participação OBRIGADO PELA PARTICIPAÇÃO. No instante que o aplicativo apresenta essa tela, o relógio interno para, e os dados são consolidados em planilha. Essa planilha informa quanto tempo o participante ficou em cada tela, quais respostas informou em cada problema e se houve desistência.

Uma vez elaborado e testado o aplicativo com auxílio de voluntários, nossa preocupação foi direcionada à obtenção de evidências discursivas sobre o processamento cognitivos dos problemas. Dado que precisávamos validar qualitativamente os resultados obtidos na primeira etapa, optamos por utilizar o protocolo verbal retrospectivo imediato.

Segundo Jaspers et al. (2004, p.783), em diversas situações o método *think aloud* – pensar em voz alta ou verbalizar o pensamento – é fonte única sobre a cognição. O método consiste em obter evidências mediante verbalização oral com vistas a modelar os processos cognitivos utilizados na resolução dos problemas que os participantes foram expostos. Esses protocolos necessitam ser analisados e interpretados para compreender o modo como os participantes realizaram as atividades.

Ericsson e Simon (1993) foram percussores desses protocolos de obtenção de evidências cognitivas, classificando-os como concorrentes ou retrospectivos. Conforme os autores, em protocolos verbais concorrentes o indivíduo verbaliza seus pensamentos enquanto produz uma tarefa; em protocolos verbais retrospectivos, o indivíduo relata o processo cognitivo que foi realizado anteriormente. Em nosso estudo, optamos pelo relato verbal retrospectivo imediato, pois, conforme Ericsson e Simon (1993, p. 16):

> [...]. Um durável rastreio de memória (se parcial) é estabelecido a partir das informações atendidas enquanto conclui uma tarefa. Logo após a conclusão da tarefa, esse rastreamento pode ser acessado pela MCP [memória de curto prazo], pelo menos em parte, ou recuperado da MLP [memória de longo prazo] e verbalizado. Relatórios retrospectivos baseados em informações na MLP exigirão um processo adicional de recuperação que exibirá alguns dos mesmos tipos de erros e incompletude familiares dos experimentos pesquisa em memória. (colchetes e tradução livre nossos).

Posto isso, o protocolo verbal retrospectivo foi projetado para ser aplicado imediatamente após a finalização da atividade no computador. Nessa atividade, elaboramos perguntas sobre a ordenação e sobre técnicas e estratégias utilizadas para a resolução dos problemas apresentados.

Uma vez consolidado o projeto de pesquisa, o aplicativo de coleta das informações e o protocolo verbal, procedemos aos contatos formais com a escola. Estabelecidos os contatos iniciais, obtivemos autorização da Supervisão Regional de Educação – SC em 31 de outubro de

2019 (ver apêndice A) e, depois dessa autorização, obtivemos a “Declaração de ciência e concordância das instituições envolvidas” em 19 de novembro de 2019 (ver apêndice B). O projeto foi formalmente submetido na Plataforma Brasil ao Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da Universidade do Sul de Santa Catarina (Unisul) em 21 de novembro de 2019 e aprovado em 3 de dezembro de 2019, conforme Parecer: 3.742.356 (apêndice C). Todavia, constrangidos pelo calendário da escola, o estudo teve de ser realizado nos dias 12 e 13 de novembro de 2019, portanto, antes da consecução dos trâmites formais, respeitadas a obtenção dos “Termos de Consentimento Livre e Esclarecido” (TCLE) de pais e responsáveis (apêndice D) e dos “Termos de Assentimento Livre e Esclarecido” (TALE) dos estudantes (apêndice E).

Cada estudante foi conduzido à sala de informática, onde o pesquisador estava em uma mesa com um notebook ligado na tela de inicialização do software. Os estudantes sabiam que a pesquisa se relacionava com a resolução de problemas matemáticos, sem qualquer explicação adicional. Explicada a atividade, os estudantes interagiram com o aplicativo, utilizando lápis, borracha e folhas brancas sempre que necessário, resolvendo os problemas individualmente e sem qualquer auxílio do pesquisador. Em seguida, o pesquisador iniciou o protocolo verbal retrospectivo sobre ordem de escolha e procedimentos de resolução, que foi registrado em áudio e, posteriormente, transcrito.

Apresentada a metodologia da pesquisa, estamos em condições de apresentar a análise das evidências nas duas próximas seções.

3.2 ORDEM DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

De acordo com nossas hipóteses sobre a ordem de resolução, ou os estudantes privilegiariam o registro algébrico, posto que resolveriam os problemas pelos métodos formais, ou privilegiariam os registros pictórico e linguístico e, nesses casos, resolveriam os problemas por métodos menos que formais. Para verificar essas alternativas, solicitamos que o estudante escolhesse a atividade a ser resolvida em duas oportunidades: na tela 2, quando o estudante tinha de escolher a primeira de três atividades; e na tela 5, quando o estudante tinha de escolher a segunda atividade dentre as duas atividades restantes.

O resultado das escolhas pode ser resumido na tabela a seguir:

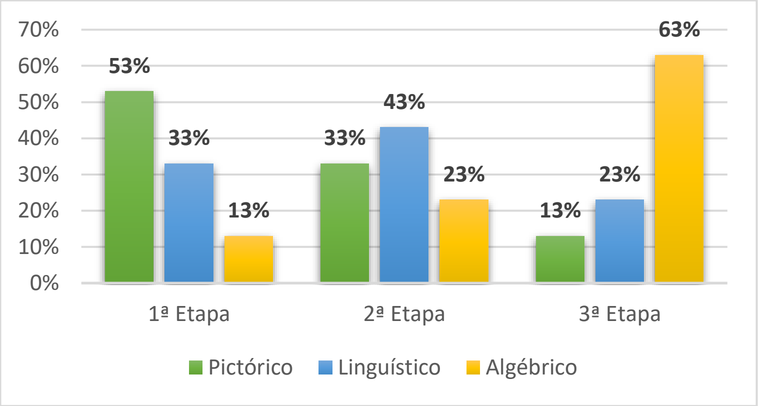
Tabela 3 – Ordem de resolução das atividades

Ordem de resolução das atividades	Frequência	Percentual
Pictórico, Linguístico e Algébrico	12	40,00
Pictórico, Algébrico e Linguístico	4	13,33
Linguístico, Pictórico e Algébrico	7	23,33
Linguístico, Algébrico e Pictórico	3	10,00
Algébrico, Pictórico e Linguístico	3	10,00
Algébrico, Linguístico e Pictórico	1	3,33
Total	30	100,00

Fonte: Elaboração nossa.

Para melhor visualizar a ordem de resolução de cada registro, apresentamos um gráfico que apresenta as escolhas feitas pelos estudantes. Nesse gráfico, apresentam-se três conjuntos com três colunas, representando as sucessivas opções dos estudantes.

Figura 22 – Escolhas de registros dos estudantes nas três etapas de decisão

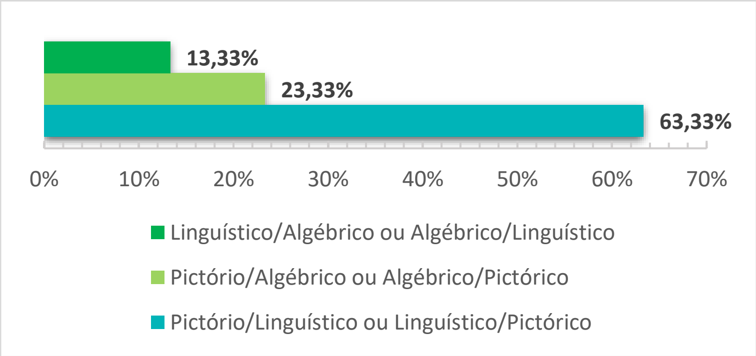


Fonte: Elaboração nossa.

Em direção à corroboração da hipótese alternativa e a favor da popularidade desse tipo de exposição de problemas na internet, o problema em registro pictórico foi escolhido na primeira etapa por 53,33% dos estudantes. Todavia, foi também expressiva a escolha pelo problema em língua natural, dado que 33,33% dos estudantes optaram por resolver esse problema primeiro. Somente 13,33% dos estudantes, escolheram resolver primeiro o problema em linguagem algébrica. Na segunda etapa de escolha, 43% dos estudantes optaram por resolver o problema registrado em língua natural; 33% optaram por resolver o problema registrado pictoricamente e 23% optaram pelo problema registrado algebricamente.

Quando agrupamos as duas escolhas, constatamos que 63,33% dos estudantes deixaram o problema em registro algébrico como última opção, priorizando assim o par pictórico/linguístico ou linguístico/pictórico como primeira e segunda escolha.

Figura 23 – Gráfico acumulado da primeira e segunda escolha dos estudantes



Fonte: Elaboração nossa.

Obtidas as evidências de predileção pelos registros pictórico e linguístico, apresentamos algumas justificativas desenvolvidas pelos estudantes no protocolo verbal retrospectivo. Para 14 estudantes (46,67%), o problema em registro pictórico aparentava ser o mais fácil, sugerindo que avaliações de custo de processamento, mesmo que intuitivas, entram em cena na escolha do primeiro problema a ser resolvido. Isso pode ser visto no excerto da entrevista[25] com o estudante E_{86}[26]:

> Pesquisador – Quando começou o programa, ele apresentou três problemas. Ele te orientou a escolher um de começo, você escolheu o das bananas. Por que você escolheu o das bananas?
> E_{86} – Porque eu achei mais fácil.
> P – Por que tu achas que o das bananas é mais fácil que os outros? O que tu achas que ele tem que o torna mais fácil?
> E_{86} – É que é só somar e diminuir os números.
> P – As contas são mais simples, é isso?
> E_{86} – São, para mim é mais fácil.

Três estudantes consideraram o problema pictórico mais fácil justamente porque ele se assemelhava aos problemas disseminados na internet, sugerindo que considerações relativas à recentidade ou mesmo frequência de contato com determinadas formulações também são consideradas em avaliações de custos de processamento[27]. Isso pode ser visto no seguinte excerto da entrevista realizada com o estudante E_{69}:

> Pesquisador – Sim, tudo bem. Por que o das bananas é mais fácil para ti?

[25] Para ver mais excertos sobre o problema em registro pictórico ver apêndice F.

[26] O software atribuía uma identificação única para cada participante, numerados de 50 e 90.

[27] A teoria da relevância, como vimos, defende que recentidade e frequência de uso são fatores pertinentes para a diminuição de custos de processamento. Assim, pertencer a um contexto em que o compartilhamento e a resolução de problemas pictóricos são recorrentes, aumentaria a predisposição por resolvê-los.

> E_{69} – Porque tipo, é como aqueles joguinhos que aparecem de vez em quando na internet. Quantas coisas tem, daí multiplica, até no grupo da família às vezes a gente brinca.

Justificativa similar é desenvolvida pelo estudante E_{81}:

> Pesquisador – Você iniciou escolhendo o das bananas. Certo?
> E_{81} – Sim
> P – Por quê?
> E_{81} – Porque para mim eu achei que tipo, para começar assim, porque eu quando eu vejo um programa com mais de dois problemas, eu sempre tento começar pelo mais fácil para ir treinando. Daí para mim o das bananas para mim foi o mais fácil e por isso eu comecei por ele.
> P – Por que tu achas que ele é mais fácil? O que que ele tem que faz ele ser mais fácil no teu ver assim?
> E_{81} – Porque as vezes eu vejo algumas brincadeirinhas assim em redes sociais, eu sempre gosto de fazer esses negócios. Ai sempre que aparece uma eu sempre tento resolver e eu sempre consigo.

O problema registrado em língua natural foi considerado como mais acessível por oito estudantes (26,67%). Nesse grupo, vale destacar o seguinte excerto da entrevista[28] com o estudante E_{76} no qual ele afirma que se vale do registro linguístico porque considera que "seria mais fácil entender um texto do que uma conta".

> Pesquisador – Você começou escolhendo aquele que tinha um texto, que envolvia galinhas e coelhos. Por que você começou escolhendo-o?
> E_{76} – Porque eu me vejo como uma pessoa que se dá melhor com texto do que com números. Então para mim eu acho que seria mais fácil entender um texto do que uma conta.

Entre os 4 estudantes que optaram pelo registro algébrico (13%), a justificativa se relaciona com a frequência de uso, como podemos ver na entrevista[29] com o estudante E_{84}:

> Pesquisador – Você começou escolhendo o algébrico. Por que você escolheu o algébrico primeiro?
> E_{84} – Porque é o que eu estou vendo agora. Então é o que está mais, assim, ainda na cabeça. Porque eu vejo todo dia. Todo dia não, mas está mais na minha rotina.

A relembrar, optamos por apresentar os problemas aleatoriamente para evitar a ascendência do problema à esquerda sobre os demais. Justamente é essa a justificativa da escolha do estudante E_{62}, que optou por resolver o problema pictórico em primeiro lugar.

---

[28] Para ver mais excertos sobre o problema em registro linguístico ver apêndice F.

[29] Para ver mais excertos sobre o problema em registro algébrico ver apêndice F.

Pesquisador – Você começou escolhendo qual primeiro?
E_{62} – Eu fui pela ordem, do primeiro.
P – Pelo primeiro que apareceu?
E_{62} – Sim

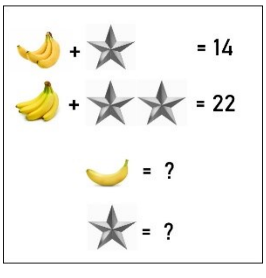
As respostas dos estudantes evidenciaram que as distintas representações não foram potencialmente abordadas durante sua trajetória escolar, dificultando assim a visualização do objeto matemático a ser representado semioticamente.

3.3 ANÁLISE DA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

Analisada a ordem de resolução, estamos em condições de observar as estratégias de resolução, verificando especialmente se houve uma associação entre a predileção por problemas pictóricos/textuais e uso de métodos menos que formais. Para dar conta dessa tarefa, organizamos essa seção em três subseções destinadas, respectivamente, à resolução do problema pictórico, linguístico e algébrico.

3.3.1 Problema apresentado em registro pictórico

Para analisar o desempenho dos estudantes na resolução do problema em registro pictórico, vale comparar os resultados produzidos por eles com a solução formal pelo método da adição segundo a qual uma banana vale 3 unidades e uma estrela 5 unidades[30].



[30] Essa resolução foi apresentada na seção 2.2 dessa dissertação e é reapresentada aqui por conveniência

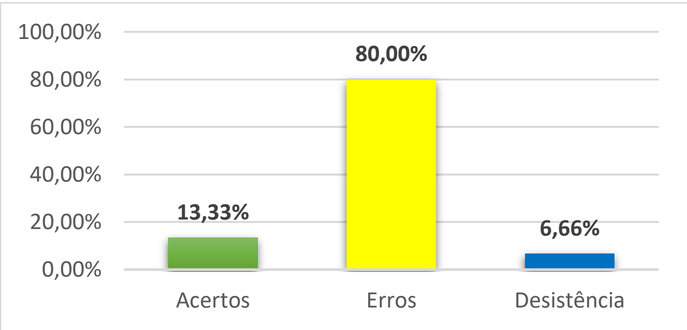
$$\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 2y = -28 \\ \ \ 4x + 2y = 22 \end{cases}$$

$$-2x + 0y = -6$$
$$-2x = -6$$
$$x = 3$$
$$3x + y = 14$$
$$3.(3) + y = 14$$
$$9 + y = 14$$
$$y = 5$$

Com relação a esse problema, apenas 4 estudantes (13,33%) acertaram o resultado, enquanto 24 estudantes (80%) erraram e 2 estudantes (6,66%) desistiram.

Gráfico 7 – Análise das respostas do problema em registro pictórico



Fonte: Elaboração nossa.

Dentre as respostas erradas, 11 estudantes (36,66%) consideraram que uma banana valia 6 unidades e uma estrela 8 unidades. A análise do protocolo verbal de vários desses estudantes sugere pistas desse desempenho.

Vejamos um excerto da entrevista concedida pelo estudante E_{73}:

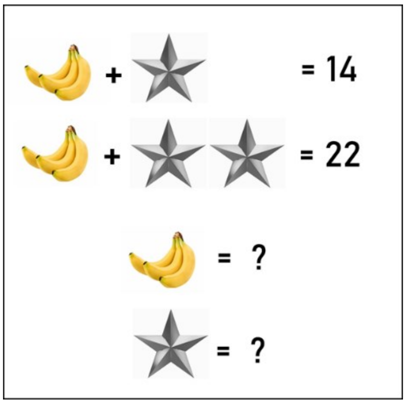
> Pesquisador – Perfeito. O da banana você conseguiu chegar nas respostas. Qual foi a estratégia? Como foi que você pensou, o que você fez para conseguir chegar nas respostas?
> E_{73} – Eu vi que na **primeira** a gente tem **uma banana** e uma estrela. E no **segundo uma banana** e duas estrelas. Então a diferença dos valores era o valor de uma estrela. Porque só foi acrescentado uma estrela, então a alteração de valor é o valor daquela estrela. (negritos nossos).

Conforme a teoria dos registros de representação semiótica, podemos inferir que esse estudante não interpretou cada banana como uma unidade significativa, mas um cacho. Assim, por mais esquisito que pareça, o problema não tratava de atribuir o valor de cada banana num contexto que explicitava três bananas na primeira linha e quatro bananas na segunda linha, mas o valor de uma banana no contexto de um cacho de bananas em ambas as linhas.[31]

Conforme a teoria da relevância, uma vez que essa interpretação de cachos de bananas em ambas as linhas foi a interpretação consistente com a presunção de relevância, ela prevaleceu sobre a interpretação-alvo contendo três e quatro bananas nas duas primeiras linhas, embora se questionasse o valor de cada fruta em particular na terceira linha.

Na figura a seguir, ilustramos como os estudantes interpretaram a questão. Na primeira linha, há um cacho de bananas e uma estrela; na segunda linha, um cacho de bananas e duas estrelas; na terceira linha, o problema questiona o valor de um "cacho" de bananas; e, na quarta linha, o valor de uma estrela.

Figura 24 – Problema em registro pictórico modificado



Fonte: Elaboração nossa.

Interpretado dessa maneira, de fato, o valor de cada cacho de bananas é 6 unidades e o valor de cada estrela é 8 unidades, como pode ser conferido pela resolução formal desse sistema pelo método da adição.

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x + 2y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y = -14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$$

$$-\mathrm{x} + \mathrm{x} - \mathrm{y} + 2\mathrm{y} = -14 + 22$$

$$\mathrm{y} = 8$$

$$x + y = 14$$

[31] Erros no mapeamento de unidades significativas como esse foram observados por Andrade Filho (2013). Em sua dissertação, o autor constatou que estudantes, apesar de não terem cometido qualquer erro de tratamento, calcularam equivocamente o volume de um prisma na forma de uma barra de ouro deitada. Isso ocorreu porque eles interpretaram altura do prisma enquanto altura do trapézio que constituía sua base, mapeando a entrada lexical 'altura' do registro em língua natural como algo que é vertical. No caso, a altura do prisma equivalia ao comprimento da barra. Todavia, o comprimento estava representado em profundidade no desenho da barra de ouro, uma vez que ela estava sendo representada deitada e em perspectiva.

$$\mathrm{x} + 8 = 14$$
$$\mathrm{x} = 14 - 8$$
$$x = 6$$

Reapresentada a resolução formal da interpretação-alvo e conhecida a resolução formal da interpretação-alternativa, estamos em condições de analisar as estratégias de resolução dos estudantes, tais como eles relatam no protocolo verbal retrospectivo e podemos observar nas anotações registradas nas folhas de respostas.

Através das anotações e as entrevistas concedidas pelos estudantes, identificamos que o único método utilizado na resolução do problema foi o de tentativa e erro. Os estudantes abduziam valores para as incógnitas do problema e checavam se o par escolhido validaria as duas equações simultaneamente. Para comprovar isso, destacamos o excerto da entrevista concedida pelo estudante E_{81}:

> Pesquisador – Consegue explicar qual foi a estratégia que tu usaste no problema das bananas para resolvê-lo?
> E_{81} – Eu fiz como eu sempre fiz os outros, contando quanto cada banana vale e tentando com valores. Eu tentei com 2 e depois com 3 e conforme eu fui tentando, chegou uma hora que deu certo.
> P – Então você estipulou valores para as bananas e para as estrelas, de uma forma que vai tentando até encaixar com a resposta da questão.
> E_{81} – Sim
> P – Podemos dizer então que tu fizeste um método de tentativa e erro, é isso?
> E_{81} – É. Eu tento um pouco com a banana e depois com a estrela. Quando bate certinho com as duas contas, é a resposta.

Do ponto de vista da teoria de conciliação de metas, os estudantes elaboram o seguinte plano de ação intencional. Diante da meta Q resolver o problema pictográfico [1], eles abduzem a hipótese P de usar o método da tentativa e erro [2], executam o método quantas vezes for necessário [3] até que o resultado se concilie com a meta de resolver o problema [4], ou seja, até que encontrem o par que satisfaz ambas as equações.

[1]		Q		Resolver o problema pictográfico, estudante
[2]	P	Q	Aplicar método de tentativa e erro, estudante	Resolver o problema pictográfico, estudante
[3]	P		O estudante aplica o método de tentativa e erro	
[4]		Q'		O estudante resolve o problema pictográfico

Conforme o relato de E_{81}, sua primeira hipótese abdutiva de solução pelo método da tentativa e erro foi o de arbitrar que o valor da banana é ‘2’.

[1]		Q		Resolver o problema pictográfico, estudante
[2]	P_1	Q	Arbitrar que o valor da banana é 2, estudante	Resolver o problema pictográfico, estudante
[3]	P_1		O estudante arbitra que o valor da banana é 2	

Em termos teóricos da relevância, uma cadeia de inferências que permite descrever e explicar a resolução é a que segue:

> S_1 – 3 bananas mais uma estrela equivale a 14 (premissa implicada derivada da interpretação em língua natural dos dados registrados pictoricamente na primeira linha do problema);
> S_2 – O valor de cada banana é 2 (premissa implicada por abdução/hipótese abdutiva antefactual tentativa);
> S_3 – Há 3 bananas na primeira equação (premissa implicada derivada da análise dos dados registrados pictoricamente na primeira linha do problema por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \rightarrow S_3$);
> S_4 – O valor das bananas é 6 (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_2 \wedge S_3 \rightarrow S_4$));
> S_5 – O valor da estrela é 8 (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \wedge S_4 \rightarrow S_5$);
> S_6 – 4 bananas mais duas estrelas equivale a 22 (premissa implicada derivada da interpretação em língua natural dos dados registrados pictoricamente na segunda linha do problema);
> S_7 – Há 4 bananas na segunda equação (premissa implicada derivada da análise dos dados registrados pictoricamente na segunda linha do problema por *modus ponens conjuntivo* $S_6 \rightarrow S_7$);
> S_8 – O valor das bananas é 8 (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_6 \wedge S_7 \rightarrow S_8$));
> S_9 – Há 2 estrelas na segunda equação (premissa implicada derivada da análise dos dados registrados pictoricamente na segunda linha do problema por *modus ponens conjuntivo* $S_6 \rightarrow S_7$);
> S_{10} – O valor das estrelas é 16 (conclusão implicada por *modus ponens* $S_9 \rightarrow S_{10}$));
> S_{11} – 8 + 16 = 24 (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_8 \wedge S_{10} \rightarrow S_{11}$);
> S_{12} – 4 bananas mais duas estrelas não equivale a 22 (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_7 \wedge S_{11} \rightarrow S_{12}$).

Essa consecução leva a concluir que a meta não foi conciliada:

> S_{13} – O estudante não resolve o problema pictográfico (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_{12} \rightarrow S_{13}$).

Esquematicamente:

[1]		Q		Resolver o problema pictográfico, estudante
[2]	P_1	Q	Arbitrar que o valor da banana é 2, estudante	Resolver o problema pictográfico, estudante
[3]	P_1		O estudante arbitra que o valor da banana é 2	
[4]		$\neg Q'$		O estudante não resolve o problema pictográfico

Conforme o relato de E_{81}, sua segunda hipótese abdutiva de solução pelo método da tentativa e erro foi o de arbitrar que o valor da banana é '3'. Como já sabemos, ele consegue chegar ao resultado-alvo com essa hipótese abdutiva:

[1]		Q		Resolver o problema pictográfico, estudante
[2]	P_2	Q	Arbitrar que o valor da banana é 3, estudante	Resolver o problema pictográfico, estudante
[3]	P_2		O estudante arbitra que o valor da banana é 3	
[4]		Q'		O estudante resolve o problema pictográfico

Outra estratégia que vale ser destacada é a do estudante E_{85}.

> P – Conseguiu um valor para a banana e um valor para a estrela. Qual foi a estratégia que você usou para chegar nesse valor? O que você fez?
> E_{85} – Se tem duas coisas valendo um valor, você geral faz uma média do que vale cada um.
> P – Você fez como média aritmética ali então?
> E_{85} – Exatamente. Se os dois dão 14, uma média é que são 7 para cada um.

Aqui o estudante abduz a estratégia de utilizar a média aritmética. Além de considerar como unidades significativas os cachos de bananas e não as bananas isoladamente, considerou que duas incógnitas somadas deverão obrigatoriamente ter o mesmo valor.

Diferente do método de senso comum de tentativa e erro, o tratamento mobilizado pelos estudantes que não interpretaram cada banana como uma unidade significativa é similar ao método de adição. A hipótese abdutiva de subtrair as linhas para assim obter o valor de uma estrela tem traços semelhantes aos métodos formais. Todavia, uma vez que a ampla maioria dos estudantes errou ou desistiu do problema em registro algébrico, isso sugere que os estudantes não dominam métodos formais de resolução.

> Pesquisador – Perfeito. O da banana você conseguiu chegar nas respostas. Qual foi a estratégia? Como foi que você pensou, o que você fez para conseguir chegar nas respostas?
> E_{73} – Eu vi que na primeira a gente tem uma banana e uma estrela. E no segundo uma banana e duas estrelas. Então a **diferença dos valores era o valor de uma estrela**. Porque só foi acrescentado uma estrela, então a alteração de valor é o valor daquela estrela. (negritos nossos).

Vale ressaltar que nenhum dos problemas foi elaborado para conter armadilhas ou "pegadinhas", como acontecem nos problemas disseminados na internet. Essa interpretação do problema reduz sua complexidade, bastando assim simplesmente efetuar uma subtração para obter o valor de uma estrela. Como a quarta linha do problema apresentava somente uma banana, consideramos plausível que essa pista serviria para evitar ambiguidades sobre a quantidade de bananas em cada linha, embora isso não tivesse sido intencional.

Por outro lado, entre os estudantes que interpretaram o problema como previsto, isto é, identificando respectivamente 3 e 4 bananas nas duas primeiras linhas, erraram a questão, demonstrando dificuldade no tratamento. Mesmo adotando valores-tentativa como hipóteses abdutivas antefactuais, cometiam erros de atribuição.

Vejamos o excerto da entrevista com o estudante E_{69}:

> P – Então tu achaste mais fácil pois ele está no teu dia-a-dia, na internet, nas redes sociais. Falando do problema da banana, você o resolveu. Qual foi a estratégia que tu usaste para resolver?
> E_{69} – Eu vi que na primeira questão tinha 3 bananas, aí na segunda já tinha 4. Aí como na primeira bateu, eu fiquei em dúvida na segunda, mas a primeira bateu certinho. **Contei 4 como cada uma das bananas, aí a estrela valia duas**. Aí depois bateu. (negritos nossos).

Relembrando, a conversão algébrica desse problema é:

$$\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$$

O estudante afirmou que cada banana valia 4 unidades. Assim, a substituição de x por 4 na primeira linha do sistema redunda no seguinte tratamento:

$$\begin{aligned} &3x + y = 14 \\ &3.(4) + y = 14 \\ &12 + y = 14 \\ &y = 14 - 12 \\ &y = 2 \end{aligned}$$

Assumindo que cada banana vale 4 unidades, uma estrela valeria 2 unidades utilizando somente a primeira linha do problema. Conforme as propriedades dos sistemas lineares, se substituíssemos x por 4 na segunda linha e isolássemos a incógnita y, o resultado deveria ser 2.

$$\begin{aligned} &4x + 2y = 22 \\ &4.(4) + 2y = 22 \\ &16 + 2y = 22 \\ &2y = 22 - 16 \\ &y = 3 \end{aligned}$$

O estudante E_{69} respondeu no sistema $x = 4$ e $y = 2$, ou seja, ele encontrou um par de solução que satisfaz a primeira linha do sistema linear, mas não testou o resultado na segunda linha, sugerindo que a solução da primeira linha satisfez sua presunção de relevância.

[1]		Q		Resolver o problema pictográfico, estudante
[2]	P	Q	Encontrar uma solução para a primeira equação, estudante	Resolver o problema pictográfico, estudante
[3]	P		O estudante encontra uma solução para a primeira equação	
[4]		Q'		O estudante resolve o problema pictográfico

Em termos gerais, exceto aqueles que interpretaram erroneamente as unidades significativas, todos os estudantes que erraram a solução abduziram estratégias de tentativa e erro. Ao testar valores, todavia, demonstraram que o conceito de sistema linear não estava internalizado, pois ao encontrar um par como solução em qualquer das linhas, os estudantes o consideravam como solução final do problema. Outra hipótese é que na trajetória escolar dos estudantes, sistemas lineares foram apresentados exclusivamente através do registro algébrico diante do método tradicional de ensino.

Posto isso, passamos a analisar o problema no registro em língua natural.

3.3.2 Problema apresentado em língua natural

Para analisar o desempenho dos estudantes na resolução do problema em língua natural, vale comparar os resultados produzidos por eles com a solução formal pelo método da substituição segundo a qual há 3 galinhas e 4 coelhos no quintal[32].

Em um quintal há galinhas e coelhos.
Há 7 cabeças e 22 patas.
Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos.
(DANTE, 2018, p. 139).

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$$

$$x = 7 - y$$

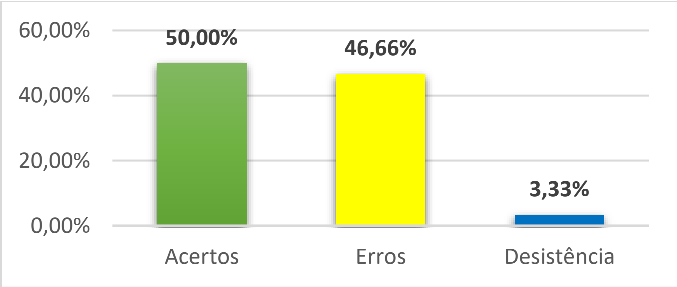
$$2(7 - y) + 4y = 22$$
$$14 - 2y + 4y = 22$$
$$2y = 8$$
$$y = 4$$

$$x + y = 7$$
$$x + 4 = 7$$
$$x = 3$$

[32] Essa resolução foi apresentada na seção 2.2 dessa dissertação e é reapresentada aqui por conveniência.

Com relação a esse problema, apenas 15 estudantes (50%) acertaram o resultado do sistema linear, 14 estudantes (47%) erraram e 1 estudante (3%) desistiu.

Gráfico 8 – Análise das respostas do problema em registro língua natural



Fonte: Elaboração nossa.

Analisando as evidências, constatamos que os estudantes, em geral, não trataram formalmente o problema. Além de estratégias de tentativa e erro, 12 estudantes abduziram a utilização de estratégias de distribuição. A seguir, destacamos três excertos de entrevistas realizadas com os estudantes E_{59}, E_{73} e E_{77}.

> Pesquisador – Ok. E qual foi a estratégia que você fez para tentar resolver ele?
> E_{59} – Eu **coloquei 7 cabeças e depois eu fui separando as 22 patas para cada uma** é duas patas. Aí eu botei coelho, acho que tem 4 né. 4 coelhos e 2 para galinhas.
> P – Ou seja, você fez um desenho das 7 cabeças e distribuiu as patas.
> E_{59} – Isso. O que sobrou eu botei ali.
>
> Pesquisador – Qual foi a lógica, o que você fez para chegar nessa resposta?
> E_{73} – Usando uma folha de rascunho eu **desenhei 7 símbolos como 7 cabeças e coloquei primeiro 2 pernas em cada um**. E aí fui acrescentando e tendo cuidado com o resultado. Aí fui somando... aqui é um coelho com 4 patas, um coelho, um coelho... e fui indo. Aí eu vi que sobrou patas, então eu tirei um coelho e botei uma galinha. Aí eu vi que fechou o número de coelhos com o número de galinhas com as 4 patas e 2 patas. Primeiro eu montei certinho e fui acrescentando patas.
>
> Pesquisador – Qual foi a estratégia que você usou para resolver? O que você pensou?
> E_{77} – O problema fala que tem 7 cabeças e 22 patas, então se a galinha tem 2 patas e o coelho tem 4, tinha que fazer **7 vezes 2 pois daria duas patas para cada um e o que sobrasse iria dar para os coelhos**. Daí eu resolvi. (negritos nossos).

Conforme os destaques, notamos que uma estratégia utilizada pelos estudantes foi a distribuição de patas em cabeças desenhadas na folha branca que estava disponível para as resoluções. Esse método aproxima-se de uma distribuição de elementos com regras definidas, uma estratégia que não foi prevista entre as hipóteses iniciais do pesquisador.

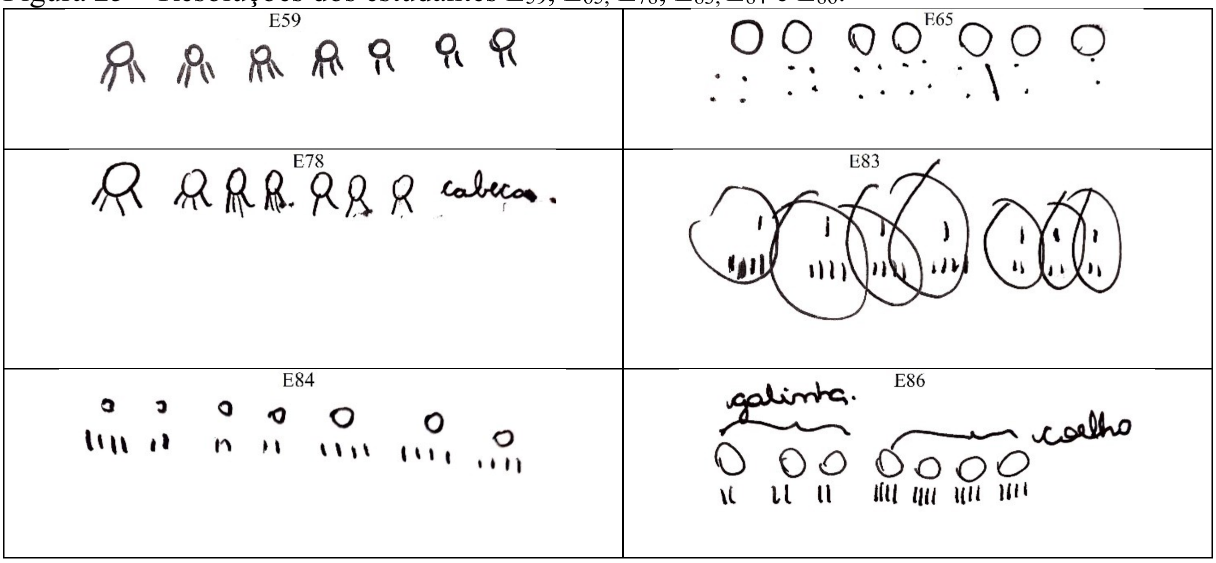
Dada a complexidade do problema, esse método revelou-se eficaz. Os estudantes inicialmente distribuíram duas patas para todos os 7 animais e, em seguida, distribuíram as patas remanescentes até se esgotarem as possibilidades. Observe-se que, para isso, houve uma conversão da sequência lexical “em um quintal há galinhas e coelhos” para o registro pictórico, uma rota inusitada quando comparada com a conversão esperada do registro em língua natural para o registro algébrico.

Vejamos a análise dessa estratégia a luz da teoria de conciliação de metas.

[1]		Q		Resolver o problema em língua natural, estudante
[2]	P	Q	Distribuir patas a todos os animais, estudante	Resolver o problema em língua natural, estudante
[3]	P		O estudante distribui patas a todos os animais	
[4]		Q'		O estudante resolve o problema em língua natural

Observe-se que as hipóteses abdutivas emergentes para distribuir as patas variaram entre os estudantes. Os estudantes E_{59}, E_{65}, E_{78}, E_{83}, E_{84} e E_{86}, por exemplo, desenharam as cabeças, distribuindo pares de patas até se esgotarem as opções, considerando coelhos todas as cabeças com quatro patas e galinhas todas as cabeças com duas patas. Notamos que mesmo com a possibilidade de utilizar incógnitas com as figuras, optou-se pelo registro pictórico mais simples possível: circunferências e traços individuais. Essa estratégia remete ao raciocínio indutivo e às técnicas básicas de contagem através de registros pictóricos, distanciando assim, para os estudantes, do uso da álgebra como recurso no tratamento do problema.

Figura 25 – Resoluções dos estudantes E_{59}, E_{65}, E_{78}, E_{83}, E_{84} e E_{86}.

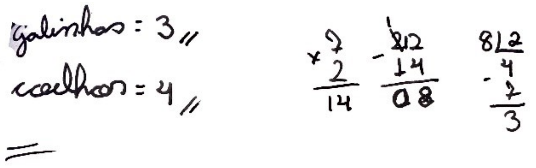


Fonte: Anotações dos estudantes.

E_{77} optou por quatro operações básicas: multiplicar todas as cabeças por 2, obtendo 14 patas; diminuir o resultado dessa multiplicação do total de patas, obtendo 8 patas residuais; dividir o número de patas residuais por 2, obtendo a quantidade de coelhos; e, implicitamente, diminuir a quantidade de coelhos da quantidade total de cabeças, obtendo a quantidade de galinhas. O tratamento do estudante E_{77} engloba somente operações aritméticas elementares de forma otimamente econômica, obtendo a solução do problema através de poucas operações.

Essas estratégias podem ser vistas na figura a seguir

Figura 26 – Resolução do estudante E_{77}



Fonte: Anotações dos estudantes.

O estudante E_{76} interpreta o problema de forma singular.

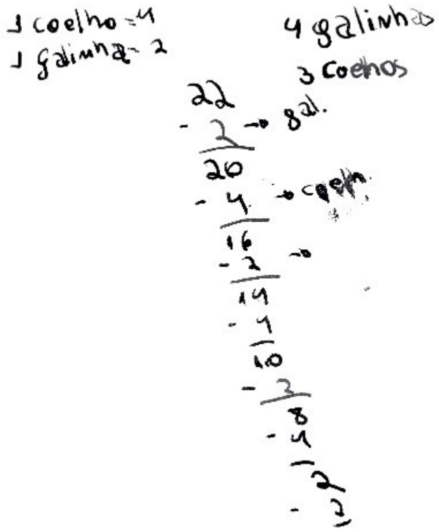
> P – Você começou escolhendo aquele que tinha um texto, que envolvia galinhas e coelhos. Por que você começou escolhendo-o?
> E_{76} – Porque **eu me vejo como uma pessoa que se dá melhor com texto do que com números**. Então para mim eu acho que seria mais fácil entender um texto do que uma conta.
> P – A questão que vem é: qual é a estratégia que você usou para conseguir essa resposta na questão das galinhas e dos coelhos?
> E_{76} – Olha, na verdade eu pensei em uma coisa bem aleatória. Sei lá, eu vi que **galinhas não tinha patas e tinha pés**, alguma coisa assim. E daí eu só, foi mais um chute.
> P – Está, mas você considerou que as galinhas não estavam nas contas das patas, é isso?
> E_{76} – É isso. (negritos nossos)

Relembrando, esse problema foi retirado de um livro didático que anula com a utilização do significante 'patas' a distinção entre "pernas de galinhas" e "patas de coelhos". O estudante E_{76} observou esse descuido e considerou que havia uma armadilha na questão, tornando assim o problema impossível de ser resolvido.

Analisando as informações dos 14 estudantes que erraram o problema, constatamos que houve dificuldades no tratamento aritmético, na interpretação da quantidade de patas de cada galinha e na quantidade de animais no quintal.

Vejamos o caso do estudante E_{81} para ilustrar essas situações.

Figura 27 – Resolução do problema linguístico pelo estudante E_{81}.

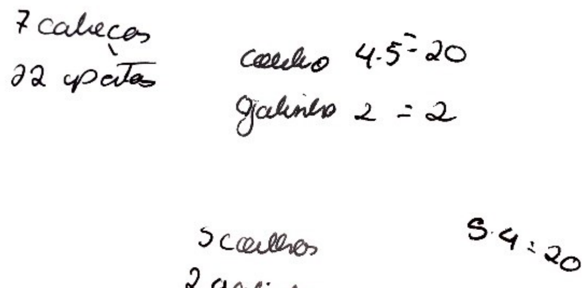


Fonte: Anotações dos estudantes.

O estudante utilizou de sucessivas subtrações do valor do total de patas pelos valores relacionados a quantidade de patas em cada galinha ou coelho. Na penúltima operação, o estudante considerou que $8 - 4 = 2$, bastando então subtrair um par de patas de galinhas na última operação. Esse erro trivial custou-lhe a questão, pois o aluno resolveria o problema corretamente caso operasse $8 - 4 = 4$ e, por fim, subtraísse o último par de patas de coelhos. Mesmo errando a última subtração o estudante obteve um total de 7 animais, de modo que, potencialmente, sua expectativa de obtenção de uma resposta relevante foi satisfeita.

O estudante E_{80} também demonstrou peculiaridades interpretativas sobre a quantidade de patas de uma galinha. Sua solução – 5 coelhos e 2 galinhas – é válida somente se considerarmos que uma galinha tem somente uma pata. As evidências não nos permitem verificar se isso deriva de erros conceituais ou operacionais ou deriva de descuido.

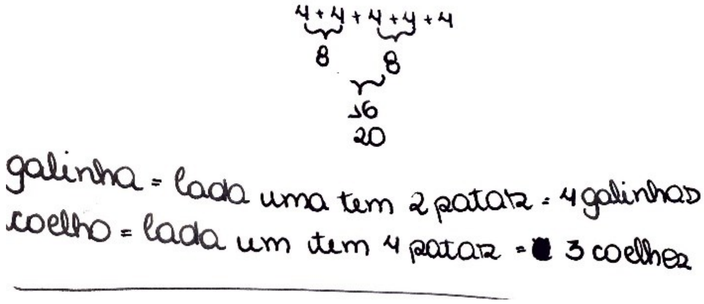
Figura 28 – Resolução do problema linguístico pelo estudante E_{80}.



Fonte: Anotações dos estudantes.

O estudante E_{67} considerou que havia 20 animais no quintal, como podemos ver no excerto da resolução. Ele demonstrou domínio das operações aritméticas, ou seja, o tratamento mobilizado está matematicamente correto. Todavia, partindo de uma premissa falsa (há 20 animais no quintal) não é possível obter uma conclusão verdadeira.

Figura 29 – Resolução do problema linguístico pelo estudante E_{67}



Fonte: Anotações dos estudantes.

Conhecidas as resoluções do problema em língua natural, podemos considerar a resolução do problema em registro algébrico.

3.3.3 Problema apresentado em registro algébrico

Para analisar o desempenho dos estudantes na resolução do problema em registro algébrico, vale comparar os resultados produzidos por eles com a solução formal pelo método da substituição segundo a qual x é igual a 2 e y é igual a 3.[33]

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{8 - x}{2} \\ y = 11 - 4\text{x} \end{cases}$$

$$\frac{8 - x}{2} = 11 - 4\text{x}$$

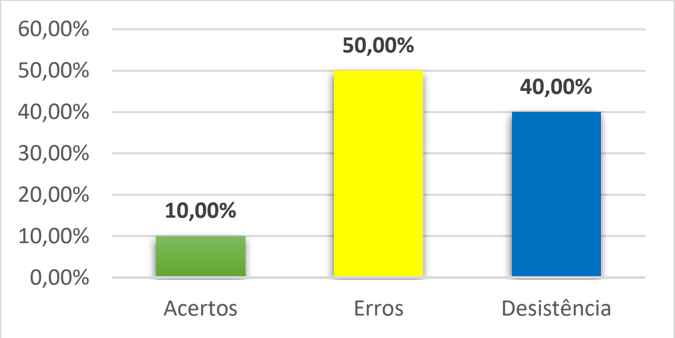
$$\begin{aligned} &8 - x = 22 - 8x \\ &8x - x = 22 - 8 \\ &7x = 14 \\ &\text{x} = 2 \end{aligned}$$

[33] Essa resolução foi apresentada na seção 2.1 dessa dissertação e é reapresentada aqui por conveniência

$$4x + y = 11$$
$$4(2) + y = 11$$
$$y = 11 - 8$$
$$y = 3$$

O desempenho dos estudantes na resolução do problema algébrico é mais uma evidência em direção a dificuldade de emergência de resoluções formais como hipóteses abdutivas antefactuais ótimas. Somente 3 estudantes (10%) acertaram o resultado do sistema, 15 estudantes erraram (50%) e 12 estudantes desistiram (40%).

Gráfico 9 – Análise das respostas do problema em registro algébrico



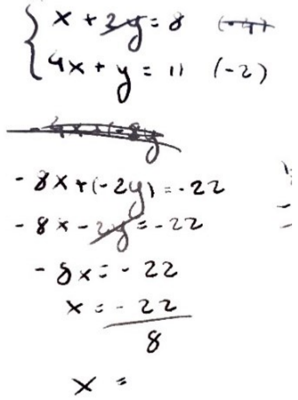
Fonte: Elaboração nossa.

Nos excertos a seguir, relativos a entrevistas com estudantes que acertaram o problema, percebemos que nenhum deles utilizou um método formal de resolução. Todos abduziram estratégias de tentativa e erro.

> P – Qual foi a estratégia que tu usaste para resolver o da álgebra?
> E_{66} – Eu fui tentando achar o X e o Y escolhendo alguns números até chegar ao resultado certo, que caiba nos dois.
>
> P – E você conseguiu chegar em uma resposta no da álgebra?
> E_{74} – Sim.
> P – Qual foi a estratégia?
> E_{74} – Eu também chutei valores...
>
> P – Tu consegues explicar qual foi a estratégia que você usou para chegar na resposta?
> E_{81} – Basicamente foi a mesma estratégia que eu fiz no da banana. Tentei por tentativa e erro e uma hora eu acertei.

Levando em conta os demais, somente o estudante E_{55} utilizou um método formal na resolução do problema. A figura a seguir demonstra essa tentativa:

Figura 30 – Resolução do problema algébrico pelo estudante E_{55}

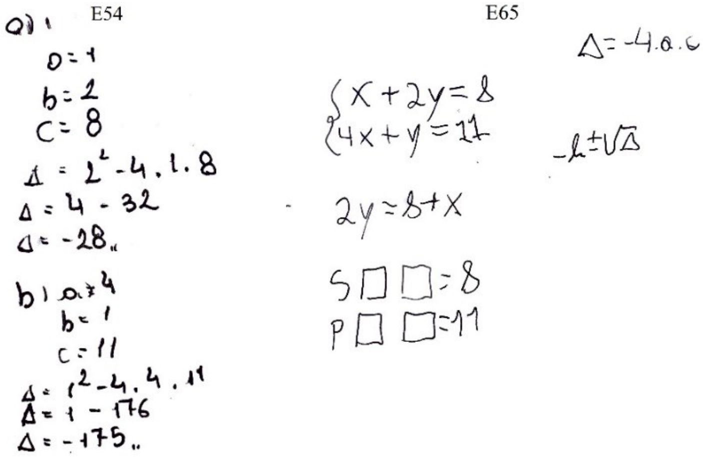


Fonte: Anotações dos estudantes.

O estudante E_{55} desistiu do problema, mas podemos identificar que há traços que remetem ao método formal de adição. Multiplicar a primeira linha por (-4) é uma boa opção para eliminar a incógnita x após a adição das equações. De forma análoga, multiplicar a segunda linha por (-2) também é uma boa opção, mas nessa situação eliminaríamos a incógnita y após a adição. Efetuar as duas opções simultaneamente não auxilia na resolução do problema. Também foi identificado que o estudante, ao multiplicar a primeira linha por (-4), deixou de operar corretamente com o monômio $2y$, somente invertendo seu sinal e considerando que $(-2y)$ mais $(-2y)$ é igual a zero.

Outros dois estudantes apresentaram pistas sobre a tentativa em utilizar o método formal de resolução de equação polinomial do segundo grau, também conhecido como *Método* ou *Fórmula de Bhaskara*.

Figura 31 – Resolução do problema algébrico pelos estudantes E_{55} e E_{65}.



Fonte: Anotações dos estudantes.

O estudante E_{54} apresentou uma tentativa em utilizar o formato mais usual do método, enquanto o estudante E_{65} preferiu uma variante e apresentou um esboço do método de *soma e produto*. Cabe ressaltar que tais métodos não são eficazes na resolução do problema.

Ciente que 15 estudantes erraram a solução do problema em registro algébrico, identificamos que 7 deles responderam como solução o par ordenado $(6,7)$, ou seja, que x valeria 6 unidades e y valeria 7 unidades. E, destacando somente o valor de y, 11 estudantes responderam que essa incógnita valeria 7 unidades.

Para apresentar o possível caminho tomado por esses estudantes, pois não há pistas nas entrevistas e no material utilizado por eles, reapresentamos inicialmente o sistema.

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$$

Um teste rápido de substituição das incógnitas pelo par $(6,7)$ resulta em duas desigualdades, vejamos.

$$\begin{cases} 6 + 2.(7) = 8 \\ 4.(6) + 7 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 + 14 = 8 \\ 24 + 7 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 = 8 \\ 31 = 11 \end{cases}$$

Portanto, a mera substituição é uma hipótese fraca sobre o método utilizado. Nossa melhor hipótese é a de que os estudantes desconsideraram a unidade significativa y da primeira linha do sistema e a unidade significativa x da segunda linha do sistema. Iremos reescrever o sistema considerando essas interpretações.

$$\begin{cases} x + 2 = 8 \\ 4 + y = 11 \end{cases}$$

Nessa situação, a solução do sistema linear é obtida de forma quase trivial, porque, através da eliminação das incógnitas, esse novo problema tem como solução o par ordenado $(6,7)$. Podemos relacionar essa interpretação das unidades significativas em prol da redução da complexidade do problema com a situação já discutida no problema em registro pictórico, em que os estudantes consideraram a unidade significativa banana como um cacho e reduziram assim o nível de dificuldade do problema.

O resultado do estudante E_{66} nos chamou atenção. Além de resolver corretamente os três exercícios, E_{66} constatou que os problemas consistiam em sistemas lineares cada qual em um registro, afirmando que as três questões apresentadas eram conceitualmente iguais.

> Pesquisador – Qual foi a primeira frase que tu disseste quando você se deparou com os 3 problemas?
> E_{66} – Que os 3 são iguais.
> P – Iguais no quê?
> E_{66} – Todos tem a mesma forma de resolver.

Após a gravação da entrevista, o estudante E_{66} afirmou que preferiu utilizar o método de tentativa e erro pois acreditava que obteria rapidamente os resultados. Indagado pelo pesquisador qual estratégia ele utilizaria caso não obtivesse sucesso com esse método, afirmou que utilizaria "as regras de sistemas lineares". O estudante afirmou que o método de tentativa e erro foi escolhido pois presumiu que as questões, bem como o rol de opções de solução, eram simples, portanto, não "valeria a pena" – leia-se não seria relevante – mobilizar recursos e técnicas mais complexas.

Gabaritando as questões e resolvendo-as do registro em língua natural ao pictórico, esse comportamento é peculiar porque revela que o estudante está consciente não somente da possibilidade de um mesmo problema poder ser expresso em diferentes registros, mas também da pertinência de operar com métodos mais potentes apenas se o nível de dificuldade do problema exigir, fornecendo um contraponto com todos os demais colegas.

Analisadas as evidências, seguimos para as considerações finais de nosso trabalho.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Motivados pelo sucesso como desafios envolvendo sistemas lineares possíveis e determinados obtêm adesão dos usuários e se disseminam na internet, analisamos nesta dissertação efeitos dos registros algébrico, pictórico e linguístico na ordem e na mobilização de estratégias de resolução por estudantes do primeiro ano do Ensino Médio. De acordo com a BNCC (2018, p. 313), cabe a um estudante do ensino Fundamental demonstrar habilidades para resolver, elaborar e interpretar problemas representados por sistemas lineares de 1º grau com duas incógnitas. Consequentemente, para dar conta desse objetivo, elaboramos um experimento de caráter exploratório com estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, mobilizando noções teóricas de registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas.

Ciente de que nosso experimento demandava pela conceitualização dos objetos matemáticos, apresentamos as noções básicas da teoria dos registros de representação semiótica elaboradas por Duval (2003, 2009, 2011, 2012). Para Duval (2009) a transformação do conhecimento matemático em saber deriva da mobilização espontânea de distintos registros semióticos de um mesmo objeto matemático. O autor (2009) define três atividades cognitivas relacionadas à semiose como fundamentais para a conceitualização dos objetos matemáticos: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. A formação de uma representação identificável tem a ver com as regras de formação próprias do registro semiótico. O tratamento é uma transformação que se estabelece no domínio de um registro. A conversão é a transformação de uma representação de um registro em outro.

Como o experimento demanda pela interpretação de problemas apresentados em diferentes registros se representação semiótica, mobilizamos a teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995). A teoria assume que a avaliação da produtividade cognitiva decorre do balanço entre rendimento (output) concebido como efeitos contextuais positivos e investimento (input) definido como esforço de processamento, de tal modo que, todas as condições sendo iguais, um estímulo é mais relevante quando maiores forem os efeitos cognitivos e menores os esforços dependidos para obtê-los.

Além disso, admitindo que os seres humanos maximizam a relevância dos inputs que processam – princípio cognitivo – e presumem que há relevância ótima em qualquer oferta de comunicação – princípio comunicativo –, assumimos que na resolução desses problemas o indivíduo segue uma rota de esforço mínimo na computação de efeitos cognitivos, considerando hipóteses interpretativas seguindo a ordem de acessibilidade e parando quando presume ter atingido relevância ótima – procedimento de compreensão orientado pela relevância

Para compreender as estratégias de resolução, mobilizamos a teoria de conciliação de metas de Rauen (2014). Conforme essa teoria da agência humana, podemos descrever e explicar a resolução de problemas em termos de planos de ação intencional em quatro estágios: projeção de uma meta [1] e formulação [2], execução [3] e checagem [4] de uma hipótese abdutiva antefactual, de tal modo que do primeiro ao terceiro estágio dessa arquitetura o modelo é abdutivo e do segundo ao quarto estágio o modelo é dedutivo. Em linhas gerais, portanto, assumimos que, diante de problemas que demandam soluções possíveis e determinadas por sistemas de equações lineares apresentados em diferentes registros se representação semiótica, guiados pela meta de resolvê-los, os estudantes abduzem ações antecedentes relevantes ótimas com as quais acreditam obter a solução para cada caso.

Revisadas as teorias, aplicamos um experimento com alunos do primeiro ano do ensino médio da Escola de Educação Básica Irmã Maria Teresa (EEBIMT) contendo três problemas envolvendo sistemas lineares com dificuldades similares apresentados nos registros pictórico, algébrico e linguístico em um aplicativo especialmente desenvolvido para esse estudo. Imediatamente após o teste, procedemos a um protocolo verbal retrospectivo (ERICSSON; SIMON, 1993, p. 16), com o qual solicitamos do participante a verbalização dos processos cognitivos despendidos para a resolução dos problemas e as razões de preferências por determinada ordem de resolução.

O estudo lançou duas hipóteses concorrentes. Conforme a primeira hipótese, assumindo que os estudantes estão habilitados a operar com métodos formais de resolução, eles deveriam preferir resolver primeiro o problema em registro algébrico, porque esse registro não demandaria por processos de conversão. Dado que essa primeira hipótese presume que os estudantes mobilizam os métodos formais de resolução e isso não parece ser o caso em soluções espontâneas de estudantes e adultos de problemas similares disseminados na internet, a hipótese rival foi a de que eles resolveriam primeiro os problemas pictográfico e linguístico.

Em síntese, as evidências sugerem predileção pelos registros pictórico e linguístico, desempenho superior nesses registros – ainda que insuficiente – e mobilização abdutiva de estratégias menos que formais com diferentes níveis de desempenho de conhecimentos matemáticos incluindo soluções criativas *ad hoc*.

As evidências sugerem também que, conforme o conceito de relevância ótima, não somente a compreensão de problemas é afetada pelas preferências e habilidades do intérprete, mas, sobretudo, a mobilização proativa de hipóteses de solução pelos estudantes. Por hipótese, a ampla disseminação de problemas pictóricos na internet aumenta a frequência de contato com esse tipo de registro, um dos fatores predisponentes para baixar custos de processamento. A despeito de problemas “pictóricos” não serem exclusivamente pictóricos, uma vez que mimetizam sistemas de equações, interpretar quantidades de figuras com algum conteúdo semântico/pragmático é mais fácil do que interpretar quantidades de variáveis sintáticas. Contudo, isso não foi garantia de sucesso como podemos perceber pela quantidade expressiva de erros. Problemas no mapeamento de unidades significativas foram especialmente sentidos na intepretação desse problema. Alguns estudantes mapearam bananas como “cacho de bananas”, reduzindo sobremaneira a complexidade do sistema linear em questão evidenciando a relevância da primeira interpretação.

O problema apresentado em língua natural apresentou alta adesão nas escolhas primária e secundária. Se, de um lado, trata-se de uma forma comum de apresentar problemas na escola, afinal de contas, a tentativa de contextualizar problemas em pequenos textos é uma estratégia comum desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, de outro, essa forma de exposição das questões demandaria por conversão para ser parametrizada num sistema de equações, diminuindo sua relevância. As evidências sugerem que, a despeito dos custos de interpretação do registro em língua natural, o problema nesse tipo de registro foi preferido e a frequência de acertos foi maior do que os problemas em outros registros. Parte desse sucesso se explica porque o problema em língua natural favoreceu estratégia *ad hoc* criativa de desenhar cabeças representando os animais do quintal e distribuir pares de patas até serem definidos o número de coelhos e galinhas. Essa estratégia, como argumentamos, demandou por uma conversão inusitada exitosa da língua natural para uma representação pictórica.

No que se refere à capacidade de buscar soluções criativas, Marcus (2010) defende que os seres humanos são a única espécie capaz de planejar o futuro de maneira sistemática, embora possam descartar seus planos mais cuidadosamente elaborados em favor de gratificações a curto prazo. Nesse sentido, o autor argumenta que a mente humana busca soluções para impasses através da criação de *kluges*[34] e que a criação de um *kluge* bloqueia o surgimento de outros. A noção de relevância explica justamente como ocorre esse processo, já que a primeira suposição condizente com o princípio de relevância é a que prevalece, impedindo, pelo menos em um dado momento e em determinadas circunstâncias, o aparecimento de outras hipóteses.

[34] Em português as expressões mais aproximadas seriam “quebra-galho” ou “gambiarra”. O autor (2010, p.13) considera *kluges* como soluções desajeitadas e deselegantes – ainda que eficazes – para um problema.

As evidências sobre a preferência e a resolução do problema em registro algébrico que, como vimos argumentando, demandaria somente por tratamento, são expressivas para descartar a emergência de métodos formais de resolução como hipótese abdutiva antefactual ótima nos planos de ação intencional de estudantes potencialmente capazes de mobilizá-los. Somente 3 estudantes conseguiram resolver corretamente o sistema apresentado algebricamente – todos mobilizando estratégias de tentativa e erro –, 15 estudantes erram e, ainda mais expressivo, 12 estudantes desistem. Somente três estudantes mobilizaram sem sucesso métodos formais para resolver esse problema. Um estudante que gabaritou todos os problemas, ao afirmar estar consciente de que a mobilização de métodos formais era desnecessária para resolver problemas apresentados no aplicativo, sugere que uma das explicações para essa baixa mobilização de métodos formais pode estar relacionada ao nível de dificuldade de problemas similares aos desafios propostos na internet.

Em síntese, na resolução de todos os problemas, prevaleceu a mobilização de estratégias de tentativa e erro com as quais os estudantes propunham sucessivas hipóteses de valores para uma das incógnitas, descobriam o valor da outra incógnita e checaram se esses valores satisfaziam as duas equações (às vezes, somente uma delas, revelando problemas com o conceito de sistema de equações). Em outras palavras, diante problemas matemáticos que demandariam por conversões para o registro algébrico para um tratamento ótimo, os estudantes abduziram estratégias *ad hoc* que priorizam tratamentos não formais, indicando pouca capacidade de mobilização dos métodos formais de resolução de problemas e, coerentemente, predileção por problemas em registro pictórico e linguístico.

Esses resultados, no entanto, devem ser considerados no contexto de um experimento exploratório envolvendo uma série expressiva de condições e limitações. O estudo está condicionado a problemas similares àqueles encontrados na internet, exceto no que diz respeito à presença de armadilhas de difícil conversão para os demais registros. Esses problemas, como vimos, demandam por soluções em geral mais simples que podem ter favorecido a emergência de estratégias *ad hoc* e, entre elas, a de tentativa e erro. A consideração de uma versão linguística certamente moderou a escolha dos registros quando comparada com um experimento contendo somente versões algébricas e pictóricas. Outra possibilidade seria a de comparar três trios de problemas, que chegou a ser cogitada, mas preterida pela dificuldade de produzir três versões razoáveis de mesmos problemas.

Por outro lado, certamente, os problemas escolhidos condicionaram os comportamentos. De fato, estratégias distributivas aumentaram o desempenho dos estudantes no problema em língua natural e a confusão entre bananas consideradas individualmente e em cachos diminuíram o desempenho dos estudantes no problema em registro pictórico. Por hipótese, sendo maiores as quantidades de problemas e de escolhas, menores seriam as intercorrências de aspectos semânticos e pragmáticos específicos de um problema nos resultados. Enfim, quaisquer que fossem as mudanças no desenho do estudo, outros aspectos poderiam ser explorados e outras perguntas poderiam ser lançadas.

Além disso, cabe ressaltar que os resultados obtidos no experimento são condicionados aos critérios de escolha do público-alvo. Presumidamente, outros públicos poderiam demonstrar uma predileção distinta e utilizar recursos aqui não listados, dado que cada critério de escolha ilumina distintas características a serem analisadas.

Sejam quais forem os encaminhamentos, o presente estudo é mais um passo no sentido de reforçar a pertinência da interface entre os conceitos de registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas para descrever e explicar fenômenos pragmático-cognitivos de interpretação no ensino e na aprendizagem de matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRADE FILHO, B. M. de. **Processos de conversão de registros em língua natural para linguagem matemática**: análise com base na Teoria da Relevância. 2013. 119 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2013.

ANDRADE FILHO, B. M. de. **Modelagem de transformações gasosas em situações didáticas**: análise conforme a teoria da conciliação de metas. 2020. Tese (Doutorado em Ciências da Linguagem) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2020.

ANTON, H.; BUSBY, R. C. **Álgebra linear contemporânea**. Trad. de Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2006.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. Trad. de Hygino Hugueros Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Trad. de Elza Gomide. São Paulo: Blücher, 1974.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. O cenário da pesquisa no campo da educação matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Perspectivas da Educação matemática**, v. 7, n. 13, 2014. Disponível em: http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/488. Acesso em: 21 abr. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 20 abr. 2019.

CARDOSO, M. C. **Conciliação de metas, relevância e registros de representação semiótica em matemática**. 2015. 173 f. Tese (Doutorado em Ciências da Linguagem) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.

CARDOSO, M. C.; CATANEO, V. I.; RAUEN, F. J. Proposição de atividades contextualizadas para o ensino de potenciação na educação básica: uma abordagem pragmático-cognitiva. **Revista Ciências & Ideias**, Rio de Janeiro, v. 10, n. 3, p. 78-95, 2019.

CATANEO, V. I. **Potencialização da compreensão conceptual de sistemas lineares com o software Geogebra em celulares**. 2020. 145 f. Tese (Doutorado em Ciências da Linguagem) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2020.

CEBOLA, G. **Do número ao sentido do número**: atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2002. p. 223-239. Disponível em: https://bit.ly/3gKClzq. Acesso em: 21 abr. 2018.

DANTE, L. R. **Teláris matemática, 8º ano**: ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DE ANDRÉ, M. E. D. A. Estudo de caso: seu potencial na educação. **Cadernos de Pesquisa**, n. 49, p. 51-54, 2013.

DUVAL, R. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem da compreensão em matemática**: registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas, SP. Papirus. p. 11-33, 2003.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. de Lênio Fernandes Levy. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R.; MORETTI, M. T. (Trad.). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revema**t: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012. Disponível em: https://bit.ly/2ZjytzE. Acesso em: 1 jun. 2019.

DUVAL, R. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, n. 3, jul./dez. 2013. Entrevista concedida a José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende.

ERICSSON, K. A.; SIMON, H. A. **Protocol analysis**: verbal reports as data. Cambridge: MIT Press, 1993.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à álgebra linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**: Conjuntos e Funções, volume 4. São Paulo: Atual Editora, 2004.

JASPERS, M. W. M.; STEEN, T.; VAN DEN BOS, C.; GEENEN, M. The think aloud method: a guide to user interface design. **International Journal of Medical Informatics**, v. 73, p. 781-795, 2004.

MARCUS, Gary. **Kluge**: a construção desordenada da mente humana. Campinas: Ed. da Unicamp, 2010.

MORO, G. M. A pictografia, relações culturais e tecnológicas: a iconografia digital como modelo de comunicação em interfaces. In: Congresso de Ciências Da Comunicação na Região Sul, 17., 2016, Curitiba. **Anais...** Curitiba: PUCPR, 2016. Disponível em: http://www.portalintercom.org.br/anais/sul2016/resumos/R50-1602-1.pdf. Acesso em: 18 jun. 2019.

RAUEN, F. J. Processos interacionais discente/docente em espaço virtual de aprendizagem: análise com base na teoria da relevância. **Scripta**, Belo Horizonte, v. 12, n. 22, p. 190-217, jan./ jun. 2008.

RAUEN, F. J. For a goal conciliation theory: ante-factual abductive hypotheses and proactive modelling. **Linguagem em Discurso**, Tubarão, v. 14, n. 13, p. 188-204, set./dez. 2014.

RAUEN, F. J. **Roteiros de iniciação científica**: os primeiros passos da pesquisa científica, desde a concepção, até a produção e a apresentação. Palhoça: Ed. da Unisul, 2015.

RAUEN, F. J.; RAUEN, B. M. Extensão do escopo da lei Maria da Penha a homens vítimas de violência doméstica e familiar em Pelicani (2007): análise pragmático-cognitiva. **Fórum Linguístico**, Florianópolis, v. 15, n. 3, p. 3153-3169, out. 2018.

RAUEN, F. J. **Pertinência empírica da noção de intenção prática em eventos concretos de comunicação online**: análise orientada pela teoria de conciliação de metas. Projeto de Pesquisa, 2019, inédito.

SILVEIRA, J. R. C. da; FELTES, H. P. de M. **Pragmática e cognição**: a textualidade pela relevância e outros projetos. 3. ed. Porto Alegre: Edipucrs, 2002.

SPERBER, D.; WILSON, D. **Relevance**: communication & cognition. 2nd. ed. Oxford: Blackwell, 1995. [1st. ed. 1986].

SPERBER, D.; WILSON, D. **Relevância**: comunicação e cognição. Lisboa: Fundação Galouste Gulbenkian, 2001.

WILSON, D. Prefácio. In: SPERBER, Dan; WILSON, Deirdre. **Relevância**: comunicação e cognição. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. p. 7-21.

WILSON, D. **Pragmatic Theory**. Trad. livre de Fábio José Rauen. London: UCL Linguistics Dept, 2004. Disponível em http://www.phon.ucl.ac.uk/home/nick/pragtheory/. Acesso em: 15 mar. 2005.

WILSON, D.; SPERBER, D. **Teoria da relevância**. Linguagem em (Dis)curso, v. 5, n. esp., p. 221-268, 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A – AUTORIZAÇÃO DA SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

ESTADO DE SANTA CATARINA
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
COORDENADORIA REGIONAL DE EDUCAÇÃO
SUPERVISÃO REGIONAL DE EDUCAÇÃO
R. Irmã Bonavita ,240 – Capoeiras –Florianópolis – SC CEP: 88.090-150 Fone: (48) 36656608

Ofício nº 1800/SGR/2019 São José, 31 de outubro de 2019.

Senhor (ª) Gestor (ª)

Com nossos cumprimentos, vimos por meio deste, **AUTORIZAR** o acadêmico Guilherme Rossi de Melo, matriculado no Curso de Mestrado do Programa de Pós Graduação em Ciências da Linguagem, na UNISUL. Para realizar atividade com alunos do 1° ano do Ensino Médio, na EEB Irmã Maria Teresa.

A atividade será realizada com um grupo de 30 alunos do 1° ano do Ensino Médio.

O responsável pelo projeto em nome da Instituição é o Professor Drº Fábio José Rauen.

Somos **FAVORÁVEIS** à aplicação do projeto, porém ressaltamos que as informações obtidas deverão ser utilizadas exclusivamente para fins pedagógicos de seus estudos, sendo conservada no anonimato a identificação dos sujeitos ao longo das atividades, assim como, não colocá-los em momento algum em situação de risco, constrangimento ou exposição vexatória.

Sem mais para o momento.
Atenciosamente

Balthazar

Vitor Fungaro Balthazar
Coordenador Regional de Educação

Silvani de Souza
Integradora Regional de Educação

Marcelo Santino Machado
Técnico

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
Coordenadora Regional de Educação da Grande Florianópolis
Rua Irmã Bonavita, 240, Capoeiras
CEP: 88090-150 - Florianópolis/SC

Ilmo (ª) Sr (ª)
Diretor (ª) EEB Irmã Maria Teresa

APÊNDICE B – CIÊNCIA E CONCORDÂNCIA DAS INSTITUIÇÕES

CEP COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA COM SERES HUMANOS UNISUL

Universidade do Sul de Santa Catarina
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP UNISUL

Declaração de Ciência e Concordância das Instituições Envolvidas

Com a finalidade da obtenção do parecer do Comitê de Ética em Pesquisa - CEP-UNISUL, os representantes legais das instituições envolvidas no projeto de pesquisa intitulado "*Efeitos do Registros de Representação na resolução de Sistemas Lineares: análise pragmático-cognitiva*" que tem como objetivo "*investigar, do ponto de vista da teoria de conciliação de metas, da teoria da relevância e da teoria de registros de representação semiótica, efeitos do registro de representação semiótica na resolução de sistemas lineares por estudantes do 1º ano do Ensino Médio*", DECLARAM estarem cientes e de acordo com seu desenvolvimento nos termos propostos desde que os pesquisadores executem o referido projeto de pesquisa com observância do que dispõe a Resolução 466/12 e 510/16 do Conselho Nacional de Saúde.

Para preenchimento do Pesquisador (a) responsável e Coordenação de Curso [1]	
Pesquisador (a) responsável:	Guilherme Rossi de Melo
Curso de Graduação ou Pós-Graduação ao qual o (a) pesquisador (a) responsável está vinculado:	Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciências da Linguagem
Curso de Graduação ou Pós-Graduação ao qual a presente pesquisa está vinculada:	Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciências da Linguagem
Campus e Unidade:	Tubarão
Projeto vinculado a: ( ) TCC de Graduação ( ) Unidade de Aprendizagem [2] ( ) Monografia/ Especialização [3] (X) Mestrado [3] ( ) Doutorado [3] ( ) Pós-doutorado [3] ( ) Pesquisador (a) responsável do *stricto sensu*	( ) Financiamento externo. Citar[4]: ____________________ Projeto aprovado em edital: ( ) PUIC ( ) Art. 170 ( ) PIBIC ( ) Art. 171 ( ) PIBITI ( ) Projeto de Extensão

1. Somente serão aceitos projetos de pesquisa que se enquadrem nos itens acima e/ou estejam em fase de submissão a editais de fomento externo com o pré-requisito de haver aprovação ética para submissão.
2. Em caso de pesquisa vinculada à Unidade de Aprendizagem deve-se apresentar o plano de ensino com a metodologia de trabalho, descrevendo todas as atividades de pesquisa e a efetiva participação dos estudantes.
3. Pesquisas que façam parte da formação de Pós-Graduação deverão obrigatoriamente ter o orientador cadastrado como pesquisador responsável ou assistente de pesquisa na

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA - UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA.
Avenida Pedra Branca, 25, Cidade Universitária Pedra Branca, CEP 88137-270, Palhoça, SC Fone: (48) 3279-1036

Universidade do Sul de Santa Catarina
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP UNISUL

Plataforma Brasil. 4. Anexar solicitação/edital destacando o pedido de aprovação prévia do CEP.

Guilherme Rossi de Melo (UNISUL)

UNISUL - Universidade do Sul de Santa Catarina
Programa de Pós Graduação em Ciências da Linguagem

Prof. Dr. Fábio José Rauen
Coordenador - Matrícula 3805, por delegação do Reitor através da Portaria GR Nº 2145/2016

Dr. Fábio José Rauen (UNISUL)
(Coordenador de Curso)
*assinatura e carimbo institucional

Osni Mendes Cardoso
Diretor
Matrícula 202.465-9-05

Osni Mendes Cardoso
*assinatura e carimbo

Nome do responsável: Osni Mendes Cardoso
Cargo do responsável: Diretor
Instituição: Escola de Educação Básica Irmã Maria Teresa
CNPJ ou CPF do responsável: 82.951.328/0001-58

Tubarão, 19 de novembro de 2019

Obs. Este documento deve ser digitalizado de forma que as duas páginas fiquem no mesmo arquivo.

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA - UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA.
Avenida Pedra Branca, 25, Cidade Universitária Pedra Branca, CEP 88137-270, Palhoça, SC Fone: (48) 3279-1036

APÊNDICE C – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

CEP
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA COM SERES HUMANOS

UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA - UNISUL

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Efeitos do Registros de Representação na resolução de Sistemas Lineares: análise pragmático-cognitiva

Pesquisador: GUILHERME ROSSI DE MELO

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 25931619.2.0000.5369

Instituição Proponente: Universidade do Sul de Santa Catarina - UNISUL

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 3.742.356

Apresentação do Projeto:

O Projeto "Efeitos do Registros de Representação na resolução de Sistemas Lineares: análise pragmático-cognitiva" é para uma dissertação ao Curso de Mestrado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina como requisito parcial à obtenção do
título de Mestre.
Objetiva investigar efeitos do registro de representação semiótica na resolução de problemas matemáticos. Para dar conta desse objetivo, pretende-se aplicar a estudantes do primeiro ano do Ensino Médio diferentes combinações de sistemas lineares em três registros: algébrico, pictográfico e linguístico.

É um desafio ético porque de interesse social ao aprendizado, seja por suas propriedades e características intrínsecas, seja pela formalidade com que o tema é apresentado na escola. De fato, a álgebra é um conteúdo escolar abordado inicialmente na disciplina de Matemática e utilizado, posteriormente, em diversas áreas da ciência. Todavia, ao pesquisar sobre desafios matemáticos em redes sociais, nota-se a predileção e a relativa facilidade como usuários, independentemente de sua escolarização, resolvem questões que demandam por sistemas lineares de equações, quando elas se apresentam em formato de imagem contendo ou não pistas sobre o seu valor numérico.

Endereço: Avenida Pedra Branca, 25
Bairro: Cid.Universitária Pedra Branca **CEP:** 88.137-270
UF: SC **Município:** PALHOCA
Telefone: (48)3279-1036 **Fax:** (48)3279-1094 **E-mail:** cep.contato@unisul.br

Tendo em vista essa constatação, procura-se neste projeto de dissertação analisar, a partir da teoria de conciliação de metas, da teoria da relevância e da teoria de registros de representação semiótica, efeitos dos registros algébrico, pictórico e linguístico nas conversões e tratamentos necessários para a resolução de sistemas lineares possíveis e determinados em estudantes do primeiro ano do Ensino Médio.

Para dar conta desse objetivo, este projeto apresenta reflexões sobre tema e teorias mobilizadas no estudo. Os autores (2014, p. 24) analisam as atividades cognitivas que embasam esse funcionamento, como este funcionamento é apresentado e quais são os requerimentos necessários para a resolução de problemas.

Número de participantes da pesquisa: 30.

Objetivo da Pesquisa:
Hipótese: dando-se a questão de qual será a ordem de escolha para resolução dos três problemas, cada qual em um formato específico: algébrico, língua natural e pictórico tem-se por hipótese que o sistema linear no formato algébrico é o problema que requer menor esforço cognitivo, pois não há necessidade de conversões. Diante desse fato, supomos haver uma motivação para a escolha desse sistema.(...) Espera-se observar se métodos de solução que os indivíduos mobilizam e sua proficiência são afetados pelos registros nos quais os problemas são apresentados.

Objetivo Primário: Procura-se analisar neste projeto de dissertação, a partir da teoria de conciliação de metas, da teoria da relevância e da teoria de registros de
representação semiótica, efeitos dos registros algébrico, pictórico e linguístico nas conversões e tratamentos necessários para a resolução de sistemas lineares possíveis e determinados em estudantes do primeiro ano do ensino médio.

Objetivos Secundários:
a) Analisar como se dá a mobilização dos diferentes registros de representação semiótica;
b) Identificar quais as inferências realizadas pelos alunos durante a atividade proposta, considerando que os problemas serão dispostos em três registros distintos;
c) Identificar as dificuldades apresentadas durante o processo de resolução dos problemas em relação aos tratamentos e conversões mobilizados;

d) Contribuir para o aperfeiçoamento pragmático-cognitivo do processo de resolução de problemas em matemática.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:
Riscos: A participação na pesquisa oferece risco mínimo. Porém, é possível que durante o processo da pesquisa ocorra frustração caso o estudante não consiga desenvolver alguma das atividades propostas ou apresente cansaço. O pesquisador estará atento a estes possíveis casos e prestará toda a assistência necessária, como esclarecimentos e destinação de mais tempo para a resolução da atividade proposta.

Benefícios: Como benefício da participação na pesquisa, espera-se que o estudante exercite técnicas de resolução de problemas e de raciocínio lógico que envolvam sistemas lineares. Apesar disso, é importante esclarecer que não é possível garantir que o estudante, ao participar da pesquisa, irá aprender a resolver problemas que envolvem sistemas lineares.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:
O Projeto "Efeitos do Registros de Representação na resolução de Sistemas Lineares: análise pragmático-cognitiva" tem uma primeira fase de pesquisa bibliográfica em que une os registros e tratamentos na matemática e as ciências da linguagem. Na segunda, elabora um software que apresenta três problemas propostos em cada registro escolhido: pictográfico, língua natural e algébrico. A terceira fase aplica a pesquisa na Escola de Educação Básica Irmã Maria Teresa, de Palhoça (SC), em dezembro de 2019, caracterizando a investigação como estudo de caso. Faz-se contato com a direção da escola solicitando a autorização para realizar a pesquisa com estudantes do 1º ano do Ensino Médio do período matutino.

Com a autorização da direção, obter-se-á o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) dos responsáveis pelos estudantes, para isso, se fará o contato com os responsáveis para a apresentação dos objetivos da pesquisa, riscos e benefícios. Os responsáveis serão informados que será mantida a privacidade de seu filho/sua filha, que eventuais prejuízos serão indenizados conforme determina a lei e que o estudante que não desejar participar do estudo poderá desistir a qualquer momento, bastando para isso, informar o pesquisador.

Após contato com os responsáveis, "faremos contato com os estudantes que foram
autorizados a participar da pesquisa, para apresentar o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) e informá-los sobre os objetivos da pesquisa, riscos e benefícios. Concluída a fase de contatos, inicia-se a pesquisa. Durante a resolução das atividades, os estudantes responderão a três exercícios apresentados em um computador, podendo utilizar lápis e papel como material de apoio.

O pesquisador observará a mobilização dos registros de representação semiótica em língua natural, algébrico e pictórico e os tratamentos dos estudantes durante a atividade e questionará ex-post-facto as opções dos estudantes. Concluída a fase de aplicação da pesquisa, o pesquisador irá analisar os dados coletados.

Critério de Inclusão: Estudantes do 1º ano do Ensino Médio matriculados na Escola de Educação Básica Irmã Maria Teresa, de Palhoça (SC), vinculada à Coordenadoria Regional da Grande Florianópolis do estado de Santa Catarina.

Critério de Exclusão: Estudantes que não pertençam aos critérios de inclusão, ou que possuam dificuldades em responder o questionário proposto na aplicação da pesquisa.
Estudantes que atendem ao critério de inclusão, mas cujos responsáveis não consentiram participar da pesquisa; estudantes que atendem ao critério de inclusão, mas que não assentiram participar da pesquisa; estudantes que atendem ao critério de inclusão, mas que desistiram de participar da pesquisa.

Concluída a fase de aplicação da pesquisa, o pesquisador irá analisar os dados que foram coletados por meio das respostas emitidas pelos participantes nas folhas de rascunho, no registro de áudio de cada participante e nos dados que serão salvos pelo software.

Quanto à abordagem dos dados, a pesquisa será prevalentemente qualitativa, ou seja, a análise ocorrerá considerando o embasamento teórico que sustenta a pesquisa: a teoria de conciliação de metas irá auxiliar no entendimento de como o estudante processa as suposições e as aplica, a fim de atingir a meta de resolver os problemas propostos.
Pela teoria da relevância, será analisado o custo de processamento na resolução dos sistemas

lineares e o ganho cognitivo atingido pelo estudante nas conversões entre registros de representação semiótica.

Estaremos analisando como tais participantes mobilizaram os conhecimentos matemáticos a respeito dos sistemas lineares. Mais precisamente estaremos atentos a analisar quais os passos que foram adotados pelo participante da pesquisa até que este chegasse ao fim da atividade proposta.
Caso pertinente, serão considerados dados quantitativos prevalentemente descritivos.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:
O Projeto "Efeitos do Registros de Representação na resolução de Sistemas Lineares: análise pragmático-cognitiva" tem o TCLE e TALE de acordo com as Resoluções da CNS nº 466/2012 e nº 510/2016. Tem relevância ética de interesse público e de qualificação de conhecimento para os serviços específicos da finalidade da academia universitária.

Satisfaz aos seguintes itens éticos exigidos no TCLE e TALE:

1. Está clara a delimitação de números de participantes e valor de participação;
2. Está bem delimitado o público-foco e o lugar da pesquisa, com as devidas concordâncias;
3. Esclarece bem os riscos e benefícios;
4. Os espaços de assinaturas estão de acordo com as instruções do CEP;
5. Explicita que a participação é gratuita;
6. Possibilita a desistência a qualquer tempo;
7. Deixa claro o modo de acesso dos participantes aos resultados;
8. Fala de indenização em caso de prejuízos ao participante por quebra de sigilo e outras violações de direito individual;
9. Deixa clara a garantia de sigilo, privacidade e anonimato.

Recomendações:
Recomenda-se, sob a perspectiva da ética, que no Projeto "Efeitos do Registros de Representação na resolução de Sistemas Lineares: análise pragmático-cognitiva":

1. Que se explicite no item BENEFÍCIOS: 2. "Benefícios para pesquisa acadêmica da área didático-pedagógica".

2. Que também se explicite no mesmo item: "Interesse público, razão ética do papel da universidade."

3. Que se corrija o público-foco nas páginas 3 e 27 do ANEXO COM O PROJETO DE TCC quando se diz:

"1. Este projeto visa a investigar efeitos do registro de representação semiótica na resolução de problemas matemáticos. Para dar conta desse objetivo, pretende-se aplicar A ADULTOS COM ENSINO SUPERIOR COMPLETO diferentes combinações de sistemas lineares em três registros: algébrico, pictográfico e linguístico. (p. 3 e p. 27 do Anexo com o Projeto de TCC)."

Incluir também no texto do ANEXO COM O PROJETO DE TCC o ORÇAMENTO e Quantitativo de participantes da pesquisa.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:
O Projeto para uma dissertação ao Curso de Mestrado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina como requisito parcial à obtenção do
título de Mestre sobre o tema "Efeitos do Registros de Representação na resolução de Sistemas Lineares: análise pragmático-cognitiva" O Projeto "Efeitos do Registros de Representação na resolução de Sistemas Lineares: análise pragmático-cognitiva" tem o TCLE e TALE de acordo com as Resoluções da CNS nº 466/2012 e nº 510/2016. Tem relevância ética de interesse público e de qualificação de conhecimento para os serviços específicos da finalidade da academia universitária.

Considerações Finais a critério do CEP:
Protocolo de pesquisa em consonância com a Resolução 466/12 e/ou 510/16 do Conselho Nacional de Saúde.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1463554.pdf	21/11/2019 01:28:29		Aceito
Outros	Instrumento_coleta_de_dados.pdf	20/11/2019 16:47:53	GUILHERME ROSSI DE MELO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	tale.pdf	20/11/2019 16:20:15	GUILHERME ROSSI DE MELO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	tcle.pdf	20/11/2019 16:19:57	GUILHERME ROSSI DE MELO	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	declaracao_ciencia_concordancia.pdf	20/11/2019 16:19:35	GUILHERME ROSSI DE MELO	Aceito
Folha de Rosto	folha_de_rosto.pdf	20/11/2019 16:18:22	GUILHERME ROSSI DE MELO	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	ProjetoGuilhermeRossideMelo20190821.pdf	14/11/2019 17:35:39	GUILHERME ROSSI DE MELO	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

PALHOCA, 03 de Dezembro de 2019

Assinado por:
Maria Inés Castiñeira
(Coordenador(a))

Endereço: Avenida Pedra Branca, 25
Bairro: Cid.Universitária Pedra Branca **CEP:** 88.137-270
UF: SC **Município:** PALHOCA
Telefone: (48)3279-1036 **Fax:** (48)3279-1094 **E-mail:** cep.contato@unisul.br

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhores pais, seu filho/sua filha está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar de pesquisa intitulada ***Efeitos do Registros de Representação na resolução de Sistemas Lineares: análise pragmático-cognitiva***. A pesquisa tem como objetivo "*investigar, do ponto de vista da teoria de conciliação de metas, da teoria da relevância e da teoria de registros de representação semiótica, efeitos do registro de representação semiótica na resolução de sistemas lineares por estudantes do 1º ano do Ensino Médio"*. O estudo é importante para a *compreensão dos processos cognitivos relacionados à resolução de sistemas lineares* e, dessa forma, para a proposição de melhorias na qualidade de ensino de conteúdos de matemática para a educação básica.

Participação do estudo – Seu filho/sua filha será convidado(a) a responder atividades que envolvem sistemas lineares, um conteúdo de matemática ensinado no ensino fundamental. Essas atividades serão respondidas no período em que seu filho/sua filha estiver estudando na escola. A aplicação da pesquisa acontecerá em uma sala de aula em separado, fazendo uso de lápis, papel e computador. Em todos os momentos da atividade seu filho/sua filha será acompanhado(a) e orientado(a) pelo pesquisador.

Riscos e Benefícios –A participação na pesquisa oferece riscos minímos ao seu filho/sua filha. É possível que, durante o processo da pesquisa, ocorra frustração, caso ele(a) não consiga resolver alguma das atividades propostas, e cansaço. O pesquisador estará atento a estes possíveis casos e prestará toda a assistência necessária ao seu filho/sua filha. Com a participação na pesquisa é de se esperar como benefícios o exercício de técnicas de resolução de problemas e de raciocínio lógico envolvendo sistemas lineares.

Sigilo e Privacidade – A privacidade de seu filho/sua filha será respeitada. O nome ou qualquer dado ou elemento que possa, de alguma forma, identificá-lo será mantido em sigilo. O pesquisador se responsabiliza pela guarda e pela confidencialidade dos dados obtidos no estudo.

Autonomia – O pesquisador me assegura a assistência durante toda a pesquisa. O pesquisador me garante livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, enfim, tudo o que eu queira saber antes, durante e depois da participação do meu filho/da minha filha. Declaro que fui informado de que posso me recusar a permitir a participação do meu filho/da minha filha no estudo, ou retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar. Declaro que fui informado de que não sofrerei qualquer prejuízo à assistência que venho recebendo por desejar sair da pesquisa.

Uso de imagem e áudio – Autorizo que o pesquisador obtenha dados gravados em áudio de meu filho/de minha filha durante a participação da atividade. Eu concordo que o material e as informações obtidas na pesquisa, que sejam relacionadas ao desempenho de meu filho/da minha filha possa ser publicado em aulas, congressos, eventos científicos, palestras ou periódicos científicos, desde que meu filho/minha filha não seja identificado(a). Os dados gravados em áudio serão propriedade do pesquisador e ficarão sob sua guarda.

Ressarcimento e Indenização – A participação na pesquisa não irá gerar a você nenhum tipo de custo ou benefício financeiro. No entando, despesas devidamente comprovadas decorrentes da participação de meu filho/minha filha na pesquisa, tais como transporte e alimentação, serão ressarcidas pelo pesquisador. De igual maneira, serão indenizados, conforme determina a lei, quaisquer danos devidamente comprovados que decorram da participação de meu filho/minha filha no estudo.

Devolutiva dos resultados – Os dados da pesquisa serão apresentados oficialmente em defesa pública de dissertação na Universidade de Santa Catarina no ano de 2020, de modo que você e seu filho/sua filha poderão assistir, caso haja interesse, à atividade.

Contatos – Pesquisador Responsável: Guilherme Rossi de Melo
Telefone para contato: (49) 999361664
E-mail para contato: guilhermerossimelo@gmail.com
Orientador da pesquisa: Dr. Fábio José Rauen
Telefone para contato: (48) 99660061
E-mail para contato: fabio.rauen@unisul.br
Comitê de Ética – O Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP) é composto por um grupo de pessoas que estão trabalhando para garantir seus direitos como participante sejam respeitados, sempre se pautando da Resolução 466/12 do CNS. Ele tem a obrigação de avaliar se a pesquisa foi planejada e se está sendo executada de forma ética. Caso você achar que a pesquisa não está sendo realizada da forma como você imaginou ou que está sendo prejudicado de alguma forma, você pode entrar em contato com o Comitê de Ética da UNISUL pelo telefone (48) 3279-1036 entre segunda e sexta-feira das 9 às 17horas ou pelo e-mail cep.contato@unisul.br.
Declaração – Declaro que li e entendi todas as informações presentes neste Termo e tive a oportunidade de discutir as informações nele contidas. Todas as minhas perguntas foram respondidas e estou satisfeito com as respostas. Entendo que receberei uma via assinada e datada deste documento e que outra via será arquivada por 5 (cinco) anos pelo pesquisador. Enfim, tendo sido orientado quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do estudo, eu manifesto meu livre consentimento em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou pagar, por minha participação.

Nome e Assinatura do pesquisador responsável: ____________________

Nome e Assinatura do pesquisador que coletou os dados: ____________________

Eu, ____, abaixo assinado, concordo com a participação de meu filho/minha filha nesse estudo como participante da pesquisa. Fui informado(a) e esclarecido(a) pelo pesquisador *Guilherme Rossi de Melo* sobre o tema e o objetivo da pesquisa, assim como a maneira como ela será feita, os benefícios e os possíveis riscos decorrentes da participação de meu filho/minha filha. Recebi a garantia de que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto me traga qualquer prejuízo.

Nome por extenso:

RG:

Local e Data: Palhoça, de de 2019.

Assinatura:

APÊNDICE E – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado para participar da pesquisa ***Efeitos do Registros de Representação na resolução de Sistemas Lineares: análise pragmático-cognitiva***. Queremos saber como você raciocina para resolver atividades que envolvem o conteúdo de matemática: sistemas lineares. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser: é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir. A pesquisa será feita na sua escola no período em você estuda. Você receberá explicações sobre todos os procedimentos da atividade. Essas atividades serão respondidas em uma sala em separado fazendo o uso de lápis, papel e computador. Em todos esses momentos você será acompanhado e orientado pelo pesquisador. A pesquisa oferece risco minímo a você. É possível que durante a pesquisa você fique frustrado caso não consiga resolver alguma das atividades ou fique cansado(a). O pesquisador se compromete a estar atento a estes possíveis casos e prestará toda a assistência necessária a você. Esperamos que sua participação na pesquisa possa oferecer como benefício a possibilidade de exercitar técnicas de resolução de problemas e de raciocínio lógico que envolvam sistemas lineares. A sua privacidade será respeitada. Seu nome ou qualquer forma de identificá-lo será mantido em sigilo. Você poderá desistir de participar da pesquisa a qualquer momento, bastando para isso informar sua decisão aos seus responsáveis e ao pesquisador. A sua participação na pesquisa é voluntária e sem interesse financeiro, assim você não terá direito à remuneração. Você não terá qualquer despesa para participar da pesquisa, mas caso ocorra algum custo ou dano decorrente da sua participação você será devidamente ressarcido ou indenizado conforme determina a lei. Quando terminarmos a pesquisa, os dados coletados serão analisados e apresentados na Universidade de Santa Catarina em 2020. Você poderá assistir, caso haja interesse, da apresentação. Caso você tenha alguma dúvida, em qualquer momento da pesquisa, você poderá perguntar ao pesquisador.

TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu ____ aceito participar da pesquisa ***Efeitos do Registros de Representação na resolução de Sistemas Lineares: análise pragmático-cognitiva***. Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir. O pesquisador tirou minhas dúvidas e conversou com os meus responsáveis. Recebi uma cópia deste termo de assentimento, li e concordo em participar da pesquisa.

Palhoça, de de 2019.

________________________________	________________________________
Assinatura do menor	Assinatura do pesquisador

APÊNDICE F – EXCERTOS DE ENTREVISTAS

REGISTRO PICTÓRICO

P – Ok. Qual foi a estratégia que tu usaste para resolver o das bananas?
E_{55} – Eu vi que em cima tinha uma banana e uma estrela e embaixo tinha uma banana e duas estrelas. Daí eu diminuí um do outro. Daí deu o resultado. Daí assim eu diminuí o valor da estrela para a banana e eu descobri o da banana.

P – Ok, legal. Qual foi a estratégia que você usou para resolver o das bananas?
E_{64} – Eu usei primeiro o de cima que era banana mais estrela e diminui com o de baixo. Aí no caso, ia sobrar o resultado da estrela. Aí ela deu 8 e depois a gente já sabe o resultado de cima.

P – Ok. Depois apareceu o problema das bananas e o da álgebra. Daí você escolheu o das bananas. Por que você escolheu o das bananas nessa situação?
E_{65} – Porque era só contar o que faltava pelo que me lembre.

P– Chutando valores e tentando encaixar, é isso?
E_{84} – Só que aí não encaixava e aí eu fui tentando números menores que eu tentei, eu tentei pelo menos 10, a primeira banana era 10 e a estrela era 4, beleza, fechou 14. Só que quando eu usei isso com a outra, tem duas estrelas não fecha 22. E aí eu fui tentando substituir os valores e eu achei que no começo era meio que uma pegadinha, eu ainda acho na verdade. Porque as bananas não eram iguais e nem a resposta da banana. As estrelas eram todas iguais, mas as bananas não. Então as bananas podem ter o preço que eu quiser, só que tinha uma banana só.

P – Qual foi a estratégia que tu usaste para resolver o da banana?
E_{86} – Eu fiz, tipo 14 menos 22, deu um número de cada. Daí eu só adicionei mais um número e deu 23. Daí eu vi quanto era a estrela e a banana.

P – Qual foi a estratégia que tu usaste para resolver?
E_{83} – Eu fui escolhendo números e fui vendo se dava certo.
P – Então você foi testando números, é isso?
E_{83} – É isso.
P – Até chegar em um momento que...
E_{83} – Fechasse a conta.

P – Qual foi a estratégia que tu usaste para resolver o das bananas?
E_{55} – Eu vi que em cima tinha uma banana e uma estrela e embaixo tinha uma banana e duas estrelas. Daí eu **diminuí um do outro**. Daí deu o resultado. Daí assim eu diminuí o valor da estrela para a banana e eu descobri o da banana.

P – Qual foi a estratégia que você usou para resolver o das bananas?
E_{64} – Eu usei primeiro o de cima que era banana mais estrela e **diminui com o de baixo**. Aí no caso, ia sobrar o resultado da estrela. Aí ela deu 8 e depois a gente já sabe o resultado de cima.

P – Quando você resolveu o das bananas, qual foi a estratégia que você pensou para resolver aquilo?
E_{56} – Eu pensei tipo, que tinha um quadradinho sobrando, não tinha nem mais e nem menos, então eu poderia escolher. E aí eu comecei por ele, porque, como a banana tinha que ser maior, por causa que tinha duas estrelas embaixo, então tinha que somar um número menor. Aí eu só fiz o da banana maior, daí como tinha que ser 14 e aí tinha mais uma estrela e podia botar menos, aí eu botei 14 a banana para embaixo dar 22.

P – Qual foi a estratégia para tentar resolver o das bananas?
E_{59} – Eu comecei a pensar, banana 10 e aí depois, 2, mas daí eu vi que não era certo. Daí eu comecei pelo último. Eu percebi que é só contar cada um que valia 10, a estrela. E a banana valia 4.

P – Tu foi testando os números?
E_{60} – Sim, fui testando, tipo, eu vi que estava dando, ia dar o mesmo número de cima tinha que dar no de baixo. Daí eu fui só vendo como colocar os números e qual que dava igual.

P – Daí tu resolveu o das bananas. Qual foi a estratégia, como é que tu pensaste para resolver esse problema?
E_{67} – Eu fui à banana, daí eu fui tentando. Tipo, eu tentei dividir no meio, daí não deu certo. Daí depois eu coloquei. eu fui tentando né, os números que davam.

P – Então tu achaste mais fácil pois ele está no teu dia-a-dia, na internet, nas redes sociais. Falando do problema da banana, você o resolveu. Qual foi a estratégia que tu usaste para resolver?
E_{69} – Eu vi que na primeira questão tinha 3 bananas, aí na segunda já tinha 4. Aí como na primeira bateu, eu fiquei em dúvida na segunda, mas a primeira bateu certinho. Contei 4 como cada uma das bananas, aí a estrela valia duas. Aí depois bateu.

P – Qual foi a estratégia que tu usaste para resolver?
E_{74} – Eu fui vendo os valores até eu chegar no resultado.
P – Então foi atribuindo valores até fechar a conta do jeito que está disposto e tentativas e erros?
E_{74} – Isso

P – Consegue mais ou menos a estratégia que você usou no das bananas?
E_{76} – Eu fui meio que, por eliminação. Não sei. Eu defini um valor para a banana e então logicamente a estrela teria que ter determinado valor.

P – Qual foi a estratégia que você usou para o das bananas?
E_{78} – Eu somei o primeiro, e tentei pensei em um raciocínio de quanto seria para cada um.
P – Quanto valeria cada banana e cada estrela, é isso?
E_{78} – Isso, até somar e chegar em um resultado.

P – Conseguiu um valor para a banana e um valor para a estrela. Qual foi a estratégia que você usou para chegar nesse valor? O que você fez?
E_{85} – Se tem duas coisas valendo um valor, você geral faz uma média do que vale cada um.
P – Você fez como média aritmética ali então?
E_{85} – Exatamente. Se os dois dão 14, uma média é que são 7 para cada um.

REGISTRO EM LÍNGUA NATURAL

P – No texto, você chegou a algum valor sobre a quantidade de galinhas e coelhos? Qual foi a estratégia que você usou? Como você fazer essas contas aí?
E_{84} – Bom, na minha cabeça, tinha 22 patas e 7 cabeças. Então eu botei que era uma quantidade de coelhos e uma quantidade galinhas. Eu pensei o seguinte, eu fiz um desenho aqui, o que seria as galinhas e os coelhos.
P – Então você desenhou 7 cabeças ali né?
E_{84} – Desenhei 7 cabeças e 4 delas eram coelhos, porque tinha 4 patas e 3 delas eram galinhas porque tinha duas patas.
P – Então você pegou as cabeças e foi distribuindo as patas né?
E_{84} – Isso.

P – A estratégia foi a mesma que da banana?
E_{70} – Isso. Pegar o raciocínio ali. Como galinha tem duas patas e coelho tem 4, eu fiz por essa soma. Daí eu fiz a soma aqui, daí só estava dando 6. Daí eu peguei e somei até dar 22. Daí peguei e fiz aqui.
P – Então você foi distribuindo tentativas até chegar na conta que precisava?
E_{70} – Isso mesmo.

P – Quando apareceu o início do programa, apareceu 3 problemas. Você começou com o dos coelhos e galinhas né? Por que você começou com o dos coelhos e galinhas?
E_{65} – Porque eu já sabia que havia 7 bichos ao todos. Daí eu só distribuí as patas embaixo.
P – Ok, então a tua estratégia foi desenhar 7 cabeças e distribuir patas até que feche a conta de acordo com o problema.
E_{65} – Exatamente

P – Ok. Quando você pegou o de texto, você o resolveu. Qual foi a estratégia que você fez?
E_{55} – Eu não lembrava da estratégia que o meu professor já tinha me ensinado, mas daí eu sei que o coelho tem 4 patas e a galinha tem 2. Daí eu fui somando e eu saberia que ia dar um resultado. Se desse, vamos supor, 24 eu ia saber que eu ia ter que tirar 2, daí ia ser galinha.

P – Ok, vamos entender. Mas naquele momento você imaginou que o de texto seria mais fácil? Daí qual foi a estratégia para resolver o do texto?
E_{56} – Eu pensei, tipo, galinha tem duas patas e coelho tem 4. Aí eu botei, botei duas patas e quatro patas o coelho. Aí eu botei 7 cabeças e 22. Aí eu fui separando uma por uma. Aí no final sobrou 8, como sobrou 8, dava mais dois coelhos.

P – Ok. E qual foi a estratégia que você fez para tentar resolver ele?
E_{59} – Eu coloquei 7 cabeças e depois eu fui separando as 22 patas para cada uma é duas patas. Aí eu botei coelho, acho que tem 4 né. 4 coelhos e 2 para galinhas.
P – Ou seja, você fez um desenho das 7 cabeças e distribuiu as patas.
E_{59} – Isso. O que sobrou eu botei ali.

P – Beleza. Tu escolheste o do texto e daí você também conseguiu resolver o do texto né?
E_{83} – Sim. Primeiro eu olhei no enunciado e estava escrito galinhas no plural, então eu sabia que não podia usar somente uma galinha.
P – Legal
E_{83} – Daí eu fui meio que desenhando coelhos e galinhas. Desenhei 7 cabeças e fui vendo quantas pernas tinham para chegar a 22.

Pesquisador – Qual foi a lógica, o que você fez para chegar nessa resposta?
E_{73} – Usando uma folha de rascunho eu desenhei 7 símbolos como 7 cabeças e coloquei primeiro 2 pernas em cada um. E aí fui acrescentando e tendo cuidado com o resultado. Aí fui somando... aqui é um coelho com 4 patas, um coelho, um coelho... e fui indo. Aí eu vi que sobrou patas, então eu tirei um coelho e botei uma galinha. Aí eu vi que fechou o número de coelhos com o número de galinhas com as 4 patas e 2 patas. Primeiro eu montei certinho e fui acrescentando patas.

P –Ok. Qual foi a estratégia para tu resolver essa questão?
E_{61} – Bom, como dizia que tinha 22 pés e dizia que tinha galinhas e coelhos. Galinhas tem 2 patas e coelho tem 4. E encontrei ali uma noção para encontrar um número que se adequava ao 22. Que era um número par.

P – Dai no texto também você criou uma estratégia para resolver essa questão. Você também achou uma resposta. Qual foi a estratégia que você fez na questão que envolve galinhas e coelhos?

E_{75} – Olha, foi meio difícil para falar a verdade. Eu fiz muito conta, eu pensei: a galinha tem 2 patas e o coelho tem 4. Aí eu fui fazendo conta, do tipo 4 mais 4 mais 2, aí eu pensei: tem 7 cabeças? Então são 7 animais ao todo. Então eu comecei a fazer as contas e tudo foi dando errado, foi dando 24, 20, 18 até que teve um que chegou a 22, mas só tinha 6 números. Daí depois eu fiz isso aqui que deu 7 números certinho, no caso foram 3 coelhos....

P – Beleza. Tu escolheste o do texto e daí você também conseguiu resolver o do texto né?
E_{83} – Sim. Primeiro eu olhei no enunciado e estava escrito galinhas no plural, então eu sabia que não podia usar somente uma galinha.
P – Legal.
E_{83} – Daí eu fui meio que desenhando coelhos e galinhas. Desenhei 7 cabeças e fui vendo quantas pernas tinham para chegar a 22.

Pesquisador – Qual foi a estratégia que você usou para resolver? O que você pensou?
E_{77} – O problema fala que tem 7 cabeças e 22 patas, então se a galinha tem 2 patas e o coelho tem 4, tinha que fazer 7 vezes 2 pois daria duas patas para cada um e o que sobrasse iria dar para os coelhos. Daí eu resolvi.

REGISTRO ALGÉBRICO

P – Qual foi a estratégia que você usou para resolver o da álgebra?
E_{70} – Raciocínio lógico né. Sou bom em raciocínio logico, eu peguei o que eu já aprendi muito bem e apliquei e fiz.
P – Perfeito, foi por raciocínio lógico.
E_{70} – Isso
P – Para chegar nos números, você fez operações com as letras, você chutou valores, você fez alguma conta?
E_{70} – Eu fiz uma conta de cabeça mesmo

P – Depois você escolheu o da álgebra, que é aquele de números e letras. Por que tu escolheste da álgebra depois?
E_{54} – Eu achei que ia ser *Bhaskara*, daí eu vi que não deu certo.

P – E no final, ficou a álgebra. E que você desistiu. Por que você a deixou por último então?
E_{65} – Porque me deu branco e eu não soube como lidar com ela.
P – Daí você preferiu desistir?
E_{65} – Sim, eu não ia saber o que fazer.

P – Perfeito. Ok. Daí você resolveu o do texto e daí se deparou com o problema da banana e o problema da álgebra. Você escolheu o da álgebra. Por que nesse momento você escolheu o da álgebra?
E_{66} – Foi porque eu achei que era mais fácil de responder que o das bananas.
P – Qual foi a estratégia que tu usaste para resolver o da álgebra?
E_{66} – Eu fui tentando achar o X e o Y escolhendo alguns números até chegar ao resultado certo, que caiba nos dois.

P – Entendi. E por final sobrou o de álgebra né, você desistiu no de álgebra né?
E_{55} – Sim
P – Por que você decidiu desistir no de álgebra?
E_{55} – Porque quando eu estava no nono ano a minha professora fazia bullying comigo e eu não conseguia prestar atenção na aula então eu não sei como fazer.

P – Perfeito. Daí no final apareceu o da álgebra. E você decidiu por desistir dele né?
E_{67} – Isso.
P – Por que o da álgebra foi o último para ti?

E_{67} – Porque era o mais difícil. Que eu não lembrava mais.
P – Ok e daí na resolução você não conseguiu achar uma estratégia que funcionasse e então preferiu desistir?
E_{67} – É que eu acho que eu aprendi no ano passado, daí eu não lembrava mais.

P – Perfeito, muito bom. Por final você pegou o da álgebra. Por que ele foi o último a ser escolhido?
E_{56} – Por causa que quando vê X e Y, eu pensei que teria que raciocinar mais, então vou deixar por último.
P – E qual foi a estratégia para resolver o da álgebra?
E_{56} – Eu lembrei o que a gente está estudando né, no início eu fiz mais. Só que aí eu vi que dava, tipo, estava $2X$ aí tem que multiplicar. Aí eu multipliquei e deu certinho. Eu botei o X e Y para eu saber qual é qual e depois fazer o de baixo e deu certinho.

P – Ok. Daí o segundo primeiro apareceu o da álgebra e o do texto. Daí você escolheu o da álgebra. Por que você escolheu o da álgebra nesse momento?
E_{69} – Porque eu fui tentar fazer, porque eu sei que já estudei, mas na hora me confundi porque não veio na minha cabeça.
P – Então você acreditou saber resolver, mas na hora de resolver fugiu, daí você preferiu desistir do problema.
E_{69} – Isso

P – Primeiro você teve os três para escolher e você começou pela álgebra, né? Por que você escolheu primeiro a álgebra, dentre os três?
E_{58} – Eu achei o mais fácil.
P – Ok. Quando você se deparou com o problema da álgebra, você o resolveu. Qual foi a estratégia que você fez?
E_{58} – Estava $x + 2y$ vai ser 8 de volta. Vi que o 2 estava fazendo vezes com o y, Fiz **8 dividido por 2**.

P – Perfeito. E por fim sobrou o da álgebra. Por que o da álgebra foi o último de todos?
E_{59} – Porque era o mais difícil. Eu não entendi nada.
P – Daí você fez ou desistiu?
E_{59} – Eu chutei.
P – Por que tu achas que o da álgebra é o mais difícil?
E_{59} – Não sei, não estava mostrando muito número. Tinha muita letra.

P – A álgebra. Por que que você começou fazendo pela álgebra? Por que você a escolheu de começou?
E_{72} – Eu a escolhi porque ela é básica que eu sempre me identifiquei.
P – Quando você diz básico, o que quer dizer o básico para ti?
E_{72} – O básico da matemática, o que eu já deveria saber. Mas eu não consegui resolver. É o que parecia ser fácil.
P – É o que parecia ser o mais fácil?
E_{72} – Sim, o mais fácil.
P – Na hora da estratégia para resolver, o que que você pensou em fazer mesmo dando certou ou não. Quais foram as estratégias que você pensou para a álgebra?
E_{72} – Para a álgebra foi primeiro isolar o X e o Y. Só que quando... eu acabei esquecendo como se isola quando há duas letras.
P – Perfeito. Daí dali não andou mais e você decidiu desistir?
E_{72} – Isso

P – Perfeito. Depois apareceu para ti um problema que envolvia bananas e um problema que envolvia uma álgebra.
E_{70} – Ok
P – Qual você escolheu então?
E_{70} – O da álgebra.
P – Por que você escolheu o da álgebra naquele momento?
E_{70} – Porque eu gosto de fazer as continhas. Eu achei mais fácil, porque é só isolar o X e o Y.

P – Então você meio que explicou a estratégia.
E_{70} – Sim, isolar o X e isolar o Y.

P – Vamos lá. Por que a álgebra foi o último de todos? O que ela tem que fez você escolher por último?
E_{76} – Porque como eu já falei, eu sei que já estudei isso, mas ali não veio para a memória, sabe?
P – Ok
E_{76} – E realmente ela parecia mais assustadora, mais complicada de resolver, então ela foi a última porque eu sabia que seria mais difícil, sabe?
P – Perfeito. Daí naquela não conseguiu uma resposta e preferiu desistir, certo?
E_{76} – Isso

P – E por final a álgebra. Por que a álgebra foi o último? E qual foi a estratégia para resolver?
E_{64} – Era porque eu não tinha a mínima noção de como resolver. E eu fui por tentativa...
P – Chutando valores?
E_{64} – É, somar os números e diminuir com os outros, para ver se dava alguma coisa.

P – E você aceitou, você encarou a álgebra. Porque a álgebra para ti, tinha que ficar por último? Por que ela tinha que ser a mais difícil? O que tu achas disso?
E_{85} – A álgebra eu vou precisar fazer uma conta certa, eu não posso só tipo, fazer como na das estrelas e da banana, supor que cada um é metade daquele valor e depois realocar. Entendeu?
P – Está, perfeito. E não dá o esquema das cabeças ali também? Não tem cabeças para desenhar.
E_{85} – Isso.
P – E tu conseguiu uma resposta para o da álgebra? Qual foi a estratégia que você usou?
E_{85} – Aí eu fui pela escola. Separar letras dos números...
P – Isolar a letra, é isso?
E_{85} – Exatamente. Passa para o outro lado negativo ou positivo, depende do valor.

P – Por que a álgebra fica por último para ti?
E_{80} – Porque, querendo ou não, os outros chamam mais atenção, porque parecem ser mais fáceis. Pelo texto e pela imagem.
P – Ok. Ou seja, quando um texto ou quando tem uma imagem, sem ser só álgebra, parece mais fácil o problema então?
E_{80} – Sim
P – Qual foi a estratégia que tu usaste para chegar na resposta?
E_{80} – A estratégia é que já tinha um número, já tinha o $2y$ e tinha que encontrar o valor de x para chegar em um resultado. E outro já tinha o valor de x e tinha que encontrar o valor do y.

P – E por final o programa apresentou a da álgebra. E você decidiu resolver ele, você chegou em uma resposta. Por que a álgebra é o último para ti?
E_{81} – Porque por ser uma matéria que envolve um pouco mais de pensamento, eu quis deixar por último para ter mais tempo para resolver.
P – Você acha mais difícil no teu ver, comparado aos outros ele é mais difícil...
E_{81} – Ok
P – E tu conseguiu chegar em uma resposta no da álgebra.
E_{81} – Sim
P – Tu consegues explicar qual foi a estratégia que você usou para chegar na resposta?
E_{81} – Basicamente foi a mesma estratégia que eu fiz no da banana. Tentei por tentativa e erro e uma hora eu acertei.