



UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA
LUIS HERNAN CONTRERAS PINOCHET

SISTEMAS DINÂMICOS E CAOS:
UM ESTUDO SOBRE A FAMÍLIA QUADRÁTICA

Palhoça/SC

2023

LUIS HERNAN CONTRERAS PINOCHET

**SISTEMAS DINÂMICOS E CAOS:
UM ESTUDO SOBRE A FAMÍLIA QUADRÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática da Universidade do Sul de
Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção
do título de Bacharel.

Orientador: Prof. Dalmo Gomes de Carvalho, MsC

Palhoça/SC

2023

LUIS HERNAN CONTRERAS PINOCHET

**SISTEMAS DINÂMICOS E CAOS:
UM ESTUDO SOBRE A FAMÍLIA QUADRÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática da Universidade do Sul de
Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção
do título de Bacharel.

Tubarão, 9 de junho de 2023.

Professor e orientador Dalmo Gomes de Carvalho, MSc
Universidade do Sul de Santa Catarina

Prof. Marcos dos Santos, Dr.
Universidade Federal Fluminense e Instituto Militar de Engenharia

Prof. Mário Selhorst, MSc
Universidade do Sul de Santa Catarina

Agradeço a Deus pela oportunidade de conhecer um pouco sobre as obras de cientistas que me inspiram a cada dia e que falaram com o senhor pela linguagem matemática.

“A matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o Universo.”

Galileo Galilei (1564-1642)

“O principal objetivo de todas as investigações do mundo exterior deve ser descobrir a ordem racional e harmonia que tem sido imposta por Deus e que ele nos revelou na linguagem da matemática.”

Johannes Kepler (1571 - 1630)

“Deus criou tudo por número, peso e medida.”

Isaac Newton (1643-1727)

“Se Deus fala ao homem, sem dúvida, ele usa a linguagem da matemática.”

Henri Poincaré (1854 – 1912)

“Apenas pela matemática sozinha, alguém pode ter a concreta realização de Deus.”

Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920)

RESUMO

O estudo tem por objetivo analisar o que engloba o estudo de sistemas dinâmicos e como esses sistemas se transformam em sistemas caóticos com mudanças relativamente pequenas em seus parâmetros. Para isto, é exemplificado através de uma família de funções, no caso a quadrática, analisando de forma detalhada seu comportamento e concluindo a partir do comportamento dessa família o que acontece com outros sistemas dinâmicos de forma geral. Para tanto, foi conduzida uma pesquisa bibliográfica, descritiva, utilizando os métodos de “ensaio teórico” na construção da teoria apresentada nos capítulos anteriores, e “bibliométrico” que contribuiu estatisticamente para avaliar tendências de crescimento da produção, publicação e autoria. A partir deste trabalho foi possível abordar, de maneira breve, a área emergente e crescente de sistemas dinâmicos, parte das suas origens clássicas, estruturas, propriedades (especificamente da família quadrática), e o surgimento do Caos. Além disso o estudo bibliométrico possibilitou compreender um pouco a evolução teórica e tendências de 1978 a 2023. A pesquisa traz a expansão para outras áreas além da matemática, como a física, engenharias, medicina, entre outras. Com este estudo foi possível compreender de modo parcial algumas técnicas e estruturas da análise geométrica para sistemas unidimensionais e bidimensionais, o comportamento de pontos fixos e o surgimento de bifurcações, com a variação de parâmetros de controle no sistema e a existência de ciclos limite. O estudo mostrou que o Caos ocorre quando a função é topologicamente transitiva e, também, quando possui sensibilidade às condições iniciais a partir de exemplos discretos.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Caos, Família Quadrática.

ABSTRACT

The study aims to analyze what encompasses the study of dynamic systems and how these systems transform into chaotic systems with relatively small changes in their parameters. For this, it is exemplified through a family of functions, in this case, the quadratic one, analyzing its behavior in detail and concluding from the behavior of this family what happens to other dynamic systems in general. To this end, descriptive bibliographical research was carried out, using the “theoretical essay” method in constructing the theory presented in the previous chapters and the “bibliometric” that contributed statistically to evaluate growth trends of production, publication, and authorship. This work made it possible to briefly address the emerging and growing area of dynamical systems, part of their classical origins, structures, properties (specifically of the quadratic family), and the emergence of Chaos. In addition, the bibliometric study made it possible to understand the theoretical evolution and trends from 1978 to 2023. The research expands to areas other than mathematics, such as physics, engineering, and medicine. This study helped partially understand some techniques and structures of geometric analysis for one-dimensional and two-dimensional systems, the behavior of fixed points, and the appearance of bifurcations with the variation of control parameters in the system and limit cycles. The study showed that Chaos occurs when the function is topologically transitive and is sensitive to initial conditions from discrete examples.

Keywords: Dynamical Systems, Chaos, Quadratic Family.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Busca na base de dados Web of Science.....	5
Figura 2 - Busca na base de dados Scopus.....	6
Figura 3 - Códigos do R para unir as bases de dados Scopus e Web of Science	6
Figura 4 - Publicações anuais nas principais bases de dados WoS, Scopus e Merge (união das bases).....	7
Figura 5 - Fontes principais pela Lei de Bradford.....	9
Figura 6 - Fontes mais relevantes	10
Figura 7 - A maioria das fontes citadas nas referências pelos documentos.....	11
Figura 8 - Prof. Dr. Vaidyanathan Sivaraman.....	11
Figura 9 - Autores mais relevantes.....	12
Figura 10 - Produção dos autores ao longo do tempo	12
Figura 11 - Produtividade dos autores pela Lei de Lokta	13
Figura 12 - Média de impacto do autor.....	14
Figura 13 - Prof. Guanrong (Ron) Chen	14
Figura 14 - Documentos mais citados no mundo	15
Figura 15 - As referências mais citadas nos artigos.....	19
Figura 16 - Palavras mais relevantes frequentes	20
Figura 17 - Mapa de árvore	21
Figura 18 - Frequência de palavras ao longo do tempo	21
Figura 19 - Tendências de assuntos	22
Figura 20 - Rede de co-ocorrência.....	23
Figura 21 - Evolução das temáticas por período	24
Figura 22 - Mapa temático.....	25
Figura 23 - Rede de colaboração de pesquisadores influentes.....	26
Figura 24 - Colaboração dos Países pelo Mundo	27
Figura 25 - Classificação dos países em nº de citações	27
Figura 26 - Classificação dos países pela produtividade durante os anos	28
Figura 27 - Jules-Henri Poincaré (1854-1912)	35
Figura 28 - Modelo computacional desenvolvido por Ignacio Larrosa Cañestro	40
Figura 29 - Atrator de Lorenz no espaço de fase (Efeito Borboleta)	67

Figura 30 - Exemplo de Sistema Caótico69

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Quadrática para $\mu = 4$ e $x_0 = 0,35$	40
Gráfico 2 - Quadrática para $f_1x, \mu = 4$ e $x_0 = 0,35$	41
Gráfico 3 - Quadrática para $f_5x, \mu = 4$ e $x_0 = 0,35$	41
Gráfico 4 - Quadrática para $f_{50}x, \mu = 4$ e $x_0 = 0,35$	42
Gráfico 5 - Quadrática para $f_{100}x, \mu = 4$ e $x_0 = 0,35$	42
Gráfico 6 - Quadrática para $\mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$	44
Gráfico 7 - Quadrática para $f_1x, \mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$	44
Gráfico 8 - Quadrática para $f_5x, \mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$	45
Gráfico 9 - Quadrática para $f_{50}x, \mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$	45
Gráfico 10 - Quadrática para $f_{100}x, \mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$	46
Gráfico 11 - Fixed point iteration	57

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Matriz de ‘amarração’ do detalhamento dos documentos mais citados no mundo	18
Quadro 2 - Principais indicadores bibliométricos.....	30
Quadro 3 - Conjunto de análises disponíveis no Biblioshiny	30
Quadro 4 - Palavras-chave para o critério de busca nas bases de dados	31

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tipo de documento.....	8
Tabela 2 - Áreas de conhecimento.....	8
Tabela 3 - Iteração de função quadrática no parâmetro , $\mu = 4$ e $x_0 = 0,35$	43
Tabela 4 - Iterações de função quadrática no parâmetro, $\mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$	46

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	1
1.1.	TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA.....	1
1.2.	PROBLEMATIZAÇÃO	2
1.3.	JUSTIFICATIVAS	2
1.4.	OBJETIVOS	4
1.4.1.	Objetivo geral.....	4
1.4.2.	Objetivos específicos.....	4
2.	ANÁLISE BIBLIOMÉTRICA	5
2.1.	ANÁLISE DAS FONTES.....	9
2.2.	ANÁLISE DOS AUTORES	11
2.3.	ANÁLISE DOS DOCUMENTOS	15
2.4.	ANÁLISE TEMÁTICA	19
3.	DELIMITAÇÃO METODOLÓGICA	29
4.	SISTEMAS DINÂMICOS.....	33
4.1.	SISTEMAS DINÂMICOS: UM POUCO DE HISTÓRIA.....	33
4.2.	DINÂMICA UNIDIMENSIONAL	37
4.2.1.	Exemplos de Sistemas Dinâmicos.....	38
4.2.2.	Preliminares do Cálculo.....	50
4.2.3.	Definições Elementares	54
4.2.4.	Um exemplo: A família quadrática	60
4.3.	CAOS	66
5.	CONCLUSÕES	70
	REFERÊNCIAS.....	73
	APÊNDICE A – LISTA DE DOCUMENTOS MAIS CITADOS NO MUNDO	77

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado o contexto deste estudo que norteará as próximas seções. Inicialmente é apresentado o tema e a delimitação tema, na sequência, a problematização, buscando identificar algumas questões que foram formuladas, seguida pela apresentação da justificativa e, por fim, são elencados os objetivos propostos.

1.1. TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA

O tema escolhido para a construção do Trabalho de Conclusão de Curso é “Sistemas Dinâmicos e Caos, a partir de um estudo sobre uma família de funções”. Para esta investigação optou-se pela quadrática que é uma família de funções comumente conhecida.

Estudaremos funções quadráticas da forma

$$F_{\mu}(x) = \mu x(1 - x) = \mu x - \mu x^2,$$

que são curvas de fácil visualização, com pontos de máximos encontrados sem a necessidade de muitos cálculos e que podem ter seu parâmetro $\mu > 0$ alterado para qualquer valor sem que dificulte a manipulação desta. Sempre haverá concavidade pra baixo nesta análise, apesar da família quadrática ser mais abrangente.

1.2. PROBLEMATIZAÇÃO

Pretende-se responder as seguintes questões:

- Quais conceitos matemáticos são fundamentais para o estudo de sistemas dinâmicos?
- Como essa teoria pode ser aplicada na família quadrática e, como encontramos o 'Caos' nessa família de funções através de iterações e mudanças em seu parâmetro $\mu > 0$?

Para isso, utilizar-se-á teoremas importantes em sistemas dinâmicos, tal como o 'Teorema do Ponto Fixo de Brouwer' (MARTINS; VASCONCELLOS, 2014). Além desse teorema outros podem ser empregados. Nessa direção, optou-se por incluir também como funciona essa dinâmica dentro de uma função linear, fazendo uma conexão com conceitos de otimização.

1.3. JUSTIFICATIVAS

Os sistemas dinâmicos ocorrem em todos os ramos da ciência, desde as equações diferenciais da mecânica clássica na física até as equações diferenciais da economia matemática e da biologia.

A teoria do Caos é um ramo da matemática que atrai grande atenção, apesar de não ser mais moda, representou e ainda representa um sopro inovador por suas colaborações, inclusive em outras ciências. Pode-se dizer também que existem muitas definições diferentes pra 'Caos', mas nos interessa o 'Caos' em sistemas dependentes de condições iniciais, topologicamente transitivos e que possuem pontos periódicos no conjunto.

Diversas áreas se beneficiaram com descobertas na teoria do Caos, como Economia Matemática, Econometria, Modelagem e Métodos Quantitativos em geral, seja como ferramenta, seja como campo de estudo em si.

Pensando que a otimização necessita de uma função matemática para atuar, principalmente, em sistemas dinâmicos, a modelagem não é uma tarefa simples, é de interesse fazer essa conexão para que dentro dessa nossa busca por pontos extremos de uma função, que é o objeto de interesse em otimização, seja possível prever comportamentos que nos aproximem com mais facilidade desses pontos ótimos.

Um desafio que se apresenta para esta pesquisa é encontrar o ponto ótimo em funções multimodais que são aquelas que possuem diversos máximos e mínimos locais (HEIN, 1998). Com a ajuda das ferramentas de cálculo diferencial e integral, como gradiente entre outras, será possível encontrar esses pontos de forma mais eficiente.

Uma das principais motivações para o estudo com Sistema Dinâmicos é o fato de que ele estuda a evolução de um fenômeno com o passar do tempo juntamente com suas propriedades locais e globais.

Esse assunto é de extrema relevância e aplicabilidade, pois auxilia no desenvolvimento de métodos preditivos dentro de várias áreas, apesar do escopo no trabalho ser apenas matemático. Em matemática um sistema é definido como sendo um conjunto de uma ou mais equações envolvendo o mesmo conjunto de variáveis, estas equações podem ser lineares ou não, e essa característica definirá o sistema como linear ou não linear. Quando se acrescenta a evolução com o passar do tempo ele passa a ser dinâmico. Qualquer análise que envolva evoluções temporais, tende a fazer uso dos sistemas dinâmicos (KATOK; HASSELBLATT, 1996; LYNCH, 2014).

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. Objetivo geral

Analisar o que engloba o estudo de sistemas dinâmicos, e como esses sistemas se transformam em sistemas caóticos com mudanças relativamente pequenas em seus parâmetros.

1.4.2. Objetivos específicos

Os objetivos específicos estabelecidos foram:

- a) Exemplificar, através de uma família de funções, no caso a quadrática, analisando de forma detalhada seu comportamento.
- b) Concluir, a partir do comportamento dessa família, o que ocorre com outros sistemas dinâmicos de forma geral.
- c) Identificar as principais características e direcionamentos que norteiam as pesquisas científicas que envolvem sistemas dinâmicos, caos e família quadrática.

2. ANÁLISE BIBLIOMÉTRICA

O termo bibliometria foi criado por Paul Otlet em 1934, mas consolidou-se em 1969 (VANTI, 2002). A bibliometria é uma técnica quantitativa e estatística de medição dos índices de produção e disseminação do conhecimento científico (ARAÚJO, 2006). Nesse sentido, verificamos que os estudos bibliométricos são mais complexos do que apenas um levantamento estatístico puro e simples, ampliando-se para análises mais complexas e diversificadas, tornando-se uma ferramenta de grande utilidade para a ciência.

Diante disso, as bases ‘*Web of Science*’ e ‘*Scopus*’ foram consultadas a partir de um aplicativo de *OpenVPN Connect* disponibilizado pelo local de trabalho do próprio do pesquisador (Universidade Federal de São Paulo – Unifesp). A escolha das bases é por apresentarem coleções em todas as áreas temáticas, de alta qualidade técnica e com estrato de impacto alto (PRINS et al., 2016). Ambas as telas do ‘*Web of Science*’ e ‘*Scopus*’ são apresentados respectivamente nas Figuras 1 e 2.

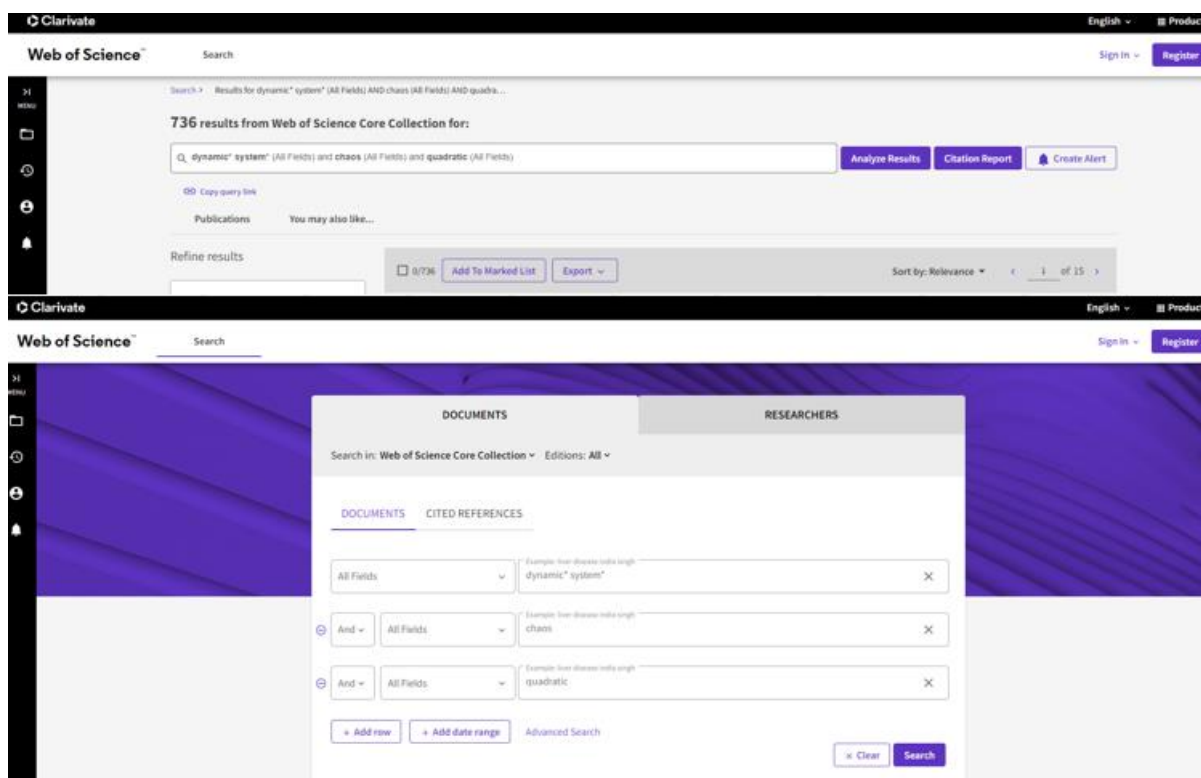


Figura 1 - Busca na base de dados Web of Science

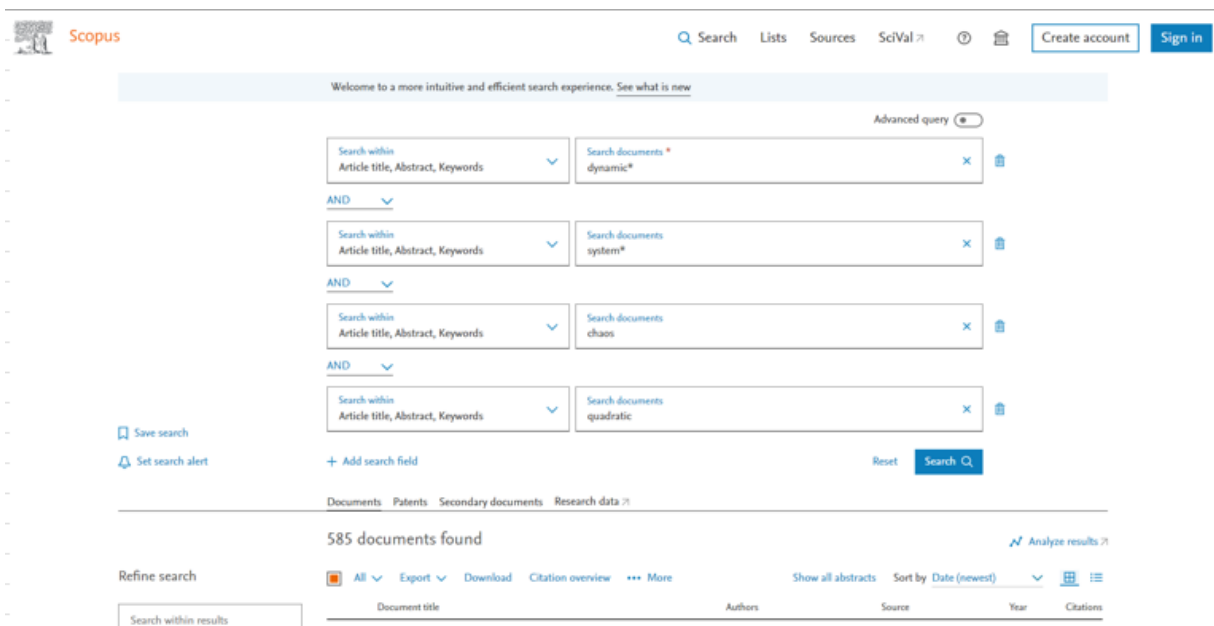


Figura 2 - Busca na base de dados Scopus

A Figura 3 apresenta o uso do *software* RStudio com a plataforma *biblioshiny* foram encontradas nas bases Web of Science 736 e na Scopus 580 resultados. Ao utilizar o comando 'mergeDbSources' que consiste em criar um terceiro arquivo com o consolidado da base de dados unindo dados distintos e removendo documentos duplicados (345) resultando com 971 resultados no recorte temporal de 1978-2023.

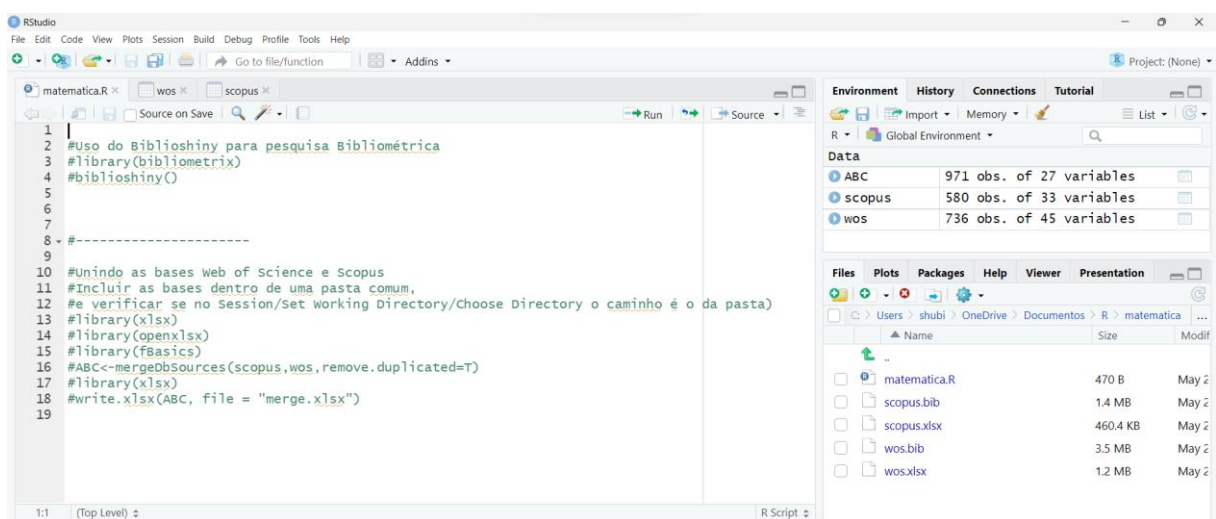


Figura 3 - Códigos do R para unir as bases de dados Scopus e Web of Science

Fonte: análise de dados no R Studio.

A Figura 4 apresenta as linhas de tendência em crescimento linear para as bases de dados, bem como a união de ambas (*merge*). É importante ressaltar que a aparente queda em 2023 não é real, pois ainda estarão sendo publicados artigos até o final do referido ano, e normalmente, a maioria dos periódicos internacionais publicam suas edições no final do ano.

Além disso, a taxa de crescimento médio por ano foi de 5,87%, a média de documentos publicados por ano foi de 12,2, a média de citações por documentos 23,68 com uma quantidade de 11869 referências.

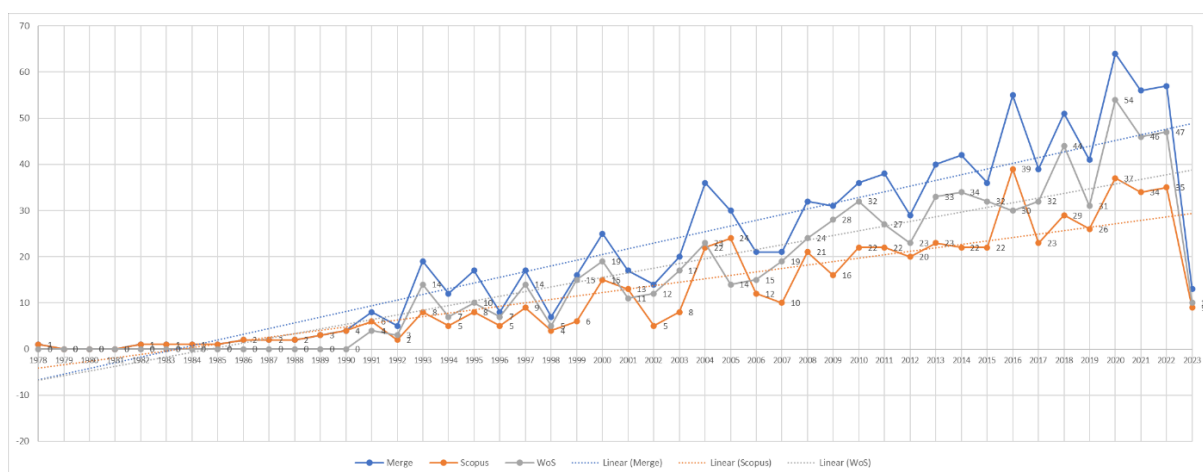


Figura 4 - Publicações anuais nas principais bases de dados WoS, Scopus e Merge (união das bases)

Fonte: elaboração do autor.

Ao analisar os autores dos documentos (Tabela 1) observou-se que estes representaram 1773 durante o período. Destes documentos, 131 foram autores de autoria única. A média de coautores por documentos é em torno de 2,78, e a colaboração de autorias internacionais distintas do primeiro autor é em torno de 12,26%. Ao analisar os tipos de documentos percebe-se que majoritariamente foram artigos científicos já publicados 82,49% seguido por congressos/eventos com 9,47% e artigos de *proceeding paper* com 4,84%.

Tabela 1 - Tipo de documento

Tipo	n	%
artigos (publicados)	801	82,49
congressos/eventos	92	9,47
artigos de <i>proceedings paper</i>	47	4,84
capítulo de livro	25	2,57
artigos em <i>early access</i>	2	0,21
item bibliográfico	1	0,10
livro	1	0,10
errata	1	0,10
nota	1	0,10
	971	100,00

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

Os artigos se encontram classificados em diversas áreas de conhecimento (Tabela 2), destacando-se matemática (29,43%), engenharias (26,27%) e física/astrofísica (22,15%).

Tabela 2 - Áreas de conhecimento

Tipo	n	%
<i>Mathematics</i>	286	29,43
<i>Engineerings</i>	255	26,27
<i>Physics and Astronomy</i>	215	22,15
<i>Computer Science</i>	118	12,18
<i>Multidisciplinary</i>	47	4,89
<i>Chemistry</i>	24	2,49
<i>Decision Sciences, Business and Economy</i>	13	1,34
<i>Medicine</i>	7	0,67
<i>Neuroscience</i>	6	0,58
	971	100,00

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

2.1. ANÁLISE DAS FONTES

A Lei de Bradford (foco nos periódicos), também conhecida como a lei da dispersão, analisa a produtividade de periódicos conforme Figura 5. Nesse sentido, permite, mediante medição da produtividade das revistas, estabelecer o núcleo e as áreas de dispersão sobre um determinado assunto em um mesmo conjunto de revistas (VANTI, 2002). O enunciado da Lei de Bradford diz que se os periódicos forem ordenados em ordem de produtividade decrescente de artigos sobre um determinado assunto, poderão ser distribuídos em um núcleo de periódicos mais particularmente devotados a esse assunto e em diversos grupos ou zonas contendo o mesmo número de artigos que o núcleo, sempre que um número de periódicos e das zonas sucessivas for igual a $1:n:n^2$ (PINHEIRO, 1983).

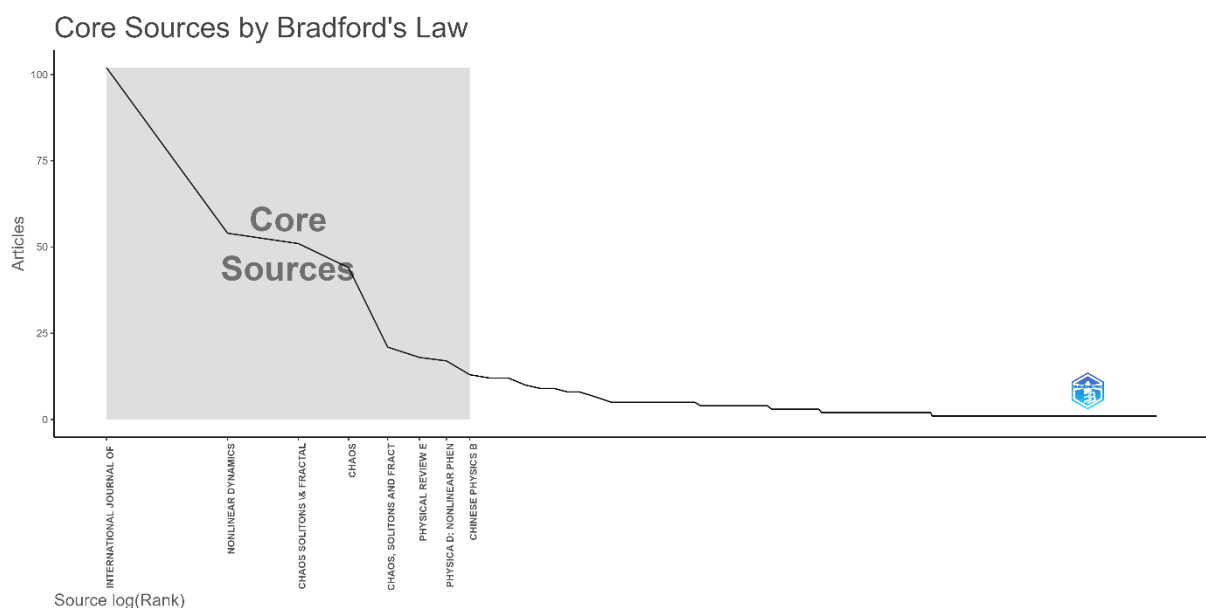


Figura 5 - Fontes principais pela Lei de Bradford

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

Neste estudo visto na Figura 6 o periódico que ficou em primeiro no rank com o maior número de publicações, “*International Journal of Bifurcation and Chaos*¹” (n=102) de Singapura, seguido pelo “*Nonlinear Dynamics*²” (n=54) - Holanda, “*Chaos Solitons & Fractals*³” (n=51) dos Estados Unidos, entre outros que ficaram localizados na ‘Zone 1’, que corresponde à concentração, considerados como ‘core sources’.

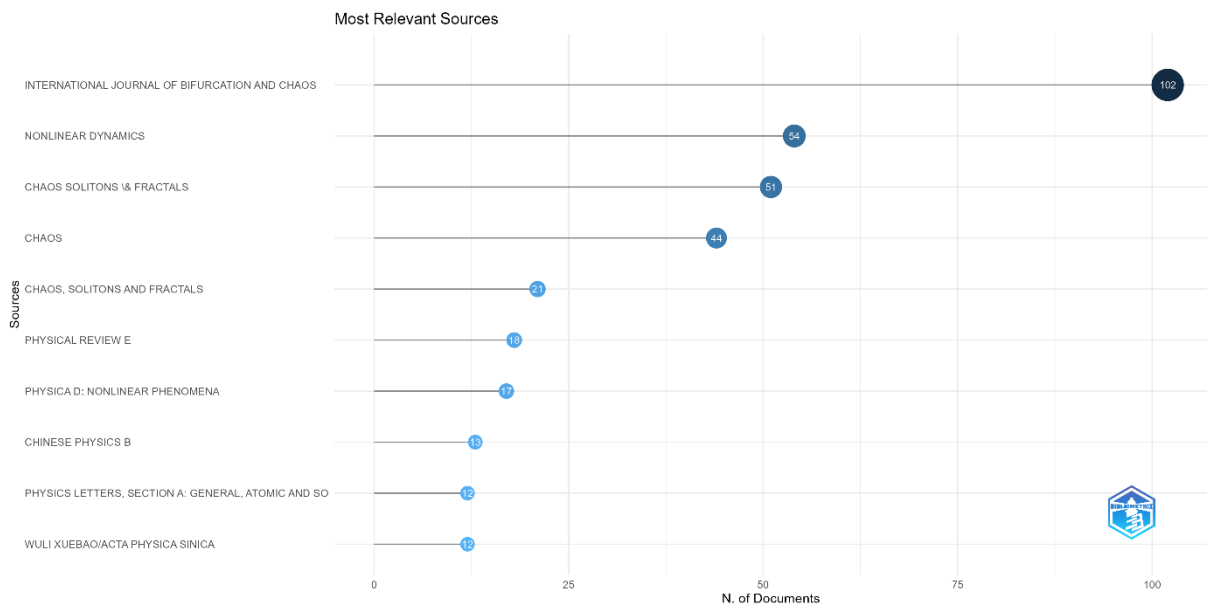


Figura 6 - Fontes mais relevantes

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

Ademais, observam-se também as principais fontes citadas nas referências pelos documentos apresentadas na Figura 7. Nesse sentido, o periódico ‘*Physical Review Letters*’ aparece como o mais citado (n=594), seguido pelo ‘*International Journal of Bifurcation and Chaos*’ (n=582), ‘*Chaos, Solitons & Fractals*’ (n=456), entre os principais.

¹ Disponível em: <https://www.worldscientific.com/worldscinet/ijbc> Acesso em: 29/05/2023.

² Disponível em: <https://www.springer.com/journal/11071> Acesso em: 29/05/2023.

³ Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/journal/chaos-solitons-and-fractals> Acesso em 29/05/2023.

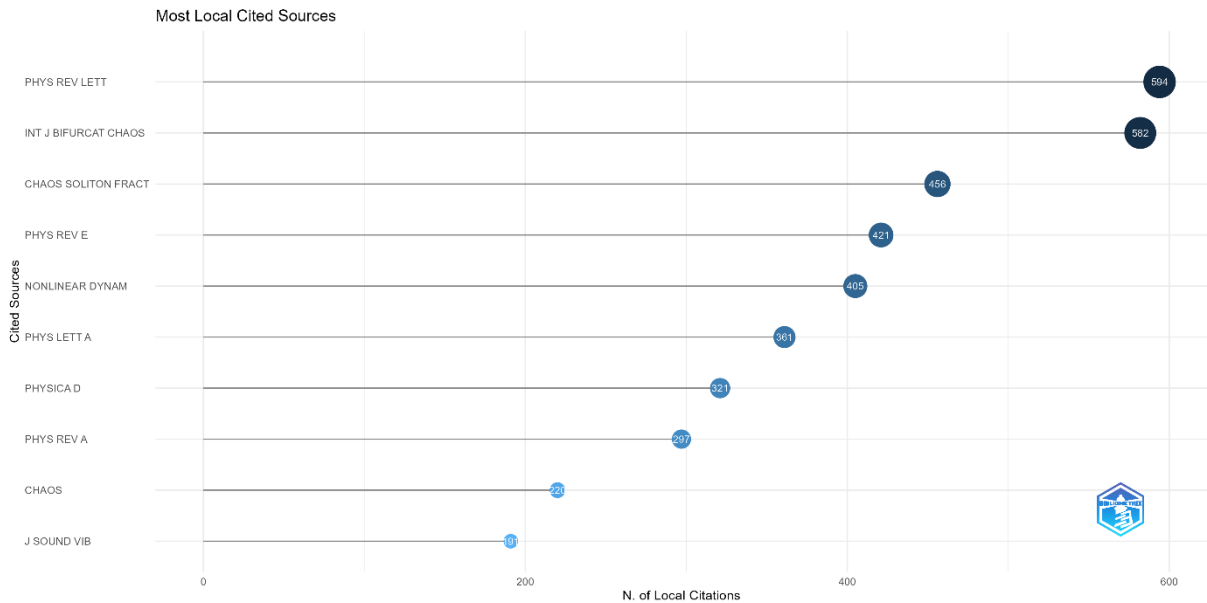


Figura 7 - A maioria das fontes citadas nas referências pelos documentos

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

2.2. ANÁLISE DOS AUTORES

A Figura 9 exibe o fluxo de publicação dos autores mais produtivos por ano dos 10 autores mais produtivos da base de dados. O tamanho do círculo representa a quantidade de artigos publicados, enquanto a intensidade da cor azul reflete o impacto da pesquisa em termos de número de citações, VAIDYANATHAN S (Figura 8) foi o que mais produziu em 2016 e é considerado o mais relevante por número de documentos publicados (Figura 10).



Figura 8 - Prof. Dr. Vaidyanathan Sivaraman

Fonte: Faculty-Mathematics Mississippi State University⁴

⁴ Disponível em: <https://www.math.msstate.edu/directory/vsivaraman> Acesso em: 03/06/2023.

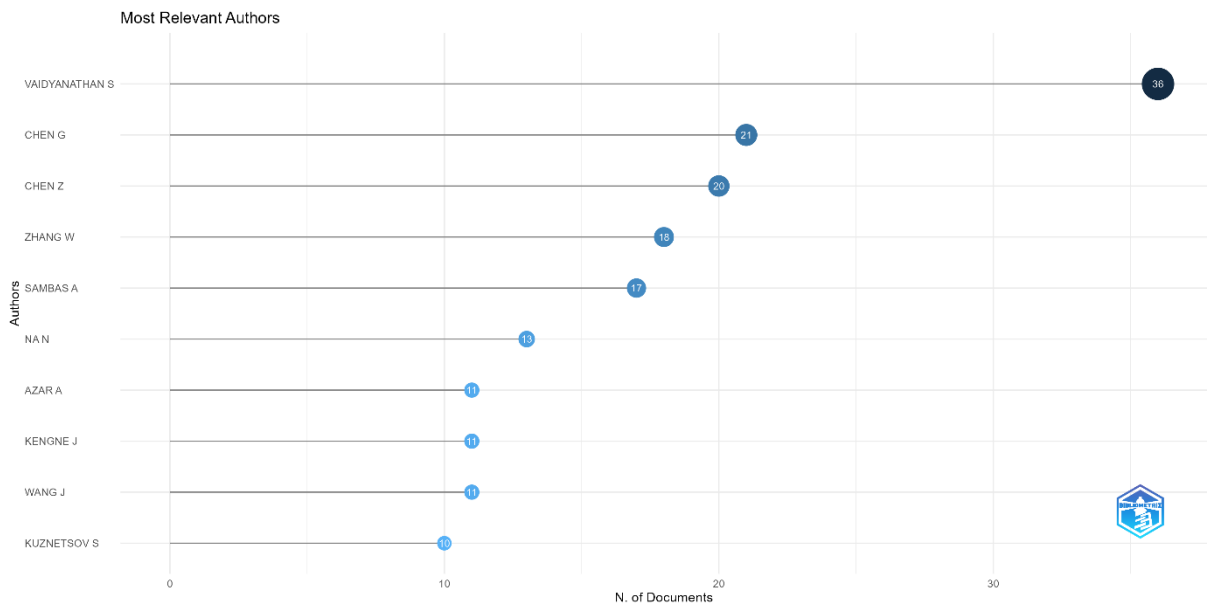


Figura 9 - Autores mais relevantes

Fonte: dados extraídos do Biblioshiny (2023).

Nesse caso, observa-se pela Figura 10 uma continuidade de alguns autores ao longo dos anos (CHEN G, CHEN Z, ZHANG W, NA N, WHANG J, e KUZNETSOV S), por outro lado, vemos que alguns novos autores que surgiram a partir de 2013 e mantêm uma regularidade e boa produção científica (VAIDYANATHAN S, AZAR A, KENGINE J).

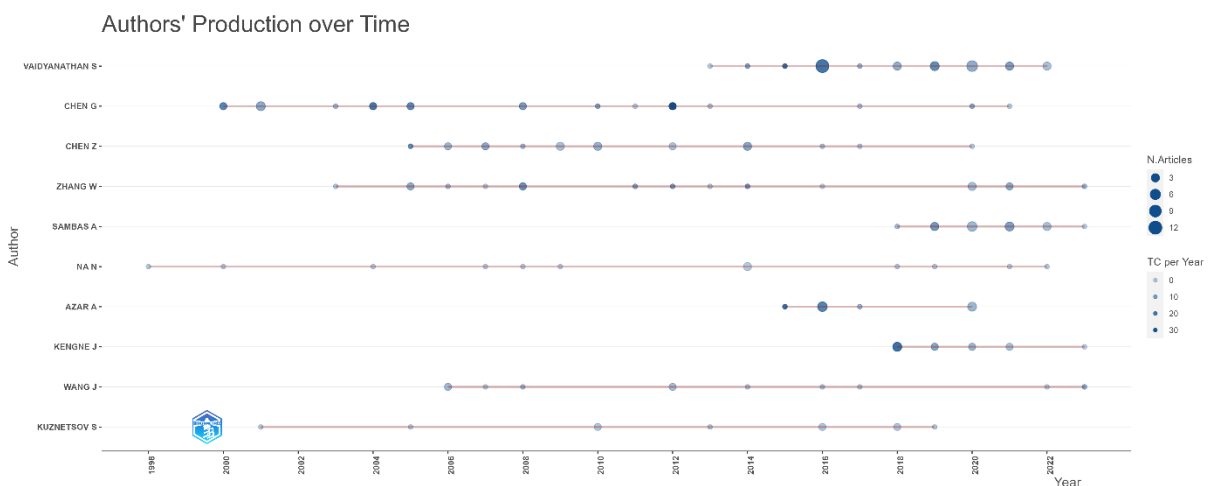


Figura 10 - Produção dos autores ao longo do tempo

Fonte: dados extraídos do Biblioshiny (2023).

A Lei de Lotka (foco nos autores) foi criada em 1926, também conhecida como Lei do Quadrado Inverso, devido a sua premissa: o número de autores que tenham publicado exatamente (n) trabalhos é inversamente proporcional a (n^2). Para Maltrás Barba (2003) há uma regra que a cada 100 autores com um trabalho somente, haverá 25 autores com 2 trabalhos, 11 autores com 3 trabalhos e assim sucessivamente. A Lei de Lotka é vista também como uma função de probabilidade de produtividade. Quanto mais se publica, mais parece que se facilita publicar um novo trabalho e os pesquisadores que publicam resultados mais interessantes ganham mais reconhecimento e acesso a recursos para melhorar sua pesquisa (MALTRÁS BARBA, 2003). Portanto, a Lei de Lotka apresentada na Figura 11 mede a produtividade dos autores de acordo com um modelo de distribuição tamanho-frequência dos diversos autores em um conjunto de documentos (TEIXEIRA; IWAMOTO; MEDEIROS, 2013).

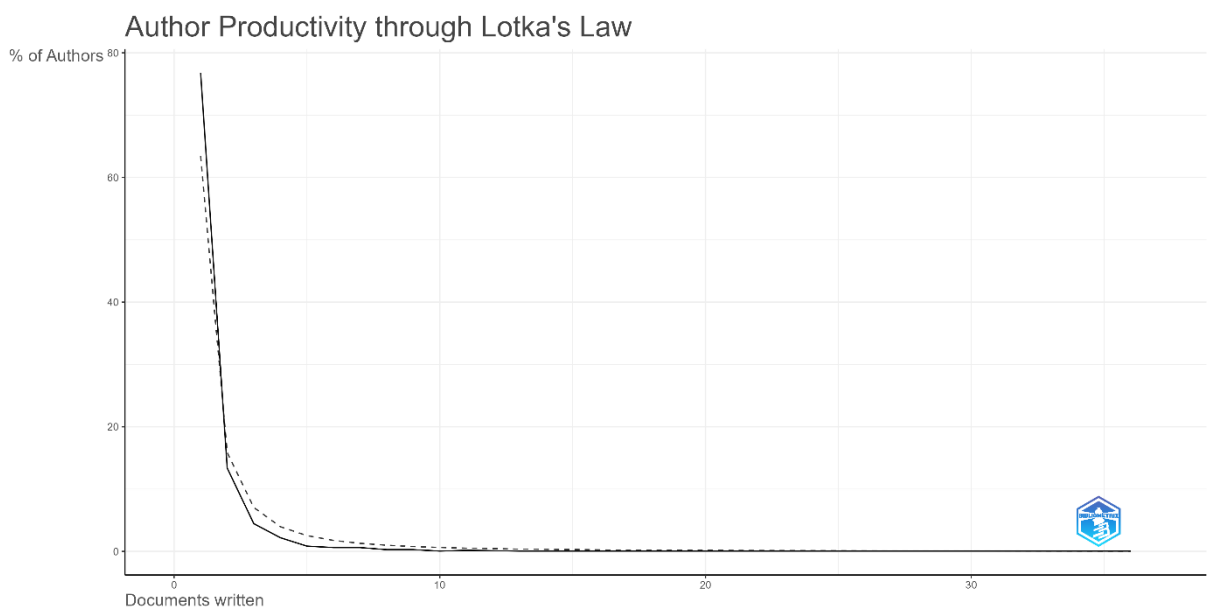


Figura 11 - Produtividade dos autores pela Lei de Lotka

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

O H-Index é um indicador que também serve para aferir o impacto dos autores. Os pontos atribuídos a este indicador mensuram a produção científica individual de cada pesquisador, relacionando artigos e citações. Nesse sentido, quanto maior a pontuação do H-Index, mais expressivo é o impacto do autor (SCIMAGO, 2016). A Figura 12 apresenta os 10 principais autores com maior impacto pelo H-Index,

destacando o Prof. Guanrong (Ron) Chen (Figura 13) com o H-Index mais alto (proporcional=17; real =140).

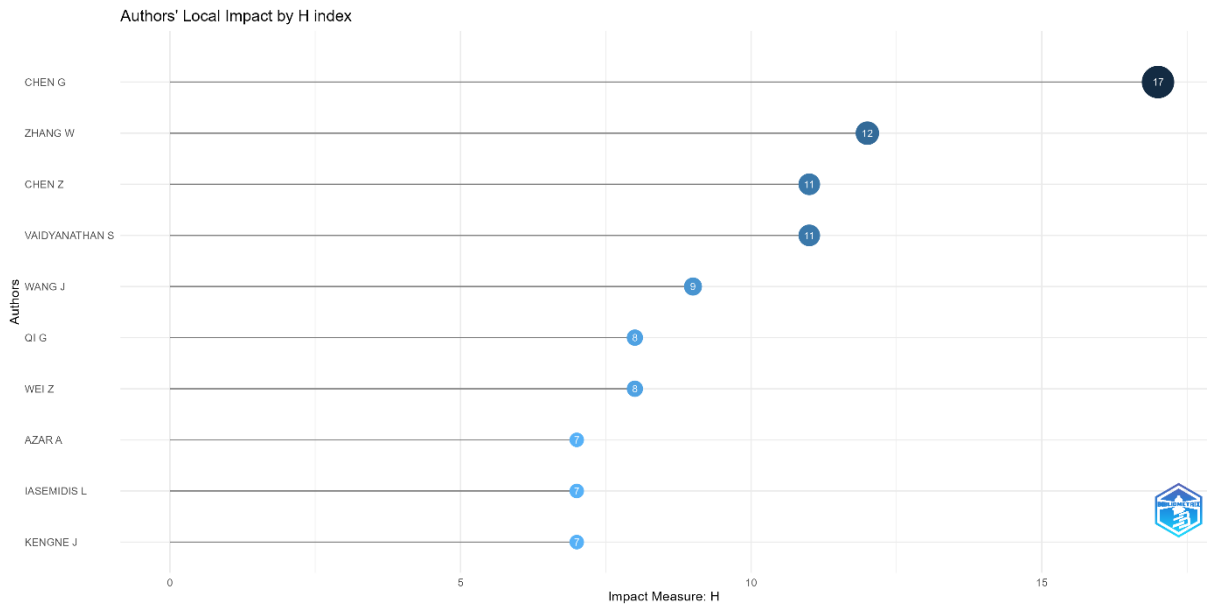


Figura 12 - Média de impacto do autor

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

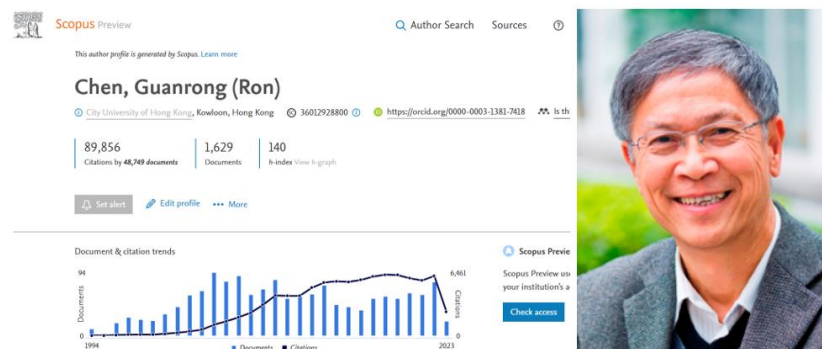


Figura 13 - Prof. Guanrong (Ron) Chen

Fonte: Department of Electrical Engineering – City University of Hong Kong⁵

⁵ Disponível em: <https://www.ee.cityu.edu.hk/~gchen/> Acesso em 03/06/2023.

2.3. ANÁLISE DOS DOCUMENTOS

Ao buscar os principais documentos citados no mundo percebemos que o autor Izhikevich (2004) lidera com 1685 citações, seguido por Grebogi (1983) com 1252 e Lonav (2013) com 570. A lista dos 10 documentos mais citados no mundo é apresentada na Figura 14 e descrito em detalhes na sequência na matriz de ‘amarração’ observada no Quadro 4. Além disso, é possível observar que o periódico *‘International Journal of Bifurcation and Chaos’* aparece 4 vezes nesta lista. O Apêndice A apresenta o detalhamento dos 10 principais documentos.

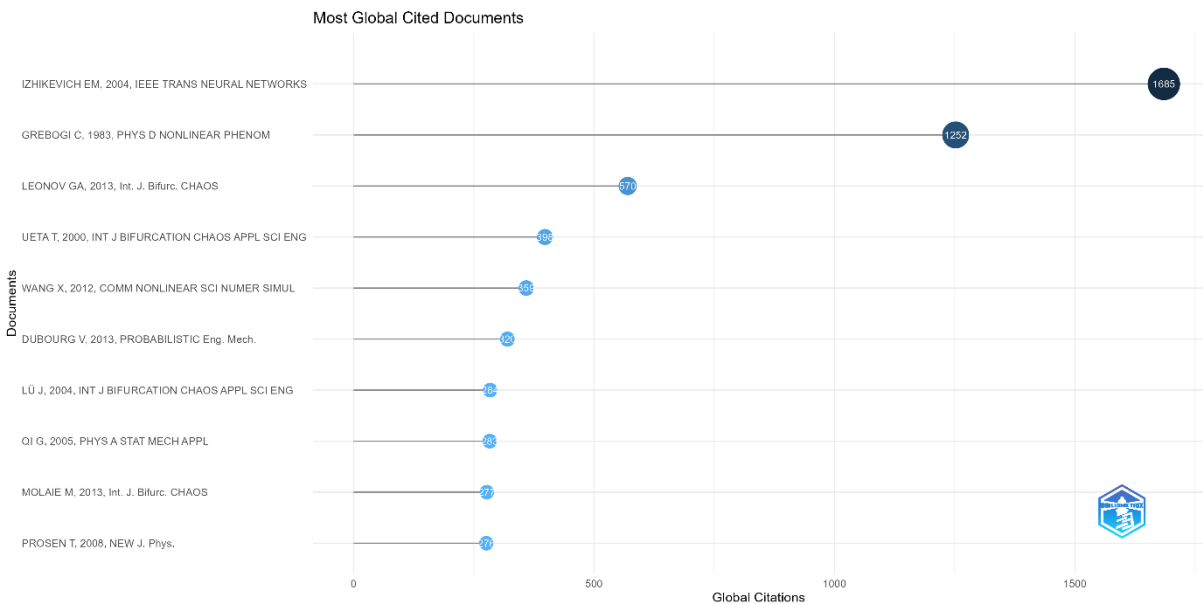


Figura 14 - Documentos mais citados no mundo

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

Ordem	Artigo	Revista / JCR / H-INDEX	Autor/Ano	Resumo da obra
1	Which Model to Use for Cortical Spiking Neurons?	'IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems' JCR: 10.47 H-INDEX: 234	Eugene M. Izhikevich (2004)	... discute a plausibilidade biológica e computacional eficiência de alguns dos modelos mais úteis de neurônios <i>spiking</i> e <i>bursting</i> . Comparamos sua aplicabilidade em larga escala simulações de redes neurais corticais. Desenvolveu-se um modelo quadrático I&F .
2	Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors, and Transient Chaos	'Physica D: Nonlinear Phenomena' JCR: 3.751 H-INDEX: 144	Celso Grebogi e Edward Ott (1983)	... apresenta exemplos que ilustram que eventos de crise prevalecem em muitas circunstâncias e sistemas e que, logo após uma crise, ocorre certo comportamento estatístico característico (cujo tipo depende do tipo de crise). Em particular, o fenômeno dos transitórios caóticos é investigado. Os exemplos discutidos ilustram crises em dimensões progressivamente maiores e incluem o mapa quadrático unidimensional...
3	Hidden attractors in dynamical systems. From Hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits	'International Journal of Bifurcation and Chaos' JCR: 2.450 H-INDEX: 112	G. A. Leonov e N. V. Kuznetsov (2013)	... em sistemas dinâmicos não lineares , os atratores podem ser considerados como atratores auto-excitados e ocultos. Atratores auto-excitados podem ser localizados numericamente por um procedimento computacional padrão, no qual após um processo transiente uma trajetória, partindo de um ponto de variedade instável em uma vizinhança de equilíbrio , atinge um estado de oscilação, portanto pode-se facilmente identificá-la . A pesquisa é dedicada a métodos analítico-numéricos eficientes para o estudo de oscilações ocultas . Aqui, é feita uma tentativa de refletir as tendências atuais na síntese de e métodos numéricos .
4	Bifurcation analysis of Chen's Equation	'International Journal of Bifurcation and Chaos' JCR: 2.450 H-INDEX: 112	Tetsushi Ueta e Guanrong Chen (2000)	O anticonrole do caos , tornando um sistema não caótico , levou à descoberta de alguns novos sistemas caóticos, particularmente a equação de Chen tridimensional autônoma de tempo contínuo com apenas dois termos quadráticos . Este artigo investiga algumas propriedades dinâmicas básicas e várias bifurcações da equação de Chen, revelando assim suas características diferentes de alguns outros modelos caóticos, como sua origem, o sistema de Lorenz .

5	A chaotic system with only one stable equilibrium	'Communication Nonlinear Science Numerical Simulation' JCR: 4.186 H-INDEX: 129	Xiong Wang e Guanrong Chen (2012)	A descoberta do novo sistema, a ser relatado neste artigo trata de um sistema quadrático autônomo tridimensional com um único equilíbrio nó-foco estável, normalmente se anteciparia comportamentos não caóticos e até assintoticamente convergentes... um amplo espectro de frequência contínuo e uma rota de duplicação de período para o caos .
6	Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis	'Probabilistic Engineering Mechanics' JCR: 2.954 H-INDEX: 85	V. Dubourg, B. Sudret, e F. Deheeger (2013)	O método apresentado mostrou-se eficiente em vários exemplos de aplicação. Ele pode lidar com problemas dinâmicos com um número razoavelmente alto de variáveis aleatórias e vários pontos de projeto. Mais trabalhos estão em andamento para incluir o algoritmo proposto dentro de uma estrutura de otimização de design baseada em confiabilidade.
7	A new chaotic system and beyond: The generalized Lorenz-Like System	'International Journal of Bifurcation and Chaos' JCR: 2.450 H-INDEX: 112	Jinhu Lü e Guanrong Chen (2004)	Este artigo apresenta um novo sistema caótico de equações diferenciais ordinárias autônomas quadráticas tridimensionais , que pode exibir (i) dois atratores caóticos de 1 rolo simultaneamente, com apenas três equilíbrios, e (ii) dois atratores caóticos de 2 rolos simultaneamente, com cinco equilíbrios. Várias questões, como alguns comportamentos dinâmicos básicos, rotas para o caos, bifurcações, janelas periódicas e a estrutura composta do novo sistema caótico são então investigadas, analiticamente ou numericamente.
8	Analysis of a new chaotic system	'Physica A: Statistical Mechanics and its Applications' JCR: 3.778 H-INDEX: 178	Guoyuan Qi, Guanrong Chen, Shengzhi Du, Zengqiang Chen, e Zhuzhi Yuan (2005)	Este artigo relata um novo sistema caótico autônomo quadrático contínuo tridimensional , modificado a partir do sistema de Lorenz , no qual cada equação contém um único termo de produto cruzado quadrático , que é diferente dos sistemas de Lorenz, Rössler, Chen, Lü. As propriedades básicas do novo sistema são analisadas por meio do espectro de expoentes de Lyapunov e diagramas de bifurcação . Os resultados da análise mostram que este sistema possui uma dinâmica complexa com algumas características interessantes.

9	Simple chaotic flows with one stable equilibrium	'International Journal of Bifurcation and Chaos' JCR: 2.450 H-INDEX: 112	Malihe Milaie, Sajad Jafari, Julien Clinton Sprott, e S. Mohammad Reza Hashemi Golpa yegani.	Usando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz e uma busca sistemática de computador, foram encontrados 23 fluxos caóticos simples com não linearidades quadráticas que têm a característica incomum de ter um ponto de equilíbrio estável coexistente. Tais sistemas pertencem a uma categoria recém-introduzida de sistemas caóticos com atratores ocultos que são importantes e potencialmente problemáticos em aplicações de engenharia .
10	Third quantization: a general method to solve master equations for quadratic open Fermi systems	'New Journal of Physics' JCR: 3.716 H-INDEX: 193	Tomaz Prosen (2008)	A equação mestra de Lindblad para um sistema quadrático arbitrário de n férmions é resolvida explicitamente em termos de diagonalização de uma matriz $4n \times 4n$, desde que todos os operadores de Lindblad sejam lineares nas variáveis fermiônicas. O método é aplicado à construção explícita de estados estacionários de não-equilíbrio (NESS) e ao cálculo de taxas de relaxamento assintóticas no problema de transporte de calor e spin longe do equilíbrio na cadeia de spin-1/2 Heisenberg XY vizinhança mais próxima em uma cadeia transversal campo magnético .

Quadro 1 - Matriz de 'amarração' do detalhamento dos documentos mais citados no mundo

Seguindo um raciocínio semelhante observamos que dos documentos mais citados do mundo a Figura 15, a seguir apresenta as 10 referências mais citadas nestes documentos. Destacando-se Lorenz em 1963 ($n=47$ citações), Wolf em 1985 ($n=33$ citações), Chen em 1999 ($n=29$ citações), entre outros. Estes trabalhos citados na Figura 15 foram os mais citados, porém não é possível inferir que foram os mais importantes.

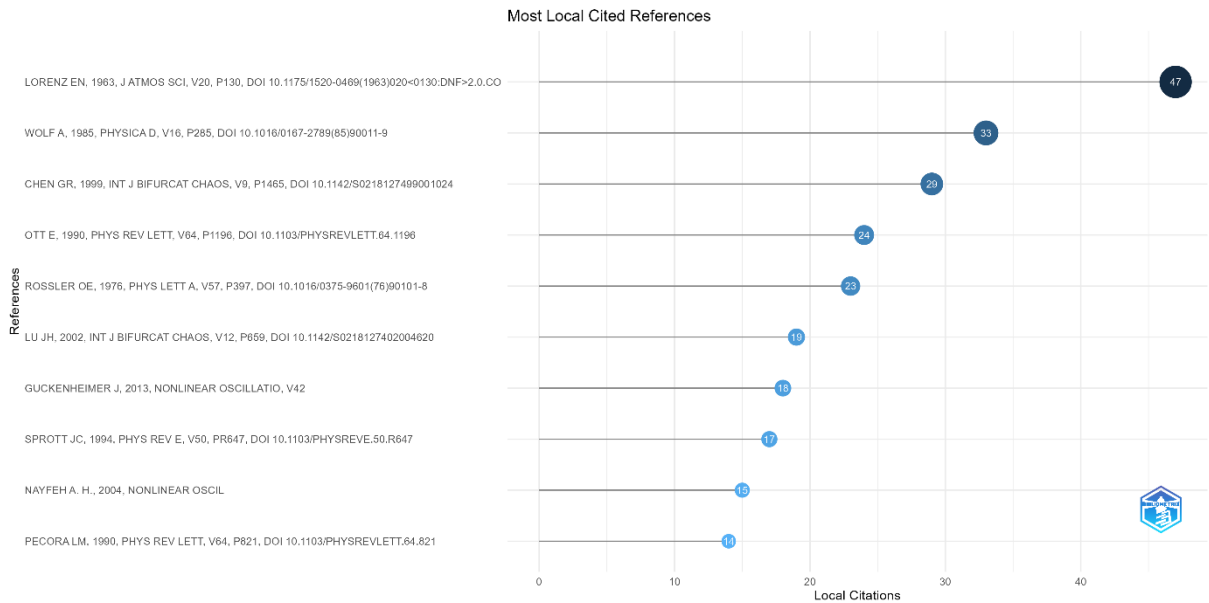


Figura 15 - As referências mais citadas nos artigos

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

2.4. ANÁLISE TEMÁTICA

Nesta etapa, realizou-se processo de codificação da literatura relevante a partir dos critérios de busca. Inicialmente, a análise dos códigos dos dados, ressaltase que foram tomados cuidados e tratados com zelo os contextos semânticos, considerando a relação entre significantes e suas representações denotativas e conotativas, em conformidade com a terminologia, para serem apresentados seus verdadeiros significados.

A Lei de Zipf, ou Lei do Mínimo Esforço, que mede a frequência do aparecimento de palavras em vários textos, ordenando uma lista de termos de um determinado assunto (TEIXEIRA; IWAMOTO; MEDEIROS, 2013). A seguir pode-se visualizar as palavras-chave mais utilizadas por cada um dos autores e as principais referências utilizadas em suas publicações apresentadas na Figura 16 com as palavras mais relevantes frequentes.

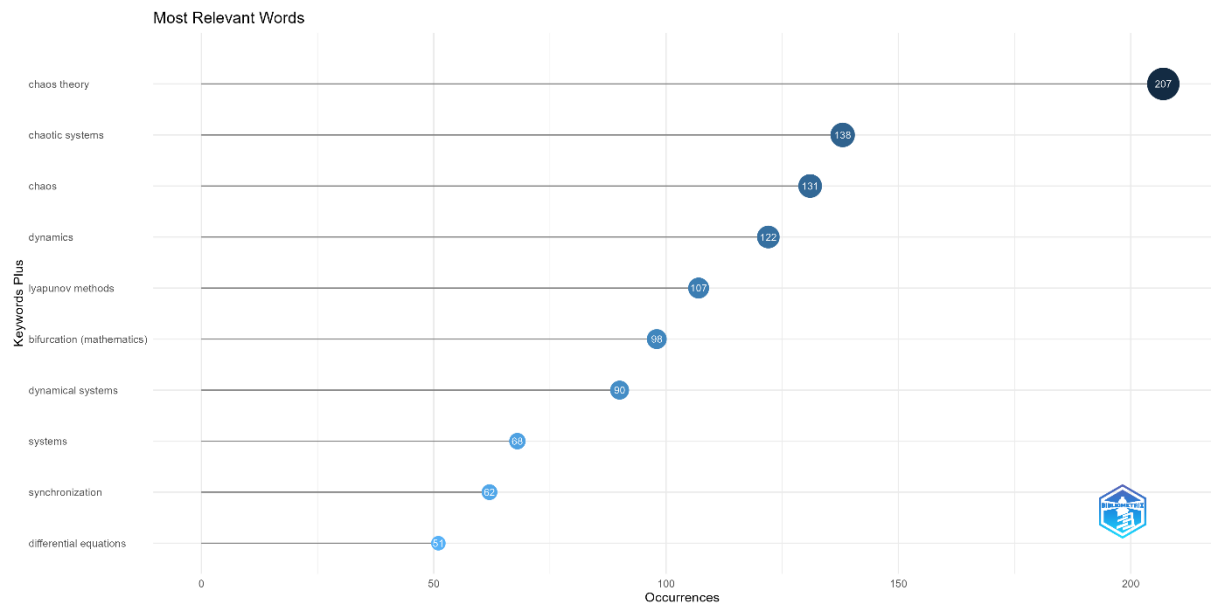


Figura 16 - Palavras mais relevantes frequentes

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

Na sequência é apresentada na Figura 17 um mapa de árvore que mostra os dados organizados em hierarquias de dimensões que se utiliza retângulos proporcionais para carregar valores numéricos (pontuação por ocorrência) para cada ramificação, quanto maior a área da palavra maior a pontuação ela obteve dentro da análise em relação a quantidade de ocorrências dela. Quando menor a área da palavra, menos pontuação a palavra teve dentro da quantidade de palavras-chave encontradas na coleção de documentos. De fato, este mapa de árvore, abre um pouco mais a quantidade de palavras já mencionadas na Figura 16 anteriormente apresentada. Logo, são observações complementares que foram realizadas.



Figura 17 - Mapa de árvore

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

Observa-se na Figura 18 que a ocorrência cumulativa de termos associados ao longo do tempo de palavras-chave apresentadas nos artigos, entre elas: ‘*Chaos Theory*’ (n=3273), ‘*Chaotic Systems*’ (n=1228), e ‘*Bifurcation (Mathematics)*’ (n=1170).

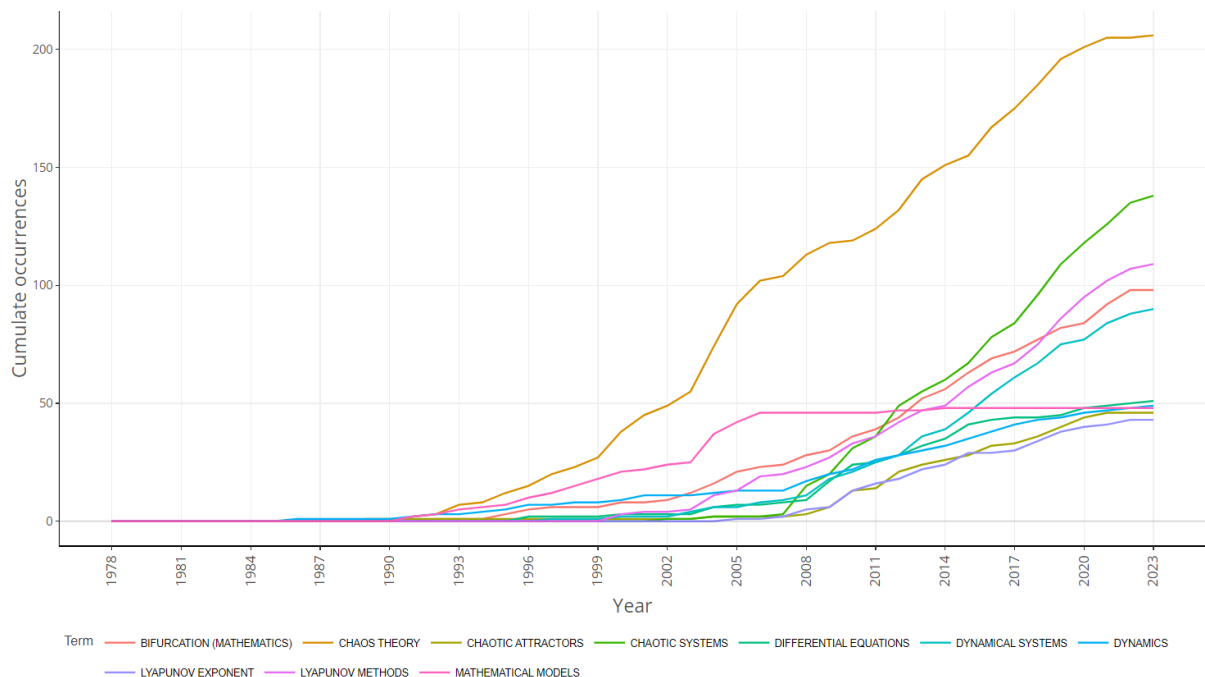


Figura 18 - Frequência de palavras ao longo do tempo

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

Apesar da ocorrência de algumas tendências de assunto, a frequência em anos é importante ser observada. Na Figura 19 é possível verificar que ‘*chaos theory*’ (n=206), ‘*chaos system*’ (n=138), e ‘*bifurcation (mathematics)*’ (n=98) foram as 3 palavras de maior ocorrência em função dos critérios de seleção das palavras nas bases de dados. Entretanto, é possível observar outros termos que lideram nos últimos anos e que são tendências dentro da área de pesquisa, como por exemplo, ‘*quadratic regulators*’, ‘*linear quadratic*’, ‘*circuit simulation*’, entre outros.

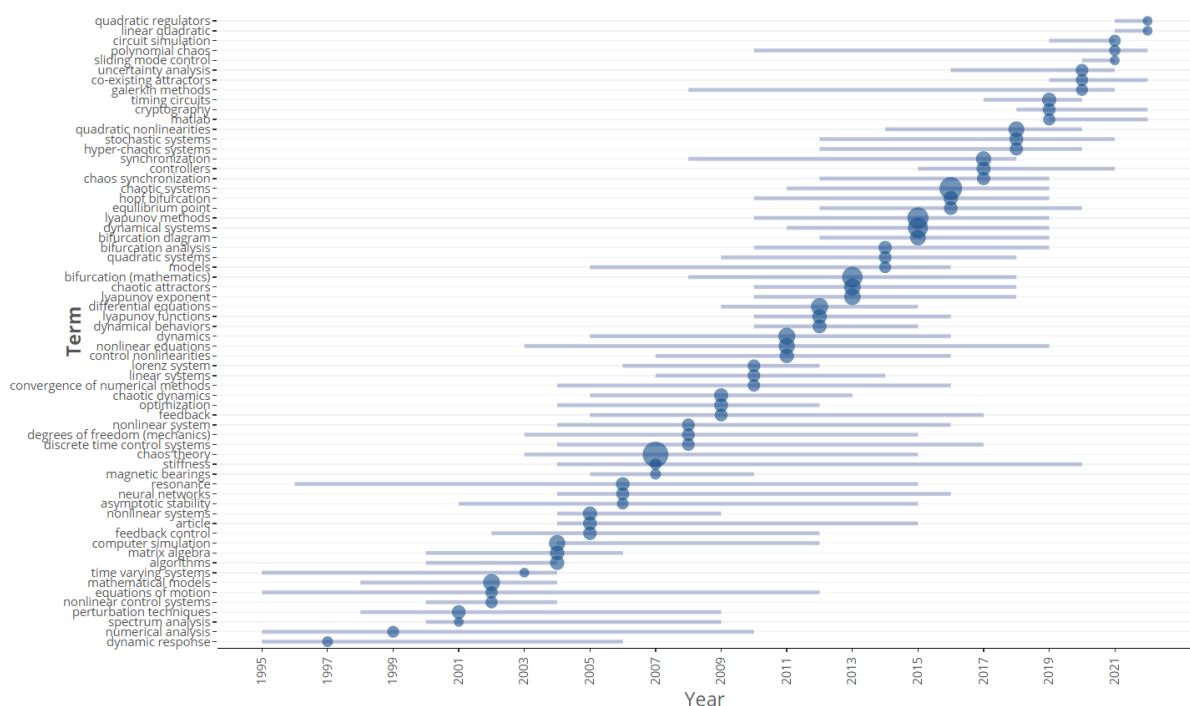


Figura 19 - Tendências de assuntos

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

A Figura 20 representa a rede de co-ocorrência de palavras-chave definidas pelo pesquisador no qual foi possível identificar 3 agrupamentos (*clusters*). A elaboração do gráfico foi baseada nas seguintes opções de plotagem: normalização por Associação (as semelhanças do vértice são normalizadas usando a força de associação), utilizando n=50 (50 principais referências citadas), o tamanho dos vértices é proporcional ao seu grau, todos os outros argumentos assumiram os valores

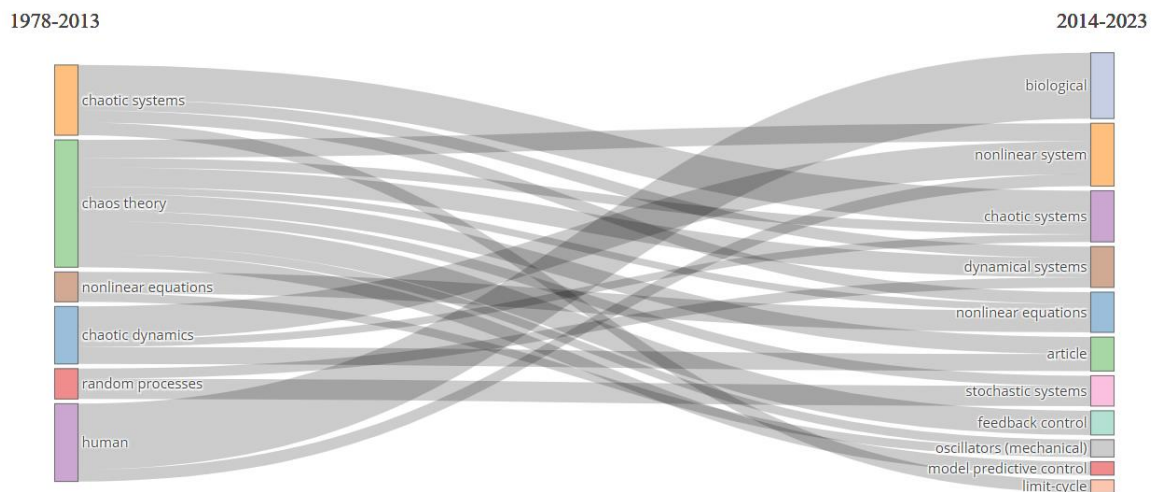


Figura 21 - Evolução das temáticas por período

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

Uma outra possibilidade analítica é por meio do mapa temático, verifica-se a centralidade e a densidade que podem ser usadas na classificação dos temas e no mapeamento em um plano bidimensional, sendo analisadas de acordo com o quadrante em que estão inseridos: (1) quadrante superior direito: temas motores; (2) quadrante inferior direito: temas básicos; (3) quadrante inferior esquerdo: temas emergentes ou em declínio; e (4) quadrante superior esquerdo: temas muito especializados/de nicho. No caso do mapa temático apresentado a seguir na Figura 22 observa-se um panorama geral do sistema de busca nas bases de dados com temas relacionados a classificação do plano dimensional (ARIA; CUCCURULLO, 2021b).

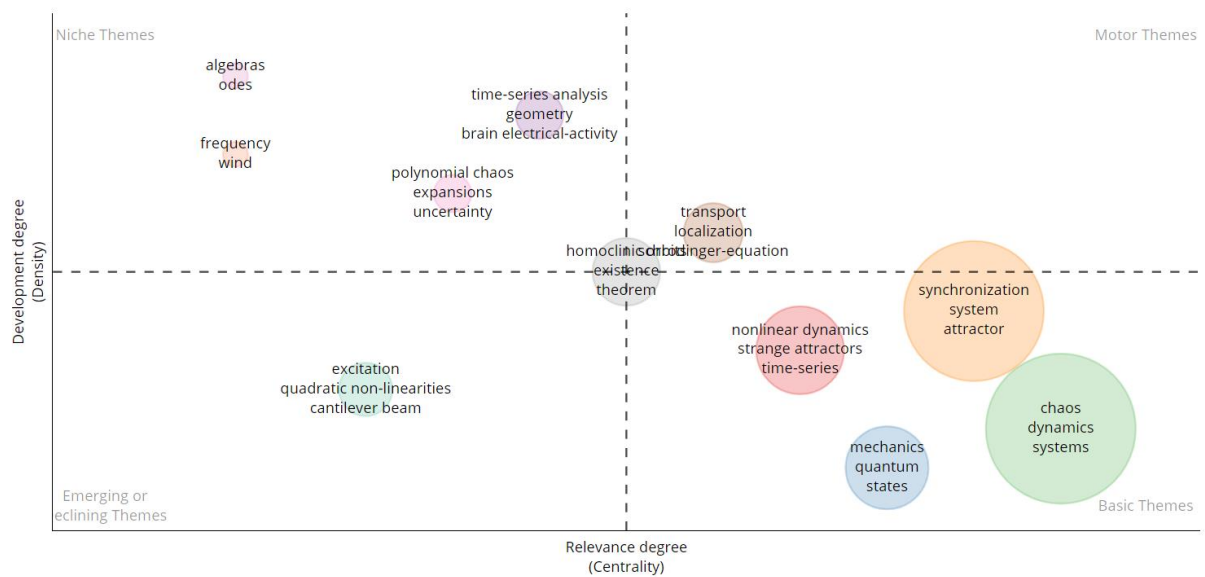


Figura 22 - Mapa temático

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

Pela análise das redes de cocitação identificou-se como a literatura conecta os artigos prolíficos, sendo identificados 9 *clusters* (ou 9 grupos de pesquisadores) principais, que se destacam, observados na Figura 23. As redes de colaboração visam demonstrar a interação de como os autores, as afiliações/instituições e países se relacionam com outros em um campo específico de pesquisa, possibilitando revelar os autores, instituições e países analisados no corpus do tema abordado. Como conclusão é possível afirmar que há poucos grupos consolidados de pesquisa sobre o tema em estudo e que há oportunidades para publicações e fortalecer o crescimento de pesquisas nessa área.

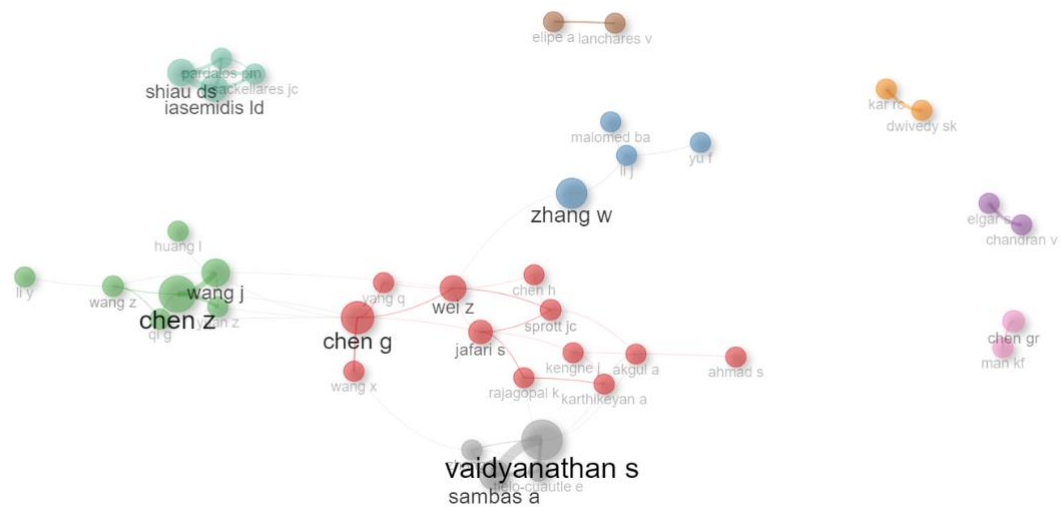


Figura 23 - Rede de colaboração de pesquisadores influentes

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

O Brasil possui uma forte rede de colaboração de pesquisa sobre o tema com Austrália, Chile, Colômbia, Cuba, Alemanha, Grécia, Itália, Cazaquistão, Polônia, Reino Unido, Índia, Espanha e Estados Unidos, sendo que os dois últimos mencionados possuem uma rede mais forte de colaboração de trabalhos publicados conjuntamente com o Brasil. A colaboração internacional tem demonstrado laços mais densos irradiados a partir dos Estados Unidos, mas expandindo de modo diversificado para outras geográficas internacionais, com a maioria das publicações sendo de autoria de pesquisadores do mesmo país e da China, ainda que haja artigos com pesquisadores de múltiplos países, demonstrando alguma existência de colaboração em todos os continentes (Figura 24). Os Estados Unidos apresentaram ser o nó central das colaborações em pesquisas (muitas vezes como intermediador do processo).

Country Collaboration Map

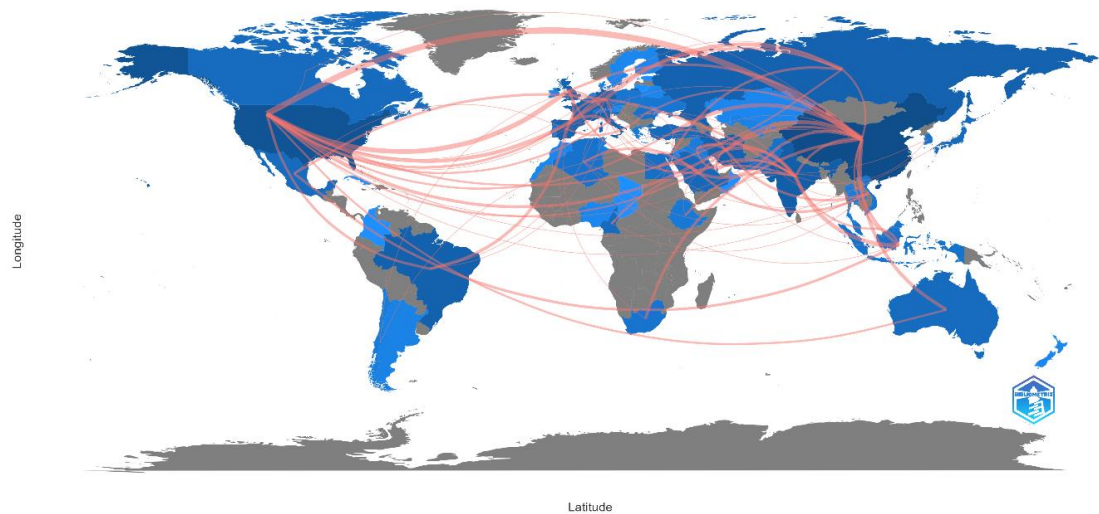


Figura 24 - Colaboração dos Países pelo Mundo

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

Quando observamos as citações pela Figura 25, verificamos que a China lidera com 4663 citações, seguido dos USA (n=1815) e RUSSIA (n=972). O Brasil aparece somente em 14º. lugar (n=196), melhor país sul-americano classificado.

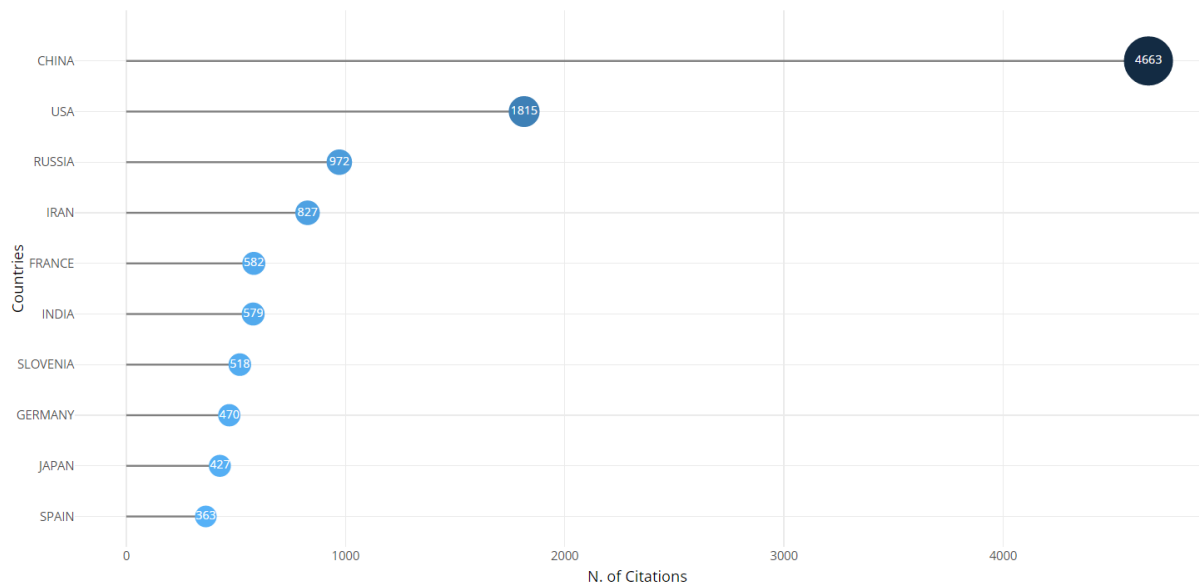


Figura 25 - Classificação dos países em n° de citações

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

Complementando a análise anterior, é possível observar pela Figura 26 que a produtividade durante os anos vem sendo dominada pela China (n=2609), USA

(n=2909), e o Brasil (n=523) ocupando a terceira posição durante o tempo, mas sendo ultrapassado pela Índia a partir de 2020.

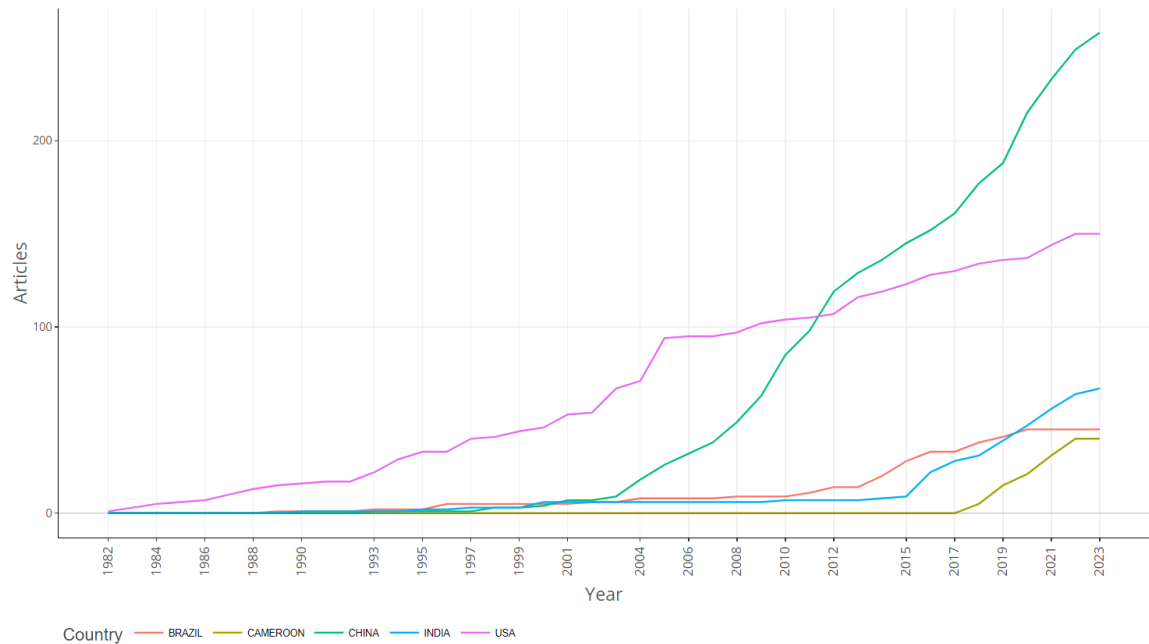


Figura 26 - Classificação dos países pela produtividade durante os anos

Fonte: dados extraídos do *Biblioshiny* (2023).

3. DELIMITAÇÃO METODOLÓGICA

Este capítulo apresenta a delimitação metodológica que foi selecionada para a elaboração deste estudo. A pesquisa foi bibliográfica, descritiva, utilizando os métodos de “ensaio teórico” na construção da teoria apresentada nos capítulos anteriores, e “bibliométrico” que contribuiu estatisticamente para avaliar tendências de crescimento da produção, publicação, autoria e uso do tema abordado desta pesquisa.

Neste estudo procurou-se desenvolver um “ensaio teórico” o qual busca trazer originalidade sob algum tipo de perspectiva com elementos argumentativos, na escolha do objeto em análise (no caso: sistemas dinâmicos, caos, e família quadrática). Para Michel (2015) o ensaio teórico acadêmico defende uma ideia sendo que não precisa ser necessariamente original na sua concepção, mas traz explicações com novas características que exemplificam o estudo. Nesse sentido, o ensaio teórico não requer a comprovação empírica. Ainda o mesmo autor considera que o ensaio teórico tem caráter dissertativo, com discussão teórica no decorrer do texto, no propósito de defender, racional e logicamente, um ponto de vista ou uma ideia, sem pretensão de esgotar o assunto. Por fim, no desenvolvimento do ensaio são geradas conclusões e reflexões sobre o tema selecionado.

Para complementar o “ensaio teórico” será conduzida uma “pesquisa bibliométrica” realizada em duas das principais bases de dados internacionais ‘*Web of Science*’ e ‘*Scopus*’ identificando em ambas as bases, os artigos, bem como seus os principais indicadores bibliométricos (OKUBO, 1997) conforme o Quadro 2 a seguir:

Indicador	Conceito
Lei de Bradford	Investiga as distribuições de frequência do número de artigos publicados por periódicos de determinado tema/área.
Lei de Lotka	Investiga as distribuições de frequência da autoria de artigos de determinado tema/área.
Lei de Zipf	Investiga as distribuições de frequência do vocabulário de textos de determinado tema/área.
Número de publicações por autor, revista, instituição ou tema	Investiga o volume de publicações de autores, periódicos, instituições ou temas de determinada área.
Número de coautores/colaboradores	Investiga a dinâmica do volume de pesquisa realizada de forma colaborativa, seja entre pesquisas individuais ou em grupo, ou nacionais e internacionais.
Copublicações: publicação com autores de diferentes países, instituições	Investiga a cooperação entre representantes de entidades e países, em pesquisas conjuntas, com a finalidade de criar uma matriz que evidencie os principais parceiros e forneça a descrição da rede científica.
Número de citações	Investiga o impacto dos artigos, dos periódicos e dos pesquisadores em função do número de citações.
Índice de afinidade	Investiga a taxa relativa de trocas científicas (entre países, instituições) por meio de citações.
Laços científicos	Investiga e mensura a influência de redes entre diferentes comunidades científicas.
Cocitações	Investiga o número de vezes que dois ou mais artigos são citados, simultaneamente, num mesmo artigo.

Quadro 2 - Principais indicadores bibliométricos

Fonte: Okubo (1997).

Os autores e desenvolvedores do pacote *Bibliometrix*, Aria e Cuccurullo (2021a), afirmam que inclui todos os principais métodos de análise bibliométrica, sendo utilizado ‘especialmente para mapeamento científico e não para medir ciência, cientistas ou produtividade científica’, sendo necessário realizar outros procedimentos de análises empregando outros métodos. Apresenta-se no Quadro 3 a seguir a maneira resumida o conjunto de análises disponíveis no *Biblioshiny* e que estão relacionadas com os principais indicadores bibliométricos apresentados no Quadro 2.

Fontes	Fontes mais relevantes (produção); Fontes mais citadas; Lei de Bradford; Impacto (H-Index; total de citações); entre outros.
Autores	Autores: Autores mais relevantes (Produção); Produção ao longo dos anos; Lei de Lotka; Impacto (H-Index; Total de citações); Afiliações; País do autor; País mais citado; Produção científica por países, entre outros.
Documentos	Documentos: Documentos mais citados (global); Documentos mais citados (local); Referências: Referências mais citadas; Palavras: Palavras mais citadas; Keywords Plus; Título; Resumo; Word Dynamics; TreeMap; entre outros.

Quadro 3 - Conjunto de análises disponíveis no Biblioshiny

Fonte: Moreira, Guimarães e Tsunoda (2020, p. 147).

Justifica-se a escolha de indicadores bibliométricos para complementar o ensaio teórico traz a possibilidade de incluir obras a serem discutidas ou exemplos práticos que foram objeto de estudos de artigos que possuem estratos altos e que estão presentes na coleção das grandes bases de dados representando o estado da arte das pesquisas na área. A inclusão, bem como a consulta a estes artigos identificados nos indicadores bibliométricos possibilitará a legitimidade da pesquisa ampliando na fase de análise de dados a discussão já mencionada na seção da fundamentação teórica. Além disso, é necessário determinar um recorte temporal de seleção dos trabalhos (ZUPIC; ČATER, 2015).

A bibliometria ajuda a descrever o estado da arte de um campo de pesquisa levando em consideração a produção escrita e consequentemente, permite análises de informações que podem ser realizadas (ARIA; MISURACA; SPANO, 2020). Para este estudo será necessário incluir 3 palavras-chave como critério de busca conforme apresentado no Quadro 4:

Palavra-chave	Descritor (Comando na base de dados)	Comentário
Sistemas dinâmicos	"dynamic* system*"	O * fará a busca em palavras no singular, plural e palavras derivadas, por exemplo "dynamical" ou "dynamics"
Caos	"chaos"	-
Quadrática	"quadratic"	-

Quadro 4 - Palavras-chave para o critério de busca nas bases de dados

Fonte: elaborado pelo autor.

Os indicadores bibliométricos informado no Quadro 1 serão obtidos com o apoio do *software* RStudio (ferramenta de código aberto) exportados para a plataforma/pacote *Bibliometrix/Biblioshiny* (pacotes), ferramenta que auxilia no processamento de dados e subsidia a verificação da revisão bibliométrica. O pacote *Bibliometrix*⁶ é por padrão uma interface de linhas de comando – oferece uma interface gráfica denominada *Biblioshiny* possibilitando sua utilização sem conhecimento em programação. Sendo assim, as análises foram destinadas a esta interface e não à

⁶ A ferramenta Bibliometrix/Biblioshiny é gratuita, com uma alta qualidade de documentação, versão 4.1.2. Disponível em: <https://www.bibliometrix.org/home/> Acesso em: 29/05/2023.

ferramenta executada por *scripts*. A execução será feita a partir dos seguintes comandos: *install.packages("bibliometrix")*, *library(bibliometrix)* e *biblioshiny()*.

As ferramentas do RStudio possibilitaram a geração de gráficos e indicadores estatísticos, medir as produções científicas sobre o tema e atender às principais leis da bibliometria, validando os resultados. Os arquivos obtidos na coleta de dados com dados quantitativos do *biblioshiny* foram exportados para o Microsoft Excel para posteriores análises.

Com esse processo metodológico, pretende-se dar maior segurança as análises deste estudo de forma a identificar a evolução dos estudos dos sistemas dinâmicos quando aplicados a uma família de funções.

4. SISTEMAS DINÂMICOS

O capítulo de fundamentação teórica foi subdividido em três seções, ‘Sistemas Dinâmicos: um pouco de história’, ‘Dinâmica Unidimensional’ e ‘Caos’, a segunda tendo um grau de detalhamento maior em função da necessidade de ampliar os pontos fundamentais da teoria dos sistemas dinâmicos. Nesse sentido, a seção ‘Dinâmica Unidimensional’ é subdividida em quatro subseções, sendo ‘Exemplos de Sistemas Dinâmicos’, ‘Preliminares do Cálculo’, ‘Definições Elementares’, e ‘Um exemplo: a família quadrática’.

4.1. SISTEMAS DINÂMICOS: UM POUCO DE HISTÓRIA

Antes de iniciar esta subseção propriamente dita, é fundamental definir o que é um sistema. Um sistema é uma combinação de componentes que atuam em conjunto para realizar uma tarefa que não pode ser realizada por nenhuma das partes individualmente. Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeitos nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto (BERTALANFFY, 1969; MONTEIRO, 2019). Ainda, um sistema é considerado dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo.

Além disso, os sistemas de interesse são, em geral, aqueles em que há alguma forma de transferência de energia. Na matemática e na física, sistema dinâmico é um conceito no qual uma função descreve a relação no tempo de um ponto em um espaço geométrico.

O conceito de sistema dinâmico nasce da exigência de construir um modelo geral para sistemas físicos que normalmente, envolvem no tempo, segundo uma regra que liga o estado presente aos estados passados (KLUEVER, 2017). Nesse sentido, os sistemas dinâmicos são sistemas fora do equilíbrio, caracterizados por estados que

mudam com o tempo. São usados para modelar, entender e fazer previsões de sistemas físicos, biológicos, financeiros, econômicos, ciências sociais, engenharias, entre outros. Para definir um sistema dinâmico precisamos de três ingredientes: espaço de estados; equações de movimento; e medida de distância. Dessa forma, é possível analisar a evolução de objetos matemáticos ao longo do tempo.

Os sistemas dinâmicos podem ser representados matematicamente por meio de equações diferenciais ou outros tipos de modelos matemáticos que descrevem como as variáveis do sistema evoluem ao longo do tempo. Estas equações podem ser determinísticas, o que significa que o futuro do sistema é completamente determinado pelo seu estado atual, ou estocásticas, o que significa que o futuro do sistema é afetado por algum tipo de aleatoriedade (VILLATE, 2007).

As bases teóricas dos sistemas dinâmicos foram identificadas no século XVI, a partir dos trabalhos da Mecânica Celeste escritos por Johannes Kepler⁷, posteriormente, por Isaac Newton⁸ pelas valiosas contribuições à modelagem matemática através da formalização da Mecânica Clássica que abriram espaço para uma sofisticação crescente do aparato matemático que modela fenômenos mecânicos, culminando nos trabalhos de Lagrange e Hamilton, que definiram a teoria mecânica clássica que é o mesmo estudado até o momento.

O matemático, físico e filósofo francês Henri Poincaré (Figura 27) é considerado um dos criadores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos. A literatura científica aponta importantes contribuições, tais como: a introdução de muitos dos aspectos do estudo qualitativo das equações diferenciais que permitiram estudar propriedades assintóticas das soluções (ou da maior parte das soluções) de uma equação diferencial, como estabilidade e periodicidade, sem ser necessário resolver explicitamente a equação diferencial (POINCARÉ, 1993; POINCARÉ, 1995).

⁷ As leis de Kepler são usadas como base para a modelagem matemática de outros sistemas dinâmicos em diversas áreas da ciência e da engenharia, além da astronomia, como a dinâmica de partículas em campos magnéticos, o movimento de satélites e até mesmo o movimento de partículas em sistemas biológicos.

⁸ As contribuições de Newton para a física, com por exemplo, as leis do momento e a da gravitação universal têm sido fundamentais para a modelagem matemática e a compreensão dos sistemas dinâmicos ao longo dos anos, e seu trabalho ainda é uma base fundamental na área dos sistemas dinâmicos na matemática moderna.



Figura 27 - Jules-Henri Poincaré (1854-1912)

Fonte: Disponível em: <https://www.britannica.com/summary/Henri-Poincare> Acesso em: 21/04/2023.

Poincaré contribuiu para a maioria das disciplinas na Matemática e cria novas disciplinas, entre elas a Teoria das Funções Atomorfas, Topologia Algébrica e Sistemas Dinâmicos (que é o tema deste estudo), e revolucionou a Mecânica Celeste, descobrindo o ‘Caos’ – que é um termo da física e da matemática que se refere a fenômenos extremamente sensíveis a perturbações mínimas. A teoria do Caos é uma teoria matemática que ainda está em desenvolvimento e que permite a descrição de uma série de fenômenos do campo da dinâmica, ou seja, aquele campo da Física que trata do efeito das forças sobre os movimentos dos objetos. O arquétipo de todas as teorias da dinâmica é o de Newton, relativo aos movimentos celestes (OESTREICHER, 2022).

Na introdução do trabalho “Fenômenos Não-Lineares em Física: Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos”, o Prof. Reynaldo D. Pinto observa que Poincaré sugere uma alteração no questionamento que antes era:

“Qual a posição exata dos planetas em função do tempo?”

Para

“O sistema solar é estável para sempre ou ele vai se desintegrar com alguns planetas se afastando para o infinito?”

Com esta abordagem mais qualitativa de análise ampla de cenário, ele desenvolveu uma visão no meio científico que fez com as teorias dos sistemas

dinâmicos passassem a ser aplicadas além dos assuntos de mecânica celestial. Ademais, Poincaré demonstrou que para alguns sistemas determinísticos pode não haver previsibilidade, plantando a semente do que mais tarde viria a ser chamado de Caos (CVITANOVIĆ et al., 2016). Diante disso, Poincaré trouxe uma nova abordagem de que como as equações diferenciais não são resolvidas por meio de fórmulas, a proposta do matemático era de que as soluções fossem resultantes de uma análise quantitativa. Para isso, utilizava ferramentas geométricas e de probabilidade, combinada com um estudo numérico da equação diferencial. Tal raciocínio foi comprovado no século seguinte por Birkhoff, Smale, Palis, Anosov, Arnold, Sinai e muitos outros pesquisadores. Este é o momento que muitos consideram o nascimento da Teoria do Caos, mas as temáticas sobre o assunto acabaram ficando em segundo plano até a segunda metade do século XX (PINTO, 2007).

O matemático Andrei Kolmogorov revisitou os estudos de Poincaré em meados de 1954 que culminou no desenvolvimento de importantes teorias para o estudo de sistemas dinâmicos, que na ocasião já reproduziam espécies de sistemas caóticos. Porém, sem uma definição estritamente matematicamente formulada. Nesse sentido, Kolmogorov destaca-se por trazer uma abordagem científica que avançou nas teorias caóticas e estudos de sistemas não-lineares (VILLANI, 2015).

Em 1966, Edward Lorenz do *Massachusetts Institute of Technology (MIT)*, começou a definir e estudar a Teoria do Caos de maneira mais efetiva, ao perceber pequenas variações na fórmula inicial, gerando resultados completamente inesperados e imprevisíveis, provando que, em sistemas não lineares, as menores e mais simples alterações podem sim amplificar os resultados de maneira exponencial.

Por fim, a partir dos estudos anteriormente referenciados, e das obras de Alligood, Sauer e Yorke (1996), Martins (2016), Gomes (2022) chegamos na seguinte definição de um Sistema Dinâmico - é um Conjunto de possíveis estados dependentes do tempo, no qual uma lei determina o estado presente em termos do estado passado. Em outras palavras, os Sistemas Dinâmicos têm uma configuração específica a cada instante de tempo. Ademais, eles podem muitas vezes ser regidos por leis determinísticas, isto é, ela determina o estado presente unicamente a partir do estado passado (ALLIGOD; SAUER; YORKE, 1996; GOMES, 2022).

Além disso, há dois tipos de Sistemas Dinâmicos: os de Tempo Discreto e os de Tempo Contínuo.

O primeiro, de Tempo Discreto, ocorre quando a lei associada se aplica em um tempo discreto. Em outros termos, considerando um intervalo de tempo específico, como por exemplo, os instantes $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$, o estado permanece constante entre esses tempos, sendo alterado apenas nos instantes exatos $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$. Logo, Sistemas Dinâmicos Discretos, também denominados dessa forma, são muitas vezes vistos como equações de diferença, relações de recorrência, mapas iterativos e/ou mapas (MARTINS, 2016).

Já um Sistema Dinâmico de Tempo Contínuo, pode ser entendido como o limite do Sistema Dinâmico Discreto, quando as evoluções são cada vez menores. Nesse sistema, tem-se que a lei regente é um conjunto de equações diferenciais.

Percebe-se, portanto, que para esses sistemas o estado evolui continuamente, sendo regido por uma regra fixa. Muitos dos fenômenos relacionados aos Sistemas Dinâmicos são mais simples de serem descritos e compreendidos quando vistos no contexto de mapas (GOMES, 2022).

4.2. DINÂMICA UNIDIMENSIONAL

O objetivo desta seção é apresentar técnicas básicas da teoria dos sistemas dinâmicos em um cenário tão simples quanto possível. Nesse sentido, todos os sistemas dinâmicos que serão apresentados ocorrem em uma dimensão, seja na linha real ou no círculo unitário no plano. Diante disso, a subseção traz uma base sólida em cálculo.

Além disso, busca-se entender o que significa um sistema dinâmico considerado caótico, o que é possível compreender melhor à luz de exemplos. Portanto, a maior parte do esforço inicial gira em torno de uma única família de exemplos, a família de aplicações quadráticas, que nos é familiar em outros contextos, de fácil análise comportamental e visual.

$$F\mu(x) = \mu x(1 - x) = \mu x - \mu x^2$$

Posteriormente, utilizando ferramentas como o Teorema de Sarkovskii (NÚÑEZ, 2010) e a derivada de Schwarz, são apresentados que os resultados aparentemente especializados para o mapa quadrático, isto é, equações recorrentes da forma, realmente valem para uma grande quantidade de sistemas dinâmicos.

4.2.1. Exemplos de Sistemas Dinâmicos

Nesta subseção são apresentados exemplos que mostram como os sistemas dinâmicos ocorrem no “mundo real” e como alguns fenômenos muito simples da natureza produzem sistemas dinâmicos bastante complicados.

Iniciar-se-á pela definição do que é um sistema dinâmico. A resposta, segundo Devaney (2022, p. 2), pode ser observada da seguinte maneira

“... pegue uma calculadora científica e digite qualquer número. Em seguida, comece a pressionar uma das teclas de função repetidamente. Este procedimento iterativo é um exemplo de um sistema dinâmico discreto. Por exemplo, se pressionarmos repetidamente a tecla “exp”, de uma entrada inicial x , assim, computaremos a sequência de números

$$x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, \dots$$

Ou seja, a função exponencial está sendo iterada, ou composta nela mesma sucessivas vezes. Se este experimento for executado repetidamente, isto é, iterações sucessivas de $\exp(x)$ vão tender a ∞ . De fato, esta é uma das principais questões a ser discutida: dada uma função f e um valor inicial x_0 , o que ocorre com a sequência de iterados

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Outro exemplo interessante a considerar é a função $\text{sen}(x)$. Algumas repetições na calculadora serão suficientes para convencer um leitor de que qualquer x_0 inicial leva a uma sequência de iterações tendendo a 0. Da mesma forma, para $\cos(x)$, qualquer x_0 produz uma sequência que converge rapidamente para 0,73908 ... (em radianos, ou até 0,99984 ... em graus). Ou seja, é possível perceber que a iteração de uma determinada função em um determinado valor inicial sempre produz uma sequência que converge para um limite fixo (talvez x_0 , talvez 0, em qualquer caso, um limite único). Porém, essa é uma conclusão equivocada, pois, funções relativamente simples, como uma quadrática definida em $\mathbb{R}$ leva a resultados imprevisíveis quando iteradas. Por exemplo, quando programamos um computador ou calculadora para iterar a função simples

$$f(x) = 4x(1 - x)$$

Utilizando o modelo desenvolvido por Ignacio Larrosa Cañestro (Figura 28), versão online do Geogebra⁹ (Método de interacciones) que consiste em resolver numericamente uma equação $f(x) = 0$, mas utiliza-se a igualdade $x = f(x)$. Se a função f é limitada em um intervalo que inclui a aproximação inicial x_0 , o método converge. A função $f(x) = kx(1 - x)$, com qualquer valor inicial em $(0, 1)$ tem seu comportamento variando inteiramente para os diferentes valores de k . Acima de 4 diverge rapidamente, mas entre três e quatro adota comportamentos quase cíclicos de comprimento crescente, até que sejam completamente caóticos acima de 3,6.

⁹ Aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI. É de distribuição livre, nos termos da GNU General Public License, e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

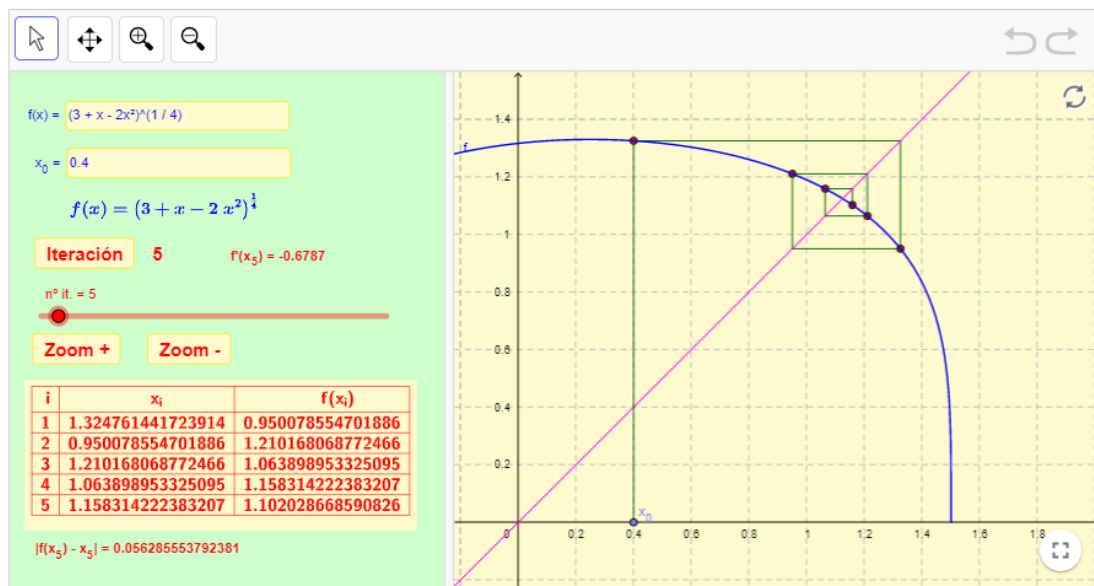


Figura 28 - Modelo computacional desenvolvido por Ignacio Larrosa Cañestro

Fonte: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/YXU5hmEZ> Acesso em 26/04/2023.

Após inserir um número aleatório entre 0 e 1, observamos os resultados de algumas iterações. Supondo $x_0 = 0,35$, obtém-se comportamentos bem distintos, como se observa nas imagens a seguir:

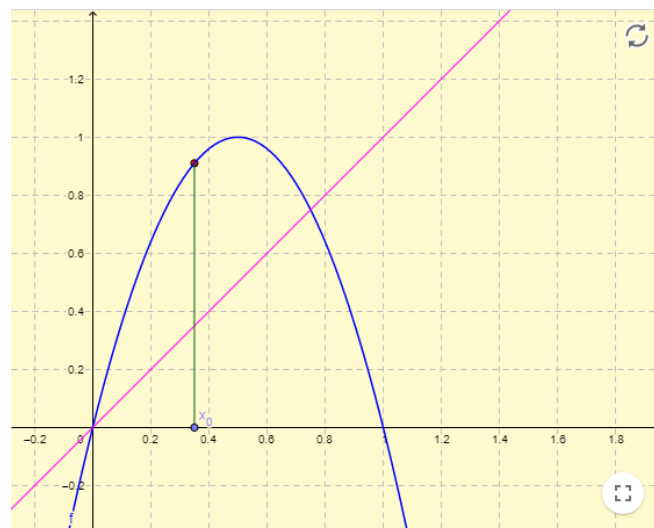


Gráfico 1 - Quadrática para $\mu = 4$ e $x_0 = 0,35$

Fonte: saída do software Geogebra.

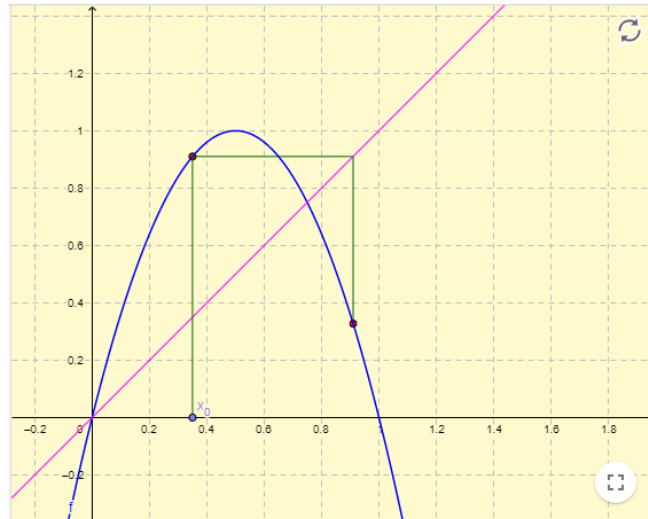


Gráfico 2 - Quadrática para $f^1(x)$, $\mu = 4$ e $x_0 = 0,35$

Fonte: saída do software Geogebra.

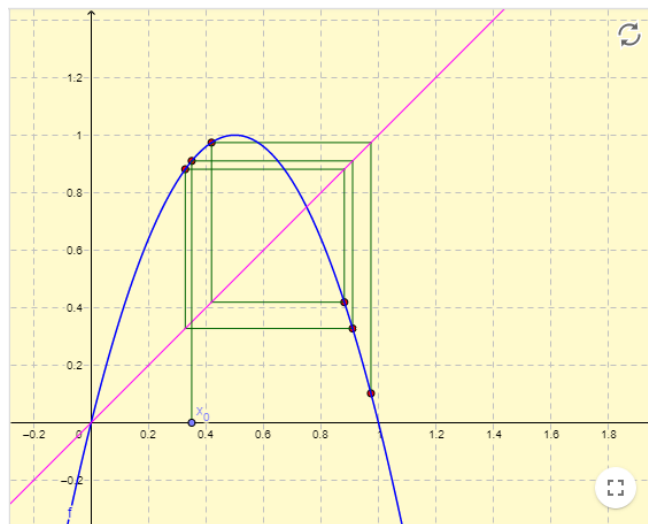


Gráfico 3 - Quadrática para $f^5(x)$, $\mu = 4$ e $x_0 = 0,35$

Fonte: saída do software Geogebra.

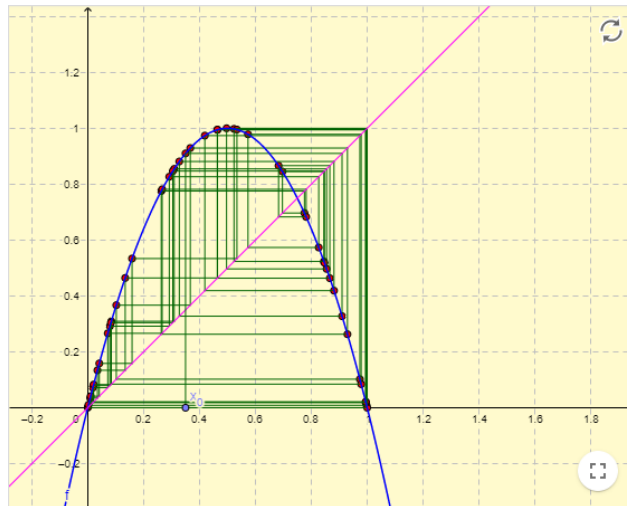


Gráfico 4 - Quadrática para $f^{50}(x), \mu = 4$ e $x_0 = 0,35$

Fonte: saída do software Geogebra.

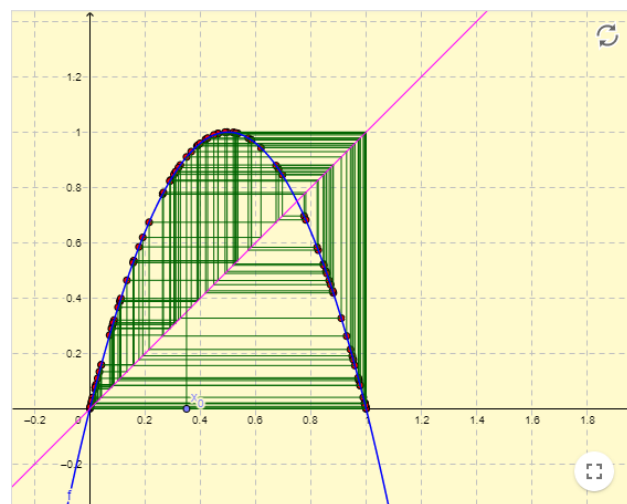


Gráfico 5 - Quadrática para $f^{100}(x), \mu = 4$ e $x_0 = 0,35$

Fonte: saída do software Geogebra.

Tabela 3 - Iteração de função quadrática no parâmetro $\mu = 4$ e $x_0 = 0,35$

i	x_i	$f(x_i)$
1	0.91	0.3276
2	0.3276	0.88111296
3	0.88111296	0.419011646880153
4	0.419011646880153	0.97376354663574
5	0.97376354663574	0.102192407516502
(...)	(...)	(...)
50	0.846841403091565	0.518804164405898
(...)	(...)	(...)
100	0.996867103458099	0.012492326004636

Pelas iterações apresentadas anteriormente, nos gráficos de 1 a 5, observa-se que em alguns momentos, os valores se repetem; outras vezes não. Na maioria das vezes, eles vagam sem rumo pelo intervalo da unidade sem nenhum padrão discernível como visualizados nos valores dados na Tabela 3, o que nos gera, como resultado, é um bom exemplo de ‘Caos’.

Agora quando é feita a mudança de parâmetro de 4 para 3,839, ou seja, iteramos a função a partir do mesmo ponto $x_0 = 0,35$, observam-se os seguintes comportamentos

$$f(x) = 3,839x(1 - x)$$

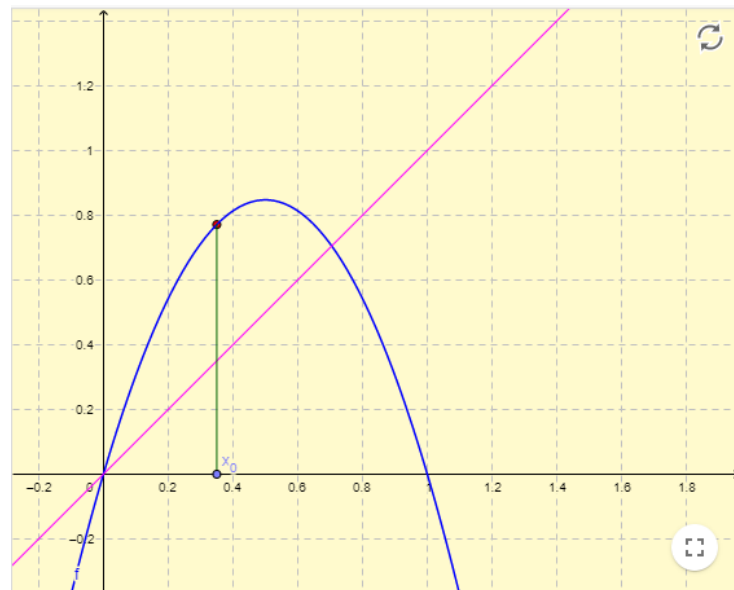


Gráfico 6 - Quadrática para $\mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$

Fonte: saída do software Geogebra.

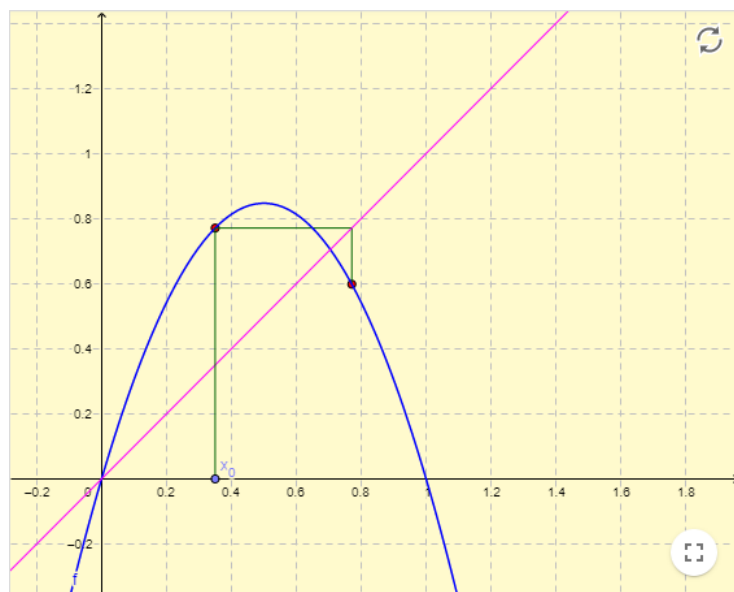


Gráfico 7 - Quadrática para $f^1(x)$, $\mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$

Fonte: saída do software Geogebra.

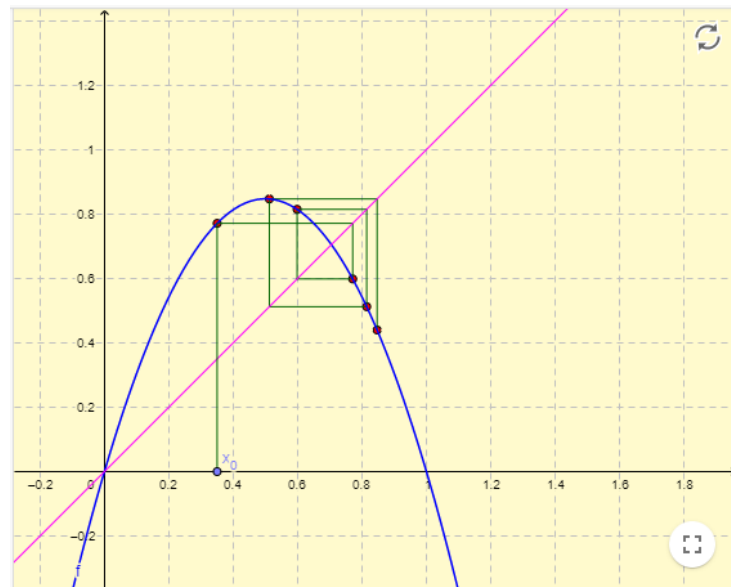


Gráfico 8 - Quadrática para $f^5(x)$, $\mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$

Fonte: saída do software Geogebra.

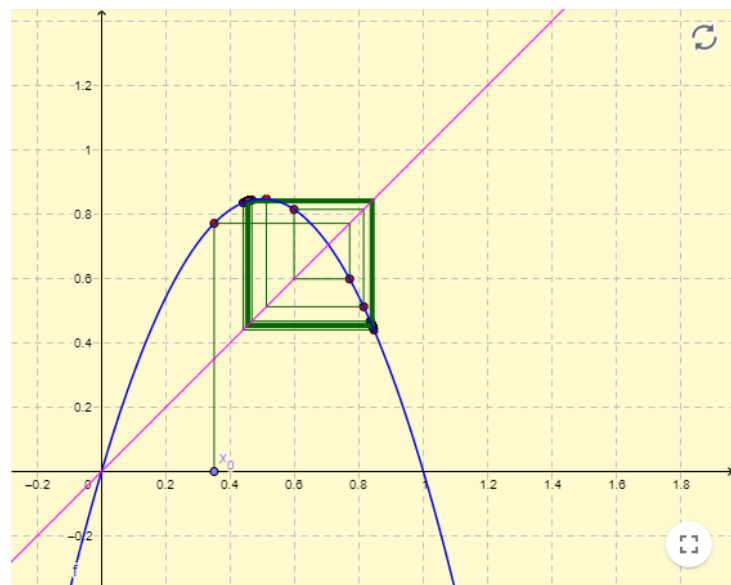


Gráfico 9 - Quadrática para $f^{50}(x)$, $\mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$

Fonte: saída do software Geogebra.

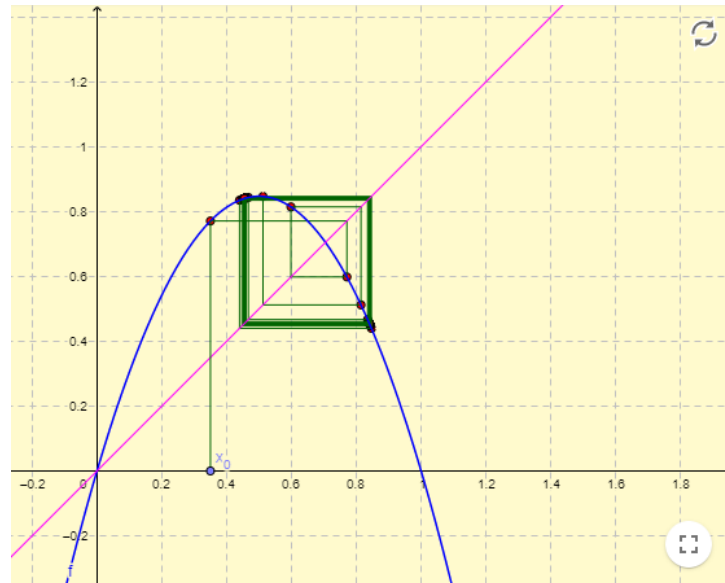


Gráfico 10 - Quadrática para $f^{100}(x)$, $\mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$

Fonte: saída do software Geogebra.

Tabela 4 - Iterações de função quadrática no parâmetro, $\mu = 3,839$ e $x_0 = 0,35$

i	x_i	$f(x_i)$
1	0.7709975	0.598363043073819
2	0.598363043073819	0.814460448145348
3	0.814460448145348	0.512127469385498
4	0.512127469385498	0.846751561084084
5	0.846751561084084	0.43976800970781
(...)	(...)	(...)
50	0.454751134144891	0.840311158530482
(...)	(...)	(...)
100	0.454758788540552	0.840313505910674

A Tabela 4 apresenta que a partir de algumas iteradas para uma entrada aleatória entre 0 e 1, observa-se nos Gráficos de 6 a 10 que as iterações desse ponto acabam se estabelecendo em um ciclo repetitivo, como vemos em f^5 , f^{50} e f^{100} que obtém resultados muito parecidos com uma precisão de 2 casas decimais para as 3 iterações iniciais e 5 casas decimais no caso das duas últimas iterações.

Aqui é importante algumas considerações. O primeiro exemplo ilustra o fenômeno do 'caos' ou imprevisibilidade que constitui um dos principais temas deste estudo. Apesar de sua complexidade, será possível verificar como analisar

completamente essa imprevisibilidade. Em segundo lugar, o caos ocorre em muitos sistemas dinâmicos nosso exemplo foi uma pequena amostra do que ocorrem nesses sistemas. O segundo exemplo, que parece ser relativamente inofensivo, também admite um conjunto de valores iniciais de x que se comportam de maneira tão imprevisível quanto no primeiro exemplo. No entanto, devido ao arredondamento ou erro ‘experimental’, não vemos essa aleatoriedade à primeira vista. No entanto, como será apresentado posteriormente, ela se esconde em segundo plano e tem um efeito cada vez mais importante no sistema à medida que a precisão dos cálculos aumenta.

Nessa conjuntura, deve-se observar que existem muitos outros tipos de sistemas dinâmicos além das funções iteradas. Por exemplo, equações diferenciais são exemplos de sistemas dinâmicos contínuos, em oposição a sistemas dinâmicos discretos.

Para exemplificar um modelo contínuo muito aplicado na ciência é observada a equação diferencial de crescimento ou decrescimento populacional. Esta costuma ser a primeira equação diferencial à qual pesquisadores são expostos. Neste modelo, assume-se que a população de uma única espécie muda em uma taxa que é diretamente proporcional à população presente no dado tempo. Este é, obviamente um modelo extremamente ingênuo, que não leva em conta fatores óbvios como superlotação, taxa de mortalidade etc. No entanto, esse modelo produz uma equação diferencial especialmente simples que é facilmente resolvida. Se $P(t)$ denota a população no tempo t , as suposições acima podem ser traduzidas em

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

A solução para esta equação é $P(t) = P_0 e^{kt}$ onde $P_0 = P(0)$ é a população inicial da espécie. Portanto, se a constante de proporcionalidade for positiva, $P(t) \rightarrow \infty$ como $t \rightarrow \infty$ levando a explosão populacional. Se $k < 0$, então $P(t) \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$, levando a extinção. Este procedimento ilustra em uma situação simples, a aplicação de sistemas dinâmicos em ciência. Um biólogo populacional estabelece um modelo matemático para o qual o matemático é solicitado a fornecer alguma ideia sobre o comportamento de longo prazo das soluções. Este modelo simples também pode ser estudado como uma equação de diferenças. Escrevendo $P_n =$ população

após n gerações, onde n é um número natural. A lei de crescimento mais simples que se pode imaginar é que a população da próxima geração é diretamente proporcional à da geração atual. Isto é onde novamente k é uma constante.

$$P_{n+1} = KP_n$$

Logo, temos:

$$P_1 = kP_0$$

$$P_2 = kP_1 = k^2P_0$$

$$P_3 = kP_2 = k^3P_0$$

$$(\dots)$$

$$P_n = kP_{n-1} = k^nP_0$$

De modo que o destino da população seja novamente fácil de decidir. Se $k > 1, P_n \rightarrow \infty$, enquanto se $0 < k < 1$, então $P_n \rightarrow 0$. Para uso posterior, vamos reformular essa equação de diferenças como uma função. Seja $x = P_0$ e definida $f(x) = kx$. Observe que, nos termos acima, $f(x) = P_1, f(f(x)) = k^2x = P_2, f(f(f(x))) = P_3$ etc. Portanto, o comportamento final da população é intimamente relacionado com o comportamento assintótico da iteração da função f . Em qualquer um dos modelos acima temos uma situação bastante idealizada, pois existem essencialmente apenas duas possibilidades: crescimento descontrolado ou extinção. A experiência diz ao biólogo populacional que padrões mais complicados surgem na natureza. Assim, o biólogo tenta incorporar restrições ou parâmetros adicionais ao modelo, esperando um melhor reflexo da realidade. Uma dessas abordagens frequentemente encontrada em cálculo é assumir que existe algum valor limite L para a população. Se $P(t)$ exceder L , há espaço para mais espécies, então $P(t)$ deve aumentar. O modelo biológico mais simples que leva a esse comportamento é

$$\frac{dP}{dt} = kP(L - P)$$

Observa-se que simplesmente adicionamos o fator $L - P$ ao modelo anterior. Suponhamos que $k > 0$, o caso que anteriormente levava a ilimitado crescimento. Aqui notamos que pelas fórmulas

$$1. \text{ if } P = L, \frac{dP}{dt} = 0$$

$$2. \text{ if } P > L, \frac{dP}{dt} < 0$$

$$3. \text{ if } P < L, \frac{dP}{dt} > 0$$

Assim, o cálculo elementar mostra que esse modelo se comporta de acordo com nossas expectativas. A população permanece constante, diminui ou aumenta dependendo se $P = L$, $P > L$ ou $P < L$. Na verdade, pode-se resolver explicitamente a equação diferencial acima por meio da separação de variáveis e integração por frações parciais. É observado que

$$P(t) = \frac{LP_0 e^{Lkt}}{L - P_0 + P_0 e^{Lkt}}$$

Usando a fórmula, pode-se facilmente esboçar as soluções deste sistema. Embora este modelo esteja mais de acordo com a realidade do que o modelo de crescimento exponencial, não vemos nenhum comportamento cíclico ou outras flutuações na população. Pode-se esperar ingenuamente que a equação de diferenças correspondente se comporte de maneira semelhante. No entanto, temos uma grande surpresa: a diferença análoga a equação leva a um dos sistemas dinâmicos mais complicados que se possa imaginar. Até hoje, a dinâmica desse sistema não é completamente compreendida. Além disso, este sistema apresenta muitas das patologias dos sistemas dimensionais superiores e, por esta razão, pode ser considerado como um dos sistemas dinâmicos não lineares mais básicos.

Vamos fazer uma simplificação e nosso modelo. Vamos assumir que $L = 1$ é o valor limite. Obviamente, não estamos falando agora de populações, mas sim de porcentagem da população. P_n representa a porcentagem da população limitante

presente na geração n . A população é então assumida para satisfazer a seguinte equação de diferença

$$P_{n+1} = kP_n(1 - P_n),$$

Onde novamente k é uma constante positiva. Como antes, podemos escrever $x = P_0$ e $f(x) = kx(1 - x)$. Esta é a função quadrática mencionada anteriormente.

Portanto, como resultado será obtido

$$\begin{aligned} P_1 &= f(x) \\ P_2 &= f(f(x)) \\ P_3 &= f(f(f(x))), \end{aligned}$$

E assim por diante. Logo, para determinar o destino de uma população para uma dada constante k , devemos determinar o comportamento assintótico da função $kx(1 - x)$. Essa função, conhecida como função logística, e sua dinâmica está em muitas pesquisas matemáticas contemporâneas.

4.2.2. Preliminares do Cálculo

Nesta parte do trabalho é fundamental lembrar algumas noções elementares (e não tão elementares) do cálculo em uma única variável e multivariável. Na sequência, são apresentadas algumas noções de topologia de pontos que foram incluídas.

Serão utilizadas as seguintes notações: R denota os números reais. I ou J sempre denotarão intervalos fechados em R , ou seja, todos os pontos x satisfazendo $a \leq x \leq b$ para algum a e b . R^2 denota o plano cartesiano.

Seja $f: R \rightarrow R$ uma função. Denota-se a derivada de f em x por $f'(x)$, a segunda derivada por $f''(x)$, e as derivadas superiores por $f^{(r)}(x)$. Diz-se que f é de classe C^r em I se $f^{(r)}(x)$ existe e é contínua em todo $x \in I$. Uma função é dita suave se for de classe C^1 . A função $f(x)$ é C^∞ se todas as derivadas existem e são contínuas; ocasionalmente usaremos funções contínuas, mas não diferenciáveis como exemplos, mas em geral, quando é dita função, é considerada de função C^∞ .

Existem algumas classes especiais de funções que surgem com frequência. A função $f(x) = ax$ conhecida como função linear para alguma constante a , também $f(x) = ax + b$ definida como função afim. Vale ressaltar que uma função é linear por partes se $f(x)$ é a fim em uma coleção de intervalos.

Definição. $f(x)$ é injetora se $f(x) \neq f(y)$ sempre que $x \neq y$. Claramente, funções crescentes ou decrescentes são os únicos tipos de funções injetoras contínuas de uma variável real.

Definição: Se $f: I \rightarrow J$ é bijetora, então podemos definir o inverso de f , escrito $f^{-1}(x)$, pela regra $f^{-1}(x) = y$ se e somente se $f(y) = x$.

Definição: Sejam I e J intervalos e $f: I \rightarrow J$. A função f é sobrejetora se para qualquer y em J existe um $x \in I$ tal que $f(x) = y$.

Definição: Seja $f: I \rightarrow J$. A função $f(x)$ é um homeomorfismo se $f(x)$ é injetora, sobrejetora e contínua, e $f^{-1}(x)$ também é contínua.

Definição. Seja $f: I \rightarrow J$. A função $f(x)$ é um difeomorfismo C^r se $f(x)$ é um homeomorfismo C^r tal que $f^{-1}(x)$ também é C^r .

Nesta seção consideradas principalmente funções não inversíveis. Em dimensões superiores, os difeomorfismos tornam-se muito mais interessantes e, portanto, tornam-se o ponto focal da teoria dos sistemas dinâmicos.

Detona-se a composição de duas funções por $f \circ g(x) = f(g(x))$. A composição então dobrada de f com ele mesmo ocorre repetidas vezes na sequência. Detona-se essa função $f^n(x) = f \circ \dots \circ f(x)$. Nota-se que f^n não significa $f(x)$ elevado à enésima potência, uma função que nunca usaremos, nem significa a

enésima derivada de $f(x)$, que denota-se por $f^{(n)}(x)$. Se $f^{-1}(x)$ existe, assim, escreve-se $f^{-n}(x) = f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}(x)$. Talvez a característica mais importante do cálculo elementar que se usa, seja a Regra da Cadeia:

Proposição. Se f e g são funções, então

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Em particular, se $h(x) = f^n(x)$, então

$$h'(x) = f'(f^{n-1}(x)) \cdot f'(f^{n-2}(x)) \cdot \dots \cdot f'(x).$$

Teorema. Suponha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 . Então existe $c \in [a, b]$ de tal modo que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Considera-se primeiramente, a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Essa reta é o gráfico da função $T(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$

Seja g a função que é a diferença entre f e T , isto é $g(x) = f(x) - T(x)$. Assim,

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right]$$

Quando $x = a$, obtém-se:

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a) \right] = f(a) - f(a) = 0$$

E, quando $x = b$, obtém-se:

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a) \right] = f(b) - [f(b) - f(a) + f(a)] = 0$$

Além disso, como g é a diferença entre duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[$, ela própria é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Logo é possível usar o Teorema de Rolle para g , concluindo que existe um número c no intervalo $]a, b[$, tal que:

$$g'(c) = 0$$

Ou, como

$$g'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right],$$

Obtém-se

$$g'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right]$$

E, portanto,

$$f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] = 0$$

Isto é

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como era o objetivo de provar.

Teorema. Suponha: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Suponha que $f(a) = u$ e $f(b) = v$. Então para qualquer z entre u e v , existe $c, a \leq c \leq b$, de tal modo que $f(c) = z$.

Definição. Seja $S \subset \mathbb{R}$. Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é um ponto limite de S se existe uma sequência de pontos distintos $x_n \in S$ convergindo para x . Se S é um conjunto fechado se contém todos os seus pontos limites. Claramente, intervalos próximos da forma $a \leq x \leq b$ são conjuntos fechados. Qualquer união finita de conjuntos fechados também é fechada. As uniões de conjuntos fechados, no entanto, não precisam ser fechadas.

4.2.3. Definições Elementares

O objetivo básico da teoria de sistemas dinâmicos é entender o comportamento eventual ou assintótico de um processo iterativo. Se esse processo é uma equação diferencial cuja variável independente é o tempo, então a teoria tenta prever o comportamento final das soluções da equação no futuro distante ($t \rightarrow \infty$) ou no passado distante ($t \rightarrow -\infty$). Se o processo é um processo discreto como a iteração de uma função, então a teoria espera atender o comportamento eventual dos pontos $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)$ quanto n se torna grande. Ou seja, os sistemas dinâmicos fazem a pergunta que parece um tanto não matemática: para onde vão os pontos e o que eles fazem quando chegam lá? Nesta subseção, tenta-se responder a esta questão pelo menos parcialmente para uma das classes mais simples de sistemas dinâmicos, funções de uma única variável real. Funções que determinam sistemas dinâmicos também são chamadas de mapeamento, ou mapas, para abreviar. Essa terminologia conota o processo geométrico de levar um ponto a outro. Como grande parte da sequência será de fato geométrica, usaremos todos esses termos como sinônimos.

Algumas definições importantes para o melhor entendimento deste estudo são: Conjunto Compacto, Fecho, Vizinhança e Bola Aberta. Entretanto, estas dependem de outros conceitos, os quais serão definidos primeiro. Antes disso, vale ressaltar que tais considerações foram baseadas na obra “Análise Real volume 1 – funções de uma variável” (LIMA, 2014).

Definição. Um ponto a é interior ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$, quando existe $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em X .

Definição. O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se interior de X e é denotado por $\text{int}(X)$.

Definição. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se aberto quando $A = \text{int}(A)$, ou seja, quando todos os pontos do conjunto são interiores de A .

Definição. O ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $\{x_n\} \in \mathbb{R}$.

Definição. O Fecho de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é o conjunto formado por todos os pontos aderentes a X , que é denotado por $\bar{X}$.

Definição. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ um número real positivo. A Bola Aberta de raio r e centro a é o conjunto

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < r\}$$

Definição. Seja B um conjunto real. $A \in -$ Vizinhança de um elemento x de B se refere a todos os elementos y que estão próximos de x a um raio ε , isto é,

$$N_\varepsilon(B) = \{x \in B: \text{dist}(x, y) < \varepsilon\}$$

Logo, percebe-se que a noção de ε – Vizinhança está diretamente ligada ao conceito de uma Bola Aberta, apresentada anteriormente.

Definição. Um conjunto é dito fechado quando $X = \bar{X}$. Ou seja, quando o fecho do conjunto é o próprio conjunto. Também pode ser dito que todo ponto aderente de X pertence a X .

Definição. Um conjunto é dito limitado se estiver contido em alguma bola aberta.

Definição. Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito compacto quando é limitado e fechado.

Definição. O ponto x é um ponto fixo para f se $f(x) = x$. O ponto x é um ponto periódico de período n se $f^n(x) = x$ é chamado de período primo de x . Denotamos o conjunto de pontos periódicos de (não necessariamente primo) período n por $Per_n(f)$, e o conjunto de pontos fixos por $Fix(f)$. O conjunto de todas as iterações de um ponto periódico formam uma órbita periódica.

$$\text{Órbita: } \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$$

x_0 : ponto inicial

$$\text{Ponto fixo } p: f^k(p) = p$$

$$\text{Para encontrar o ponto fixo usamos: } x_{n+1} = x_n$$

Definição. A órbita positiva de x é o conjunto de pontos $x, f(x), f^2(x), \dots$ e é denotada por $O^+(x)$. Se f é um homomorfismo, podemos definir a órbita completa de $x, O(x)$, como o conjunto de pontos $f^n(x)$ para $n \in \mathbb{Z}$, e a órbita inversa de $x, O^-(x)$, como o conjunto de pontos $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots$. Assim, o objetivo básico é entender

todas as órbitas de um mapa. Órbitas e órbitas diretas de pontos podem ser conjuntos bastante complicados, mesmo para mapeamentos não lineares muito simples. No entanto, existem algumas órbitas que são especialmente simples e que desempenharão um papel central no estudo de todo o sistema.

Dado $x \in X$ (a condição inicial), o conjunto $(T_n(x) | n \in \mathbb{Z})$ é chamado de órbita ou trajetória de x . Se restringirmos a n positivo, então chamamos isso de órbita direta de x .

Exemplo: Se for tomado $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$, pode-se encontrar seus pontos fixos entre $-1 \leq x \leq 1$

Se $f(x) = x$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x^3 + x) &= x \Rightarrow \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x = x \Rightarrow \\ \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x - x &= 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{2}x(x^2 - 1) &= 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ (x^2 - 1) &= 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1\end{aligned}$$

Portanto seus pontos fixos são $\{-1, 0, 1\}$

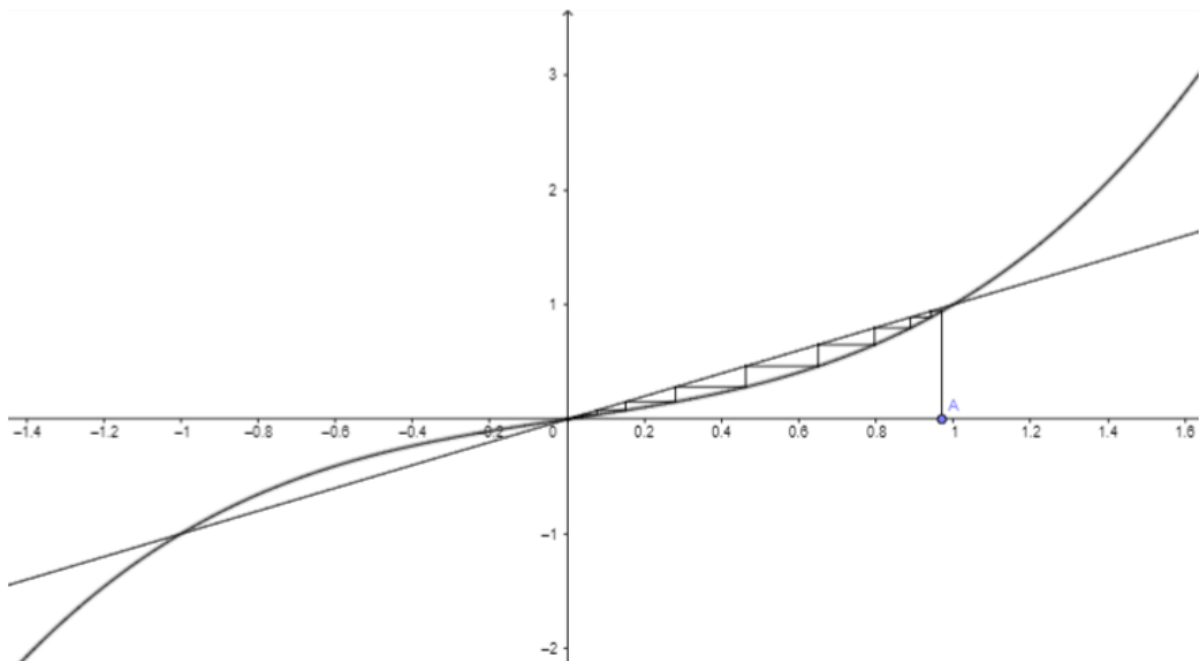


Gráfico 11 - Fixed point iteration¹⁰
 Fonte: Desenvolvido no GeoGebra.

A sequência que se observa no Gráfico 11 a partir de um ponto x_0 e de repetidas composições da função, é um exemplo da chamada de órbita de x_0 . No Gráfico 11 apresentado anteriormente observa-se também que a medida que n cresce, a sequência de valores,

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0)))$$

se aproxima cada vez mais de 1, que é uma das raízes da equação $\frac{1}{2}(x^3 - x)$.

Portanto, usando as novas definições acima, pode-se afirmar que a órbita de x_0 se aproxima de 1, que é um dos pontos fixos da função $\frac{1}{2}(x^3 + x)$. Neste caso, dizemos que esta órbita converge para este ponto fixo.

Proposição. Seja $I = [a, b]$ um intervalo e seja $f: I \rightarrow I$ contínuo. Então f tem pelo menos um ponto fixo em I .

Prova. Seja $g(x) = f(x) - x$. Claramente, $g(x)$ é contínua em I . Suponha que $f(a) > a$ e $f(b) < b$ (caso contrário, um de a ou b é fixo). Assim, obtém-se $g(a) >$

¹⁰ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/NMfTvpmK> Acesso em: 02/06/2023.

0 e $g(b) < 0$, de modo que o Teorema do Valor Intermediário (NUÑEZ, 2010) dá a existência de c entre a e b para o qual $g(c) = 0$. Portanto, $f(c) = c$ e terminamos. Este teorema é um caso especial de um teorema muito mais geral chamado Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, que fornece uma condição suficiente semelhante para a existência de pontos fixos em dimensões superiores (MARTINS; VASCONCELLOS, 2014). Pode-se realmente fazer melhor com um pouco de diferenciabilidade. O seguinte resultado é um caso especial do Teorema de Mapeamento de Contração.

Proposição. Seja $f: I \rightarrow I$ e assumamos que $|f'(x)| < 1$ para todo x em I . Então existe um único ponto fixo para f em I . Além disso, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todo $x, y \in I, x \neq y$.

Prova. A proposição garante pelo menos um ponto fixo para f , então supomos que tanto x quanto y são pontos fixos, $x \neq y$. Pelo Teorema do Valor Médio existe um c entre x e y tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 1.$$

Mas isso contradiz a suposição de que $|f'(c)| < 1$ para todo c em I . Para estabelecer a segunda afirmação da proposição, será usado novamente o Teorema do Valor Médio para afirmar que para qualquer $x, y \in I, x \neq y$.

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| < |y - x| \text{ como requerido.}$$

Os mapas podem ter muitos pontos fixos. Por exemplo, o mapa identidade $id(x) = x$ fixa todos os pontos em R , enquanto o mapa $f(x) = -x$ fixa a origem, enquanto todos os outros pontos têm período 2. Estes, porém, são sistemas dinâmicos atípicos; mapas com intervalos de pontos fixos ou periódicos são raros em um sentido que será preciso mais adiante. A maioria dos sistemas dinâmicos que encontraremos terá pontos periódicos isolados.

Definição. Um ponto x é eventualmente periódico de período n se x não é periódico, mas existe $m > 0$ tal que $f^{n+i}(x) = f^i(x)$ para todo $i \geq m$.

Definição. Seja p periódico de período n . Um ponto x é assintótico direto para p se $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{in}(x) = p$. O conjunto estável de p , denotado por $W^s(p)$, consiste em todos os pontos assintóticos à frente de p . Se p não for periódico, ainda podemos definir pontos assintóticos diretos exigindo $|f^i(x) - f^i(p)| \rightarrow 0$ como $i \rightarrow \infty$. Além

disso, se f é invertível, podemos considerar pontos assintóticos retrógrados fazendo $i \rightarrow \infty$ na definição acima. O conjunto de pontos assintóticos inversamente para p é chamado de conjunto instável de p e é denotado por $W^u(p)$.

Quando o ponto fixo é tal que a sequência de iterados iniciada em sua proximidade converge para ele, dizemos que o ponto fixo é atrator. Se, ao contrário, os iterados se afastam, mesmo que x_k esteja arbitrariamente próximo de x^* , então dizemos que o ponto fixo é repulsor.

Definição. Um atrator é um conjunto compacto a uma vizinhança tal que, para quase todas as condições iniciais nessa vizinhança o conjunto limite da órbita é o atrator, conforme $t \rightarrow \infty$.

Da argumentação apresentada anteriormente, conclui-se que se $|\varphi'(x^*)| < 1$ então x^* é um ponto fixo atrator, enquanto que se $|\varphi'(x^*)| > 1$ então x^* é um ponto fixo repulsor. Se $|\varphi'(x^*)| = 1$ não é possível prever o comportamento dos iterados, a não ser que se tenha outras informações sobre φ , em geral ligadas a derivadas de ordem mais alta. No exemplo acima em que encontram-se três pontos fixos, é possível descobrir se esses são atratores ou repulsores.

$$\begin{aligned}
 p &= \{-1, 0, 1\} \\
 f'(p) &= \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \\
 f'(-1) &= \frac{3}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 > 1 \text{ (repulsor)} \\
 f'(0) &= \frac{3}{2}(0)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \text{ (atrator)} \\
 f'(1) &= \frac{3}{2}(1)^2 + \frac{1}{2} = 2 > 1 \text{ (repulsor)}
 \end{aligned}$$

Definição. Um ponto x é um ponto crítico de f se $f'(x) = 0$. O ponto crítico é não-degenerado se $f''(x) \neq 0$. O ponto crítico é degenerado se $f''(x) = 0$. Por exemplo $f(x) = x^2$ tem um ponto crítico não degenerado em 0, mas $f(x) = x^n$ para $n > 2$ tem um ponto crítico degenerado em 0. Observe que os pontos críticos degenerados podem ser máximos, mínimos ou pontos de sela (como no caso de $f(x) = x^3$). Mas os pontos críticos não degenerativos devem ser máximos ou

mínimos. Pontos críticos podem ocorrer para difeomorfismos, mas sua existência para mapas não inversíveis é uma das razões pelas quais esses tipos de mapas são mais complicados. O objetivo dos sistemas dinâmicos é entender a natureza de todas as órbitas e identificar o conjunto de órbitas que são periódicas, eventualmente periódicas, assintóticas etc. Geralmente, esta é uma tarefa possível. Por exemplo, se $f(x)$ é um polinômio quadrático, então encontrar explicitamente os pontos periódicos do período n necessita resolver a equação $f^n(x) = x$, que é uma equação polinomial de grau 2^n . Neste caso, um computador não ajuda muito, pois os cálculos numéricos de pontos periódicos costumam ser enganosos. Erros de arredondamento tendem a se acumular e tornar muitos pontos periódicos invisíveis para o computador. Portanto, ficamos apenas com técnicas qualitativas ou geométricas de comportamento de todas as órbitas de um sistema. Essa imagem geométrica é fornecida pelo retrato de fase que agora discutiremos. O gráfico de uma função nos reais fornece informações sobre sua primeira iteração, mas fornece muito pouca informação sobre iterações subsequentes.

Para entender os iterados superiores, seria possível tentar esboçar cada um de seus gráficos, mas esse é um procedimento complicado. Por outro lado, existe um método geométrico muito mais eficiente para descrever as órbitas de um sistema dinâmico, o retrato de fase. Esta é uma imagem, na própria linha real, em oposição ao plano, de todas as órbitas de um sistema. Por exemplo, para indicar que todas as órbitas diferentes de zero de $f(x) = -x$ tem período 2, assim, pode-se esboçar o retrato de fase.

4.2.4. Um exemplo: A família quadrática

O estudo da família quadrática ganhou grande importância a partir da pesquisa sobre crescimento populacional feita por Robert May em 1976. Também conhecida como mapa logístico, esta família é expressa matematicamente por:

$$X_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

Alterar parâmetros de um sistema dinâmico, μ no caso da equação logística, equivale, na prática a construir vários sistemas dinâmicos diferentes que obedecem a mesma relação matemática entre suas variáveis (NASCIMENTO; OLIVEIRA, 2019).

Nesta subseção, será continuada a discussão da família quadrática $F_\mu = \mu x(1 - x)$. Na verdade, será retomado a esse exemplo repetidamente ao longo do texto, pois ele ilustra muitos dos fenômenos mais importantes que ocorrem em sistemas dinâmicos.

Proposição.

1. $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ e $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$, onde $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.
2. $0 < p_\mu < 1$ se $\mu > 1$.

A prova desta proposição é direta. A partir de agora os esforços serão concentrados no caso $\mu > 1$. A proposição a seguir mostra que a maioria dos pontos se comportam de maneira bastante mansa sob a interação de F_μ : todos os pontos que não estão no intervalo $[0,1]$ tende para o $-\infty$.

Proposição. Suponha $\mu > 1$. Se $x < 0$ então $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ como $n \rightarrow \infty$. De forma similar, se $x > 1$, então $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ como $n \rightarrow \infty$.

Prova. Se $x < 0$ então $\mu x(1 - x) < x$ logo $F_\mu(x) < x$. Por isso $F_\mu^n(x)$ é uma sequência decrescente de pontos. Esta sequência não pode convergir para p , pois então será obtido $F_\mu^{n+1}(x) \rightarrow F_\mu(p) < p$, enquanto $F_\mu^n(x) \rightarrow p$. Por isso $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ como requerido. Se $x > 1$, então $F_\mu(x) < 0$ então $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ também.

A análise gráfica produz os resultados acima facilmente. Como consequência desta proposição, todas as dinâmicas interessantes da família quadrática ocorrem no intervalo unitário $I = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$. Para valores abaixo de μ , a dinâmica F_μ não é muito complicada.

Proposição. Seja $1 < \mu < 3$.

1. F_μ tem um ponto fixo atrator em $p_\mu = (\mu - 1)/\mu$ e um ponto fixo repulsor em 0.
2. Se $0 < x < 1$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$$

Prova. Primeiro lida-se com o caso $1 < \mu < 2$. Supondo que x está no intervalo $(0, \frac{1}{2})$. Então a análise gráfica mostra imediatamente que $|F_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|$ se $x \neq p_\mu$. Consequentemente, $F_\mu^n(x) = F_\mu^{n-1}(F_\mu(x)) \rightarrow p_\mu$ como $n \rightarrow \infty$.

O caso quando $2 < \mu < 3$ é mais difícil. A análise gráfica mostra o que é diferente neste caso. Observe que $\frac{1}{2} < p_\mu < 1$. Deixando $\hat{p}_\mu$ denota o único ponto no intervalo $(0, \frac{1}{2})$ que é mapeado em p_μ por F_μ . Então é possível verificar que F_μ^2 mapeia o intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ dentro de $[\frac{1}{2}, p_\mu]$. Segue que $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$ como $n \rightarrow \infty$ para todo $x \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$. Agora suponha $x < \hat{p}_\mu$. Novamente a análise gráfica mostra que existe $k > 0$ de tal modo que $F_\mu^k(x) \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$. Por isso $F_\mu^{k+n}(x) \rightarrow p_\mu$ como $n \rightarrow \infty$ neste caso também. Finalmente, como antes, F_μ mapeia o intervalo $(p_\mu, 1)$ para $(0, p_\mu)$, então o resultado segue aqui também. Desde $(0, 1) = (0, \hat{p}_\mu) \cup [\hat{p}_\mu, p_\mu] \cup (p_\mu, 1)$, nos terminamos.

Portanto, para $1 < \mu < 3$, F_μ tem apenas dois pontos fixos e todos os outros pontos em I são assintóticos a p . Assim, a dinâmica de F_μ é completamente compreendida para μ neste intervalo. Como μ passa por 3, a dinâmica F_μ torna-se um pouco mais complicada: nasce um novo ponto periódico 2. Este é o começo de uma longa história – à medida que μ continua a aumentar, a dinâmica de F_μ torna-se cada vez mais complicada até que o retrato de fase de F_μ é bastante diferente. Agora quando se altera para o caso quando $\mu > 4$. No restante desta subseção, destaca-se o subscrito μ e escreveremos F em vez F_μ . Como visto anteriormente, todas as dinâmicas interessantes de F ocorrem no intervalo unitário I . Observe que, como $\mu > 4$, então o valor máximo $\frac{\mu}{4}$ de F é maior do que um. Portanto, certos pontos saem de I após uma iteração de F . Denote o conjunto de tais pontos por A_0 . Claramente, A_0 é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$ e tem propriedade de que, se $x \in A_0$, então $F(x) > 1$, logo $F^2(x) < 0$ e $F^n(x) \rightarrow -\infty$. A_0 é um conjunto de pontos que imediatamente escapam de I . Todos os outros pontos em I pertencem em I após uma iteração de F .

Seja $A_1 = \{x \in I | F(x) \in A_0\}$. Se $x \in A_1$, então $F^2(x) > 1$, $F^3(x) < 0$, e assim, como antes, $F^n(x) \rightarrow -\infty$. Indutivamente, seja $A_n = \{x \in I | F^n(x) \in A_0\}$.

Isto é, $A_n = \{x \in I \mid F^i(x) \in I \text{ para } i \leq n \text{ mas } F^{n+1}(x) \notin I\}$, para que A_n consiste em todos os pontos que escapam de I na $n + 1^{st}$ iteração. Conforme anteriormente, se x está em A_n , segue-se que a órbita de x tende eventualmente ao infinito. Como, portanto, resta apenas analisar o comportamento daqueles pontos que nunca escapam de I , ou seja, o conjunto de pontos que estão em

$$I - \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right)$$

Nota-se esse conjunto em A . A primeira pergunta é: o que exatamente é esse conjunto em pontos? Para entender A , descreve-se com mais cuidado sua construção recursiva. Como A_0 é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$, $I - A_0$ consiste em dois intervalos fechados, I_0 à esquerda e I_1 à direita. Observe que F mapeia ambos I_0 e I_1 monotonicamente em I ; F está aumentando em I_0 e diminuindo em I_1 . Como $F(I_0) = F(I_1) = I$, há um par de intervalos abertos, um em I_0 e um em I_1 , no qual são mapeados dentro A_0 por F . Portanto este par de intervalos é precisamente o conjunto de A_1 . Agora considere $I - (A_0 \cup A_1)$. Este conjunto consiste em 4 intervalos fechados e F mapeia cada um deles monotonicamente em I_0 ou I_1 . Consequentemente F^2 mapeia cada um deles em I . Portanto, vemos que cada um dos quatro intervalos em $I - (A_0 \cup A_1)$ contém um subintervalo aberto que é mapeado por F^2 em A_0 . Portanto, os pontos nesses intervalos escapam de I na terceira iteração de F . Esse é o conjunto que chamamos de A_2 . Para uso posterior, observa-se que F^2 está aumentando e diminuindo alternadamente nesses quatro intervalos. Segue-se que o gráfico de F^2 deve, portanto, ter duas elevações. Continuando desta maneira, observam-se dois fatos. Primeiro, A_n consiste em 2^n intervalos abertos disjuntos. Portanto, $I - (A_0 \cup \dots \cup A_n)$ consiste em 2^{n+1} intervalos fechados desde

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Em segundo lugar F^{n+1} mapeia cada um desses intervalos fechados monotonicamente em I . De fato, o gráfico de F^{n+1} tem exatamente 2^n elevações em

I , e segue-se que o gráfico de F^n cruza a linha $y = x$ pelo menos 2^n vezes. Isso implica que F^n tem pelo menos 2^n pontos fixos. Isso implica que F^n tem pelo menos 2^n pontos fixos ou, equivalentemente, $Per_n(F)$ consiste em 2^n pontos em I . Claramente, a estrutura de A é muito mais complicada quando $\mu > 4$ do que no caso anterior, quando $\mu < 3$.

A construção de A lembra a construção do conjunto de terços médios de Cantor¹¹: A é obtido removendo sucessivamente intervalos abertos dos “meios” de um conjunto de intervalos fechados.

Um conjunto A é um conjunto de Cantor (FREIRIA, 1992) se for um subconjunto fechado, totalmente desconexo e perfeito em I . Um conjunto é totalmente desconexo se não contém intervalos; um conjunto é perfeito se cada ponto nele for um ponto de acumulação ou ponto limite de outros pontos do conjunto (ASSUNÇÃO; BERTOLOTO, 2021).

Para garantir que nosso conjunto A seja um conjunto de Cantor, é necessária uma hipótese adicional sobre μ . Suponhamos que μ seja suficientemente grande para que $|F'(x)| > 1$ para todos $x \in I_0 \cup I_1$. O leitor pode verificar que $\mu > 2 + \sqrt{5}$ é suficiente. Logo, para esses valores de μ , existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in A$. Pela regra da cadeia, segue que $|(F^n)'(x)| > \lambda^n$ também. Afirma-se que A não contém intervalos. De fato, se assim fosse, poderíamos escolher $x, y \in A$, $x \neq y$, com o intervalo fechado $[x, y] \subset A$. Mas então, $|(F^n)'(\alpha)| > \lambda^n$ para todos $\alpha \in [x, y]$. Escolha n de modo que $\lambda^n|y - x| > 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, segue-se então que $|F^n(y) - F^n(x)| \geq \lambda^n|y - x| > 1$, o que implica que pelo menos um de $F^n(y)$ ou $F^n(x)$ está fora de I . Isso é uma contradição e, portanto, A é totalmente desconectado.

Como A é uma interseção aninhada de intervalos fechados, A é fechado. Prova-se agora que A é perfeito. Primeiro, observe que qualquer extremidade de um A_k está em A . De fato, tais pontos são eventualmente mapeados para o ponto fixo em 0 e, portanto, permanecem em I sob interação. Agora, se $p \in A$ fosse isolado, todo

¹¹ “Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) foi um matemático alemão nascido no Império Russo. Conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos, foi a partir desta teoria que chegou ao conceito de número transfinito, incluindo as classes numéricas dos cardinais e ordinais e estabelecendo a diferença entre estes dois conceitos, que colocam novos problemas quando se referem a conjuntos infinitos. Ficou conhecido por ser um dos criadores do Congresso Internacional de Matemática (ICM) ao lado de Felix Klein, e por ter elaborado a moderna Teoria dos Conjuntos (ASSUNÇÃO; BERTOLOTO, 2021).

ponto próximo deveria deixar I sob interação F . Tais pontos deveriam pertencer a algum A_k . Ou existe uma sequência de extremidades A_k convergindo para p , ou então todos os pontos em uma vizinhança deletada de p são mapeados de I por alguma potência de F .

No primeiro caso, foi finalizado como os pontos finais do mapa de A_k para 0, e, portanto, estamos em A . No último, pode-se assumir que F^n mapeia p para 0 e todos os outros pontos em uma vizinhança de p no eixo real negativo, mas então F^n tem um máximo em p tal que $(F^n)'(p) = 0$. Pela regra da cadeia, deve-se ter $F'(F^i(p)) = 0$ para algum $i < n$. Portanto, $F^i(p) = \frac{1}{2}$. Mas então $F^{i+1}(p) \notin I$ e então $F^n(p) \rightarrow -\infty$, contradizendo o fato de que $F^n(p) = 0$.

Assim é provado

Teorema: se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então A é um conjunto de Cantor.

Observação: o teorema é verdadeiro para $\mu > 4$, mas a prova é mais delicada.

Agora é possível entender o comportamento bruto das órbitas de F_μ quando $\mu > 4$. Ou um ponto tende ao $-\infty$ sob interação de F_μ , ou então toda a sua órbita está em A . Portanto, entende-se que a órbita de um ponto sob F_μ perfeitamente bem desde que o ponto não esteja em A . Analisa-se a dinâmica de F_μ em A .

Quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$, mostra-se que $|F'_\mu(x)| > 1$ em A . Esta é uma condição semelhante à condição de hiperbolicidade, exceto que exigimos $|F'_\mu(x)| \neq 1$ em um conjunto inteiro, não apenas em um ponto periódico. Isto motiva a definição do conjunto hiperbólico.

Definição: um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}$ é repulsor (*atrator*) conjunto hiperbólico para f se Γ é fechado, limitado e invariante sob f e existe $N > 0$ de tal modo que $|(f^n)'(x)| > 1$ (*repulsor* < 1) para todo $n \geq N$ e todo $x \in \Gamma$.

O conjunto A de Cantor para o mapa quadrático quanto $\mu > 2 + \sqrt{5}$ é obviamente um conjunto hiperbólico repulsor com $N=1$.

4.3. CAOS

Como abordado no início do trabalho o termo Caos foi construído a partir de várias teorias que envolvem esse conceito. Desde Newton, acreditou-se que vários fenômenos poderiam ser descritos por equações, as quais tinham um caráter determinístico.

Poincaré ao estudar sobre integração de equações diferenciais, usando ferramentas geométricas, concluiu que estas não tinham uma solução analítica geral, pois sua motivação era um problema da mecânica celeste: a estabilidade do sistema solar. Para tentar solucionar essa questão, ele reduziu esse sistema para um sistema de três corpos. O que ele verificou é que este possuía um comportamento caótico, ou seja, tinha uma sensibilidade às condições iniciais (BERGÉ; POMEAU; DUBOIS-GANCE, 1996). Ademais, Poincaré percebeu que para esse sistema era possível fazer previsões para pequenos intervalos de tempo, mas não grandes. Por ser o primeiro estudioso a detectar essas características em um sistema, é considerado o fundador do estudo sobre sistemas dinâmicos e das propriedades fundamentais do Caos.

Na sequência, vários matemáticos ingressaram no estudo sobre sistemas dinâmicos e Caos, entre eles destaca-se Aleksandr Lyapunov que foi responsável por determinar o Expoente de Lyapunov em 1892, além de contribuir com o estudo da estabilidade do movimento.

Após alguns anos, a partir de um pequeno erro matemático durante os experimentos (estudos de meteorologia e movimentação do ar na atmosfera) do matemático Edward Norton Lorenz em 1963, a teoria do Caos foi desenvolvida e efetivamente descrita pela primeira vez (LORENZ, 1972). Lorenz elaborou um sistema de equações com três variáveis, o qual era uma aproximação de equações mais complexas. Ele descobriu que as soluções oscilavam de modo irregular e que mudanças mínimas nas condições iniciais geravam soluções bem diferentes.

O seu procedimento nomeado de Atrator de Lorenz, cuja forma se assemelha a uma borboleta, fazendo com que a teoria fosse nomeada também como “Efeito Borboleta” é visualizado na Figura 29 (CAMPOS; SILVA; KALHIL, 2015;

STEWART, 2008). Dessa forma, percebe-se que prever o futuro a longo prazo pode ser quase impossível. Isso causou grande impacto na comunidade científica, pois até então o determinismo era a garantia de previsão matemática para sistemas de condições iniciais. E consequentemente, isto resultou em que equações determinísticas não-lineares podem fazer previsões para pequenos intervalos de tempo, mas não há garantias de que o mesmo ocorra para longos períodos. Isto define o que é Caos Determinístico (MARTINS, 2016).

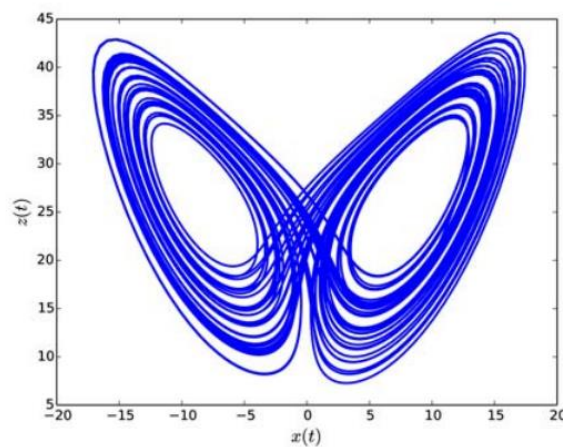


Figura 29 - Atrator de Lorenz no espaço de fase (Efeito Borboleta)

Fonte: Silva e Kalhil (2015, p. 1502-6).

Outro conceito importante para entender o conceito do Caos são as “bifurcações” que representam a repartição do gráfico de uma função, e elas ocorrem quando os pontos fixos são criados, destruídos, ou tem sua estabilidade alterada. Os valores do parâmetro nos quais as bifurcações ocorrem são chamados de Pontos de Bifurcação (GOMES, 2022). Em outras palavras, as bifurcações representam modelos com transições e instabilidades, quando algum parâmetro de transição é oscilado.

Oleksandr Mykolaiovych Sharkovskii publicou um teorema o qual ficou conhecido como Teorema de Sharkovskii sobre padrões nas soluções periódicas de sistemas dinâmicos discretos. Em 1975, James Yorke e Tien-Yien Li fizeram uma simplificação do Teorema de Sharkovskii e introduziram o termo “Caos” na comunidade acadêmica (STEWART, 2008). Isto possibilitou a definição do que é o Caos:

Definição. O Caos é identificado como um comportamento aperiódico e com sensível dependência das condições iniciais.

Diante disso, o Caos é determinístico, isto é o sistema tem leis determinísticas que parecem ser aleatórios, mas não são (MARTINS, 2016). Portanto, apesar de poderem ser feitas previsões, estas não são confiáveis a longo prazo. Esta definição não está atrelada à nenhuma seção em particular, por ser um conceito essencial a todos os outros apresentados.

No caso deste estudo, foca-se no mapa da família quadrática que exhibe de forma impressionante um fenômeno que é apenas parcialmente compreendido: o comportamento caótico das órbitas de um sistema dinâmico. Existem muitas definições possíveis de caos, variando de noções teóricas de medida de aleatoriedade na Teoria Ergódica até a abordagem topológica que adotaremos aqui. Viana e Oliveira (2019) nos apresentam que a Teoria Ergódica é a disciplina matemática que estuda sistemas dinâmicos munidos de medidas invariantes. Isto é, estuda o comportamento de sistemas dinâmicos relativamente a medidas que permanecem invariantes sob a ação da dinâmica.

Definição: $f: J \rightarrow J$ é dito ser topologicamente transitivo se para qualquer par de conjuntos abertos $U, V \subset J$ existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Intuitivamente, um mapa topologicamente transitivo tem pontos que eventualmente se movem sob interação de uma vizinhança arbitrariamente pequena para qualquer outra. Consequentemente, o sistema dinâmico não pode ser decomposto em dois conjuntos abertos disjuntos que são invariantes sob o mapa. Note que se um mapa possui uma órbita densa, então é claramente topologicamente transitivo. A recíproca também é verdadeira (para subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ ou S^1), mas não a provaremos aqui, pois a prova depende do Teorema da Categoria de Baire. Este teorema fornece condições suficientes para estabelecer que determinado espaço topológico é um espaço de Baire, ou seja, um espaço de segunda categoria em si mesmo. Este resultado possui esse nome em homenagem ao matemático René-Louis Baire (1874-1932).

Definição: $f: J \rightarrow J$ tem uma dependência sensível das condições iniciais se existir $\delta > 0$ tal que qualquer $x \in J$ e qualquer vizinhança N de x , existe $j \in N$ e $n \geq 0$ de tal modo que $|f^n(x) - f^n(j)| > \delta$.

Intuitivamente, um mapa processa a sensível dependência das condições iniciais se existir pontos arbitrariamente próximos de x que eventualmente se separaram de x pelo menos δ sob iteração de f . Enfatiza-se que nem todos os pontos próximos de x precisam estar eventualmente separados de x sob iteração, mas deve haver pelo menos um desses pontos em cada vizinhança de x . Se um mapa possui uma dependência sensível das condições iniciais, então a dinâmica do mapa desafia a computação numérica para todos os propósitos práticos. Pequenos erros de computação introduzidos pelo arredondamento podem ser ampliados após a iteração. Por mais precisos que sejam, os resultados do cálculo numérico de uma órbita podem não ter qualquer semelhança com a órbita real.

Exemplo: O mapa quadrático $\mu x(1 - x)$ com $\mu > 2 + \sqrt{5}$ possui dependência sensível das condições iniciais em A . Para ver isso, escolha δ menor que o diâmetro de A_0 , onde A_0 é a diferença entre I_0 e I_1 . Seja $x, y \in A$. Se $x \neq y$, então $S(x) \neq S(y)$, então os roteiros de x e y devem diferir em menos um ponto, digamos o enésimo. Mas isso significa que $F_\mu^n(x)$ e $F_\mu^n(y)$ estão em lados opostos de A_0 , de modo que $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \delta$. Exemplo: $F_4(x) = 4x(1 - x)$ é caótico no intervalo $I = [0, 1]$.

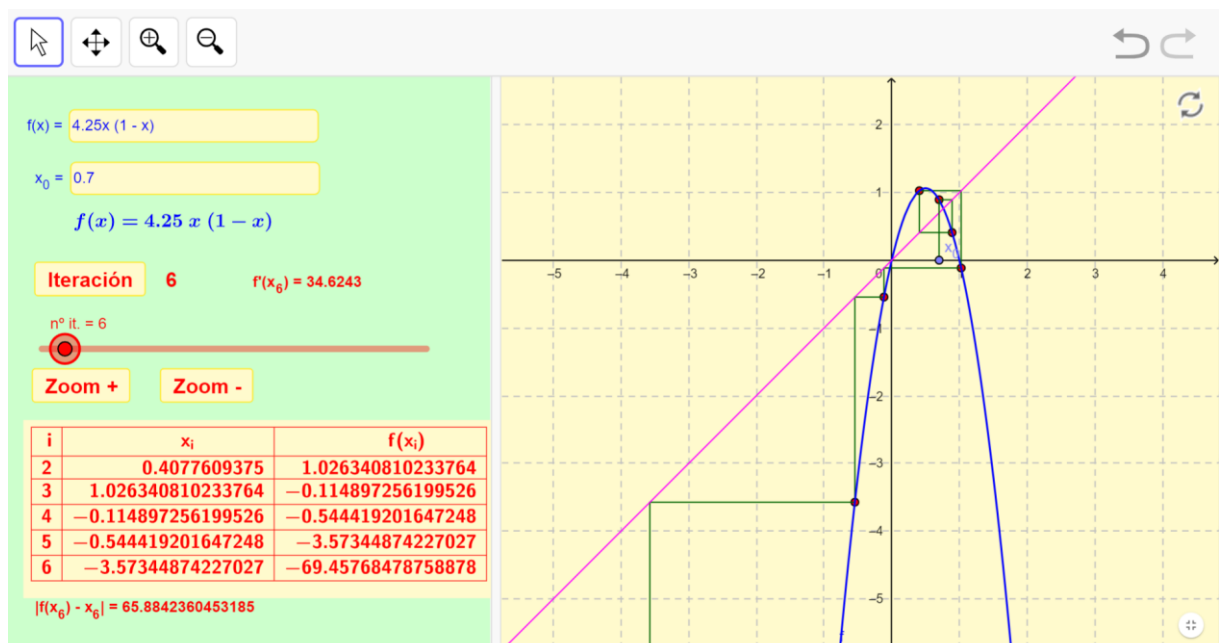


Figura 30 - Exemplo de Sistema Caótico

Fonte: Elaboração própria pelo Geogebra.

5. CONCLUSÕES

O estudo do ‘ensaio teórico’ no segundo capítulo, bem como a ‘análise bibliométrica’ no quarto capítulo, nos apresentou que os sistemas dinâmicos são sistemas fora do equilíbrio, caracterizados por estados que mudam com o tempo. Nesse sentido, nos possibilitam a tomar decisões e realizar escolhas, auxiliando na incerteza, observando os possíveis comportamentos e decisões que são definidas ao decorrer de um período (t).

A partir deste trabalho foi possível abordar, de maneira breve, a área emergente e crescente de sistemas dinâmicos, parte das suas origens clássicas, estruturas, propriedades (especificamente da família quadrática), e o surgimento do Caos. Além disso o estudo bibliométrico possibilitou compreender um pouco a evolução teórica e tendências de 1978 a 2023. A pesquisa traz a expansão para outras áreas além da matemática, como a física, engenharias, medicina, entre outras.

Com este estudo foi possível compreender de modo parcial algumas técnicas e estruturas da análise geométrica para sistemas unidimensionais e bidimensionais, o comportamento de pontos fixos e o surgimento de bifurcações, com a variação de parâmetros de controle no sistema e a existência de ciclos limite.

O estudo mostrou que há Caos quando a função é topologicamente transitiva e, também, quando possui sensibilidade às condições iniciais a partir de exemplos discretos.

Resultados principais:

- O comportamento de sistemas aparentemente simples pode ser bastante rico e complexo (caótico).
- Trajetórias caóticas possuem sensibilidade a condições iniciais, logo sistemas determinísticos apresentam caráter intrinsecamente probabilístico, tornando-se imprevisíveis ao passar do tempo ou a longos períodos.
- Equações que exibem movimento caótico não possuem soluções completas, por exemplo, não podem ser integradas.

- Sistemas regulares não se tornam ergódicos quando perturbados. Não-integrabilidade não implica ergodicidade.
- Existe ordem no caos – diferentes sistemas dinâmicos exibem rotas universais para o caos, com mesmos expoentes característicos.
- É possível controlar o caos com pequenas perturbações.

A teoria matemática do Caos, em estudos econômicos e nos negócios, colabora com o desenvolvimento de profissionais com um poder de reflexão e análise de cenários de forma a estarem aptos para lidar com cenários complexos. Contudo, não se deve ignorar os fatos (dados) e informações passadas, pois estes são essenciais para traçar uma estratégia, pois, como vimos nos exemplos que foram apresentados durante este trabalho, uma situação pode ter milhares de caminhos e dificilmente será repetida de maneira exata. Com a evolução e desenvolvimento dos meios digitais e constantes inovações, e o surgimento/criação de cenários incertos, a teoria do Caos ou análise de cenários complexo se desenvolve e ganha novas proporções.

O estudo dos mapas ainda está em estágio inicial, mas já possui um sucesso relativo em descrever alguns fenômenos onde um tempo discretizado, ou um periódico, é mais natural. Esse é o caso da dinâmica das populações na biologia, da eletrônica digital e da teoria financeira. Soma-se ainda a vantagem ao fato de que esses sistemas dinâmicos possuem uma análise facilitada, e de ser possível, a partir de modelos unidimensionais simples, gerar Caos. Devido ao seu comportamento inerentemente discreto, os mapas são os modelos naturais para se realizar computação numérica. O seu cálculo é realizado através de expressões mais acessíveis e simples e de custo computacional bem inferior à resolução de equações diferenciais por meio de integração numérica. E devido a este artifício é possível representar equações diferenciais por meio de mapas, sejam elas periódicas ou caóticas.

Um ponto importante a mencionar, é que o Brasil possui excelentes pesquisadores na área da matemática. Apesar dos resultados bibliométricos terem indicado que há uma grande produção em estrato alto de brasileiros (3^a. Posição no mundo), porém isso não é observado quando analisamos as citações (14^a. Posição no mundo), o que nos coloca para pensar na credibilidade dos pesquisadores

brasileiros no mundo. Mesmo assim, podemos encontrar brasileiros que foram agraciados com prêmios internacionais de prestígio como o Prof. Artur Ávila Cordeiro de Melo que recebeu a Medalha *Fields*, prêmio equivalente ao 'Nobel' de matemática entregue pela União Internacional de Matemáticos (IMU). As contribuições do Prof. Ávila foram na teoria dos sistemas dinâmicos unidimensionais, em que estudou o comportamento de sistemas sujeitos a alterações constantes. Os resultados da pesquisa do Prof. Ávila mostraram que os sistemas podem ficar mais ou menos estáveis ou caóticos, e é difícil distinguir quando cada caso pode acontecer. Logo, a área de concentração de pesquisa do estudo do Prof. Ávila foi uma das motivações para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso, pois também se concentrou na área da teoria do caos, mas especificamente focando os mapas unimodais, sendo que o Prof. Ávila e seu grupo de pesquisa provou que ao escolher um desses mapas aleatoriamente, ele será necessariamente ou regular ou estocástico, ou seja com origem em processos não determinísticos (FARJADO, 2014).

Por fim, este trabalho buscou contribuir com possibilidades de pesquisa dentro da família quadrática e uma visão geral das publicações científicas no mundo, dentro do corte realizado. Contudo, sugere-se para futuras pesquisas, a análise detalhada na busca de caos em modelos não lineares, pois é uma realidade incontestável.

REFERÊNCIAS

- ALLIGOOD, Kathleen T.; SAUER, Tim D.; YORKE, James A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. Nova York: Springer, 1996.
- MARTINS, Alex Clésio Nunes. **Uma Abordagem Sobre Caos e Sistemas Não-lineares para Graduação**. Brasil, 2016.
- ARAÚJO, Carlos Alberto. Bibliometria: evolução história e questões atuais. **Em Questão**, Porto Alegre, v. 12, n. 1, p. 1132, jan./jun. 2006.
- ARIA, M.; MISURACA, M.; SPANO, M. Mapping the evolution of social research and data science on 30 years of social indicators research. **Social Indicators Research**, v. 149, n. 3, p. 803-831, 2020. Doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11205-020-02281-3>.
- ARIA, Massimo; CUCCURULLO, Corrado. **Pacote Bibliometrix R**. 2021a. Disponível em: <http://www.bibliometrix.org/>. Acesso em: 30 jan. 2021.
- ARIA, Massimo; CUCCURULLO, Corrado. **Biblioshiny**. 2021b. Disponível em: <http://www.bibliometrix.org/Biblioshiny.html>. Acesso em: 30 jan. 2021.
- ASSUNÇÃO, Bryan Douglas Nunes.; BERTOLOTO, Fábio José. Propriedades do Conjunto de Cantor. **REMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 7, n. 1, p. e3011, 2021.
- BERGÉ, Pierre.; POMEAU, Yves.; DUBOIS-GANCE, Monique. **Dos ritmos ao caos**. São Paulo: Editora UNESP, 1996.
- BERTALANFFY, Ludwig von. **General System Theory**. George Braziller, Second Printing Edition, 1969.
- CAMPOS, José Galúcio.; SILVA, Cirlande Cabral.; KALHIL, Josefina Barrera. Transposição didática do Sistema de Lorenz via simulação computacional, **Lat. Am. J. Phys. Educ.**, Vol. 9., No. 1., Mar., 2015.
- CVITANOVIĆ, P.; ARTUSO, R.; MAINIERI, R.; TANNER, G.; VATTAY, G. **Chaos: Classical and Quantum**. Niels Bohr Institute., Copenhagen, 2016.
- DEVANEY, Robert. L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. Third Edition, Westview Press, 2022.
- FARJADO, Vanessa. **Pesquisador brasileiro ganha prêmio equivalente a ‘Nobel’ de matemática**. G1 Educação, 2014. Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/08/pesquisador-brasileiro-ganha-premio-equivalente-nobel-de-matematica.html> Acesso em: 03/06/2023.

FREIRIA, Antônio Acra. **A Teoria dos Conjuntos de Cantor**. Paidéia, FFCLRP – USP, Ribeirão Preto, 2, Fev/Jul, 1992.

GOMES, Ana Letícia Becker. **Aspectos gerais da Teoria do Caos**. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2022.

HEIN, Nelson. **Técnica do Compartilhamento Sucessivo – Um Algoritmo Memético na Otimização de Funções Multimodais**. Tese de doutorado do curso de Engenharia de Produção e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1998.

KATOK, Anatole; HASSELBLATT, Boris. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1996.

KLUEVER, Craig A. **Sistemas dinâmicos: Modelagem, simulação e controle**. São Paulo: LTC, 2017.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real volume 1 – funções de uma variável**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

LORENZ, Edward U. **Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas?** Massachusetts Institute of Technology, Cambridge: 1972. 4 p

LYNCH, Stephen. **Dynamical Systems with Applications using MATLAB®**, Birkhäuser Cham, Springer International Publishing Switzerland, 2nd Edition, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-06820-6>

MALTRÁS BARBA, Bruno. Indicadores de Producción. In: MALTRÁS BARBA, Bruno. **Los Indicadores Bibliométricos: fundamentos y aplicación al análisis de la ciencia**. Gijón, Ediciones Trea, 2003. (cap. 4).

MARTINS, Patricia Reis.; VASCNCELLOS, Carlos Frederico. Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. **Cadernos do IME – Série Matemática**, Vol. 8, 2014.

MAY, Robert. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**. Vol. 261, p. 459-467, 1976.

MICHEL, M. H. **Metodologia e pesquisa científica em ciências sociais: um guia prático para acompanhamento da disciplina e elaboração de trabalhos monográficos**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2015.

MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. **Sistemas Dinâmicos**. 4^a. Edição, Editora: Livraria da Física, 2019.

MOREIRA, Paulo Sergio da Conceição; GUIMARÃES, André José Ribeiro; TSUNODA, Denise Fukumi. Qual ferramenta bibliométrica escolher? um estudo comparativo entre softwares. **P2P E INOVAÇÃO**, [S. l.], v. 6, p. 140–158, 2020. DOI:

10.21721/p2p.2020v6n2.p140-158. Disponível em:
<https://doi.org/10.21721/p2p.2020v6n2.p140-158>. Acesso em: 30 jan. 2021.

NASCIMENTO, Monica Marques.; OLIVEIRA, Tiago Estrela de. **Sistemas Dinâmicos em Dimensão 1 – Família Quadrática**. IX Simpósio de Iniciação Científica, Didática e de Ações Sociais da FEI, Departamento de Matemática, São Bernardo do Campo, 2019.

NÚÑEZ, Paula Soledad. **Teorema de Sarkovskii**. Tesis de Licenciatura en Matemática Aplicada. Escuela de Formación Continua de la Universidad Nacional de La Matanza, San Justo, Buenos Aires, Argentina, 2010.

OESTREICHER, Christian. A history of chaos theory. **Dialogues in clinical neuroscience**, 2022. DOI: <https://doi.org/10.31887/DCNS.2007.9.3/coestreicher>

OKUBO, Y. Bibliometric Indicators and Analysis of Research Systems: Methods and Examples. OECD Science, **Technology and Industry Working Papers**, Paris, v. 97, n. 41, 1997/1, OECD, p. 8-12, 1997.

PINHEIRO, Lena Vânia Ribeiro. Lei de Bradford: uma reformulação conceitual. **Ciência da Informação**, Brasília, v. 12, n. 2, p. 5980, jul./dez. 1983.

PINTO, Reynaldo D. **Fenômenos Não-Lineares em Física: Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos**. 1º semestre de 2007. Disponível em: <http://www.ifsc.usp.br/>. Acesso em: outubro. 2019.

PRINS, A.A.M., et al. Using Google Scholar in research evaluation of humanities and social science programs: A comparison with Web of Science data. **Research Evaluation [online]**. 2016, vol. 25, no. 3, pp. 264–270 [viewed 27 November 2019]. DOI: 10.1093/reseval/rvv049.

POINCARÉ, Henri. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste**. Gauthier-Villars, 1893. Vol. 1-3. Republicado por Blanchard, Paris, 1993.

POINCARÉ, Henri. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

SCIMAGO, Grupo. El índice h de Hirsch: su aplicación a algunos de los científicos españoles más destacados. **El Profesional de la Información**, [S. l.], v. 16, n. 1, p. 47, 2016. DOI: 10.3145/epi.2007.ene.05. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3145/epi.2007.ene.05>. Acesso em: 3 mar. 2021.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito**. Rio de Janeiro: Zahar, 2008.

TEIXEIRA, M. L. M.; IWAMOTO, H. M.; MEDEIROS, A. L. Estudos bibliométricos (?) em administração: discutindo a transposição de finalidade. **Administração: Ensino e Pesquisa**, v. 14, n. 3, p. 423-452, 2013. Doi: <https://doi.org/10.13058/raep.2013.v14n3.57>

VANTI, N. A. P. Da bibliometria à webometria: uma exploração conceitual dos mecanismos utilizados para medir o registro da informação e a difusão do conhecimento. **Ciência da Informação, Brasília**, v. 31, n. 2, p. 152-162, maio/ago. 2002.

VIANA, Marcelo.; OLIVEIRA, Kreley. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2019, 520 p. (Coleção Fronteiras da Matemática).

VILLANI, Cédric. **Birth of a theorem: a mathematical adventure**. Farrar, Straus, and Giroux; Reprint edition 2015.

VILLATE, Jaime E. **Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com Maxima**. Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, 2007. ISBN: 972-99396-0-8.

ZUPIC, I.; ČATER, T. Bibliometric Methods in Management and Organization. **Organizational Research Methods**, v. 18, n. 3, p. 429-472, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1177%2F1094428114562629>

APÊNDICE A – LISTA DE DOCUMENTOS MAIS CITADOS NO MUNDO

IZHIKEVICH, E. M. Which Model to Use for Cortical Spiking Neurons? **IEEE Transactions on Neural Networks**, Vol. 15 No. 5, p. 1063–1070, 2004. doi:10.1109/tnn.2004.832719

GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Vol. 7 No. 1-3, p. 181–200, 1983. doi:10.1016/0167-2789(83)90126-4

LEONOV, G. A.; KUZNETSOV, N. V. HIDDEN ATTRACTORS IN DYNAMICAL SYSTEMS. FROM HIDDEN OSCILLATIONS IN HILBERT–KOLMOGOROV, AIZERMAN, AND KALMAN PROBLEMS TO HIDDEN CHAOTIC ATTRACTOR IN CHUA CIRCUITS. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Vol. 23 No. 01, p. 1330002, 2013. doi:10.1142/s0218127413300024

UETA, T.; CHEN, G. BIFURCATION ANALYSIS OF CHEN'S EQUATION. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Vol. 10 No. 08, p. 1917–1931, 2000. doi:10.1142/s0218127400001183

WANG, X.; CHEN, G. A chaotic system with only one stable equilibrium. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Vol. 17 No. 3, p. 1264–1272, 2012. doi:10.1016/j.cnsns.2011.07.017

DUBOURG, V., SUDRET, B.; DEHEEGER, F. Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis. **Probabilistic Engineering Mechanics**, Vol. 33, p. 47–57, 2013. doi:10.1016/j.probengmech.2013.0

LÜ, J., CHEN, G.; CHENG, D. A NEW CHAOTIC SYSTEM AND BEYOND: THE GENERALIZED LORENZ-LIKE SYSTEM. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Vol. 14 No. 05, p. 1507–1537, 2004. doi:10.1142/s021812740401014x

QI, G., CHEN, G.; DU, S.; CHEN, Z.; YUAN, Z. Analysis of a new chaotic system. **Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications**, Vol. 352 No. 2-4, p. 295–308, 2005. doi:10.1016/j.physa.2004.12.040

MOLAIE, M.; JAFARI, S.; SPROTT, J. C.; GOLPAYEGANI, S. M. R. H. SIMPLE CHAOTIC FLOWS WITH ONE STABLE EQUILIBRIUM. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Vol. 23 No. 11, p. 1350188, 2013. doi:10.1142/s0218127413501885

PROSEN, T. Third quantization: a general method to solve master equations for quadratic open Fermi systems. **New Journal of Physics**, Vol. 10 No. 4, p. 043026, 2008. doi:10.1088/1367-2630/10/4/043026