



**UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA**  
**SILVIA REGINA DOWGAN TESSEROLI DE SIQUEIRA**

**ESTUDO DA PSICOACÚSTICA ATRAVÉS DE**  
**MODELAGEM MATEMÁTICA**

**Palhoça, 2020**

**SILVIA REGINA DOWGAN TESSEROLI DE SIQUEIRA**

**ESTUDO DA PSICOACÚSTICA ATRAVÉS DE  
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática – Bacharelado da Universidade do Sul de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel(a) em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Kelson de Souza Kock

Palhoça, 2020

**SILVIA REGINA DOWGAN TESSEROLI DE SIQUEIRA**

**ESTUDO DA PSICOACÚSTICA ATRAVÉS DE  
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado à obtenção do título de Bacharel(a) em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 01 de dezembro de 2020.

---

Professor e orientador Kelser de Souza Kock, PhD.  
Universidade do Sul de Santa Catarina

---

Professor Altamiro Quevedo Schervenski, MSc.  
Universidade do Sul de Santa Catarina

---

Professor José Ribamar dos Santos Ferreira Júnior, PhD.  
Universidade de São Paulo

Dedico este trabalho a todos os meus mestres, familiares, pessoas próximas e distantes, que de algum modo contribuíram como catalisadores da minha persistência e amor pelo conhecimento.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, origem e sentido último de minha existência, que atua misteriosamente pelas entrelinhas de minha vida ao guiar-me pelo caminho da Verdade.

Aos meus pais, Irene e José Tadeu, exemplos de caráter e incentivadores da busca pelo conhecimento. Obrigada por serem a ponte com as minhas raízes familiares, parte do que sou hoje.

Ao meu marido, por permitir-me construir uma família e pelo incentivo aos estudos e à minha eterna busca existencial.

À minha filha Natalia, por me ensinar sobre o amor incondicional de mãe, e por me permitir ser agora a ponte para uma continuidade vindoura.

A todos os sábios e estudiosos da matemática, que nos dão a oportunidade de aprender através do legado que deixaram para a humanidade.

Ao Professor Kelser, por permitir este trabalho, que é mais um passo da matemática ao lado da sua irmã música: uma arte fascinante e que também faz parte da minha vida.

A todos os professores da Universidade do Sul de Santa Catarina, pelos ensinamentos, aulas, orientações e incentivos, e por me desafiarem a ser melhor.

A todas aquelas pessoas que passaram ao longo de minha existência e que, de algum modo, muitas vezes sem notar, promoveram pontos de inflexão pela ação misteriosa de Deus, levando-me a me matricular e cursar Matemática.

“Os olhos do espírito só começam a ver com acuidade, quando os do corpo entram a enfraquecer” (Platão).

## RESUMO

A psicoacústica é um ramo da psicofísica que constitui uma área interdisciplinar e pode ser estudado por diferentes processos metodológicos. Dentre estes, foram selecionados os recortes da psicofísica, a partir dos estudos de Fechner, e da física ondulatória, que investiga o comportamento das ondas sonoras. A percepção auditiva corresponde a uma relação potencial entre a intensidade do estímulo e a consciência sonora, dependente da duração e que apresenta padrão diferenciado quando se distancia da área de limiar sensitivo. Tanto para a percepção auditiva quanto para a modelagem das frequências que compõem os sons em sua perspectiva ondulatória, há o desenvolvimento de funções trigonométricas organizadas em uma série de Fourier. A evolução científica dos modelos matemáticos em psicoacústica levou ao desenvolvimento tecnológico de diversos aparatos, tanto na área biomédica quanto no campo da tecnologia digital do som, sendo este um campo ainda fértil para o desenvolvimento científico futuro.

Palavras-chave: Psicoacústica. Psicofísica. Modelagem matemática.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Anatomia das estruturas relacionadas ao sistema sensitivo auditivo.....	30
Figura 2 – Esquema gráfico da câmara coclear superior, preenchida por fluido viscoso. O orifício que conecta esta câmara à câmara inferior se localiza próximo ao ponto $(L,0)$ e a membrana basilar, que se localiza entre as câmaras, está esquematizada pelo segmento $[0,L)$ . .....	31
Figura 3 – Representação gráfica das figuras musicais.....	44
Figura 4 – Divisões da métrica musical a partir do pulso em semínimas. ....	45
Figura 5 – Esquema gráfico das bandas críticas humanas, distribuídas de acordo com as frequências. ....	51
Figura 6 – Esquema para cálculo da diferença temporal e de intensidade do som entre as orelhas. .....	55

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Representação do limiar sensitivo através de um ponto e de uma faixa de percepção. .....	18
Gráfico 2 – Representação da Lei Weber-Fechner através da função logarítmica. ....	20
Gráfico 3 – Representação da Lei de Stevens através da função potencial. ....	21
Gráfico 4 – Representação da percepção auditiva em relação à duração sonora (eixo $x$ ) e intensidade do estímulo (eixo $y$ ). ....	23
Gráfico 5 – Representação da função de inflexão exponencial para a psicoacústica. ....	24
Gráfico 6 – Representação dos limiares auditivos em decibéis para cada frequência sonora. ....	25
Gráfico 7 – Representação das funções $fx = 1 + sen1,4x + 1$ , $gx = 1 + 2sen3x$ , $hx = 1 + sen(5x)$ . ....	38
Gráfico 8 – Representação da sobreposição de termos da série harmônica, modelada como uma série de Fourier. ....	49
Gráfico 9 – Correspondência entre som analógico e digital: 25 amostras de 4 <i>bits</i> cada. ....	52
Gráfico 10 – Espectros correspondentes aos principais modelos artificiais de timbres musicais. .....	54

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>CONSIDERAÇÕES INICIAIS</b> .....	<b>10</b>
1.1	TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA.....	11
1.2	PROBLEMATIZAÇÃO.....	12
1.3	JUSTIFICATIVAS.....	12
1.4	OBJETIVOS.....	13
1.4.1	Objetivo Geral.....	13
1.4.2	Objetivos Específicos.....	13
<b>2</b>	<b>DELIMITAÇÃO METODOLÓGICA</b> .....	<b>14</b>
2.1	TIPO DA PESQUISA.....	14
<b>3</b>	<b>ETAPAS METODOLÓGICAS</b> .....	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TÉORICA</b> .....	<b>16</b>
4.1	A PSICOACÚSTICA NO CONTEXTO DA PSICOFÍSICA E SUAS APLICAÇÕES.....	16
4.1.1	Modelagem matemática da fisiologia da percepção.....	16
4.1.2	A psicoacústica enquanto um ramo da psicofísica.....	22
4.1.3	Aplicações psicoacústicas no contexto da psicofísica.....	26
4.2	A PSICOACÚSTICA NO CONTEXTO DA FÍSICA ONDULATÓRIA E SUAS APLICAÇÕES.....	36
4.2.1	Modelagem matemática psicoacústica ondulatória.....	37
4.2.2	Aplicações da psicoacústica ondulatória.....	50
<b>5</b>	<b>DISCUSSÃO</b> .....	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>62</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>63</b>

## 1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O estudo da psicoacústica é um ramo de uma área mais abrangente denominada psicofísica, cujas primeiras modelagens datam do século XIX. Inicialmente, Ernst Heinrich Weber (1795-1878) identificou que havia uma relação de proporção entre o estímulo sensitivo aplicado em um sujeito e a intensidade percebida, sendo Gustav Theodor Fechner (1801-1887) responsável pela elaboração matemática dessa proporção em uma função logarítmica que denominou Lei Weber-Fechner (DUDEL, 1983; BLOMSTEDT, 2014, pg.7; ROLDAN; ABDI, 2015). O estímulo se multiplicaria até atingir um determinado limiar, e passaria a ser percebido. Os acréscimos de sensação seriam notados de modo aditivo, ou seja, a multiplicação do estímulo para além do limiar aumentaria aditivamente a sensação (BLOMSTEDT, 2014, pg.8; WEY E LOPES, 2020; pg.2). O psicofísico Stanley Smith Stevens (1906—1973) sugeriu posteriormente que, ao invés da função logarítmica, a melhor forma de descrever essa proporção seria por uma lei potencial (GARDNER; JOHNSON, 2017a; KANDEL, 2017). O estímulo, além de ser detectado, também apresenta discriminação quando percebido, que no caso do som nada mais é do que a distinção entre frequências sonoras e sua relação temporal (SORANZO E GRASSI, 2014; pg.1).

Por outro lado, a psicoacústica também é um ramo do estudo da música, bem como da modelagem das ondas sonoras, um campo cujos primórdios de investigação datam de mais de 2.000 anos atrás. Destacam-se os trabalhos de Pitágoras sobre os intervalos, a ampliação do estudo das notas tanto em sua organização melódica quanto harmônica ao longo da Idade Média (como por exemplo as contribuições de Guido d'Arezzo e Boécio) (MARTINS, 2015, pg.16; ZANATO, 2017, pg.26), seguidos da matematização neste campo a partir do século XVIII iniciada com Galileu Galilei (frequências sonoras, consonâncias e dissonâncias), Marin Mersenne (Leis de Mersenne, velocidade do som, divisão da oitava em 12 partes desiguais e iguais), Joseph Sauveur (ondas estacionárias em cordas – nó e ventre – e harmônico), Christian Huygens (teoria ondulatória) e Isaac Newton (ótica e sons musicais, propagação do som), o que culminará com os grandes avanços do século XX em tecnologia do som, que depende dos modelos matemáticos e do que se entende modernamente por psicoacústica (MARTINS, 2015, pg.17).

O som pode ser definido como uma sensação percebida pelo ouvido cuja fonte de estímulo é a vibração do ar. Em outras palavras, trata-se de energia mecânica transmitida pela pressão longitudinal de ondas em um meio material, transduzida em impulsos eletromagnéticos

enviados ao sistema nervoso central (BLOMSTEDT, 2014, pg.6). Os sons podem ser agradáveis ou não, sendo a música considerada uma combinação em geral consonante de sons melódicos e / ou harmônicos, enquanto que o ruído ou barulho pode ser definido como som desagradável e / ou dissonante (BLOMSTEDT, 2014, pg.6-7). A onda sonora é caracterizada por um fenômeno mecânico de pressão que propaga energia e que tem, portanto, padrão periódico, o que associa-se às expressões trigonométricas para sua modelagem (FASTL E ZWICKER, 2007; pg.11-12; FABBRI, 2013; pg.33; MARTINS, 2015; pg.22; ZANATO, 2017; pg.38). A propagação ondulatória pode ser plana ou esférica, transversal ou longitudinal e pode haver interferências construtivas ou destrutivas no encontro de ondas com frequências diferentes, ou ainda picos de amplitude denominados batimentos (MARTINS, 2015; pg.23).

O som pode ser capturado por microfones e, por meio da conversão analógico-digital, suas amplitudes são codificadas por um número de *bits* distribuídos por um período de tempo (FABBRI, 2013, pg.34; WEY E LOPES, 2020; pg.3). O componente temporal da música é a base da sua percepção, e é determinada pelos ritmos, o que pode ser reproduzido pela resposta efetora motora, a exemplo da dança (RAJENDRAN et al., 2018; pg.5). A percepção sonora também pode ser compreendida como um sistema de bandas, que nada mais são do que filtros presentes na cóclea que aumentam a discriminação dos sons (WEY E LOPES, 2020; pg.1).

Observa-se, portanto, que a psicoacústica pode ser estudada de diferentes pontos de vista, uma vez que é uma área interdisciplinar, e diferentes formas de modelagem podem ser utilizadas conforme o recorte científico. Pode-se, assim, definir a psicofísica enquanto uma interação de aspectos perceptivos, fisiológicos e físicos, intercambiando neste campo de estudos os termos música, vibração, som e frequência como modos de descrição do mesmo fenômeno (BLOMSTEDT, 2014; pg.9).

## 1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA

Como área interdisciplinar, a psicoacústica apoia-se em princípios de neurociência, que abrangem a percepção auditiva e sua fisiologia, o que foi brevemente contemplado neste estudo. Considerando-se a modelagem matemática como escopo principal deste campo científico, foram considerados tanto os estudos de percepção auditiva que englobam os limiares

e funções intensidade – percepção, bem como os modelos referentes às frequências ondulatórias na composição sonora, o que se traduz na aplicação em termos de decodificação digital e tecnologia do som.

## 1.2 PROBLEMATIZAÇÃO

Como descrito anteriormente, há duas abordagens matemáticas que se destacam em psicofísica, sendo uma delas a questão psicofísica e a percepção auditiva enquanto modalidade sensitiva, sendo a outra relacionada ao comportamento físico ondulatório.

Do ponto de vista psicofísico, embora os primeiros modelos tenham indicado uma função logarítmica, posteriormente corrigida para potencial, notou-se que, para sons baixos e intermediários, esta função não representa bem a percepção. Em outras palavras, a função de percepção sonora é modulada pela intensidade do som (FLORENTINE E EPSTEIN, 2001; pg.1-2), e este é um dos aspectos que será contemplado neste estudo. Por outro lado, enquanto onda mecânica, as funções seno – cosseno que modelam a música devem ser analisadas, inclusive considerando séries de Fourier, que são amplamente utilizadas no contexto da tecnologia musical, bem como aspectos relativos aos algoritmos e à decodificação analógica-digital por *bits*.

## 1.3 JUSTIFICATIVAS

O interesse em se estudar esta área abrangente decorre da ampla aplicação que a psicoacústica tem em diferentes campos do conhecimento, o que vai desde a prática médica, a exemplo do entendimento da percepção sonora para desenvolvimento de equipamentos auditivos, até a digitalização sonora, relacionada com algoritmos de *softwares* para decodificação digital de sons ou ainda composição musical. Demonstra-se e justifica-se,

portanto, o profundo interesse geral em se compreender os modelos matemáticos e o desenvolvimento científico relacionado, para difusão do conhecimento e aplicação do mesmo.

## 1.4 OBJETIVOS

### 1.4.1 Objetivo Geral

Revisar a literatura científica sobre psicoacústica quanto aos fundamentos, à modelagem matemática e aplicações dos modelos

### 1.4.2 Objetivos Específicos

- 1.4.2.1 Definir a psicoacústica enquanto um ramo da psicofísica
- 1.4.2.2 Contextualizar a psicoacústica enquanto estudo ondulatório dos sons
- 1.4.2.3 Apresentar modelos matemáticos psicoacústicos nas áreas supracitadas
- 1.4.2.4 Apresentar aplicações dos modelos matemáticos psicoacústicos

## **2 DELIMITAÇÃO METODOLÓGICA**

### **2.1 TIPO DA PESQUISA**

Neste trabalho, foi realizada revisão bibliográfica pertinente ao tema em bases científicas acadêmicas (PubMed, Scielo, Google Acadêmico) de publicações nacionais e internacionais sem delimitação temporal. Além da fundamentação teórica, incluiu-se trabalhos que apresentem modelagens matemáticas da psicoacústica tanto no campo da psicofísica como em física ondulatória sonora e / ou musical, bem como foram descritas aplicações destes modelos. Ao final, os achados foram brevemente discutidos para obtenção de uma conclusão.

### 3 ETAPAS METODOLÓGICAS

Inicialmente, foi realizado levantamento bibliográfico utilizando-se as seguintes palavras-chaves: psicoacústica, psicofísica, modelos matemáticos, modelagem musical, modelagem ondulatória do som, *psychoacoustics*, *psychophysics*, *mathematical modeling*, *musical modeling*, *sound ondulatory modeling*. Após leitura dos 46 resumos, foram selecionados os trabalhos pertinentes a este estudo, para que sejam incluídos em sua versão integral. Então, foi realizada a revisão bibliográfica com redação da fundamentação teórica, seguida da discussão dos achados bem como conclusão e revisão final do trabalho.

## 4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 4.1 A PSICOACÚSTICA NO CONTEXTO DA PSICOFÍSICA E SUAS APLICAÇÕES

O sistema sensitivo depende de receptores específicos para cada modalidade sensitiva. Estes, ao serem estimulados por uma força de determinada magnitude, transmitem por transdução este estímulo em potenciais de ação que percorrerão as vias sensitivas até chegarem ao sistema nervoso central. Para se tornar consciente, o estímulo precisa percorrer todo este caminho, podendo ser facilitado ou inibido por diversos fatores (GARDNER; MARTIN, 2003). Nesta seção, serão avaliados os aspectos referentes à psicoacústica enquanto psicofísica, bem como os modelos matemáticos utilizados e suas aplicações. Também será apresentada breve revisão da fisiologia da percepção.

#### 4.1.1 Modelagem matemática da fisiologia da percepção

A percepção sensorial, representada pela tomada de consciência de um estímulo de determinada característica, está relacionada diretamente à magnitude deste estímulo que permite a sensibilização das vias nervosas tanto periféricas quanto centrais, sendo definido o limiar sensitivo como a menor quantidade ou intensidade de estímulo que é necessária para que haja consciência ou percepção (GARDNER E MARTIN, 2003). Ao estudo deste conhecimento dá-se o nome de psicofísica.

Todo estímulo sensorial contém um componente fisiológico objetivo e um componente emocional subjetivo em sua percepção. Esta, depende de vários aspectos como características humanas (limitações do aparelho auditivo e do processamento nervoso sensitivo) e características físicas dos sons (BLOMSTEDT, 2014, pg.13), sendo que nesta primeira parte será estudado o componente perceptual e fisiológico, enquanto que na segunda seção deste trabalho serão abordados aspectos físicos ondulatórios dos sons. Embora seja impossível separar completamente o componente subjetivo da percepção, o estudo da psicofísica procurou

tornar mais objetiva a mensuração da percepção para que pudesse ser estudada através do método científico.

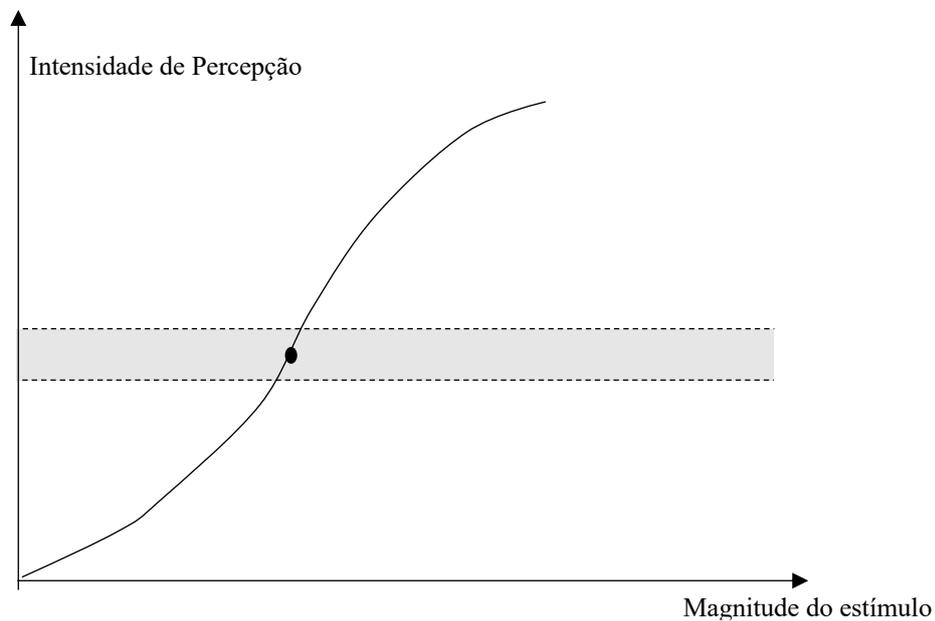
A psicofísica nasceu a partir da aplicação dos métodos matemáticos e como técnica de mensuração na psicologia, determinando sua entrada científica na modernidade. Foram expressivas as contribuições de Ernst Heirch Weber (1795 – 1878) e Gustav Theodor Fechner (1801- 1887) com seus trabalhos realizados no Laboratório de Psicologia Experimental de Wilhelm Wundt, na Universidade de Leipzig, na Alemanha (DA SILVA E ROZENSTRATEN, 2018; pg.5-6). Entretanto, antes de apresentar a modelagem matemática da psicofísica, é necessário descrever alguns fundamentos da fisiologia da percepção.

A percepção pode ser descrita como a capacidade do indivíduo em perceber o ambiente externo, o que se dá através de receptores sensitivos especializados em determinadas modalidades sensitivas, cujos órgãos de percepção encontram-se distribuídos pelo corpo (no caso do que se denomina somestesia: tato, temperatura, dor, pressão) ou localizados em áreas específicas (como acontece com percepções especiais: visão, olfação, gustação e audição). Além da exterocepção, deve-se também ressaltar-se outra modalidade perceptiva interna que é denominada por propriocepção. Esta permite ao organismo a percepção de sensações oriundas do próprio corpo, envolvendo aspectos espaciais relativos à posição de membros, e ao equilíbrio) (GARDNER et al., 1989). A psicofísica dedica-se ao estudo da exterocepção.

Como descrito anteriormente, os receptores sensitivos são especializados ou específicos para determinada modalidade sensitiva. Isto significa que um receptor especializado em detecção de fótons, por exemplo, não serve para detecção de qualquer outro tipo de estímulo. Ao serem estimulados por um estímulo de determinada magnitude, os receptores ativados geram potenciais de ação nervosos por um processo denominado de transdução (GARDNER et al., 1989). Estes potenciais elétricos são transmitidos por despolarização de membrana neural e através de estímulos químicos transportados nas sinapses, até que atinjam as áreas mais superiores de processamento de informação sensitiva no córtex cerebral (GARDNER E MARTIN, 2003). Somente então ocorre a percepção consciente, que pode ser facilitada ou inibida ao longo do caminho neural por diversos fatores modulatórios.

À menor porção de magnitude de estímulo necessária à percepção consciente, dá-se o nome de limiar sensitivo (SORANZO E GRASSI, 2014, pg.2). Embora possa ser representado matematicamente em um gráfico por um ponto, trata-se na realidade de uma faixa de magnitude a partir da qual ocorre a percepção (JOHNSON et al., 2002). Esta faixa não é estanque e pode diferenciar-se por características individuais variáveis até mesmo no decorrer de horas ou dias. O Gráfico 1 ilustra o limiar sensitivo.

Gráfico 1 – Representação do limiar sensitivo através de um ponto e de uma faixa de percepção.



Do ponto de vista fisiológico, os limiares de percepção dependem de diversos fatores inerentes às vias sensoriais, como densidade de receptores, integridade das vias nervosas, aspectos modulatórios neurais ou hormonais, características biológicas demográficas (idade, sexo), aspectos cognitivos, psíquicos, período do ciclo circadiano, meio físico para facilitação da transdução pelo receptor sensitivo, entre outros (VALLBO et al., 1979). Também há dependência em aspectos como tamanho da área estimulada, quantidade repetitiva de estímulos, representação central sensorial e densidade de terminações nervosas, o que afeta a geração de potenciais de ação, desencadeando o impulso nervoso que percorre as vias até atingir o sistema nervoso central (GARDNER E MARTIN, 2003).

É importante destacar que a relatividade da percepção sensitiva se traduz em uma comparação entre valores sensitivos. Um exemplo que facilmente ilustra este processamento é a percepção de frio ou calor, que nada mais é do que observar que o estímulo térmico apresentado corresponde a uma temperatura maior ou menor do que o registro basal ou anterior. Deste modo, um corpo em determinada temperatura pode ser percebido como frio ou quente, a depender da temperatura do aparato de percepção (GARDNER E MARTIN, 2003). É

justamente essa noção de relatividade da percepção que se constitui como principal contribuição de Weber para esta ciência. Sendo assim, a primeira lei matemática que determinou a magnitude de percepção relaciona a taxa variação de intensidade ou magnitude do estímulo ( $\Delta S$ ) com a magnitude basal ou referencial do estímulo ( $S$ ), tendo sido denominada Lei de Weber, onde  $k$  é uma constante:

$$\Delta S = k \cdot S \quad (1)$$

Infelizmente estudos posteriores demonstraram que a constante  $k$  não seria tão constante assim, sendo necessários maiores incrementos sensitivos nas extremidades (tanto quando o estímulo é muito fraco ou quando já se apresenta bastante intenso) do que quando se apresenta próximo a valores médios (DA SILVA E ROZENSTRATEN, 2018; pg.6-7). Foi Gustav T. Fechner que melhor fundamentou matematicamente o relativismo perceptual de Weber, sendo relevante destacar o embasamento filosófico de suas ideias no contexto de reconhecer a presença da consciência em todos os seres da realidade, dotados de capacidade de percepção, em uma postura contra o materialismo crescente do século XIX. Sua intenção com a formulação matemática da percepção foi eliminar o abismo entre espírito e corpo através de uma equação que demonstrasse esta relação entre o mundo físico e a percepção mental (DA SILVA E ROZENSTRATEN, 2018; pg.8). Foi Fechner quem determinou os métodos de experimentação psicofísica, sendo o método do acréscimo a taxa periódica constante e o método dos limites os mais utilizados atualmente (SORANZO E GRASSI, 2014, pg.2-3).

Fechner observou, em 1860, que a melhor modelagem desta função psicofísica seria logarítmica. Na Lei Weber-Fechner, temos que a intensidade de percepção  $i$  é proporcional ao logaritmo da intensidade do estímulo  $S$  em relação ao limiar basal  $S_0$  (GARDNER E MARTIN, 2003):

$$i = k \cdot \log\left(\frac{S}{S_0}\right) \quad (2)$$

Em termos físicos, temos que as intensidades absolutas  $S$  das ondas sonoras são mensuradas em  $W/m^2$ , cuja relação com a percepção sensitiva se dá justamente pela relação logarítmica acima representada. Temos que a relação entre a unidade de pressão auditiva em decibéis se baseia no limiar auditivo, sendo 0 dB correspondentes a  $2 \times 10^{-5}$  Pa (PETERSON, 2001; pg.3). Assim, a percepção humana dos sons vai do limiar 0 dB ao limiar auditivo à dor de 120 dB.

O Gráfico 2 ilustra a relação logarítmica entre a magnitude do estímulo e a intensidade de percepção.

Gráfico 2 – Representação da Lei Weber-Fechner através da função logarítmica.

Intensidade de Percepção



Magnitude do estímulo

No século XX, Stanley Smith Stevens (1906-1973), professor da Universidade de Harvard nos Estados Unidos, ao estudar as leis psicofísicas de Fechner, observou que a melhor

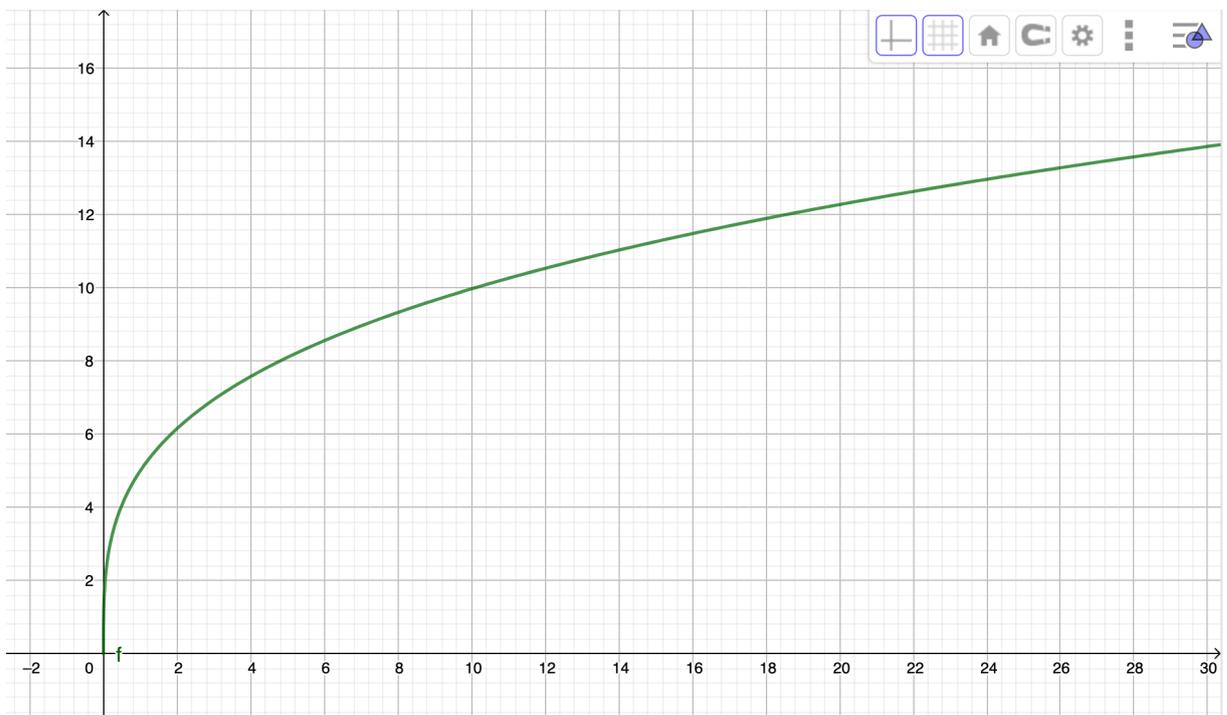
forma de representar a relação entre as magnitudes de percepção e estímulo seria através da função potencial, o que pode ser sintetizado na equação abaixo (STEVENS, 1961):

$$i = k.(S - S_0)^n \quad (3)$$

O Gráfico 3 ilustra a lei potencial de Stevens. Nota-se que os experimentos deste pesquisador concluem que  $0 < n < 1$ . É importante salientar que há muita controvérsia neste tópico e que parece haver divergências entre modalidades sensitivas quanto ao melhor modelo matemático para representá-las. Algumas, como a percepção tátil, parecem ter até uma correspondência linear entre a percepção e a intensidade de estímulo (GARDNER E MARTIN, 2003).

Gráfico 3 – Representação da Lei de Stevens através da função potencial.

Intensidade de Percepção



Magnitude do estímulo

É consenso salientar que a modelagem matemática psicofísica, independente da modalidade sensitiva, se trata de uma função crescente e positiva. Podendo ser a psicoacústica considerada um ramo da psicofísica que estuda a percepção auditiva, este trabalho irá ater-se a partir desta breve definição inicial de contexto no escopo principal deste trabalho.

#### **4.1.2 A psicoacústica enquanto um ramo da psicofísica**

Na seção anterior, foi possível contextualizar a psicoacústica enquanto um ramo da psicofísica que estuda a percepção sensorial auditiva. A partir da introdução apresentada, pode-se observar as bases matemáticas que a fundamentam. No entanto, há diversas controvérsias neste ramo científico, sendo parte deles relacionados às diferenças que existem entre as modalidades sensitivas. Alguns pesquisadores, a partir das Leis de Weber-Fechner e de Stevens, procuraram identificar quais funções melhor representariam a percepção auditiva, entre eles Joseph Stevens e James Hall, que observaram em 1966 a aplicabilidade da lei potencial de Stanley Stevens na percepção de volume sonoro e brilho visual em relação à intensidade do estímulo, embora tenham notado aspectos adicionais interessantes. Seus achados indicam que a duração sonora está intimamente ligada com a função potencial, havendo um limite crítico, de 150 milissegundos, após o qual ocorre estabilização no aumento da percepção auditiva com o aumento da intensidade do estímulo sonoro, o que significa que não se nota mais aumento na percepção após este período de exposição ao som (STEVENS E HALL, 1966). Estas observações indicam que não somente a intensidade do estímulo é importante, mas também o tempo de exposição. Além disso, estímulos de menor energia (mais baixos, com menor magnitude de intensidade) necessitam maior duração para serem percebidos (SAMELLI E SCHOCHAT, 2008, pg.371), e estímulos mais intensos e mais longos são percebidos como se tivessem maior intensidade do que de fato têm, o que demonstra que o limiar auditivo é particularmente sensível aos estímulos de magnitude mais distante do intermediário, havendo melhor percepção justamente nesta faixa média, que se apresenta em torno do limiar auditivo (EPSTEIN E FLORENTINE, 2006). A função potencial que primeiro integrou a intensidade do estímulo com a duração do mesmo apresenta-se abaixo (STEVENS E HALL, 1966):

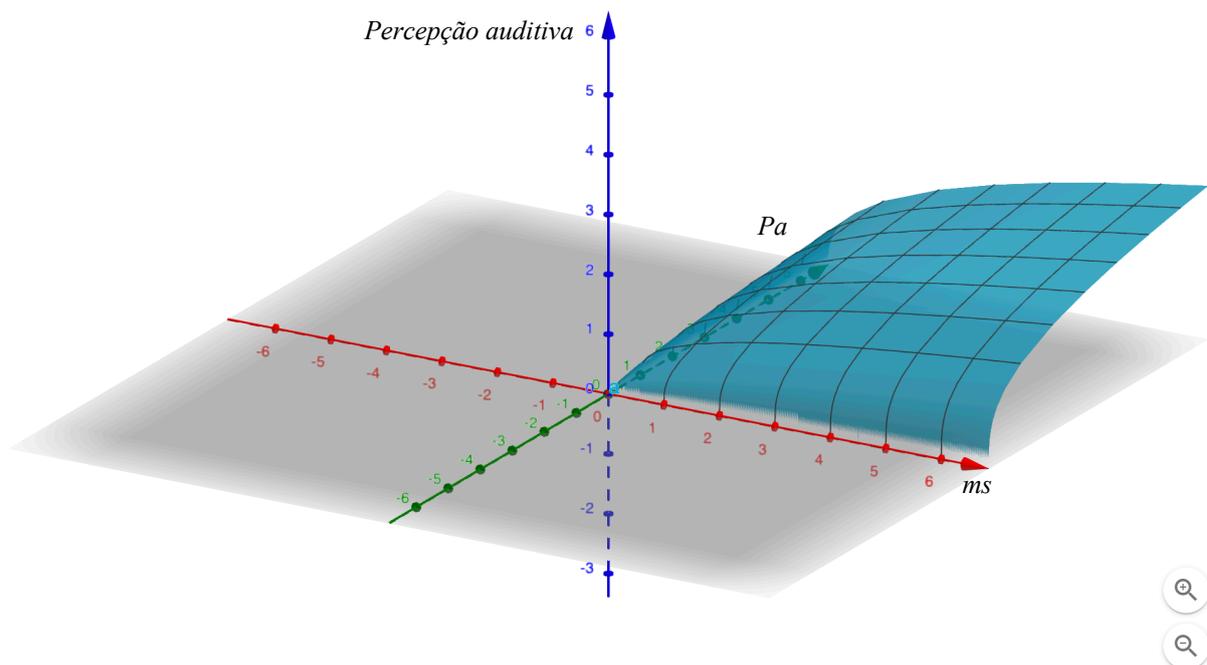
$$i = k \cdot D^\alpha S^\beta \quad (4)$$

Nesta equação,  $i$  representa a magnitude de percepção auditiva,  $D$  representa a duração do estímulo e  $S$  representa a intensidade do estímulo, sendo  $k$  uma constante. Deve-se lembrar que há um limite máximo para a percepção que ocorre após 150 milissegundos. Stevens e Hall concluíram em seus estudos os seguintes valores para alpha e beta:

$$i = k \cdot D^{0,375} S^{0,3} \quad (5)$$

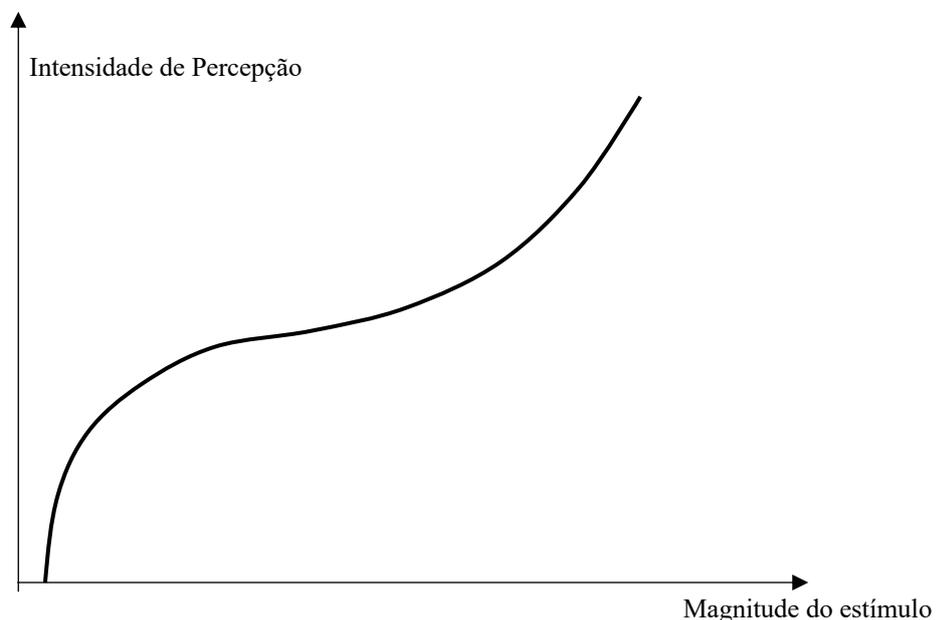
O gráfico abaixo apresenta a representação dessa equação para a percepção auditiva.

Gráfico 4 – Representação da percepção auditiva em relação à duração sonora (eixo  $x$ ) e intensidade do estímulo (eixo  $y$ ).



A lei potencial de Stevens representou um importante marco no estudo da psicofísica e da psicoacústica, embora com o tempo tenha sido observado que esta lei era uma boa aproximação. Observou-se que a função potencial era particularmente inadequada em algumas faixas de intensidade sonora, principalmente em volumes moderados, mas também na região próxima ao limiar auditivo, demonstrando que há outras funções envolvidas na sensibilidade auditiva, particularmente a existência de um ponto de inflexão na curva que a associa a uma lei exponencial (FLORENTINE E EPSTEIN, 2006). Foi observado que há uma integração entre volumes de tons diferentes em intensidades sonoras moderadas ou baixas, o que gera uma função do tipo inflexão exponencial (FLORENTINE E EPSTEIN, 2006), que se apresenta ilustrada no Gráfico 5.

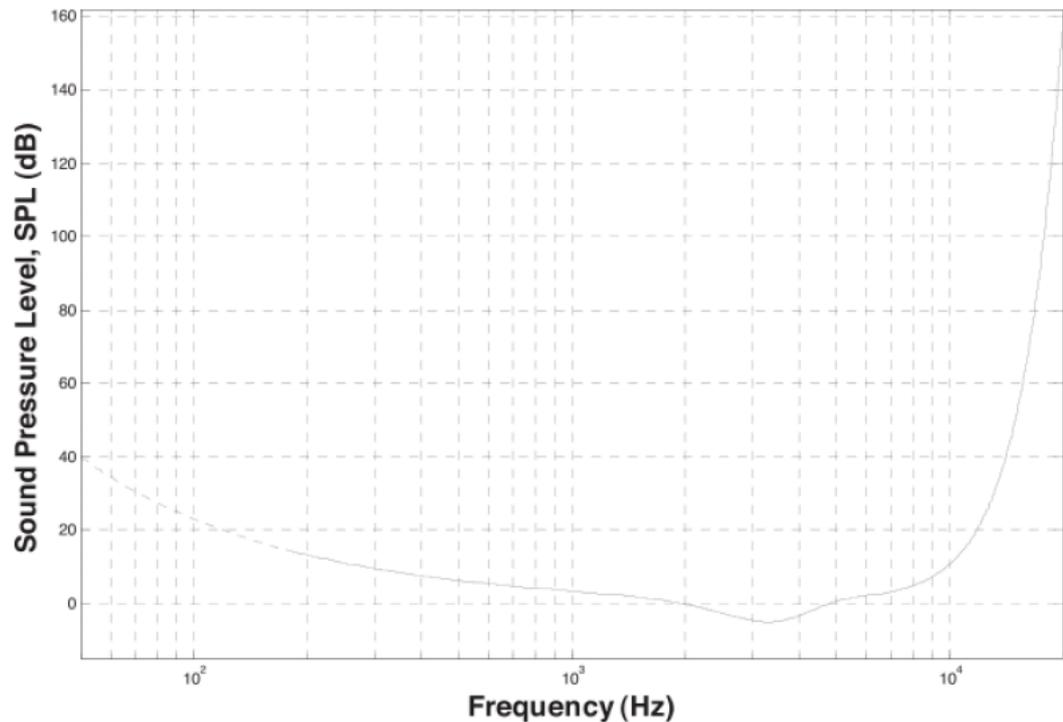
Gráfico 5– Representação da função de inflexão exponencial para a psicoacústica.



No gráfico anterior, observou-se a curva do limiar auditivo em termos de intensidade ou volume. Sabemos que as frequências audíveis aos humanos variam de 20 Hz a 20 kHz (PETERSON 2001, pg.2, GOTO 2009, pg.2307-1). Convém destacar que também é possível analisar o limiar de percepção de cada frequência em função das pressões mínimas necessárias

para que sejam percebidos, em decibéis (WEY E LOPES, 2020, pg.2). O gráfico 6 ilustra esta situação.

Gráfico 6 – Representação dos limiares auditivos em decibéis para cada frequência sonora.



Fonte: WEY E LOPES, 2020, pg. 2.

Deve-se também salientar alguns aspectos particulares à psicoacústica, no contexto da psicofísica, que são mais marcadamente notados na música. O aspecto temporal é importante em toda a psicofísica, sendo mais facilmente detectado quando estuda-se a percepção sonora. Diferentes frequências podem ser simultâneas, o que caracteriza a harmonia, mas também podem ser sequenciais, o que determina as melodias. Além disso, padrões temporais periódicos caracterizam o ritmo, que se traduz em estímulo para respostas efectoras do tipo sincronização sensorio-motora, como ocorre na dança, por exemplo (RAJENDRAN et al., 2018 pg.4-5).

O ritmo deve ser entendido como um aspecto da percepção que se dá justamente pela detecção desses padrões, não sendo caracterizados como propriedades físicas dos sons propriamente ditos, embora sejam respostas ao comportamento destes ao se repetirem no tempo. As batidas musicais são um resultado da combinação de acentuação perceptual e pulso periódico em uma gama de frequências de batida perceptíveis. Alguns padrões, como os binários e ternários, são mais facilmente detectáveis por sua semelhança com os padrões motores ou com as séries harmônicas a partir de uma frequência fundamental (RAJENDRAN et al., 2018, p.5-6), e acabam se associando à dança e à festa (FABBRI, 2013, pg.110). Como resultado, a percepção musical rítmica relaciona-se com a apreciação musical em si mesma, mas também com o aprendizado preditivo a respeito do tempo em que se dará a próxima batida, o que envolve diversos mecanismos neurofisiológicos extensivamente estudados, que não serão detalhados porque estão para além do escopo deste trabalho (RAJENDRAN et al., 2018; pg.7-14).

#### **4.1.3 Aplicações psicoacústicas no contexto da psicofísica**

A percepção sensorial está intimamente relacionada à dimensão temporal, que permite a ordenação cognitiva de eventos e estímulos para a compreensão do mundo (SAMELLI E SCHOCHAT, 2008, pg.369). Mais além, é reconhecida a importância do tempo em física ondulatória, o que veremos mais adiante. Sendo assim, revisar este assunto é relevante para o estudo das aplicações psicoacústicas em psicofísica, especialmente no que diz respeito à restauração da acuidade auditiva através de aparatos tecnológicos variados (SORANZO E GRASSI, 2014). Veremos também que a modelagem das funções auditivas, baseadas nestes parâmetros, são de suma importância no contexto do desenvolvimento tecnológicos desses equipamentos que melhoram o processamento auditivo (XIN, 2020).

O processamento fisiológico temporal do som parece ser a base do processamento auditivo, e depende de informações como duração do som, intervalos entre sons e ordenação de estímulos sonoros diferentes. É notável a importância destes aspectos para a compreensão da fala e da música, por exemplo (SAMELLI E SCHOCHAT, 2008, pg.370; SORANZO E GRASSI, 2014, pg.4-5). Na primeira, o sistema nervoso ordena eventos de liberação do ar e vibração das cordas vocais com silêncios entre consoantes e vogais no arranjo silábico, cuja

duração também é crítica, enquanto que na música ocorre a articulação de tonalidades e alturas sonoras organizadas tanto de modo harmônico (simultâneo) quanto melódico (sequencial), onde a duração e a presença de pausas também é crucial. Em ambos, eventos transitórios sinalizam mudanças rápidas no padrão acústico enquanto que eventos periódicos são padrões repetitivos e estáveis, o que pode ser expresso em termos de fase e frequência ondulatória, e que dão o tom, nota musical, ou *pitch*. Abaixo serão brevemente apresentadas as quatro habilidades de processamento fisiológico nervoso relacionadas à capacidade auditiva (SAMELLI E SCHOCHAT, 2008, pg.370):

*Ordenação temporal*: capacidade de identificar a ordem correta dos estímulos sonoros. Para avaliar esta habilidade, são realizados testes de padrão de duração (em que três sons de duração distinta são apresentados em mesma frequência) e de frequência (em que três sons de frequência distinta são apresentados com mesma duração);

*Somação temporal*: relacionada à capacidade de integrar estímulos temporalmente, são apresentados sinais sonoros fracos na presença ou ausência de ruído. Como vimos anteriormente, quanto menor a magnitude do estímulo sonoro, maior duração é necessária para que seja percebido (EPSTEIN E FLORENTINE, 2006; WEY E LOPES, 2020);

*Mascaramento temporal*: alteração do limiar de um determinado som devido à presença de outro som distinto simultâneo, imediatamente anterior (mascaramento sucessivo) ou posterior (mascaramento antecessor) a ele. Esta capacidade pode, por exemplo, permitir que um indivíduo perceba um som de intensidade fraca por ter havido redução do limiar de percepção por outro som mascarador. Ou ainda, pode haver aumento do limiar de uma determinada frequência pela presença de outro som;

*Discriminação auditiva temporal*: refere-se ao tempo mínimo que é necessário para resolver o evento acústicos, ou, em outras palavras, para determinar a acuidade auditiva. A percepção de diferenças de milissegundos nos padrões auditivos é essencial tanto para compreender a fala humana como para a leitura.

Uma das aplicações da psicoacústica em saúde é a utilização dos parâmetros acima mencionados em testes para determinar quais habilidades encontram-se afetadas nos casos de deficiência auditiva (SORANZO E GRASSI, 2014). Os testes de detecção de intervalos de

silêncio (*gaps*) procuram identificar a capacidade de resolução temporal, sendo o mais comum caracterizado por dois sons de longa duração, simultâneos, em que um deles apresenta um breve intervalo no meio da exposição. Sabe-se que a duração mínima do intervalo para que possa ser percebido é de 2 a 3 milissegundos, a depender da intensidade, embora estes limiares possam subir para 4 a 5 milissegundos a depender da presença de interferências sonoras. Podem ser utilizados marcadores (tons puros e / ou ruídos de banda) para delimitar intervalos de silêncio (SAMELLI E SCHOCHAT, 2008, pg.371).

Algumas ferramentas podem ser muito úteis na mensuração de aspectos qualitativos e quantitativos da perda auditiva, como é o caso do módulo PSYCHOACOUSTICS do *software* MATLAB (SORANZO E GRASSI, 2014). Este módulo inclui as equações clássicas de Fechner descritas anteriormente, bem como os modelos clássicos de experimentos psicoacústicos. Limiares discriminativos são determinados a partir da comparação de dois estímulos diferentes enquanto que limiares de detecção podem ser detectados por tarefas que envolvem perguntas de sim ou não, sendo que no caso da psicoacústica deve-se considerar a sucessão temporal entre os estímulos como significativa na acuidade auditiva (SORANZO E GRASSI, 2014, pg.3-4). O módulo incluiu os métodos de detecção de limiares adaptativos STAIRCASE (métodos de limites, acréscimo a taxa periódica e acréscimo a taxa periódica adaptado), PEST (estimativa de parâmetros por teste sequencial) e MLP (estimativa de limiar máximo) (SORANZO E GRASSI, 2014, pg.8-13).

Quando os marcadores apresentam frequências similares, a detecção do intervalo de silêncio é mais rápida, apresentando-se sempre mais rápida quanto maior a frequência do estímulo. Em outras palavras, a percepção de sons mais agudos é mais rápida em termos de discriminação / acuidade auditiva do que a percepção de sons mais graves, o que está diretamente relacionado ao limiar auditivo (mais baixo para frequências mais altas, o que indica que sons mais agudos são percebidos a intensidades mais baixas do que sons mais graves, que precisam de um aumento de magnitude para a sua percepção). A explicação para isto parece ser o período mais longo das ondas sonoras graves, que acaba preenchendo parte do intervalo de silêncio e dificulta o seu processamento. Do mesmo modo, bandas de ruído com maior variação de frequências (bandas estreitas) são mais difíceis de detecção do que aquelas com menor flutuação (bandas largas) (SAMELLI E SCHOCHAT, 2008, pg.372-3). Observa-se também que o posicionamento do intervalo de silêncio é melhor percebido quando se apresenta mais tardiamente em relação ao início do som, o que resulta na implicação de que consoantes que começam com intervalo (como nas sílabas /ba/ e /pa/) apresentam maiores dificuldades de compreensão. Por outro lado, é inegável a influência que a série harmônica tem ao fornecer

pistas para a detecção do sinal, para além da duração em si mesma, como ocorre pela variação espectral dos sons (SAMELLI E SCHOCHAT, 2008, pg.373-4), o que acaba favorecendo o uso de ruído branco para a melhor acurácia na detecção de acuidade auditiva, uma vez que o espectro gerado pelas séries harmônicas misturadas neste caso tende a ser menos previsível (STEVENS E HALL, 1966).

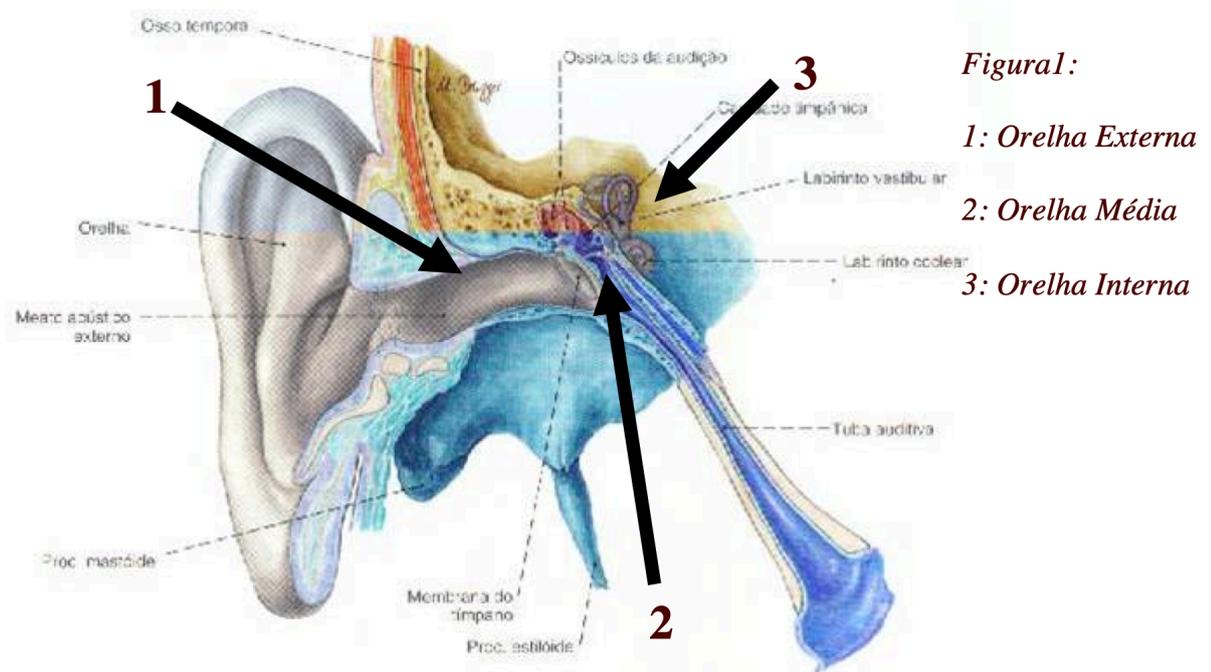
No caso da aplicação do conhecimento psicoacústico em compreensão auditiva, também se deve observar o modo de apresentação do estímulo ao aparato fisiológico, o que influencia na percepção (SORANZO E GRASSI, 2014). Neste sentido, o som pode ser percebido simultaneamente pelas duas orelhas (binaural), ou por apenas um lado (monoaural). É interessante notar que há uma lateralização do estímulo para uma das orelhas, mesmo no estímulo binaural, o que não causa uma mudança no limiar em si mesmo. Isto significa que, na prática, a percepção auditiva acaba funcionando como monoaural, mesmo quando o estímulo foi apresentado para ambos os lados simultaneamente (SAMELLI E SCHOCHAT, 2008, pg.372-3).

O processamento auditivo que permite a percepção sonora forma uma classe de equações diferenciais parciais que captam a essência do fenômeno não-linear que caracteriza a audição: uma combinação de frequências e facilitação e supressão de potenciais de ação, o que produz um amplo espectro consistente para a amplificação sonora como método de melhorar a audição (XIN, 2020, pg.1). De um modo geral, as bases científicas para isto são as mesmas que são utilizadas para a compressão do som e produção de som digital, e se fundamentam nas curvas de limiar auditivo humano já apresentadas anteriormente. O aparelho auditivo detecta os sinais na membrana basilar da cóclea, cuja distribuição de frequências se assemelha muito com as teclas de um piano, sendo estas frequências geradoras de potenciais de ação não-lineares nos neurônios primários, respeitando a organização tonotópica percebida na membrana (XIN, 2020, pg.2). Como demonstrado nas seções anteriores, estes impulsos são conduzidos até o córtex cerebral, onde ocorre de fato a percepção auditiva.

A orelha externa é responsável por conduzir as ondas sonoras até a orelha média. Sua anatomia permite a amplificação do som além de proteger as orelhas média e interna e auxiliar na identificação da localização da fonte sonora (FIGURA 1). Isto se dá principalmente pelo meato acústico externo, sendo discutível a importância do pavilhão externo para a acuidade auditiva. O tímpano separa as orelhas externa e média, sendo esta última composta por uma cavidade aérea que apresenta comunicação com a nasofaringe. É na orelha média que se encontram os ossículos martelo, bigorna e estribo, que vão fazer a comunicação deste a membrana timpânica até a cóclea, componente da orelha interna. Todas estas estruturas da

orelha média vibram com as ondas sonoras e as transmitem até a cóclea através do forame oval. Além disso, elas corrigem a perda de energia que ocorre na transmissão do som do meio aéreo para o meio líquido da cóclea. Isto se dá pelos mecanismos hidráulico (relação entre a área da superfície do tímpano e os ossículos, que gera um aumento de pressão de 17 a 25 vezes) e pela alavanca martelo-bigorna (cujo ramo da bigorna é menor do que o do martelo dobrando a pressão) (PAULUCCI, 2005).

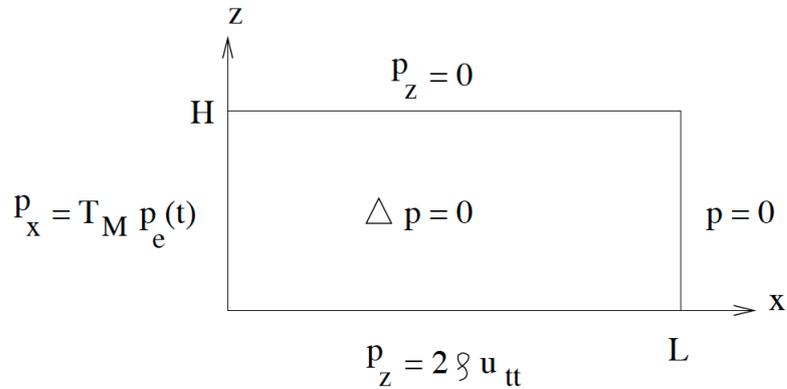
Figura 1 – Anatomia das estruturas relacionadas ao sistema sensitivo auditivo.



Fonte: PAULUCCI,2005, pg. 1.

A cóclea possui duas câmaras que contém fluidos viscosos, cujo movimento passa da câmara superior para a inferior através de um orifício, levando a uma variação de pressão que movimentam a membrana basilar de forma simétrica, respeitando a equação de Laplace. A Figura 2 ilustra o esquema gráfico matemático da representação algébrica do sistema macromecânico auditivo que será apresentado a seguir (XIN, 2020; pg.4):

Figura 2 – Esquema gráfico da câmara coclear superior, preenchida por fluido viscoso. O orifício que conecta esta câmara à câmara inferior se localiza próximo ao ponto  $(L,0)$  e a membrana basilar, que se localiza entre as câmaras, está esquematizada pelo segmento  $[0,L)$ .



Fonte: XIN,2020, pg. 3.

A representação algébrica do sistema macromecânico anteriormente representado se dá por (XIN, 2020, pg.3):

$$\Delta p(x, z, t) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, (x, z) \in (0, L) \times (0, H), t \in (0, \infty) \quad (6)$$

Sendo que  $p(x, z, t)$  é a diferença de pressão na membrana basilar, e temos as seguintes condições:  $\frac{\partial p}{\partial z}(x, 0, t) = 2\rho u_{tt}(x, t), 0 \leq x \leq L$ , sendo  $\rho$  a densidade do fluido,  $u(x, t)$  o deslocamento da membrana basilar. Como a parede superior é rígida,  $\frac{\partial p}{\partial z}(x, H, t) = 0$  com  $x \in [0, L], t \geq 0$ . Temos que  $p(L, z, t) = 0$  na parede apical ( $x = L$ ) com  $z \in [0, H], t \geq 0$ , e na parede basal ( $x = 0$ ) temos  $\frac{\partial p}{\partial x}(0, z, t) = 2\rho T_M p_e(t), 0 \leq z \leq H$ , onde  $p_e(t)$  é a pressão aplicada ao tímpano, diretamente relacionado ao impulso nervoso que será desencadeado para a percepção, e  $T_M$  representa o filtro da orelha média, caracterizado por um operador linear

limitado por funções contínuas limitadas. Temos então que o *input* de multifrequências que chega pelo tímpano e é filtrado se caracteriza por  $T_M p_e(t) = \sum_{j=1}^{J_m} a_m(w_j) A_j^{i w_j t} + c.c.$ , onde *c.c.* é o conjugado complexo,  $J_m$  um número natural, e  $a_m()$  é um ajuste funcional dos dados experimentais do funcionamento do filtro da orelha média (XIN, 2020, pg.4).

Sabe-se que  $p(x, 0, t) = m \cdot u_{tt} + r \cdot u_{tt} + s(x) \cdot u$ ,  $0 \leq x \leq L$ , sendo  $m$  e  $r$  a densidade de massa e amortecimento da membrana basilar, e  $s(x)$  a função de rigidez da membrana, determinada por (XIN, 2020, pg.5):

$$s(x) = 4\pi^2 m \cdot \left[ 0,456 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) - 0,45 \right]^2 \quad (7)$$

Essa equação representa a onda sonora que se move a partir da esquerda, onde  $x = 0$ , com padrão periódico e correspondência com cada localização da membrana basal, sendo esta responsável por analisar as frequências de modo similar ao que ocorre na transformação de Fourier, sendo o sistema caracterizado por um conjunto de equações diferenciais parciais (XIN, 2020, pg.5). Associados à membrana basal, encontram-se os órgãos responsáveis por transduzir estes sinais: o órgão de Corti (com cílios internos e externos), que amplifica as respostas da membrana basilar e as transfere como impulsos neurais elétricos, e a membrana tectorial, com papel semelhante. A modelagem matemática relativa a função desses órgãos é representada pela seguinte equação:

$$q(x + \Delta, t) = \alpha(x, u, t), (p(x, 0, t) + q(x, t)), x \in [0, L - \Delta] \quad (8)$$

Nesta equação,  $q(x, t)$  é a força dos cílios externos do órgão de Corti,  $\Delta$  é uma constante maior do que zero, e  $q(x, t) = 0$  se  $x \in [0, \Delta]$ . A função  $\alpha$  é não negativa e não linear que corresponde a uma constante positiva quando o módulo de  $u$  é pequeno, chegando a valores perto de zero quando o módulo de  $u$  é grande. Quanto maior for a função  $\alpha$ , maior será a melhora na amplificação do sinal da membrana basilar, sendo esta função mais sensível para sons baixos. Sendo assim, a equação da membrana basilar resulta em (XIN, 2020, pg.6):

$$q(x, t) + p(x, 0, t) = m \cdot u_{tt} + r \cdot u_{tt} + s(x) \cdot u, 0 \leq x \leq L \quad (9)$$

Para promover interações não-lineares na membrana basilar, o fator de ganho representado pela função  $\alpha$  gera estabilidade em relação a soluções dependentes do tempo e permite recuperar justamente o fenômeno não-linear da audição. A não-localidade da não-linearidade da membrana basilar relaciona-se com os mecanismos temporais de adiantar ou rebobinar o fenômeno auditivo através de interações neurais inibitórias vizinhas. Deste modo, o modelo acima permite melhor correspondência com estes fenômenos fisiológicos identificados no processamento da audição (XIN, 2020, pg.6-7).

Além deste, há um outro modelo combinado denominado ressonante da membrana tectorial que também se traduz por uma função não-local e não-linear de deslocamento da membrana basilar. Este modelo é baseado nas propriedades das membranas basilar e tectorial, que são conectadas por uma mola e um amortecedor à parede da cavidade. Se considerarmos que  $\xi(x, t) = (u(x, t), v(x, t))$  é o vetor de deslocamento dessas membranas, teremos as seguintes equações para o movimento (XIN, 2020, pg.7):

$$M_p \xi_{tt} + C_p \xi_t + K_p \xi = F + F_a, \quad (10)$$

$$M_p = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}, \quad K_p = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$F = [p(x, 0, t), 0]^T, \quad F_a = [\gamma[c_4(u_t - v_t) + k_4(u - v)], 0]^T, \gamma \in [0, 1]$$

Os parâmetros  $m_i$ ,  $c_i$  e  $k_i$  são funções de  $x$ , e  $F_a$  é uma força auto estimulada que torna o modelo de passivo para ativo com  $\gamma$  como o controle de ganho ativo que se caracteriza por uma constante. Se, além de  $\gamma$ ,  $\alpha$  for constante, é caracterizada uma ausência de não-linearidades para cada frequência  $f$  percebida como som, cujo *input* é definido por  $e^{i2\pi ft} +$

$c.c$  (complexo conjugado). Neste caso, a solução harmônica corresponde à solução de longo intervalo de tempo  $(P, U, Q)(x, f) e^{i2\pi ft}$ , onde  $P$  é diferença de pressão na membrana basilar,  $U$  é o deslocamento da membrana basilar, e  $Q$  é a força dos cílios externos ou da membrana tectorial, neste caso.  $U(x, f)$  pode ser utilizado para a seguinte transformação no sinal  $s(t)$  (XIN, 2020, pg.8):

$$S(t, x) = \int_{R^1} d\tau s(\tau) \int_{R^1} df \frac{U(x, f)}{m(f)} e^{2\pi f i(t-\tau)} \quad (11)$$

Esta função codifica informação da frequência sonora em relação à localização espacial da membrana basilar  $x$ , sendo a integral  $\tau$  uma transformada de Fourier simples denotada por  $\hat{s}$  que distribui no tempo a solução harmônica, podendo ser expressa por:  $S(t, x) = \int_{R^1} df \hat{s}(f) \frac{U(x, f)}{m(f)} e^{2\pi f i t}$ . A transformada auditiva discreta pode ser expressa em termos de transformada de Fourier discreta  $\hat{s}_n$  como (XIN, 2020, pg.9):

$$S_{j,m} = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{s}_n X_{m,n} e^{i(2\pi n j/N)} \quad (12)$$

$$\hat{s}_n = \sum_{l=0}^{N-1} s_l e^{-i(2\pi l n/N)} \quad (13)$$

A transformação não-linear do sinal estacionário  $s(t)$  pode ser definida como estados assintóticos de tempo bastante grande em modelos não-lineares de equações diferenciais parciais. Se considerarmos  $u(x, t)$  onde  $t \in [T, T + N dt]$ , em que  $N$  é um inteiro,  $dt$  é o intervalo de tempo de amostragem determinado por uma frequência desejada de amostragem  $F_s$ , sendo  $N$  e  $T$  grandes suficientemente para que um espectro de Fourier independente de  $T$  possa ser computado de modo a ser correspondente à localização  $x$ , teremos uma definição do espectro não-linear de frequências a partir da

localização  $x$  na membrana basilar quando o sinal é não-estacionário (XIN, 2020, pg.10). Um dos fenômenos interessantes que são observados inclui a formação de tons combinados, que gera oscilações perceptíveis pelos humanos, o que indica o funcionamento normal auditivo e é muitas vezes utilizado como parâmetro de perda auditiva em crianças (XIN, 2020, pg.11). Outros fenômenos são: compressão, ou decréscimo de sensibilidade; e a supressão entre tons ou entre tom e ruído.

A perda auditiva característica da idade ou decorrente da exposição a sons muito altos corresponde a um aumento dos limiares auditivos e desconforto na presença de barulho. Em termos de parâmetros matemáticos, há uma redução de  $\gamma$  quando ocorre perda auditiva. Assim, os aparelhos para melhora da acuidade auditiva amplificam os sons a partir do limiar para minimizar a deficiência. Esta amplificação é não-linear e pretende maximizar a inteligibilidade da compreensão da fala sem alterar a percepção de barulho excessivo, mantendo-a comparável à orelha saudável. Isto é feito através do ganho na curva das frequências do *input* para que resulte em um *output* semelhante ao da orelha com audição dentro dos parâmetros fisiológicos normais (XIN, 2020, pg.12-14).

## 4.2 A PSICOACÚSTICA NO CONTEXTO DA FÍSICA ONDULATÓRIA E SUAS APLICAÇÕES

O som ou onda sonora é uma onda mecânica, ou seja, um fenômeno físico caracterizado por propagação de energia e quantidade de movimento sem propagação de matéria em algum meio (BLOMSTEDT, 2014; pg.6; ZANATO, 2017; pg.38), modelado por funções trigonométricas (MARTINS, 2015, pg.22). As ondas possuem comprimento (distância de uma oscilação completa,  $\lambda$ ), amplitude (distância entre a crista da onda e o eixo de propagação,  $A$ ), frequência (número de oscilações por unidade de tempo,  $f$ ) e período (tempo de uma oscilação completa, inverso à frequência,  $T$ ) (MARTINS, 2015, pg.23; ZANATO, 2017, pg.39). Também há as seguintes propriedades: altura, intensidade e timbre. Nesta seção, serão avaliadas as modelagens matemáticas a partir da física ondulatória, incluindo-se aplicações no campo da música e da tecnologia.

#### 4.2.1 Modelagem matemática psicoacústica ondulatória

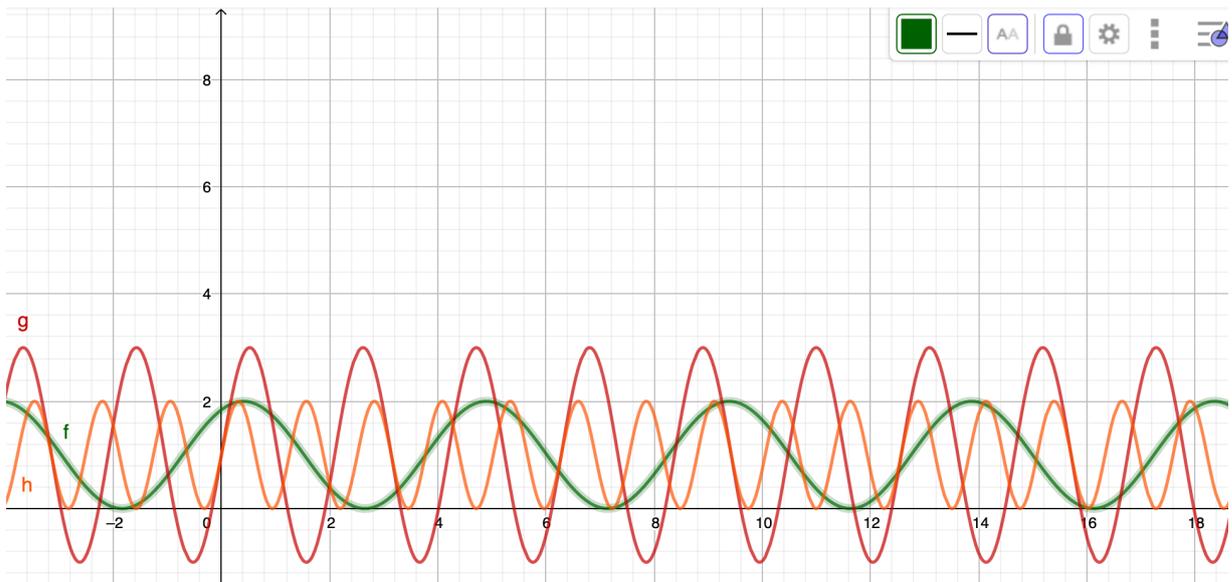
Algumas definições em termos de parâmetros sonoros são bastante importantes no contexto do estudo da psicoacústica ondulatória, onde são avaliados aspectos físicos intrínsecos dos sons. Entre eles, destaca-se a altura, relacionada à frequência ondulatória e definida como nota musical (PETERSON, 2001, pg.1); o volume sonoro, ou intensidade do estímulo sonoro, que se caracteriza pela taxa média de transmissão de energia por unidade de amplitude de onda; e por fim o timbre sonoro, que caracteriza o instrumento musical ou fonte sonora, e que se define pelo formato final da onda no tempo, onde se desenrola a serie harmônica e cuja sequência pode variar devido aos componentes materiais da fonte do som (BLOMSTEDT, 2014, pg.10; ZANATO, 2017; pg.28). Os sons podem ser observados em sequência, caracterizando as melodias no contexto da música, ou simultaneamente, caracterizando a harmonia, sendo que em ambos as distâncias entre duas frequências também são percebidas e definidas como intervalo (*i*) (segundas, terças, quartas, quintas, sextas, sétimas, oitavas, entre outras, de acordo com a escala musical) (MARTINS, 2015, pg.23-24). No contexto dos intervalos, os sons podem ser percebidos como mais consonantes ou mais dissonantes, e isto se dá pelas interferências que ocorrem entre as ondas sonoras e suas séries harmônicas (GOTO, 2009, pg.2307-1; ARCANJO, 1918, pg.144-148; MARTINS, 2015, pg. 24).

A partir desta descrição inicial, nota-se que o modelo matemático mais adequado para o estudo dos sons se obtém a partir da física ondulatória, cuja propriedade oscilatória direciona o modelo para uma representação trigonométrica (MARTINS, 2015, pg.25; ZANATO, 2017, pg.41), cuja função genérica é:

$$f(x) = k + a \cdot \text{sen}(p \cdot x + \varphi) \quad (14)$$

Nesta função, *k* representa o deslocamento vertical do gráfico, *a* representa a mudança de amplitude *A*, *p* representa a mudança no período *T*, e *φ* representa o deslocamento horizontal do gráfico (MARTINS, pg.25-26). O gráfico 7 apresenta uma representação contendo três frequências distintas, correspondentes às seguintes funções  $f(x) = 1 + \text{sen}(1,4x + 1)$ ,  $g(x) = 1 + 2\text{sen}(3x)$ ,  $h(x) = 1 + \text{sen}(5x)$ :

Gráfico 7 – Representação das funções  $f(x) = 1 + \text{sen}(1,4x + 1)$ ,  $g(x) = 1 + 2\text{sen}(3x)$ ,  $h(x) = 1 + \text{sen}(5x)$ .



Quanto maior for a frequência do som (mais oscilações por segundo), este é percebido como mais agudo ou mais alto, enquanto que quanto menor a frequência (menos oscilações por segundo), mais grave é o som (ou mais baixo) (ZANATO, 2017, pg.40).

A amplitude da onda, observada no eixo  $y$  do gráfico acima representado, corresponde à pressão que é produzida pelas ondas sonoras, o que se descreve usualmente em unidades de decibéis ou dB, mas também pode ser definida em Pascais (Pa) (BLOMSTEDT, 2014, pg.10). A frequência  $f$  corresponde à quantidade de oscilações com relação ao tempo (variável  $x$  no gráfico acima), e o comprimento de onda  $\lambda$  corresponde à distância entre duas cristas de determinada onda (PETERSON, 2001, pg.1). Além da pressão e da frequência, há os atributos espectro (conjunto de vibrações sonoras simultâneas que possuem diferentes frequências, podendo ser definido em termos musicais como série harmônica), envelope (ou variação de amplitudes, que diminui com o passar o tempo dado o atrito de uma corda com o ar, por exemplo), e a duração do som, que pode ser afetada pelos atributos anteriores de pressão e frequência (BLOMSTEDT, 2014, pg.11). A pressão é percebida como volume ou intensidade,

e o espectro associado ao envelope são percebidos como o timbre de um instrumento, da voz, ou do material que produz o som (BLOMSTEDT, 2014, pg.12). O limiar auditivo humano saudável corresponde ao valor 0 na escala de decibéis, sendo 120 o valor correspondente ao limite máximo de dor devido à pressão auditiva (PETERSON, 2001, pg.1), sendo que são percebidas as frequências que variam de 20 Hz a 20.000 Hz (FABBRI, 2013, pg.33).

Determina-se o comprimento de onda  $\lambda$  da frequência  $f$  produzida pela vibração de determinada corda de comprimento  $L$  pela seguinte função (GOTO, 2009, pg.2307-2; ZANATO, 2017, pg.40):

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (15)$$

Já a velocidade de propagação desta onda e a relação entre frequência, velocidade e comprimento  $L$  podem ser definidos como descrito abaixo (GOTO, 2009, pg.2307-2312; ZANATO, 2017, pg.40):

$$v = f_n \lambda_n \Rightarrow f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{\pi v}{2L} \quad (16)$$

Os intervalos podem ser compreendidos em termos de razão entre duas frequências (GOTO 2009, pg.2307-1), sendo que distâncias muito pequenas entre elas geram um efeito dissonante denominado batimento e que se manifesta graficamente como um pico de amplitude. Já o efeito consonante é gerado pelo encaixe perfeito ou harmônico entre as séries harmônicas das frequências estudadas, o que se dá nas quintas maiores (MARTINS 2015, pg.25), enquanto que outros intervalos do tipo segundas, terças menores e quintas menores são muito dissonantes porque geram muitos batimentos (PETERSON 2001, pg.10).

É necessário também elucidar uma característica dos sons denominada série harmônica. A série harmônica nada mais é do que uma progressão de frequências que são geradas a partir de uma nota fundamental ou som puro, caracterizada por uma sequência de intervalos a partir da nota fundamental. Percebe-se que até mesmo um tom puro, ou a vibração de uma única nota musical ao longo do tempo, produzirá um fenômeno matemático complexo

caracterizado por uma progressão em série harmônica e que se sobreporá a outras séries harmônicas de notas musicais tocadas simultaneamente ou em sequência, caracterizando o que entendemos e percebemos como sons e como música. A série harmônica é percebida de modo logarítmico, o que implica na multiplicação das razões entre frequências quando há a intenção de somá-las para se produzir o efeito musical desejado ao compor uma peça (MARTINS 2015, pg. 33).

Nota-se a partir desta breve introdução ao tema que os sons podem ser estudados dentro de um contexto mais específico, que envolve a música. Dada a característica agradável e o importante papel cultural e social que a música apresenta, esta tem sido ao longo da história amplamente estudada. Portanto, boa parte dos conhecimentos que temos sobre psicoacústica decorrem dos estudos musicais, cuja definição descreve composição de sons simultâneos e / ou sequenciais que se apresentam agradáveis à percepção humana (BLOMSTEDT, 2014; pg.6).

A escala musical, definida através de estudos que apresentaram seus primórdios com o célebre matemático Pitágoras, corresponde com distâncias de frequências determinadas pela diferença no comprimento da corda que gera a vibração (MAZOLLA 1989, pg. 548). É a escala que define os intervalos, sendo do tipo tonal a mais utilizada no universo musical ocidental. Os intervalos são caracterizados pelo tom da nota fundamental orientado para cima ou para baixo (com relação às outras notas simultâneas ou subsequentes a ela), e pelas distâncias entre esses tons ou razões entre suas frequências (MAZOLLA 1989, pg. 548; MARTINS 2015, pg.34). Na escala natural, são justamente as distâncias entre as frequências das séries harmônicas geradas pelas notas dos intervalos que constituem o que definimos como tons maiores, menores e semitons, não sendo estas produtoras de batimentos, soando portanto consonantes, muito embora adaptações foram necessárias nestas distâncias para a produção de instrumentos que pudessem se equivaler em termos de escala e que permitissem transposições para a utilização das variadas tonalidades musicais que incluem composições distintas de bemóis, sustenidos e bequadros. Em outras palavras, a oitava (que vai de uma nota até a próxima de mesmo nome) foi subdividida em 12 semitons iguais, que corresponde e tem as propriedades de um grupo cíclico ( $Z_{12}$ ) (MARTINS 2015, pg.34-35). Desde modo, padronizou-se a utilização da razão 5 : 4 para as terças,  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  para outros tons e  $\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^5}} : 1 = 8 : 5^{\frac{5}{4}}$  para os semitons.

$Z_{12}$  pode ser analisado como congruências, uma vez que temos uma série infinita de notas musicais compondo as oitavas com seus 12 semitons e se repetindo periodicamente.

Como um grupo cíclico,  $Z_{12}$  apresenta um gerador  $x$  em que (MARTINS 2015, pg.40; MAZOLLA 1989, pg. 549):

$$Z_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{11}\}, e \bar{x} \in Z_n \text{ é gerador se } \text{mdc}(\bar{x}, 12) = 1; \bar{x} = \bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}$$

Observa-se então que todos os intervalos podem ser gerados a partir da segunda menor (escala cromática ascendente), da quarta justa (ciclo de quartas), da quinta justa (ciclo de quintas) e da sétima maior (escala cromática descendente), o que é amplamente utilizado em música para se tornar mais suave a passagem de um tom para outro em determinadas modulações e variações muito utilizadas (MARTINS 2015, pg.43), sendo que as equações que modelam matematicamente este sistema estão apresentadas logo abaixo (MAZOLLA 1989, pg.556):

$$Z_{12}[\varepsilon] = \{a + \varepsilon b \mid a, b \in Z_{12}\} \quad (17)$$

É importante definir matematicamente algumas relações existentes nos intervalos, que são bastante utilizadas quando da aplicação da psicoacústica à produção musical digital. Sabe-se que a frequência de uma oitava corresponde ao dobro da nota fundamental, ou seja  $f = 2f_0$ , e um semitom pode ser definido pela relação entre cada uma das 12 frequências existentes dentro desta oitava. Como vimos, esta adaptação matemática foi necessária para que instrumentos musicais pudessem soar com as mesmas distâncias, mesmo no caso de transposições, e assim também ocorre para que as frequências e os intervalos possam ser utilizados em música digital. Assim, produz-se o fator  $\varepsilon = 2^{\frac{1}{12}}$  que estabelece a frequência do meio-tom em relação a uma frequência fundamental, o que pode ser ajustado para subdivisões muito menores caso haja interesse em microtonalidades (como ocorre em música oriental). Originalmente, havia a afinação pitagórica, baseada no intervalo de  $3/2$  da quinta justa, bem como a entonação justa, baseada na escala diatônica que também depende de razões básicas entre as notas da escala (FABBRI, 2013, pg. 95-96).

Deste modo, a partir da escala cromática, que compreende todos os semitons dentro de uma oitava, teremos algumas subdivisões de notas contendo intervalos que são amplamente utilizadas em composição musical, definidas do seguinte modo (FABBRI, 2013, pg.100):

$$\text{cromática} = E_i^c = \{e_i^c\}_0^{11} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\} = \{i\}_0^{11}$$

$$\text{tons inteiros} = E_i^t = \{e_i^t\}_0^5 = \{0,2,3,6,8,10\} = \{2 \cdot i\}_0^5$$

$$\text{terças menores} = E_i^{tm} = \{e_i^{tm}\}_0^3 = \{0,3,6,9\} = \{3 \cdot i\}_0^3$$

$$\text{terças maiores} = E_i^{tM} = \{e_i^{tM}\}_0^2 = \{0,4,8\} = \{4 \cdot i\}_0^2$$

$$\text{trítonos} = E_i^{tt} = \{e_i^{tt}\}_0^1 = \{0,6\} = \{6 \cdot i\}_0^1$$

As notas também podem se arranjar de forma simultânea em acordes, sendo a tríade considerada como base da música tonal (FABBRI, 2013, pg. 102):

$$\text{tríade maior} = A_i^M = \{a_i^M\}_0^2 = \{0,4,7\}$$

$$\text{tríade menor} = A_i^m = \{a_i^m\}_0^2 = \{0,3,7\}$$

$$\text{tríade diminuta} = A_i^d = \{a_i^d\}_0^2 = \{0,3,6\}$$

$$\text{tríade aumentada} = A_i^a = \{a_i^a\}_0^2 = \{0,4,8\}$$

Quando há a omissão dos valores básicos relacionados à escala tonal, ocorre a composição de estruturas musicais com outras características, como as harmonias modal e atonal, sendo a harmonia modal intermediária em relação aos estilos musicais tonal e atonal. É extremamente difícil compor sem a utilização do sistema musical tonal porque a percepção humana busca intuitivamente estruturas tonais nos sons que ouve, mesmo que através de estruturas originariamente dissonantes que se resolvem em consonâncias posteriores. Já a harmonia tonal baseia-se em escalas maiores e menores definidos por seus acordes básicos e suas tríades. As funções de tônica (frequência principal na qual a escala se baseia), dominante (frequência de quinta, na qual se fundamenta a composição e que tende à tônica) e subdominante (que se relaciona à quarta em relação à tônica ou fundamental) são as bases harmônicas da música tonal em qualquer escala. A elas, associam-se a tônica, subdominante e dominante relativas e tônica (tríades formadas uma terça abaixo), subdominante e dominante anti-relativas (tríades formadas uma terça acima) nas escalas maiores, e também tônica, subdominante e dominante relativas e tônica (tríades formadas uma terça acima), subdominante e dominante anti-relativas (tríades formadas uma terça abaixo) nas escalas menores. A dominante anti-relativa forma um acorde menor e a dominante sempre será relacionada a um acorde maior tendendo à tônica. Esta compreensão teórica constitui a base da composição tonal e é a partir dela que ocorrem modulações (ou mudanças de tom) naturalmente produzidas por transições a partir de notas de ambas as escalas ou por cromatismo, ou por mudança de função de determinada nota, ou por outros mecanismos que não são o propósito principal deste trabalho (FABBRI, 2013, pg. 108-109).

As notas musicais também possuem duração que se distribui no tempo através de relações matemáticas. São 7 as figuras musicais que representam as notas em relação à sua duração, de forma relativa a partir de uma representação onde a semínima assuma o valor de tempo um (ARCANJO, 1918, pg.18):

Semibreve – 4 tempos

Mínima – 2 tempos

Semínima – 1 tempo

Concheia –  $\frac{1}{2}$  tempo

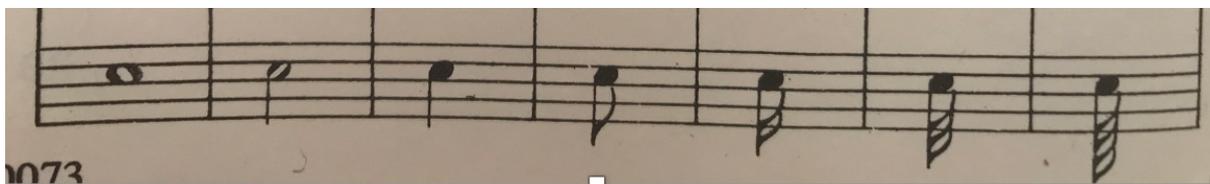
Semicolcheia –  $\frac{1}{4}$  tempo

Fuza –  $\frac{1}{8}$  tempo

Semifuza –  $\frac{1}{16}$  tempo

A Figura 3 ilustra a representação destes tempos de forma gráfica musical.

Figura 3 – Representação gráfica das figuras musicais.



Semibreve – Mínima – Semínima – Colcheia – Semicolcheia – Fuza – Semifuza

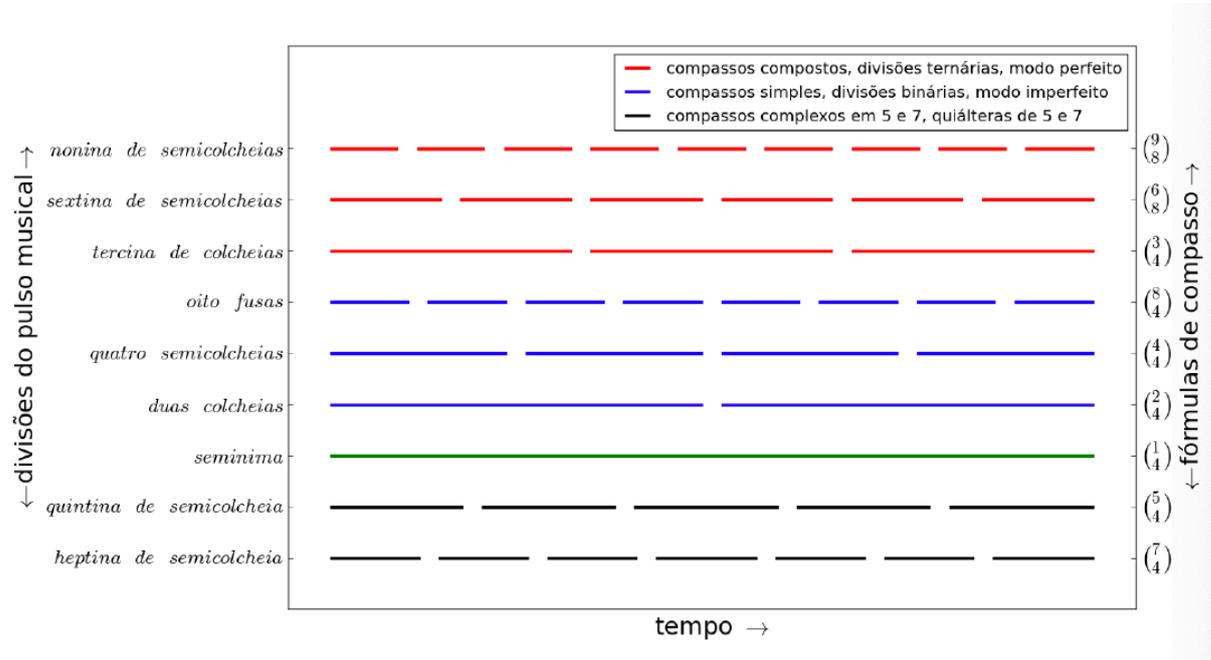
Fonte: ARCANJO, 1918, pg. 18.

A organização destas notas gera o padrão de duração das frequências ao longo do tempo, simultaneamente ou não, e vai depender também da batida ou pulso que é determinado pela divisão dos compassos em tempos fortes e fracos (usualmente em 4, 3 ou 2 tempos), cuja percepção, o ritmo, associa-se a determinados padrões. As divisões binárias apresentam alternância de pulsos fortes com fracos ou meio-fracos (no caso do compasso quaternário, por exemplo, temos um tempo forte, um fraco, um meio-forte e um fraco), e as divisões ternárias apresentam um tempo forte seguido de dois fracos (ARCANJO, 1918, pg. 24-28). Uma acentuação em um tempo fraco é dita contratempo. Variações na composição entre a duração das notas e a distribuição de tempos nos compassos caracterizam os estilos musicais (FABBRI, 2013, pg. 111).

O intervalo mínimo entre dois sons para serem notados individualmente é de 50 a 63 milissegundos, mas para que sua duração seja percebida, eles tem durar pelo menos 100 milissegundos. Nota-se que frequências musicais maiores, correspondentes a notas mais agudas, necessitam de menos tempo para serem percebidas (FABBRI, 2013, pg. 110).

O pulso usualmente compreende uma duração entre 0,25 e 1,5 segundos, o que corresponde a 240 batidas por minuto ou BPM, muito próximo a padrões de ritmo corpóreo como as batidas do coração. Assim, as durações das notas musicais usualmente se associam com os padrões de ritmo e de distribuição de tempos nos compassos como posto na Figura 4.

Figura 4 – Divisões da métrica musical a partir do pulso em semínimas.



Fonte: FABBRI,2013, pg. 111.

Em composição musical, utiliza-se o seguinte sistema de equações, sendo o primeiro utilizado para transposições e o segundo para inversões (MAZOLLA 1989, pg.553-556; MARTINS 2015, pg.43):

$$\begin{cases} x \rightarrow T(x) = x + n \\ x \rightarrow I(x) = -x + n \end{cases} \quad (18)$$

Foi visto anteriormente que sistemas de equações diferenciais são muito utilizados para determinar a combinação de sons puros a partir de suas séries harmônicas de modo dissonante ou consonante (MAZOLLA 1989; GOTO 2009, pg.2307-4), sendo a combinação linear aquela que caracteriza essas relações. Deste modo, e considerando-se a função trigonométrica que caracteriza a ondulatoria sonora, temos a seguinte expressão para

representar duas frequências 1 e 2 simultâneas e o produto de suas séries harmônicas associadas (GOTO 2009, pg.2307-4):

$$\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = \cos\left(2\pi \frac{|f_1 - f_2|}{2} t\right) + \cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \quad (19)$$

Nesta expressão, temos que a frequência principal produzida pelos sons simultâneos é dada pela média de suas frequências isoladas, tendo sua amplitude modulada pela diferença entre elas dividida por dois, o que caracteriza o batimento. Temos então, neste caso, que (GOTO 2009, pg.2307-4):

$$f = \frac{f_2}{f_1} = \frac{(n+1)}{(n-1)} \Rightarrow f = \frac{f_2}{(n+1)} = \frac{f_1}{(n-1)} \quad (20)$$

$$\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = \cos(2\pi(n+1)ft) + \cos(2\pi(n-1)ft) \quad (21)$$

Onde  $n$  está relacionado com o valor do intervalo, sendo que há maior consonância quando esta relação é de 2 ( $(n+1) - (n-1) = 2$ ), a exemplo de quinta e terça maior (MAZOLLA 1989, pg. 542, 547; GOTO 2009, pg. 2307-5). As escalas que utilizam os 12 semitons anteriormente descritos e que permitem transposições apresentam maior quantidade de vezes esta relação consonante, e por isso são tão amplamente utilizadas (GOTO 2009, pg.2307-5 – 2307-6), muito embora a variável da percepção humana deve ser sempre considerada, uma vez que intervalos muito próximos, como de meio-tom, embora possam satisfazer matematicamente estas relações, são sempre percebidos como dissonantes (GOTO 2009, pg. 2307-6).

Adicionando-se a variável  $A$  (amplitude), e depois acrescentando-se a fase, que nada mais é do que a diferença temporal entre dois sons distintos (em uma ordenação melódica), obteremos (GOTO 2009, pg. 2307-6):

$$A_1 \cos(2\pi(n-1)ft) + A_2 \cos(2\pi(n+1)ft) \Rightarrow A_1 \cos(2\pi f_1(t-t_1)) + A_2 \cos(2\pi f_2(t-t_2)) = W[\cos] + W[\sen] \quad (22)$$

Com:

$$W[\cos] = B_1 \cos(2\pi f_1 t) + B_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

$$W[\text{sen}] = C_1 \text{sen}(2\pi f_1 t) + C_2 \text{sen}(2\pi f_2 t)$$

$$B_1 = A_1 \cos(2\pi f_1 t_1)$$

$$B_2 = A_2 \cos(2\pi f_2 t_2)$$

$$C_1 = A_1 \text{sen}(2\pi f_1 t_1)$$

$$C_2 = A_2 \text{sen}(2\pi f_2 t_2)$$

É importante salientar que a consonância não depende especificamente das fases, uma vez que (GOTO 2009, pg. 2307-7):

$$A_1 \cos(2\pi f_1(t - t_1)) + A_2 \cos(2\pi f_2(t - t_2)) = A_1 \cos[2\pi(n - 1)f(t - t_1)] + A_2 \cos[2\pi(n + 1)f(t - t_2)] \quad (23)$$

Finalmente, teremos a combinação que nada mais é do que a modelagem matemática da série harmônica (GOTO 2009, pg.2307-7), e que pode ser definida através de uma série de Fourier, como vimos anteriormente ao estudarmos psicoacústica do ponto de vista psicofísico. Neste caso, teremos uma curva final que representa a somação temporal de todas as frequências da série harmônica em simultaneidade (ZANATO, 2017, pg.47):

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos[2\pi k(n - 1)ft] + B_k \cos[2\pi k(n + 1)ft] \quad (24)$$

$$\text{para: } f: R \rightarrow R, f(x + t) = f(x), \forall x \in R, t > 0, 0 < x < 2\pi$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)) \quad (25)$$

Temos que, no caso desta série,  $\frac{a_0}{2}$  é uma constante, e  $a_n, b_n$ , são coeficientes da série de Fourier. Utilizando identidades de Euler:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \text{ com } e^{ix} = \cos(x) + i\text{sen}(x), e^{-ix} = \cos(x) - i\text{sen}(x) \quad (26)$$

Onde

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

Deste modo, chegaremos aos coeficientes abaixo, a partir da ortogonalidade de exponenciais complexas (ZANATO 2017, pg. 48-49):

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{n} \int_{-n}^n f(x) \cos(nx) dx \quad (27)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{n} \int_{-n}^n f(x) \text{sen}(nx) dx \quad (28)$$

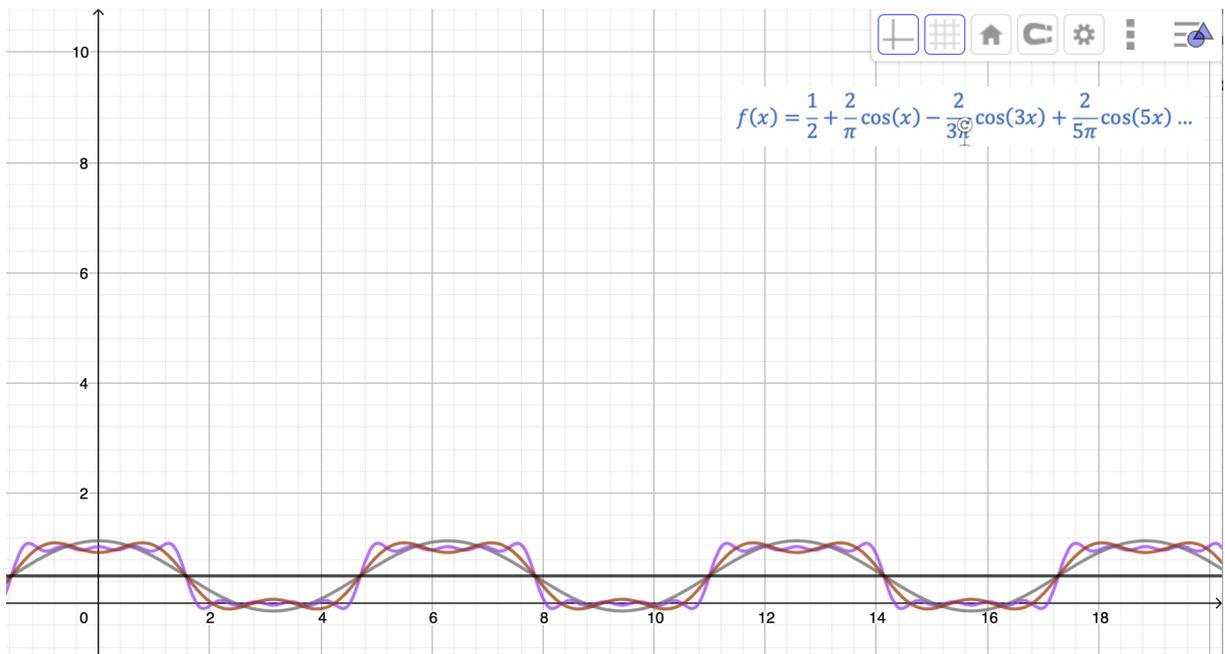
E, por fim, define-se a composição sonora tanto em termos de cossenos, somente, como em termos de senos (ZANATO 2017, pg.49-50):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx)) \quad (29)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \text{sen}(nx)) \quad (30)$$

No gráfico 8, pode-se observar a composição entre elementos da série harmônica que vão se sobrepondo, modelados pelas funções acima:

Gráfico 8 – Representação da sobreposição de termos da série harmônica, modelada como uma série de Fourier.



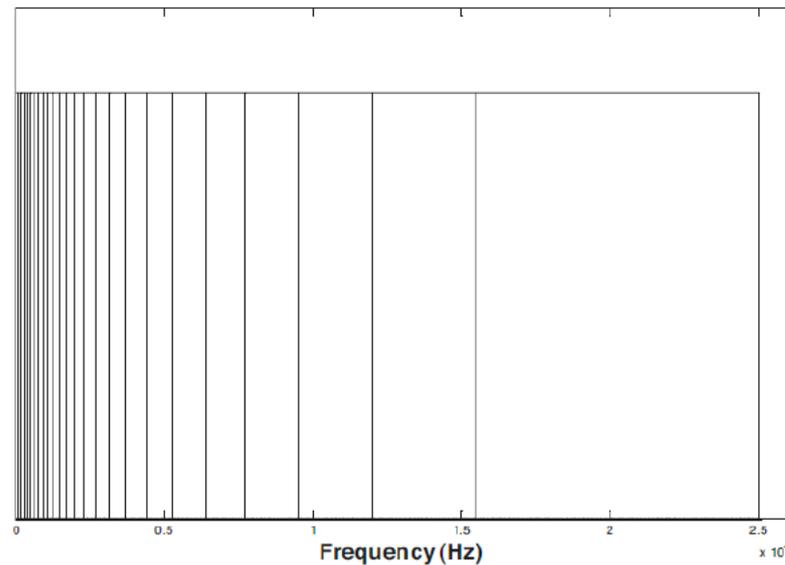
Pode-se observar o resultado consonante e agradável ao ouvido humano como resultado das composições das frequências produzidas pela série harmônica, o que é amplamente aplicado em tecnologias desenvolvidas para produção e composição eletrônica de música e sons, como por exemplo os sintetizadores eletrônicos (ZANATO 2017, pg.61-65). A extensão da série harmônica, como apresentado anteriormente, está relacionada ao timbre de cada instrumento, sendo possível assim mimetizar eletronicamente os sons naturais. Estas são algumas das aplicações que surgem a partir da modelagem matemática dos sons ou, em outras palavras, do estudo da psicoacústica ondulatória, nos termos que definimos neste trabalho. Na seção posterior, a aplicabilidade destes modelos será mais explorada.

#### 4.2.2 Aplicações da psicoacústica ondulatória

Especialmente no período histórico mais recente, houve um crescimento no interesse em se estudar a psicoacústica de modo que pudesse ser utilizada como ferramenta para melhora na qualidade de vida, a exemplo da musicoterapia. Por outro lado, desenvolveu-se o estudo das propriedades físicas ondulatórias do som, bem como houve um aumento da complexidade investigativa pelo incremento de interdisciplinaridade (BLOMSTEDT, 2014, pg.9). Atualmente, a percepção do som é compreendida em termos físicos, fisiológicos, psicológicos, musicais, audiológicos, matemáticos e eletrônicos, e pudemos estudar na seção inicial do desenvolvimento deste trabalho suas aplicações no campo mais próximo de suas origens, a percepção auditiva humana. Agora, iremos avançar em termos de aplicações da psicoacústica para outros contextos.

Uma das aplicações da psicoacústica refere-se à compressão de arquivos de áudio, uma vez que esta utiliza algoritmos oriundos da codificação perceptiva. Princípios psicofísicos, estudados na primeira parte deste trabalho, são associados a técnicas de processamento de sinal para que o áudio seja codificado em um número mínimo de *bits* (WEY E LOPES, 2020). Filtros de banda são produzidos na membrana basilar para aumentar a resolução da cóclea e a discriminação auditiva. Como observado anteriormente, não linearidade na distribuição destas bandas, estando elas em torno de frequências centrais que determinam a largura e forma da banda crítica (Figura 5). A percepção sonora a partir destes filtros, como vimos, pode ser alterada a partir da presença de sons simultâneos ou próximos temporalmente através de mascaradores, e a compressão de áudio elimina distorções redundantes ao rejeitar alguns componentes dos sons pouco importantes para a detecção auditiva (WEY E LOPES, 2020, pg.3).

Figura 5 – Esquema gráfico das bandas críticas humanas, distribuídas de acordo com as frequências.



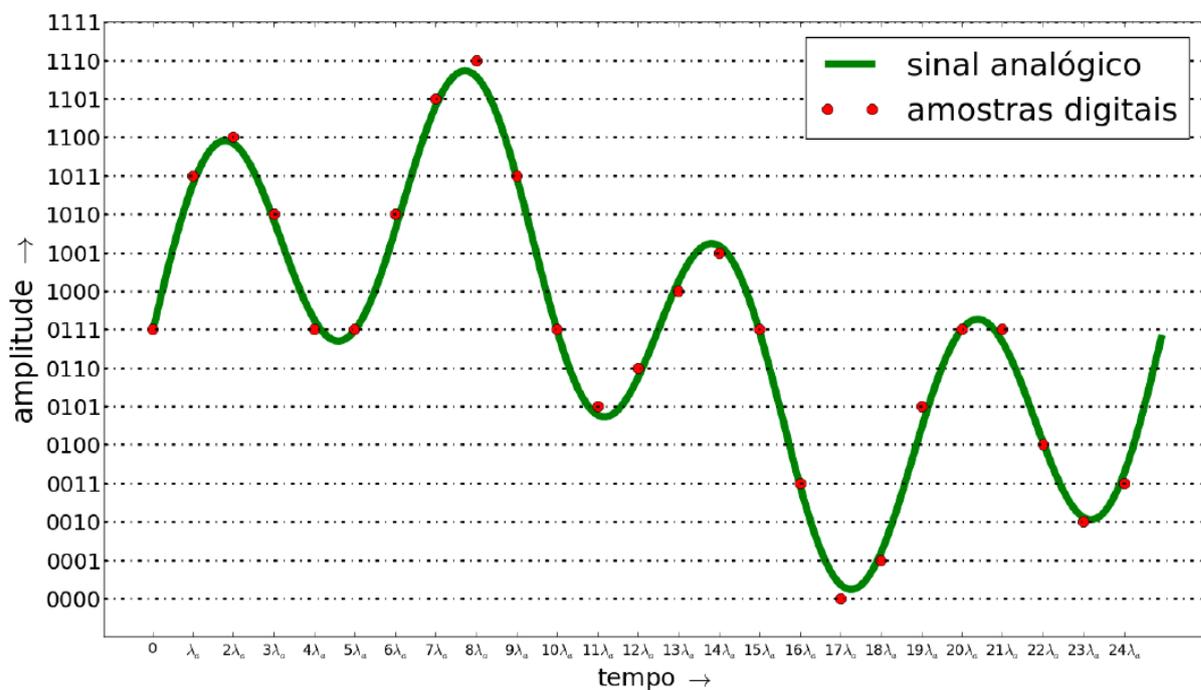
Fonte: WEY E LOPES, 2020, pg. 1.

Como vimos, os modelos psicoacústicos são utilizados para determinar atributos físicos de um som ou arranjo musical, que pode ser modificado ou até removido sem causar alteração na percepção auditiva, resultando na compressão de arquivos de áudio. Além disso, também é possível realizar reconhecimento de timbre da fala humana, o que é útil em diversos sistemas computacionais que utilizam do reconhecimento de voz para a execução de comandos. Outras utilizações desses modelos incluem a avaliação de ruídos (emissão percebida por microfones específicos que procuram simular o ouvido humano a partir de modelos desenhados por voluntários que avaliam sons produzidos por computador), avaliação da qualidade do som (através de funções matemáticas complexas que demonstram o quanto o som é descrito como desagradável a depender da intensidade ou volume, de questões relativas à tonalidade e à estrutura temporal ou ritmo) (BLOMSTEDT, 2014, pg.18-19). De um modo geral, é possível utilizar a psicoacústica como um modo de avaliar os sons e permitir melhor proteção humana aos efeitos adversos que sons desagradáveis podem causar à saúde auditiva humana.

A codificação do áudio digital utiliza protocolos representados por amostras intercaladas por espaços e que possuem amplitude similar de mesmo número de *bits* (denominada

profundidade), o que é denominado modulação por código de pulso cuja frequência  $f_a = \frac{1}{\lambda_a}$ , em que  $\lambda_a$  corresponde aos intervalos regulares entre amostras de *bits* (FABBRI, 2013, pg. 35). O gráfico 9 representa a correlação entre amostras de áudio digital e o sinal analógico.

Gráfico 9 – Correspondência entre som analógico e digital: 25 amostras de 4 *bits* cada.



Fonte: FABBRI,2013, pg. 35.

De acordo com o teorema de Nyquist, existe uma correspondência entre metade da frequência de amostragem e a frequência máxima de sinal, o que significa que a taxa de amostragem precisa ser pelo menos o dobro da frequência audível mais aguda perceptível pelo ouvido humano, correspondente a  $2 \times 20.000 \text{ Hz} = 40.000 \text{ Hz}$ , o que é observado nos padrões dos *Compact Disks* (CD), de 44.000 Hz, e dos sistemas de mídia, de 48.000 Hz (FABBRI, 2013, pg.35).

Sendo assim, as características do som podem ser decodificadas da seguinte forma (FABBRI, 2013, pg. 40-45):

Ordenação das amostras e duração:

$$T_i^\Delta = \{t_i\}_{i=0}^{\lfloor \Delta \cdot f_a \rfloor - 1} \quad (31)$$

Onde:  $T_i = \{t_i\}$  é um conjunto ordenado de amostras reais,  $\Delta$  é a duração, e  $\Delta \cdot f_a$  é o número de amostras.

Potência de onda e volume:

$$pot(T_i) = \frac{\sum_{i=0}^{\Lambda-1} t_i^2}{\Lambda} \quad (32)$$

Onde:  $\Delta \cdot f_a = \Lambda$ . O volume sempre depende da amplificação dos alto-falantes, que depende da diferença relativa de potência ou pressão em decibéis entre as notas:

$$V_{dB} = 10 \log_{10} \frac{pot(T'_i)}{pot(T_i)} \quad (33)$$

O volume é percebido como dobrado a cada 10 dB, correspondendo aos cinco itens de intensidade: *pianissimo*, *piano*, *mezzoforte*, *forte* e *fortissimo*. O dobro do volume também equivale ao triplo de amplitude e essa conversão pode ser feita pela equação:

$$A = 10^{\frac{V_{dB}}{20}} \quad (34)$$

Onde  $A$  é o fator multiplicativo.

Série harmônica ou sequência e amplitudes e altura:

Como vimos, a altura é definida a partir de uma nota fundamental por uma série harmônica que se prolonga no tempo, o que gerará amostras em uma sequência:

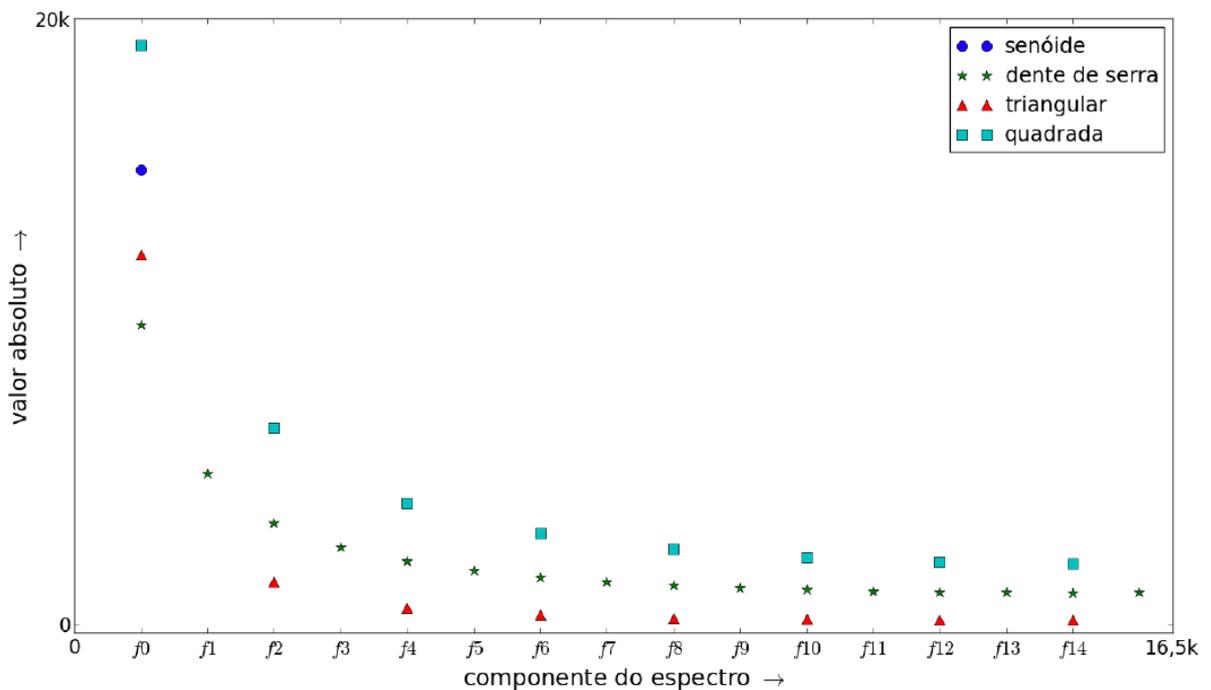
$$T_i^f = \{t_i^f\} = \left\{ t_{i+\lambda_f}^f \right\} = \left\{ t_{i+\frac{f_a}{f}}^f \right\} \quad (35)$$

Onde temos a fundamental de frequência  $f$ , e  $T_i^f$  como a série geradas por ela.

### Espectro, série harmônica e timbre:

Como sabemos, o formato final da função trigonométrica gerada pela fundamental, conforme o número de unidades da série harmônica que a compõe, caracteriza o timbre. Sendo assim, o modelo para cada timbre é organizado a partir destes registros, gerando determinado espectro limitado pela frequência máxima  $f_a/2$  segundo o teorema de Nyquist (FABBRI, 2013, pg. 45). O gráfico 10 ilustra alguns dos modelos matemáticos de diferentes timbres:

Gráfico 10 – Espectros correspondentes aos principais modelos artificiais de timbres musicais.

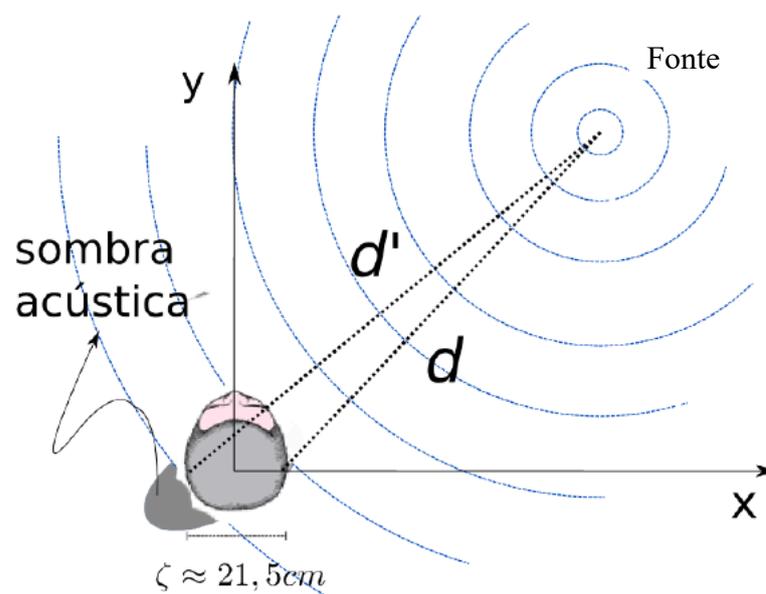


Fonte: FABBRI,2013, pg. 45.

Com relação ao espectro e à série harmônica, os modelos matemáticos que são utilizados se referem à série de Fourier e já foram apresentados anteriormente.

Um outro aspecto que também é modelado matematicamente, embora não seja uma propriedade fundamental da música, é a localização espacial do som. Há grande interesse da indústria fonográfica em promover a percepção de som ambiente, o que se relaciona ao atraso do som quando chega em uma orelha quando comparado à outra, diferença na intensidade ou volume do som entre as orelhas, e a filtragem do som realizada pelos tecidos do corpo (FABBRI, 2013, p.55). Na Figura 6, pode-se observar o esquema utilizado para a modelagem do aspecto espacial.

Figura 6 – Esquema para cálculo da diferença temporal e de intensidade do som entre as orelhas.



Fonte: FABBRI, 2013, pg. 55.

Se considerarmos  $\zeta$  a distância entre as orelhas, que é de aproximadamente 21,5 cm, e centralizando a origem no meio desta distância, como mostra a imagem acima, teremos as seguintes equações (FABBRI, 2013, p.55):

$$d = \sqrt{\left(x - \frac{\zeta}{2}\right)^2 + y^2} \quad (36)$$

$$d' = \sqrt{\left(x + \frac{\zeta}{2}\right)^2 + y^2} \quad (37)$$

Considerando  $v$  como a velocidade do som no ar, temos, desta forma, que as diferenças temporal e de intensidade interaurais podem ser determinadas por:

$$\text{Diferença Temporal} = \frac{d' - d}{v \approx 343,2} \text{ segundos} \quad (38)$$

$$\text{Diferença de intensidade} = 20 \log_{10} \left(\frac{d}{d'}\right) \text{ decibéis} \quad (39)$$

É importante salientar que há um “cone de confusão” em que pares de diferenças temporal e de intensidade podem resultar em resultados similares, sendo necessários outros parâmetros para a diferenciação, como a filtragem atenuante de agudos devido à interferência da cabeça ser maior nas ondas agudas do que nas graves, e a consideração da difração (ou atraso de aproximadamente 0,7 milissegundos) de sons graves oriundos de fonte lateral (FABBRI, 2013, pg.57).

Por outro lado, a espacialização é outra propriedade espacial dos sons que se relaciona com o ambiente, ou seja, com absorções e reflexões do som a partir das superfícies no entorno, por reverberação. A reflexão inclui tanto a inversão do vetor velocidade perpendicular à superfície como a absorção de energia, especialmente dos agudos. Diversas experimentações artificiais podem ser feitas neste sentido, como reflexões assimétricas ou ganhos de bandas

específicas de frequência, o que não se observa em sistemas reais e é denominado de ressonância (FABBRI, 2013, pg.58).

Há duas características importantes na modelagem da reverberação. Em termos temporais, ocorrem reflexões iniciais, que são intensas e esparsas, e reflexões tardias, constituídas por atrasos indistintos com decaimento exponencial e ocorrências estatísticas; e em termos espectrais, a primeira banda apresenta frequências graves espaçadas enquanto que a segunda banda apresenta um decaimento progressivo e suave com flutuação estatística dos médios e agudos. Boas salas de concerto apresentam um tempo total de reverberação de 1,9 segundos, em sua maioria compostos de reflexões tardias, embora sejam as primeiras reverberações responsáveis pela localização do som pelos ouvintes (FABBRI, 2013, pg.59).

Além das aplicações em termos de tecnologia de som, como o que ocorre na indústria do cinema, por exemplo, temos os usos musicais, como a composição de notas mixadas, embora estas sejam separadas pela orelha humana e pelo sistema nervoso para que ocorra a percepção. As notas mixadas nada mais são do que as composições harmônicas cuja estrutura de percepção é ditada pelas distâncias ou intervalos entre as frequências que as compõem, tópico já analisado anteriormente ao longo deste trabalho. No contexto do som digital, nestas composições de frequências, que incluem a série harmônica, são produzidas a partir de notas fundamentais com uma determinada duração, e podem ser simplificadas através de estruturas de dados coletados da natureza e indexados, que permitem uma diminuição na complexidade computacional ao sintetizar sons artificiais (FABBRI, 2013, pg.65-66).

Outras aplicações são o desenvolvimento de reverberadores, equalizadores e atrasos, através de filtros. Entre eles, temos os filtros de resposta ao impulso infinita, modelados pela equação de diferenças (FABBRI, 2013, pg. 72):

$$t'_i = \frac{1}{b_0} \left( \sum_{j=0}^j a_j \cdot t_{i-j} + \sum_{k=1}^k b_k \cdot t'_{i-k} \right) \quad (40)$$

Na maioria dos casos,  $b_0$  será 1 por normalização das variáveis  $a'_j = \frac{a_j}{b_0}$  e  $b'_k = \frac{b_k}{b_0} \Rightarrow b'_0 = 1$ . Esta equação exhibe o som resultante da diferença entre o som original e o resultado anterior. Os filtros possuem um valor de frequência de corte e a largura da banda em relação a

qual esta frequência está centralizada, e um dos resultados que se observa é uma atenuação de amplitude, resultando em uma percepção de intensidade menor, o que costuma expandir o espectro para o lado grave por filtrar sons agudos (FABBRI, 2013, pg.75).

Por outro lado, pode ser interessante filtrar ou incluir ruídos no som digital produzido. Ruídos não tem sua altura determinada por uma frequência correspondente a uma nota musical, e podem fazer parte indireta do timbre de determinado instrumento, bem como ser componentes da percussão, que em si mesma não é caracterizada em geral por frequências específicas de notas musicais. Pode-se gerar ruídos pela distribuição espectral pela transformada inversa de Fourier, e que diferem do ruído branco porque se concentram em torno de determinadas frequências ou bandas espectrais. Os ruídos coloridos, que se concentram em determinadas regiões espectrais, são denominados através do nome de cores apenas por uma analogia ao espectro de luz. Temos uma queda de 3 decibéis por oitava no ruído rosa, uma queda de 6 decibéis por oitava no ruído marrom, um ganho de 3 decibéis por oitava no ruído azul, um ganho de 6 decibéis por oitava no ruído violeta, perdas maiores do que 6 decibéis por oitava no ruído preto, e presença de curvas isso-audíveis no ruído branco constituem o ruído cinza. Também há ruídos que variam o espectro ao longo do tempo ou que são transientes (FABBRI, 2013, pg.78-79).

Outras variações são observáveis em música e podem ser mimetizadas digitalmente. É possível modelar o vibrato (variação periódica em torno da frequência fundamental) e o trêmulo (variação periódica em torno da intensidade principal), que são artifícios comumente utilizados na interpretação musical, o que torna a musica digital mais natural (FABBRI, 2013, pg.80-81). Também destaca-se o efeito Doppler, que pode ser utilizado para tornar o som mais realístico quando relacionado a um fenômeno em deslocamento, incluindo aproximação ou distanciamento de uma fonte sonora, e a variação de volume (ou envoltória), que se associa ao timbre do instrumento que produz o som, tudo isso podendo ser aplicado através de filtros que trazem variações na onda sonora resultante da série harmônica modelada por uma sequência de Fourier, e que trarão maior naturalidade do som produzido digitalmente (FABBRI, 2013, pg.82-95). Além disso, utiliza-se linguagem de programação para aplicar estes conhecimentos aos softwares que produzem música digital, o que inclui padrões de repetição de determinados trechos, distribuição temporal e padrões tonais conforme estudados anteriormente (FABBRI, 2013, pg. 121-122).

## 5 DISCUSSÃO

A psicoacústica é um ramo da psicofísica cujo desenvolvimento ocorreu principalmente a partir da segunda metade do século XIX, a partir dos estudos de Weber e de Fechner. Considerando-se o campo de estudos no qual esta área inicialmente se desenvolveu, houve uma iniciativa de se compreender a interface da percepção humana, ou seja, as regras matemáticas, biofísicas e fisiológicas a partir da qual o ser humano percebe estímulos do meio ambiente.

A percepção está relacionada à tomada de consciência de *inputs* oriundos principalmente do exterior, cujo mecanismo depende de um sistema de transdução da informação sensorial, além da condução nervosa até chegar ao córtex cerebral (GARDNER E MARTIN, 2003). Há vários fatores que podem alterar a consciência da informação sensitiva como aspectos emocionais, aspectos biológicos físicos, questões relativas ao ciclo circadiano entre outros, que fazem com que exista uma grande variabilidade entre os indivíduos, o que se deve salientar como desafio metodológico neste campo de pesquisa. No entanto, certos padrões matemáticos podem ser identificados e foram apresentados nesta revisão literária sobre o tema.

Para que o tema pudesse se desenvolver de modo claro e didático, dividiu-se a revisão nos dois aspectos de pontos de vista primordiais da psicoacústica: o conhecimento psicofísico, que se relaciona à percepção de estímulos sonoros, e o conhecimento físico, que se relaciona ao mecanismo físico dos sons enquanto movimento ondulatório. Os estudos de Fechner e de cientistas que o sucederam esclarecem alguns conceitos, como o limiar sensitivo, ou seja, a menor porção de magnitude de estímulo necessária à percepção consciente (SORANZO E GRASSI, 2014, pg.2), que tem uma relação diretamente proporcional à intensidade de estímulo, e cuja modelagem matemática demonstrou-se guiada inicialmente por uma função logarítmica (GARDNER E MARTIN, 2003), depois por uma função potencial (STEVENS, 1961), embora no caso da psicoacústica a duração alongada de um estímulo atinja um platô de percepção, mesmo que o estímulo continue aumentando (STEVENS E HALL, 1966). Além disso, estímulos sonoros mais longos parecem ser mais intensos do que de fato o são, o que demonstra um padrão diferenciado na curva de percepção quando esta se distancia do meio da curva próximo ao limiar (EPSTEIN E FLORENTINE, 2006). Assim, a percepção auditiva depende também da duração, e não somente da magnitude do estímulo, e embora corresponda em geral à lei potencial, há um ponto de inflexão na curva que a associa também a uma lei exponencial (FLORENTINE E EPSTEIN, 2006). Também há diferença de limiar entre frequências sonoras

distintas, o que mostra que o limiar não é único para qualquer som (WEY E LOPES, 2020, pg. 2).

Um outro aspecto da percepção auditiva é o ritmo, que se caracteriza por padrões temporais do som (RAJENDRAN et al., 2018, p.5-6). Os pulsos rítmicos mais comuns têm duração entre 0,25 e 1,5 segundos, o que corresponde a 240 e 40 batidas por minuto ou BPM, muito próximo a padrões de ritmo corpóreo como as batidas do coração (FABBRI, 2013). Além disso, a compreensão da linguagem falada depende de processamento nervoso central e da articulação de sons e de pausas, e da ordenação dos sons e da modulação por ruídos, o que se relaciona à diversas características da psicoacústica como somação temporal, presença de mascaradores, discriminação auditiva (EPSTEIN E FLORENTINE, 2006; WEY E LOPES, 2020) e distribuição das frequências em bandas (WEY E LOPES, 2020).

O processamento auditivo se associa a uma classe de equações diferenciais parciais que captam a essência do fenômeno não-linear da audição, que se inicia com a movimentação ondulatória de fluidos internos à cóclea, até sensibilizar a membrana basilar e outras estruturas relacionadas, onde ocorre amplificação dos estímulos para serem detectados (XIN, 2020). Tanto para a percepção auditiva quanto para a modelagem das frequências que compõem os sons em sua perspectiva ondulatória, temos o desenvolvimento de uma série de Fourier (GOTO 2009; XIN, 2020). Assim, observa-se que as ondas sonoras se apresentam como funções trigonométricas cujas características de amplitude e frequência vão se relacionar à intensidade do estímulo e notas musicais percebidas, bem como o desenvolvimento da onda em relação às frequências se somam a ela no tempo, em um espectro de Fourier, são percebidos como timbre, consonâncias e dissonâncias (BLOMSTEDT, 2014, pg.10; MARTINS, 2015, pg.23; ZANATO, 2017, pg.39). Também observou-se que há relações matemáticas contidas nos intervalos musicais e entre oitavas, tons e semitons (MAZOLLA 1989, pg.556; FABBRI, 2013, pg. 95-96; MARTINS 2015, pg.34-35), o que também influencia na percepção de consonâncias e dissonâncias devido à correspondência de séries harmônicas entre as notas ou produção de batimentos (MARTINS, 2015).

A evolução científica dos modelos matemáticos em psicoacústica levou ao desenvolvimento tecnológico de diversos aparatos, tanto para a detecção de deficiências auditivas como para a correção das mesmas (SAMELLI E SCHOCHAT, 2008, pg.372-3; SORANZO E GRASSI, 2014), em como na compressão digital de arquivos de áudio, produção de sons digitais, composição digital musical, desenvolvimento de microfones, entre outros

(FABBRI, 2013; BLOMSTEDT, 2014; WEY E LOPES, 2020). Assim, pode-se demonstrar a importância da modelagem matemática na área da psicoacústica, tanto para a compreensão dos mecanismos envolvidos quanto em suas aplicações biomédicas e em tecnologia do som, ficando claro o quanto este campo ainda necessita de pesquisas e de desenvolvimento científico futuro.

## 6 CONCLUSÕES

A psicoacústica é uma área interdisciplinar fascinante, que pode ser abordada principalmente a partir de perspectivas metodológicas fisiológicas, psicobiológicas e biofísicas, nas quais a modelagem matemática apresenta-se como ferramenta fundamental de estudo e de aplicação prática.

Neste trabalho, foram apresentados dois dos aspectos mais relevantes: os modelos matemáticos relativos à percepção auditiva e processamento coclear, bem como aqueles relativos aos aspectos físicos sonoros, que em parte são bastante similares devido ao comportamento ondulatório e à composição temporal de uma série de vibrações ou frequências que se interagem ao longo do tempo. Muitos avanços tecnológicos puderam ser alcançados tanto na área biomédica quanto em tecnologia do som, o que de modo algum esgota este campo promissor que poderá se beneficiar de mais pesquisas futuras.

## REFERÊNCIAS

- ARCANJO, Samuel. **Lições elementares de teoria musical**. São Paulo: Ricordi.1918.163pp.
- BLOMSTEDT, Tomas. **Psychoacoustics. An Introduction to Sonic Activism**. Degree Thesis. Film och Television. Arcada. 2014. 25p.
- DA SILVA, José Aparecido; ROZESTRATEN, Reinier Johannes Antonius. **Manual Prático de Psicofísica**. Disponível em < <http://www.ieb.usp.br/wp-content/uploads/sites/392/2018/08/manual-de-psicofisica.pdf>> Acesso em: 31/08/2020
- DUDEL, John. General sensory physiology. In: SHMIDT, Robert; THEWS, Gehrard (Eds.). **Human Physiology**. Berlin: Springer, 1983. p.177-192.
- EPSTEIN, Michael; FLORENTINE, Mary. Loudness of brief tones measured by magnitude estimation and loudness matching (L). **The Journal of the Acoustical Society of America**, v.119, n.4, p. 1943-1945, 2006.
- FABBRI, Renato. **Música no áudio digital: descrição psicofísica e caixa de ferramentas**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo. 2013. 255p.
- FASTL, Hugo; ZWICKER, Eberhard. **Psychoacoustics: Facts and Models**. Heidelberg: Springer, 3<sup>rd</sup> Ed. 2007. 470pp.
- FLORENTINE, Mary; EPSTEIN, Michael. To honor Stevens and repeal his law (for the auditory system). In: KORNBROT, D.; MSETFI, R.; MACRAE, A. (Org.). **Fechner Day**. Reino Unido: International Society for Psychophysics, 2006. p. 37–42.
- GARDNER, E.P.; HERNALAINEN, H.A.; PALMER, C.I.; WARREN, S. Touching the outside world: representation of motion and direction within primary somatosensory cortex. In: LUND, J.S. (Ed). **Sensory processing in mammalian brain: neural substrates and experimental strategies**. New York: Oxford Univ. Press, 1989. p.49-66.
- GARDNER, E.P.; MARTIN J.H. Codificação da informação sensória. In: KANDEL Erich, SCHWARTZ, J.H.; JESSELL, T.M (Eds.). **Princípios da Neurociência**. 4<sup>a</sup> Ed. Rio de Janeiro: Manole, 2003. p.411-429.
- GARDNER, E.P.; JOHNSON, K.O. Sensory coding. In: KANDEL, E.R. et al. **Principles of neuroscience**. 5 ed. Philadelphia: *McGraw-Hill Education / Medical*, 2017, p. 549-473.
- GOTO, Mario. **Física e música em consonância**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, 2307 (2009).
- JOHNSON, Kenneth O.; HSIAO, Steven S.; YOSHIOKA, Takashi. Neural Coding and the Basic Law of Psychophysics. **Neuroscientist**. v.8, n.2, p. 111–121, 2002.

- KANDEL, E.R. et al. **Principles of neuroscience**. 5 ed. Philadelphia: *McGraw-Hill Education / Medical*, 2017.
- MARTINS, Daniel Francisco de Paula Sodré. **Escalas, Inversas e Triades: A Matemática aplicada à Música**. Dissertação de Mestrado. Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. 2015. 59p.
- MAZZOLA, G; WIESER, H.G.; BRUNNER, V.; MUZZULINI, D. **Symmetry-oriented mathematical model of classical counterpoint and related neurophysiological investigations by depth EEG**. *Computers Mathematical Application*, v. 17, n. 4-6, 539-594 (1989).
- PAULUCCI, Bruno Peres. **Fisiologia da Audição**. Disponível em:  
<[https://forl.org.br/Content/pdf/seminarios/seminario\\_28.pdf](https://forl.org.br/Content/pdf/seminarios/seminario_28.pdf)> Acesso em: 08/10/2020
- PETERSEN, Mark. **Mathematical Harmonies**. Disponível em:  
<<http://people.math.sc.edu/sharpley/math750/MathMusic.pdf>> Acesso em: 17/08/2020
- RAJENDRAN, Vani G; TEKI, Sundeep; SCHNUPP, Jan W.H. Temporal Processing in Audition: Insights from Music. **Neuroscience**, v.389, p.4-18, 2018.
- ROLDAN, C.J.; ABDI, S. Quantitative sensory testing in pain management. **Pain Management**, v.5, n.6, p.483-491, 2015.
- SAMELLI, Alessandra Giannella; SCHOCHAT, Eliane. Processamento auditivo, resolução temporal e teste de detecção de gap: revisão da literatura. **Revista CEFAC**, v.10, n.3, p. 369- 377, 2008.
- SORANZO, Alessandro; GRASSI, Massimo. Psychoacoustics: a comprehensive MATLAB toolbox for auditory testing. **Frontiers in Psychology**. v.5, n.712, p.1-13. 2014.
- STEVENS, S.S. To honor Fechner and repeal his law. A power function, not a log function, describes the operating characteristics of a sensory system. **Science**. V. 133, p. 80-86, 1961.
- STEVENS, Joseph C.; HALL, James W. Brightness and loudness as functions of stimulus duration. **Perception & Psychophysics**, v.1, p. 319 -327, 1966.
- VALLBO, A.B.; HAGBARTH, K.E.; TOREBJORK, H.E.; WALLIN, B.G. Somatosensory, proprioceptive, and sympathetic activity in human peripheral nerves. **Physiology Reviews**. V. 59, p. 919-196, 1979.
- WEY, Teodoro Orlow Wey; LOPES, Renato da Rocha. **Psicoacústica para Compressão de Arquivos de Áudio**. Disponível em:  
h<[ttp://www.sps.fee.unicamp.br/sps2012/proceedings\\_sps2012/Teodoro\\_audio\\_SPS2012.pdf](http://www.sps.fee.unicamp.br/sps2012/proceedings_sps2012/Teodoro_audio_SPS2012.pdf)> Acesso em: 14/08/2020

XIN, Jack. **Ear Modeling and Sound Signal Processing**. in Department of Mathematics and ICES, Austin 78712: University of Texas at Austin. Disponível em: <<https://www.math.uci.edu/~jxin/iccm04.pdf>> Acesso em: 05 de setembro de 2020

ZANATO, Fernando da Silva. **Matemática e música: reações entre as séries e transformadas de Fourier e a teoria musical**. Dissertação de Mestrado. Universidade do Estado de Mato Grosso. 2017. 85p.