UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

BAZILICIO MANOEL DE ANDRADE FILHO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA ENVOLVENDO MODELAGEM MATEMÁTICA DE TRANSFORMAÇÕES GASOSAS: CONCEPÇÃO, EXECUÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS ORIENTADA PELA NOÇÃO DE CONCILIAÇÃO DE METAS

Tubarão

2020

UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

BAZILICIO MANOEL DE ANDRADE FILHO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA ENVOLVENDO MODELAGEM MATEMÁTICA DE TRANSFORMAÇÕES GASOSAS: CONCEPÇÃO, EXECUÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS ORIENTADA PELA NOÇÃO DE CONCILIAÇÃO DE METAS

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências da Linguagem.

Prof. Dr. Fábio José Rauen (Orientador)

Prof. Dr. Patrick Gibel (Université de Bordeaux, Coorientador)

Tubarão

2020

A56 Andrade Filho, Bazilicio Manoel de, 1986-
Sequência didática envolvendo modelagem matemática de transformações gasosas : concepção, execução e análise de resultados orientada pela noção de conciliação de metas / Bazilicio Manoel de Andrade Filho. – 2020.
230 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (Doutorado) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Pós-graduação em Ciências da Linguagem.
Orientação: Prof. Dr. Fábio José Rauen
Coorientação: Prof. Dr. Patrick Gibel

1. Semiótica. 2. Matemática. 3. Modelos matemáticos. 4. Análise do discurso. I. Rauen, Fábio José, 1965-. II. Gibel, Patrick. III. Universidade do Sul de Santa Catarina. IV. Título.

CDD (21. ed.) 401.41

Ficha catalográfica elaborada por Carolini da Rocha CRB 14/1215

BAZILICIO MANOEL DE ANDRADE FILHO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA ENVOLVENDO MODELAGEM MATEMÁTICA DE TRANSFORMAÇÕES GASOSAS: CONCEPÇÃO, EXECUÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS ORIENTADA PELA NOÇÃO DE CONCILIAÇÃO DE METAS

Esta Tese foi julgada adequada à obtenção do título de Doutor em Ciências da Linguagem e aprovada em sua forma final pelo Curso de Doutorado em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 19 de junho de 2020.

____
Professor e orientador Fábio José Rauen, Doutor.
Universidade do Sul de Santa Catarina

presente por videoconferência

____
Professor e coorientador Patrick Gibel, Doutor.
Université de Bordeaux

presente por videoconferência

____
Professora Isabelle Bloch, Doutora.
Université de Bordeaux

presente por videoconferência

____
Professora Morgana Scheller, Doutora.
Instituto Federal Catarinense

presente por videoconferência

____
Professor Saddo Ag Almouloud, Doutor.
Pontifica Universidade Católica de São Paulo

presente por videoconferência

____
Professora Marleide Coan Cardoso, Doutora.
Instituto Federal de Santa Catarina

presente por videoconferência

____
Professora Suelen Francez Machado Luciano, Doutora.
Universidade do Sul de Santa Catarina/ Faculdade SENAC

Àquele que mesmo distante sempre se fez presente.

AGRADECIMENTOS

Finalizada mais esta etapa de minha trajetória acadêmica, chegou a hora de converter meus agradecimentos em palavras, transformando representações mentais em semióticas, mobilizando, para tanto, o registro em língua natural.

Aos meus pais, Bazilicio Manoel de Andrade (*in memorian*) e Lorena Origen de Andrade.

À minha família.

A André Rosa Ramos.

Ao meu orientador, Doutor Fábio José Rauen.

Aos meus supervisores durante o doutorado sanduíche, Doutora Isabelle Bloch e Doutor Patrick Gibel.

À equipe do Laboratório de Epistemologia e Didática das Disciplinas da Universidade de Bordeaux/França – LAB-E3D.

Às professoras Doutora Diva Marília Flemming e Doutora Sandra Vieira pelas contribuições na fase de qualificação do projeto de tese.

À professora Doutora Elizete Maria Possamai Ribeiro pelas contribuições na avaliação do ensaio apresentado à disciplina Tópicos Avançados de Leitura.

Aos professores e às professoras do PPGCL.

Às secretárias do PPGCL, Patrícia de Souza de Amorim Silveira e Kellen Oliveira.

À Doutora Marleide Coan Cardoso, ex-professora, colega de trabalho e amiga.

Aos colegas do Grupo de Pesquisa em Pragmática Cognitiva, em especial Vanessa Isabel Cataneo.

Aos colegas do PPGCL, em especial Cintia Fernandes de Abreu.

Aos colegas do Instituto Federal de Santa Catarina, em especial Almir Ribeiro de Carvalho Junior, Ana Paula Figueiredo, Carmine Ines Acker, Graziele Vefago Boaventura Possenti, Iuri Kieslarck Spacek, Lizandra Botton Marion Morini Lucas Dominguini e Thais dos Santos de Souza, que, de alguma maneira, contribuíram com a organização da atividade aplicada nesse estudo.

À banca avaliadora desse trabalho, pelas contribuições na avaliação desse estudo.

Aos estudantes do Curso Técnico Integrado em Química que se dispuseram a participar desse estudo.

À Giulia Loreto, Gabrieli Aparecida Lorenson, Dyenifer Martins Barbosa, acadêmicas do curso de Licenciatura em Química.

À Araceli Gonçalves, amiga e diretora da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Santa Catarina.

Ao Instituto Federal de Santa Catarina pelo apoio e incentivo a minha qualificação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pela bolsa modalidade Taxas Escolares no primeiro ano de curso e pela bolsa modalidade Programa Nacional de Doutorado Sanduíche no Exterior – PNDE, que possibilitou a realização de um estágio na Universidade de Bordeaux/França.

Ao Governo do Estado de Santa Catarina, pela bolsa de estudo de pós-graduação UNIEDU/FUMDES.

À Deus, que me presenteou com pessoas especiais, que tanto têm contribuído com minha trajetória.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza” (Bertrand Russell).

RESUMO

Título: Sequência didática envolvendo modelagem matemática de transformações gasosas: concepção, execução e análise de resultados orientada pela noção de conciliação de metas.

Resumo: Analisamos nesta tese a concepção, a execução e os resultados de uma sequência didática concebida como um plano de ação intencional em direção a conciliação colaborativa da meta de modelar matematicamente transformações gasosas. Para concebê-la, mobilizamos sinergicamente noções teóricas próprias da teoria dos registros de representações semióticas, da modelagem matemática e da teoria das situações didáticas no contexto da educação matemática, e noções teóricas próprias da teoria da relevância e da teoria de conciliação de metas no contexto das ciências da linguagem. A sequência foi organizada em três contextos dedicados a transformações isovolumétricas, isobáricas e isotérmicas, cada qual contendo uma etapa de contextualização e uma etapa experimental seguida de questões que conduziram a ação dos estudantes nas diferentes fases da modelagem matemática e níveis de *milieu*. O estudo foi executado com vinte estudantes do segundo ano do curso técnico de nível médio integrado em química do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC) – campus Criciúma, divididos em quatro equipes. Concebendo modelagem matemática como situação a-didática ou como dimensão a-didática nos termos da teoria das situações didáticas, as evidências sugerem que a mobilização de diferentes registros de representação semiótica no processo de ensino e de aprendizagem dos objetos matemáticos aprimorou a concepção e a execução da sequência didática do ponto de vista do docente e favoreceu ações e retroações ao longo das etapas de modelagem matemática do ponto de vista dos estudantes. Além disso, respeitando os aportes da teoria da relevância, as evidências apontam que a arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas permitiu conceber, executar e validar a sequência didática (dimensão metodológica) e descrever e explicar como os estudantes selecionam e articulam os diferentes inputs na elaboração de um modelo matemático (dimensão epistemológica).

Palavras-chave: Conciliação de metas. Situações didáticas. Modelagem matemática. Registros de representação semiótica. Transformações gasosas.

ABSTRACT

Title: Didactic Sequence Involving Mathematical Modeling of Gas Transformations: Conception, Execution, and Analysis of Results Guided by the Notion of Goal-Conciliation

Abstract: In this thesis, we analyze the conception, execution, and results of a didactic sequence thought as a plan of intentional action towards the collaborative conciliation of the goal of mathematically modeling gas transformations. To conceive it, we synergistically mobilize theoretical concepts of registers of semiotic representations, mathematical modeling, and didactic situations in the context of mathematical education, and theoretical concepts of relevance and goal-conciliation in the context of language sciences. We organized the sequence in three contexts dedicated to isovolumetric, isobaric, and isothermal transformations, each one containing a contextualization stage and an experimental stage followed by questions that led the students' action in the different phases of mathematical modeling and *milieu* levels. We carried out the study with twenty students of the second year of the technical course of integrated high school level in chemistry from the Federal Institute of Santa Catarina (IFSC) at Criciúma divided into four teams. Conceiving mathematical modeling as an a-didactic situation or as an a-didactic dimension in terms of the theory of didactic situations, the evidence suggests that the mobilization of different registers of semiotic representation in the teaching and learning process of mathematical objects improved the design and execution of the didactic sequence from the teacher's point of view and favored actions and feedback along the stages of mathematical modeling from the students' point of view. Furthermore, respecting contributions of relevance theory, the evidence points out that the goal-conciliation-theoretic abductive-deductive architecture allowed to conceive, execute and validate the didactic sequence (methodological dimension) and to describe and explain how students select and articulate the different inputs in the elaboration of a mathematical model (epistemological dimension).

Keywords: Goal-Conciliation. Didactic Situations. Mathematical Modeling. Registers of Semiotics Representation. Gas Transformations.

RÉSUMÉ

Titre : Séquence didactique englobant modélisation mathématique des transformations gazeuses: conception, exécution et analyse des résultats guidés par la notion de rapprochement des objectifs

Résumé : Dans cette thèse, nous analysons la conception, l'exécution et les résultats d'une séquence didactique conçue comme un plan d'action intentionnel vers la conciliation collaborative de l'objectif de modélisation mathématique des transformations gazeuses. Pour la concevoir, nous mobilisons en synergie les notions théoriques propres à la théorie des registres de représentation sémiotique, à la modélisation mathématique et à la théorie des situations didactiques dans le cadre de l'enseignement mathématique, et les notions théoriques propres à la théorie de la pertinence et la théorie de rapprochement des objectifs dans le contexte des sciences du langage. La séquence était organisée en trois contextes dédiés aux transformations isovolumétriques, isobares et isothermes, chacun contenant une étape de contextualisation et une étape expérimentale suivies de questions qui ont conduit l'action des élèves dans les différentes phases de la modélisation mathématique et des niveaux du milieu. L'étude a été réalisée avec vingt étudiants de deuxième année du cours technique de lycée intégré en chimie de l'Institut Fédéral de Santa Catarina (IFSC) – campus Criciúma, répartis en quatre équipes. Concevant la modélisation mathématique comme une situation didactique ou comme une dimension didactique en termes de théorie des situations didactiques, les preuves suggèrent que la mobilisation de différents registres de représentation sémiotique dans le processus d'enseignement et d'apprentissage des objets mathématiques a amélioré la conception et l'exécution de la séquence didactique du point de vue de l'enseignant et a favorisé les actions et la rétroaction tout au long des étapes de la modélisation mathématique du point de vue des élèves. En outre, en respectant les apports de la théorie de la pertinence, les preuves montrent que l'architecture abductive-déductive de la théorie de rapprochement des objectifs a permis de concevoir, d'exécuter et de valider la séquence didactique (dimension méthodologique) et de décrire et d'expliquer comment les élèves sélectionnent et articulent les différents apports dans l'élaboration d'un modèle mathématique (dimension épistémologique).

Mots-clés : Rapprochement des objectifs. Situations didactiques. Modélisation mathématique. Registres de Représentation Sémiotique. Transformations gazeuses.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação por diagramas da formulação $CM(R)TSDMMRRS$ 24
Figura 2 – Modelagem matemática conforme Bassanezi (2010) 52
Figura 3 – Dinâmica da modelagem matemática conforme Biembengut e Hein (2010) 53
Figura 4 – Fases da modelagem matemática conforme Biembengut (2014) 55
Figura 5 – Fases da modelagem matemática 58
Figura 6 – Atividades cognitivas e ações cognitivas proposta por Silva (2008) 61
Figura 7 – Fases da modelagem matemática e ações cognitivas dos alunos 66
Figura 8 – Modelização do funcionamento do repertório didático 75
Figura 9 – Saber e conhecimento nos processos de devolução e institucionalização 79
Figura 10 – Estruturação do *milieu*: análise descendente e ascendente 82
Figura 11 – Estruturação do *milieu*.. 94
Figura 12 – Fases da modelagem matemática e das ações cognitivas dos alunos.................... 97
Figura 13 – Arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas 103
Figura 14 – Arquitetura abdutivo-dedutiva pós-factual da presunção de relevância ótima ... 107
Figura 15 – Arquitetura abdutivo-dedutiva aplicada à presunção de relevância ótima.......... 108
Figura 16 – Possibilidades de consecução de metas 113
Figura 17 – Possibilidades de sucesso na consecução de planos de ação intencional........... 114
Figura 18 – Esquema básico para auto e heteroconciliação de metas 121
Figura 19 – Simulador propriedade dos gases.. 128
Figura 20 – Simulador *Propriedades dos Gases* 137
Figura 21 – Simulador *Propriedades dos Gases* 138
Figura 22 – Simulador *Propriedades dos Gases* 138
Figura 23 – Registro gráfico e algébrico: transformação isovolumétrica 153
Figura 24 – Auto e heteroconciliação de metas QP e QE na etapa 1 do contexto 1 162
Figura 25 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro numérico e algébrico ... 165
Figura 26 – Auto e heteroconciliação de metas dos Q_A e Q_B dos estudantes A e B 166
Figura 27 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo C: Evidências em registro tabular e gráfico 168
Figura 28 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo D: Evidências em registro numérico 169
Figura 29 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro gráfico 1 170
Figura 30 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro gráfico 2 172

Figura 31 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro algébrico 172
Figura 32 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo A: Resolução do exercício (b)............................... 173
Figura 33 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo B: Resolução do exercício (a) e (b)........................ 174
Figura 34 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo C: Resolução do exercício (a) 175
Figura 35 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo D: Resolução do exercício (a)............................... 175
Figura 36 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo D: Resolução do exercício (b)............................... 176
Figura 37 – Contexto 2, Etapa 1: Resposta do grupo C 180
Figura 38 – Simulador *Propriedade dos Gases* 181
Figura 39 – Contexto 2, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro gráfico.......................... 183
Figura 40 – Contexto 2, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro algébrico 183
Figura 41 – Contexto 2, Etapa 2, Grupo C: Evidências em registro algébrico 184
Figura 42 – Contexto 3, Etapa 1: Resposta do grupo C 186
Figura 43 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo A: Dados registrados em registro numérico........... 187
Figura 44 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo A: Evidências em diferentes registros.................... 187
Figura 45 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro algébrico e numérico ... 188
Figura 46 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo C: Evidências em registro numérico e algébrico.... 189
Figura 47 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo D: Evidências em diferentes registros.................... 190
Figura 48 – Auto e heteroconciliação em atividades de modelagem matemática.................. 191
Figura 49 – Dados registrados pelo grupo B na etapa 2 do contexto 1 198
Figura 50 – Esquema de modelagem matemática 202
Figura 51 – Auto e heteroconciliação em atividades de modelagem matemática.................. 210

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Classificação de registros de representação..29
Quadro 2 – Tipos e funções de representações..32
Quadro 3 – Registros de representação semiótica relacionados às transformações gasosas....36
Quadro 4 – Conversão de enunciados em língua natural para o registro algébrico 41
Quadro 5 – Definições de modelo matemático 49
Quadro 6 – Possibilidades de modelos para uma transformação isobárica:............................50
Quadro 7 – Estruturação do Milieu 81
Quadro 8 – *Milieu*, repertório e símbolos..96
Quadro 9 – Relação entre TSD e Modelagem Matemática 99
Quadro 10 – Níveis de *milieu* em uma situação a-didática 125
Quadro 11 – Possibilidades de representação para o objeto matemático 'função' 130
Quadro 12 – Representação algébrica e gráfica de uma função polinomial de grau 1...........131
Quadro 13 – Classificação de uma função polinomial de grau 1 131
Quadro 14 – Representação algébrica e gráfica de uma função racional do tipo $y = 1xn$ ...131
Quadro 15 – Representação gráfica e algébrica de uma transformação isotérmica 133
Quadro 16 – Representação gráfica e algébrica de uma transformação isobárica 133
Quadro 17 – Representação gráfica e algébrica de uma transformação isovolumétrica 134
Quadro 18 – Registros de representação semiótica: Atividade 1 (possibilidade 1) 149
Quadro 19 – Registros de representação semiótica: Atividade 1 (possibilidade 2) 152
Quadro 20 – Registros de representação semiótica da Atividade 2 (possibilidade 1)...........155
Quadro 21 – Registros de representação semiótica da Atividade 2 (possibilidade 2)...........156
Quadro 22 – Registros de representação semiótica da Atividade 3 157
Quadro 23 – Registros de representação semiótica da Atividade 3 158
Quadro 24 – Contexto 1, Etapa 1: Resposta dos grupos 161
Quadro 25 – Dados registrados pelos grupos na etapa 2 do contexto 1 164
Quadro 26 – Contexto 1, Etapa 2, Grupos A, B e C: Resolução do exercício *c* 177
Quadro 27 – Contexto 1, Etapa 2: Resolução do exercício (d) 178
Quadro 28 – Contexto 2, Etapa 2: Dados registrados pelos grupos 182
Quadro 29 – Contexto 2, Etapa 2, Grupo B: Evidências em diferentes registros 184
Quadro 30 – Contexto 2, Etapa 2, Grupo D: Evidências em diferentes registros 185
Quadro 31 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo B: Evidências em diferentes registros 189

Quadro 32 – Institucionalização contextos 1 e 2 194
Quadro 33 – Modelos matemáticos dos grupos A, B, C e D, contextos 1 e 2 194
Quadro 34 – Institucionalização contexto 3 195
Quadro 35 – Modelos matemáticos dos grupos A, B, C e D, contexto 3 196
Quadro 36 – Relação entre teoria das situações didáticas e modelagem matemática 201

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 16
2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA 27
2.1 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E ENSINO DA MATEMÁTICA 28
2.2 REPRESENTAÇÕES MENTAIS, COMPUTACIONAIS E SEMIÓTICAS 31
2.3 ATIVIDADES COGNITIVAS ASSOCIADAS À *SEMIÓSIS* 34
2.4 CONGRUÊNCIA 40
3 MODELAGEM MATEMÁTICA 44
3.1 MODELO, MODELO MATEMÁTICO E MODELAGEM 45
3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA 51
3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 56
3.4 MODELAGEM, EDUCAÇÃO E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO 59
4 MODELAGEM MATEMÁTICA E TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS 65
4.1 SITUAÇÃO DIDÁTICA E SITUAÇÃO A-DIDÁTICA 67
4.1.1 Contrato didático e devolução 71
4.1.2 Conhecimento, saber e repertório didático 72
4.2 CLASSIFICAÇÃO DA SITUAÇÃO A-DIDÁTICA 75
4.2.1 Ação, formulação e validação 75
4.2.2 Situação de institucionalização 78
4.3 ESTRUTURAÇÃO DO *MILIEU* 81
4.3.1 Análise descendente 82
4.3.2 Análise ascendente da situação do professor 85
4.4 ENGENHARIA DIDÁTICA 88
4.4.1 Análise preliminar 89
4.4.2 Análise *a priori* 90
4.4.3 Experimentação, análise *a posteriori* e validação 91
4.5 ANÁLISE DO RACIOCÍNIO EM TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS 92
4.5.1 Identificação e caracterização do raciocínio 93
4.5.2 Modelo multidimensional para a análise do raciocínio 95
4.6 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E MODELAGEM MATEMÁTICA 97
5 RELEVÂNCIA E CONCILIAÇÃO DE METAS 101
5.1 CONCILIAÇÃO DE METAS 101

5.2 AUTOCONCILIAÇÃO DE METAS 109
5.3 HETEROCONCILIAÇÃO DE METAS 117
5.4 PLANO DE AÇÃO INTENCIONAL 122
6 ANÁLISE DAS EVIDÊNCIAS 128
6.1 ANÁLISE PRELIMINAR 129
6.1.1 Função: definição e representação 129
6.1.2 Transformações gasosas 132
6.1.3 Matemática e Físico-química no Curso de Química 135
6.1.4 Simulador propriedades dos gases 137
6.2 ANÁLISE *A PRIORI* 139
6.2.1 Atividade 1 142
6.2.2 Atividade 2 154
6.2.3 Atividade 3 156
6.3 EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO 158
6.3.1 Contexto 1 – Transformação isovolumétrica 160
6.3.1.1 Etapa 1 160
6.3.1.2 Etapa 2 163
6.3.1 Contexto 2 – Transformação isobárica 179
6.3.1.3 Etapa 1 179
6.3.1.4 Etapa 2 180
6.3.2 Contexto 3 – Transformação isotérmica 186
6.3.2.1 Etapa 1 186
6.3.2.2 Etapa 2 186
6.4 INSTITUCIONALIZAÇÃO 193
6.5 ANÁLISE GLOBAL DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 196
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 203
REFERÊNCIAS 213
APÊNDICE: SITUAÇÃO DIDÁTICA “TRANSFORMAÇÕES GASOSAS” 224
ANEXO A: TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 226
ANEXO B: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 228

1 INTRODUÇÃO

> – Por que $2 + 3 = 3 + 2 = 5$?
> – Porque ambos são iguais a 5 – respondem os alunos sem hesitar.
> – Não, a resposta exata é porque a propriedade comutativa da soma assim o sustenta.
> – A segunda pergunta é: Por que $9 + 2 = 11$?
> Novamente os alunos se apressam a responder:
> – 9 e 1 são 10 e mais 1 é 11.
> – Está errado! – exclama a professora. – A resposta exata é que pela definição de 2, $9 + 2 = 9 + (1 + 1)$.
> Mas porque a propriedade associativa da soma assim o prova, $9 + (1 + 1) = (9 + 1) + 1$.
> Ora, $9 + 1$ é 10 pela definição de 10 e $10 + 1$ é 11 pela definição de 11.
> (KLINE, 1976, p. 15-16).

O diálogo acima, extraído do livro *O fracasso da matemática moderna*, mostra que o currículo proposto pelo movimento *matemática moderna* valorizava mais a memorização de processos do que a compreensão de conceitos. Segundo Kline (1976), durante esse período, os conteúdos do currículo escolar eram justificados como algo a ser útil mais tarde ou mesmo como requisito para entrar no colégio (atual ensino médio), sem dar qualquer ideia de como isso aconteceria.

Para Kline (1976, p. 103), isolar a matemática é despojá-la de sentido. Uma função como $s(t) = 16t^2$ não tem sentido por si mesma. Contudo, ela pode representar fisicamente o movimento de uma bola caindo – s e t representando respectivamente as variáveis distância e tempo – habilitando o estudante a compreender o comportamento dessas variáveis.

Segundo Bicudo (2013, p. 3):

> A linguagem da matemática, em seu desenvolvimento histórico presenciado do final do século XIX aos dias atuais, caminhou em direção a uma exigência rígida de formalização, no sentido em que um teorema é uma sequência em que todos os passos estão explícitos e cada um deles é obtido do passo anterior por regras de inferência, axiomas, linhas anteriores ou definições, como uma prova formal em lógica ou um programa computacional, e, então, para uma linguagem quase formalizada. Esta, mostrando-se como uma sequência de argumentos que indicam, a um interlocutor intencionado a compreendê-los e em avançar em possíveis indicações apontadas por essa sequência, que a demonstração do teorema almejado possa ser colocada na forma de uma prova lógica adequada, no padrão do rigor desejado.

Para Bicudo (1998, apud BICUDO, 2013, p. 3, itálico no original), “a missão do matemático é *definir os conceitos* da teoria e *demonstrar as propriedades* de tais conceitos”. Definir conceitos implica explicá-los com referência a outros conceitos anteriormente definidos, e demonstrar uma propriedade implica usar regras lógicas para argumentar sua validade a partir de propriedades já demonstradas, até que se obtém uma fórmula. Segundo Bicudo (2013), esse modo de proceder separou irremediavelmente a ciência do mundo da experiência mais próxima do homem comum, corroborando com o modo próprio de conceber as ideias platônicas[1]. É justamente essa formalização, estranha ao estudante, que compõe o currículo escolar e gera dificuldades para o ensino e aprendizagem da matemática e a rotulação dessa ciência como uma área difícil[2].

Entre pesquisadores de matemática, é comum ouvir o contra-argumento de que a matemática escolar não é a mesma dos matemáticos. Todavia, dado que essas supostas "matemáticas" não trabalham com objetos, lógica e modos de demonstração distintos, vale conjecturar, acompanhando Bicudo (2013), que a diferença não está na matemática, mas no trabalho didático-pedagógico requerido, destacando aspectos como a realidade dos sujeitos, os processos cognitivos e os objetivos de ensino em jogo.

Para Cardoso e Andrade Filho (apud ANDRADE FILHO, 2013), o objetivo do ensino e aprendizagem da matemática é proporcionar a conceitualização/compreensão dos diferentes objetos matemáticos. Cataneo (2019)[3] propõe que um ensino preocupado com essas demandas deve estabelecer relações entre as dimensões *sintática*, relações formais que interligam os constituintes do registro de representação, *semântica*, sentido e interpretação das sentenças, dos enunciados e dos registros de representação, e *pragmática*, significado individualmente contextualizado. Para a autora, um ensino nesses termos enseja "condições para que o estudante, passando pela dimensão semântica, navegue de modo consciente e consistente da dimensão pragmática para a dimensão sintática e vice-versa" (p. 12).

Se no ensino médio propedêutico essa prática é desejável, no ensino médio integrado ao ensino técnico, dadas as suas especificidades, ela se torna imprescindível. A missão do Instituto Federal de Santa Catarina é a de "promover a inclusão e formar cidadãos, por meio da educação profissional, científica e tecnológica, gerando, difundindo e aplicando conhecimento e inovação, contribuindo para o desenvolvimento socioeconômico e cultural"

---

[1] Fundamentada em Bourbaki (1969), a autora argumenta que algo semelhante ocorreu na Grécia Antiga na passagem de uma *matemática pré-helênica* ou *empírica* bem desenvolvida, onde já era possível observar noções muito abstratas, para uma *matemática propriamente helênica* ou *pura*, quando o critério de verdade desloca-se do "ver e fazer empírico que se mostra correto", para a "demonstração" e a "ligação entre essa verdade e o significado de *ideias*" (BICUDO, 2013, p. 4, itálico no original).

[2] Algo corroborado por enunciados comuns no ambiente escolar tais como "Eu não nasci para a matemática", "Isso não é de Deus", "Onde irei usar isso", entre outros.

[3] Versão de qualificação de tese apresentada ao Curso de Doutorado em Ciências da Linguagem.

(IFSC, 2017, p. 16). Assim, atividades desenvolvidas por unidades curriculares do núcleo propedêutico, entre as quais a matemática, precisam estar articuladas com as da área técnica sempre que possível, como é o caso do curso técnico de nível médio integrado em química (doravante, curso de química). A unidade curricular matemática do curso de química do campus Criciúma, com carga-horária total de 400 horas distribuídas ao longo de três anos, tem com objetivo geral "compreender a Matemática como um conhecimento social historicamente construído e entender a sua importância no desenvolvimento científico e tecnológico, bem como desenvolver sua capacidade de formulação e interpretação de situações matemáticas" (IFSC, 2015, p. 15). Posto isso, os diferentes conceitos matemáticos, na medida do possível, devem ser considerados como modelos para o estudo de vários fenômenos naturais ou sociais.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018, p. 528)[4], em capítulo destinado ao Ensino Médio, destaca que o foco do ensino da matemática é "a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos". O documento considera ainda a necessidade de "estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos" (BRASIL, 2018, p. 529). Para alcançar esses propósitos, ressalta que os estudantes devem desenvolver processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem "mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados" (BRASIL, 2018, p. 529).

O documento estabelece quatro *competências gerais* para o atendimento dessas demandas: raciocinar, representar, comunicar e argumentar.

Sobre o desenvolvimento de competências gerais que envolvem *raciocínio*, a BNCC afirma que é necessário a interação entre o estudante, seus colegas e professores com o objetivo de investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, destacando processos de argumentação matemática.

Sobre competências gerais que envolvem *representação*, o documento considera como diferentes registros de representação semiótica evocam um objeto matemático.

> Nessa área é possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a

[4] A remissão à BNCC (2018) neste estudo não implica sua aceitação integral acrítica.

> compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, **espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática** – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio. (BRASIL, 2018, p. 529, grifos no texto).

Sobre competências gerais que envolvem *comunicação*, o documento ressalta que, após a resolução de problemas matemáticos, é preciso que os estudantes apresentem e justifiquem seus resultados, interpretem os resultados dos colegas e interajam com eles.

> Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua materna, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros. (BRASIL, 2018, p. 530).

Por fim, sobre competências gerais que envolvem *argumentação*, o documento pressupõe, além dos aspectos já citados em relação às competências anteriores, a formulação e a testagem justificada de conjecturas.

Para desenvolver essas competências gerais, a BNCC propõe cinco *competências específicas*, que definirão as habilidades a serem alcançadas no ensino médio:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531).

Em relação a área *Ciências da Natureza e suas Tecnologias* no Ensino Médio, a BNCC estabelece três competências:

> 1. Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.
> 2. Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.
> 3. Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC). (BRASIL, 2018, p. 553).

Considerando as competências acima, o documento estabelece vinte e seis habilidades, dentre as quais destacamos duas relacionadas à competência três:

> (EM13CNT301) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.
> (EM13CNT302) Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental. (BRASIL 2018, p. 559).

Neste estudo, optamos por utilizar a unidade curricular *físico-química* para elaborar e aplicar sequências didáticas envolvendo modelagem matemática, por considerarmos que ela pode contribuir com o desenvolvimento dessas duas habilidades. Apesar de reconhecer que outras unidades curriculares (inclusive de outros cursos) poderiam ser empregadas no presente estudo, a escolha decorre de nossa experiência como docente do curso.

Portanto, considerando a missão do IFSC, os objetivos da unidade curricular matemática no curso de química e as competências gerais e específicas elencadas pela BNCC, propomos a modelagem matemática como alternativa pedagógica pertinente. Em linhas gerais, *modelagem matemática* é uma tendência em educação matemática que procura resolver um problema da realidade mediante a proposição de um modelo semiótico de representação. Como propõem Almeida, Silva e Vertuan (2016), admitimos que a modelagem matemática pode proporcionar no estudante o desenvolvimento da capacidade de ler, interpretar, formular e resolver problemas, o contato com outras ciências, o incentivo à pesquisa, aguçando seu senso investigativo crítico e a compreensão dos diferentes registros de representação semiótica e dos objetos matemáticos.

Assim, *de um ponto de vista didático*, pretendemos habilitar estudantes do curso de química a modelar situações-problema de sua realidade e, para tanto, arbitramos mobilizar questões relacionadas às *transformações gasosas* que compõem a unidade curricular físico-química[5]. Transformações gasosas se relacionam ao estudo do comportamento das variáveis temperatura, pressão e volume de um gás ideal, podendo ser classificadas, entre outras, como isotérmicas, isobáricas e isovolumétricas conforme qual dessas variáveis é mantida constante[6].

A fim de viabilizar relações entre as dimensões sintáticas, semânticas e pragmáticas dos objetos matemáticos pertinentes à modelagem matemática de transformações gasosas isotérmicas, isobáricas e isovolumétricas, julgamos pertinente levar em conta a mobilização de diferentes registros de representações semiótica, assumindo que a mobilização desses diferentes registros viabiliza a conceitualização/compreensão dos respectivos objetos.

A teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval (1993, 1995, 2008, 2009), de forma coerente com a competência geral de *representação* destacada da BNCC (BRASIL, 2018), ressalta o papel das representações semióticas na conceitualização dos objetos matemáticos, dado que eles não podem ser acessados sem a mobilização de representações semióticas. Essa arquitetura teórica propõe três atividades cognitivas essenciais no trabalho com registros de representação semiótica de objetos matemáticos: a *formação de uma representação identificável*, que diz respeito às regras de formação específicas de certo registro de representação semiótica; o *tratamento*, que diz respeito às transformações internas de representações no interior de um registro de representação semiótica; e a *conversão*, que diz respeito às transformações de uma representação em certo registro de partida em outra representação em certo registro de chegada. Em essência, Duval considera que a conceitualização de um objeto matemático ocorre quando o estudante faz uso de pelo menos dois registros de representação semiótica.

Dado que a organização de uma sequência didática envolvendo modelagem matemática e favorecendo a mobilização de registros requer um planejamento que possibilite ao estudante a apreensão do conhecimento, faremos uso da *teoria das situações didáticas* de

---

[5] Essa escolha se deu após análise e avaliação de fatores como currículo escolar, conhecimentos prévios dos estudantes e ferramentas disponíveis para aplicação da atividade na unidade escolar, as quais serão retomadas posteriormente nesse estudo.

[6] Em transformações *isotérmicas* a variável temperatura é constante e as variáveis pressão e volume variam; em transformações *isobáricas*, a variável pressão é constante e as variáveis temperatura e volume variam; em transformações *isovolumétricas*, a variável volume é constante e as variáveis temperatura e pressão variam.

Guy Brousseau (1997, 2008). Essa teoria visa a implementar sequências didáticas, destacando as relações entre professor, estudante e saber em uma situação com finalidade didática. Para o autor, uma situação didática é um dispositivo organizado para possibilitar a aquisição de um determinado saber pelo estudante (BROUSSEAU, 2010)[7]. Nesse esforço, recorre-se prevalentemente à *engenharia didática* (ARTIGUE 1988, 1996), definida como um conjunto sistematizados de experimentações didáticas.

Conforme Artigue (1988, 1996), há quatro fases em engenharia didática: a fase de análise preliminar, a fase de concepção e de análise *a priori*, a fase de experimentação e a fase de análise *a posteriori* e de validação. A análise preliminar se apoia na análise epistemológica dos conteúdos em pauta, na análise das práticas usuais para ensinar determinado objeto matemático e na análise do perfil do estudante. A análise *a priori* define as variáveis sobre as quais o pesquisador irá agir, sendo construídas a partir de hipóteses. A experimentação é o momento onde se executa o dispositivo. A análise *a posteriori* e a validação visa a confrontar os dados coletados no decorrer da experimentação e validar as hipóteses formuladas.

Em síntese, assumimos neste estudo que a aplicação de uma sequência didática, organizada nos termos da engenharia didática e com vistas à modelagem matemática de situações-problema de transformações gasosas isotérmicas, isobáricas e isovolumétricas, pode favorecer o desenvolvimento das competências propostas pela BNCC, pela missão do IFSC e pelo projeto pedagógico do curso de química, e culminar com a conceitualização/compreensão dos objetos matemáticos a serem mobilizados.

Além de organizar uma sequência didática, julgamos importante refletir os processos comunicacionais ostensivo-inferenciais[8,9] envolvidos na modelagem matemática de transformações gasosas, assumindo que esses processos podem ser planejados, descritos e explicados no contexto de planos de ação intencional em direção à conciliação colaborativa de metas.

A *teoria de conciliação de metas* de Rauen (2014) propõe-se a descrever e explicar ações humanas em termos proativos em quatro estágios: projeção de uma meta, e formulação,

---

[7] « les situations didactiques où un actant, un professeur, par exemple, organise un dispositif qui manifeste son intention de modifier ou de faire naître les connaissances d'un autre actant, un élève par exemple et lui permet de s'exprimer en actions » (BROUSSEAU, 2010, p. 2).

[8] Como concebidos em teoria da relevância (SPERBER; WILSON, 1986, 1995, 2001).

[9] O interesse por processos ostensivo-inferenciais surgiu no mestrado. Na ocasião, analisamos processos de conversão de registros em Língua Natural para Linguagem Matemática na resolução de problemas matemáticos (ANDRADE FILHO, 2013). Para dar conta dessa demanda, expusemos o aparato teórico da teoria da relevância (SPERBER; WILSON, 1986, 1995, 2001) e ilustramos seu potencial descritivo e explanatório da resolução de um problema sobre área de trapézio e volume de prisma de uma barra de ouro.

execução e checagem de pelo menos uma hipótese abdutiva antefactual. Nesta arquitetura, assume-se que o indivíduo elege uma meta *Q* no estágio [1], abduz uma hipótese de consecução *PQ* no estágio [2], e executa a ação antecedente *P* no estágio em [3] na expectativa *Q’* de atingir o estado consequente de meta projetado no estágio [4].

Retomando o exemplo, se a meta *Q* de um grupo de estudantes qualquer consiste em determinar o modelo matemático mais adequado para representar o comportamento de transformações gasosas; a emergência abdutiva da hipótese de que esse comportamento poderia ser modelado por uma *função* corresponderia ao segundo estágio; a execução dos cálculos, por sua vez, corresponderia ao terceiro estágio; e a verificação da pertinência ou validação desses cálculos como descrição e explicação do comportamento dessa substância química no tempo, por fim, corresponderia ao quarto estágio. Caso os resultados correspondessem às expectativas geradas na projeção da meta, ocorreria o que Rauen (2014) denomina de *conciliação de metas*[10] e consequente *fortalecimento da hipótese abdutiva antefactual*.

Neste estudo, argumentamos que todas essas etapas são decisivamente orientadas pelo princípio cognitivo de maximização da relevância e, em casos de ações colaborativas, pelo princípio comunicativo de presunção de relevância ótima dos estímulos comunicacionais ostensivos necessários para a projeção, execução e validação do modelo. Em *teoria da relevância* (SPERBER; WILSON, 1986, 1995), relevância é uma inequação na qual efeitos cognitivos positivos de uma informação nova[11] devem compensar os esforços de processamento necessários para obtê-los. Decorre disso que um modelo que promove a conciliação da meta será aquele que, desde sua emergência, passando pela execução e chegando à validação, descreve e explica eficientemente as variáveis em pauta, ou seja, produz suficientes efeitos cognitivos positivos eficazes com justificável esforço de processamento.

Uma vez que esses processos serão decorrentes de negociação coletiva no interior de grupos de estudantes neste estudo, seguindo o princípio comunicativo de relevância segundo o qual os indivíduos presumem que os estímulos comunicacionais ostensivos são otimamente relevantes, os estudantes, como prevê o procedimento de compreensão orientado pela relevância, processarão enunciados em diferentes registros de representação semiótica seguindo uma rota de esforço mínimo, considerando interpretações em ordem de acessibilidade e parando

---

[10] Como veremos adiante, o autor usa o termo *autoconciliação* toda vez que essa conciliação é obtida por um indivíduo isoladamente e *heteroconciliação* toda vez que essa conciliação é obtida coletivamente, como é o caso desse estudo, na medida em que as modelagens serão realizadas em grupo.

[11] Como veremos adiante: fortalecimento de suposições prévias, contradição, enfraquecimento e abandono de suposições prévias, ou geração de inferências, isto é, combinações de informações novas com suposições prévias gerando novas suposições.

quando sua expectativa de relevância é satisfeita. É justamente no domínio desse procedimento de compreensão que entram em cena a decodificação de unidades significativas dos diferentes registros de representação semiótica a serviço de processos inferenciais de tratamento dessas unidades no interior de um mesmo registro e de conversão dessas unidades significativas em unidades significativas pertinentes de outros registros.

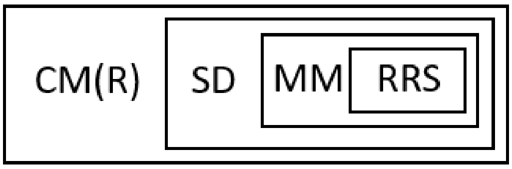
Assim, do *ponto de vista dos estudantes*, lançamos a hipótese de que, em cada grupo de estudantes, essas atividades cognitivas serão moderadas por relações relevantes de custo e benefício cognitivo em direção à conciliação colaborativa (estudantes entre si e estudantes e docente) de submetas em favor da meta coletiva de modelar transformações gasosas.

Do *ponto de vista do docente*, por sua vez, lançamos a hipótese de que essas consecuções estarão a serviço da consecução de uma sequência didática enquanto plano de ação intencional em direção à conciliação colaborativa (estudantes e docente) de habilitar os estudantes a modelar as transformações gasosas em pauta.

Do *ponto de vista do pesquisador*, por fim, lançamos a hipótese de que ambas as consecuções estarão a serviço da consecução do plano de ação intencional de avaliar a pertinência epistemológica e metodológica da arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas para descrever e explicar tanto a modelagem matemática das transformações gasosas como a implementação da sequência didática[12].

Para resumir a combinação de teorias desenvolvida neste estudo, propomos a formulação $\{\mathrm{CM(R)}\{\mathrm{SD}[\mathrm{MM(RRS)}]\}\}$, que pode ser representada pelo seguinte diagrama:

Figura 1 – Representação por diagramas da formulação $\{CM(R)\{TSD[MM(RRS)]\}\}$



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

[12] Esta tese integra a linha de pesquisa “Pragmática Cognitiva e Ensino de Matemática e Ciências” do “Grupo de Pesquisa em Pragmática Cognitiva (GPPC)” do Programa de Pós-Graduação em Ciências da Linguagem. Como os demais trabalhos dessa linha, busca estabelecer uma interface entre ciências da linguagem e ensino de matemática e ciências destacando modos contextualizados de produção de significação. As pesquisas desta linha procuram desenvolver conceitos da teoria de conciliação de metas e da teoria da relevância em conexão com a teoria de registros de representação semiótica. Ver, por exemplo, Andrade Filho (2013), Andrade Filho e Rauen (2017, 2018), Cardoso (2015), Cataneo (2018, 2019), Cataneo e Rauen (2018).

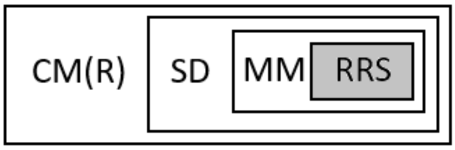
Em síntese, essa formulação representa que um ensino que visa à conceitualização/compreensão de diferentes objetos matemáticos pode valer-se de um plano de ação intencional em direção à conciliação colaborativa relevante de metas fundamentado na teoria de conciliação de metas de Rauen (2014) e teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995) $CM(R)$, enquanto uma sequência didática fundamentada na teoria das situações didáticas de Brousseau (1997, 2008) SD que promova a modelagem matemática MM de transformações gasosas isotérmicas, isobáricas e isovolumétricas como forma de promover a mobilização de diferentes registros de representação semiótica fundamentada na teoria de registros de representação semiótica de Duval (1993, 1995, 2008, 2009) RRS.

Postas essas questões, levando em consideração que (a) a modelagem matemática de determinada situação-problema implica a mobilização de diferentes registros de representação semiótica a partir da compreensão das informações da realidade; (b) o procedimento de compreensão, proposto pela teoria da relevância, possibilita analisar e compreender como ocorrem as atividades cognitivas de formação de representações identificáveis, tratamento e conversão; (c) a teoria de conciliação de metas permite descrever e explicar a formulação e a avaliação de metas e hipóteses em atividades de modelagem matemática; (d) as atividades desenvolvidas no 2° ano do curso técnico de nível médio integrado em química do Instituto Federal de Santa Catarina – campus Criciúma buscam articular os diferentes conceitos matemáticos à conceitos da área técnica, o **objetivo** deste estudo consiste em *analisar a concepção, a execução e os resultados de uma sequência didática concebida como um plano de ação intencional em direção a conciliação colaborativa da meta de estudantes do curso técnico de nível médio integrado em química do IFSC – campus Criciúma – modelarem matematicamente transformações gasosas.*

Especificamente, concebemos três objetivos: (a) elaborar, com base na arquitetura abdutiva-dedutivo da teoria de conciliação de metas, sequências didáticas para a modelagem matemática de transformações gasosas aplicáveis a estudantes do curso técnico de nível médio integrado em química do IFSC – campus Criciúma (dimensão metodológica); (b) analisar, com base na arquitetura abdutiva-dedutivo da teoria de conciliação de metas, processos ostensivo-inferenciais desses estudantes na mobilização de registros de representação semiótica em sequências didáticas envolvendo modelagem matemática de transformações gasosas (dimensão epistemológica); e (c) verificar a pertinência epistemológica e metodológica da arquitetura abdutiva-dedutivo da teoria de conciliação de metas para a descrição e a explicação de processos ostensivo-inferenciais na mobilização de registros de representação semiótica em sequências didáticas envolvendo modelagem matemática de transformações gasosas.

Para dar conta desse objetivo, apresentamos as noções teóricas de registros de representação semiótica (capítulo 2), modelagem matemática em educação matemática (capítulo 3), situações didáticas e engenharia didática (capítulo 4), e relevância e conciliação de metas, incluindo a exposição dos planos de ação intencional do pesquisador e do professor (capítulo 5); desenvolvemos a análise preliminar, a análise *a priori*, a experimentação e análise *a posteriori* e validação do estudo (capítulo 6); e tecemos as considerações finais, elencando resultados, limitações e potencialidades do estudo (capítulo7).

2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA



A Base Nacional Curricular Comum – BNCC (BRASIL, 2018), ao abordar a competência quatro relacionada ao uso de diferentes registros de representação semióticas, estabelece sete habilidades a serem desenvolvidas pelo estudante:

> Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
> Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
> Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
> Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
> Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
> Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise. (BRASIL, 2018, p. 539).

Segundo o documento, quando o estudante consegue utilizar diferentes registros de representação semiótica, compreender as ideias que eles expressam e converter representações semiótica de um registro a outro, ele passa a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar, ou seja, de pensar matematicamente. Além disso, a BNCC ressalta que a análise das representações semióticas utilizadas pelos estudantes durante a resolução de um problema possibilita compreender como eles interpretam as informações e as utilizam nos raciocínios demandados para sua resolução.

Dadas as conexões dessas ideias com a teoria de registros de representações semióticas de Duval (1993, 1995, 2008, 2009), dedicamos esse capítulo a apresentar essa arquitetura teórica. Para dar conta desse objetivo, dividimos o capítulo em quatro seções. Na primeira seção, aproximamos os conceitos de registros de representação semiótica e de ensino da matemática. Na segunda seção, discorremos sobre representações mentais, computacionais e semióticas. Na terceira seção, destacamos as atividades cognitivas de formação de representações identificáveis, tratamento e conversão ligadas a *semiósis*. Por fim, na quarta seção, discutimos questões de não congruência nas atividades cognitivas de conversão. Para ilustrar conceitos dessa arquitetura teórica, apresentaremos alguns exemplos relacionados às transformações gasosas, a serem retomados nas seções 6.1 e 6.2 do capítulo 6.

2.1 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E ENSINO DA MATEMÁTICA

Segundo Duval (1993, 1995, 2008, 2009), a aprendizagem da matemática constitui um campo de estudos privilegiado para analisar atividades cognitivas como conceitualização, raciocínio, resolução de problemas e, até mesmo, compreensão de textos em língua natural.

A linguagem matemática, contudo, é particular a essa ciência. Conforme Biembengut (2016, p. 59), essa linguagem foi sendo gradativamente construída ao longo da trajetória humana, emergindo das necessidades de sobrevivência como um sistema de representação original, permitindo dar ordem ao mundo e formar redes de comunicação.

Essa linguagem é composta por diferentes signos[13], organizados em diferentes *registros de representação semiótica* (RRS) [14], que permitem não somente a comunicação, mas também o acesso e a percepção dos objetos matemáticos[15].

Pode-se dizer que as representações semióticas são

---

[13] Do ponto de vista da semiótica de Peirce (2010, p. 28), um *signo* é tudo aquilo que está relacionado com algo que lhe é segundo, seu *objeto*, com respeito a uma *qualidade*, de modo a trazer à mente algo que lhe é terceiro, seu *interpretante*, que, por sua vez, entra em relação com o objeto, de modo a trazer à mente algo que lhe é quarto e, assim, a*d infinitum*. Para Henriques e Almouloud (2016, p. 468) "um signo é um sinal mobilizado por alguém (sujeito) capaz de permitir-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótico, como as regras linguísticas ou gramaticais na língua materna, as propriedades ou escritas algébricas para o registro algébrico, as figuras geométricas (pontos, segmentos/retas/curvas, planos e superfícies) para o registro gráfico, os números, as operações aritméticas, para o registro numérico e, de um modo geral as regras de conformidade".

[14] No contexto do presente estudo, podemos representar uma transformação gasosa mobilizando, por exemplo, os registros tabular, gráfico ou algébrico.

[15] "Objeto matemático é um conteúdo, um conceito ou um ente matemático, seja real ou imaginário ou de qualquer outro tipo, que usamos para a atividade matemática" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 19).

> produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que têm suas restrições próprias de significado e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que estão inseridas em diferentes sistemas semióticos.[16] (DUVAL, 1993, p. 39).[17]

Henriques e Almouloud (2016, p. 467) definem uma representação semiótica como "uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótico e, de outro lado, pela referência do objeto representado".

Duval (1993, 1995, 2008, 2009) utiliza o termo *registro de representação* para designar os diferentes tipos de representação semiótica utilizados em matemática. Um registro de representação é um sistema semiótico que permite a realização das três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose: formação de uma representação identificável, tratamento e conversão[18].

O autor (2008) classifica os registros de representação utilizados na atividade matemática em quatro grupos, conforme sejam multifuncionais não algorítmicos ou monofuncionais algorítmicos, ou sua representação seja discursiva ou não discursiva.

Quadro 1 – Classificação de registros de representação

	Representação Discursiva	Representação Não Discursiva
Registros Multifuncionais: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: Argumentação a partir de observações, de crenças...; Dedução válida a partir de definição ou teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2, ou 3). Apreensão operatória e não somente perceptiva; Construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: Numéricas (binária, decimal, fracionária...); Algébricas; Simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. Mudança de sistema de coordenadas; Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2008, p. 14).

[16] Exceto quando destacado, as traduções desta tese são nossas.

[17] « des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graph sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents ».

[18] Essas atividades cognitivas serão definidas e desenvolvidas na seção 2.3.

Para Duval (1995), essa diversidade de registros (por exemplo, gráfico, algébrico, tabular ou geométrico) mobilizada para representar certo conceito matemático[19] é primordial ao ensino e à aprendizagem e diretamente ligado ao raciocínio, à visualização e à análise matemática, já que toda comunicação se dá por meio das representações nesta ciência. Assim, considerar diferentes linguagens ou representações semióticas deve fazer parte do currículo escolar, como também sinaliza a BNCC (BRASIL, 2018).

Conforme Damm (2008), símbolos, notações ou mesmo escritas podem representar um objeto ou conceito matemático e, dessa forma, permitir-lhe acesso. Contudo, o que se observa, inclusive em nível superior, é uma confusão entre representação e objeto representado. Para Duval (1995, p. 1), "não se pode ter compreensão em matemática se não distinguimos um objeto e sua representação"[20], tendo em vista que diferentes registros de representação podem representá-lo. E reforça: "é o objeto matemático que importa e não suas diversas representações semióticas possíveis"[21] (1995, p. 2).

Para Duval (1993), portanto, duas condições devem ser atendidas para que uma representação funcione verdadeiramente como representação e dar acesso ao objeto representado: o objeto não apenas ser distinto de sua representação, mas também ser reconhecido em cada uma de suas representações possíveis.

Para Damm (2008), a apropriação do conhecimento matemático está diretamente relacionada com a apropriação de suas representações semióticas. Como os objetos matemáticos nunca são acessados em sua totalidade, a compreensão em matemática se dá na intersecção da *semiósis* – enquanto apreensão ou produção de uma representação semiótica – com a *noésis* – enquanto apreensão conceitual de um objeto, discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência.

Dizer que os objetos matemáticos são acessados exclusivamente por suas representações semióticas implica dizer que em matemática não há *noésis* sem *semiósis*. Em outras palavras, "é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*"[22] (DUVAL, 1995, p. 4, itálico no original). Disso decorre que a *noésis* em matemática não pode ocorrer sem o recurso a uma pluralidade de sistemas semióticos, exigindo-se a coordenação desses diferentes sistemas pelo próprio sujeito.

---

[19] Neste estudo adotaremos o termo conceito matemático como sinônimo de objeto matemático.

[20] « Il ne peut pas y avoir de compréhension en mathématiques si on ne distingue pas un objet de sa représentation ».

[21] « C'est l'objet représenté qui importe et non pas ses diverses représentations sémiotiques possibles ».

[22] « C'est la *sémiosis* qui détermine les conditions de possibilité et d'exercice de la *noésis* ».

> Para que ocorra a apreensão de um objeto matemático, é necessário que a noésis (conceitualização) ocorra através de significativas semiósis (representações). A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que aprende, de vários registros de representação, ou seja, quanto maior for a mobilidade com registros de representações diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto. (DAMM, 2008, p. 177).

No entanto, Duval (1995) observa em diferentes níveis de ensino a persistência da partição em representações que não revelam o mesmo sistema semiótico. Para o autor, a passagem de um sistema de representação a outro, ou mesmo a mobilização simultânea de vários sistemas não tem nada de evidente ou espontâneo para a maior parte dos sujeitos, especialmente entre sistemas menos congruentes[23]. Neste sentido, para compreender melhor a importância das representações na aprendizagem matemática, discorremos sobre representações mentais, computacionais e semióticas na próxima seção.

2.2 REPRESENTAÇÕES MENTAIS, COMPUTACIONAIS E SEMIÓTICAS

Duval (1993, 1995) estabelece três aproximações da noção de representação: as representações mentais, as representações computacionais e as representações semióticas.

As *representações mentais* ou *representações internas* consistem no conjunto de imagens e conceitos que um indivíduo pode ter sobre determinado objeto ou situação e suas possíveis associações. Elas possibilitam uma visão geral do objeto na ausência total de um significante perceptível. Aqui se incluem, além de imagens, crenças, concepções, ideias, noções e até mesmo fantasias. Considerando uma sequência didática envolvendo modelagem matemática, as representações mentais ou internas podem estar associadas às respostas/hipóteses/suposições do estudante durante a realização de atividade.

As *representações computacionais* são internas e não conscientes, não requerendo a visão do objeto. Elas viabilizam a execução de certas tarefas sem análise de todos os passos utilizados para realizá-las. Esse tipo de representação traduz informações externas a um sistema, de forma a recuperá-las e combiná-las no interior do sistema. Conforme Duval (1995, p. 16,

[23] Definimos e discutimos critérios de congruência na seção 2.4.

negrito no original), "a noção de representação se torna então essencial como uma **forma** como uma informação pode ser descrita e tomada em conta num sistema de tratamento"[24].

A *representação semiótica* é externa e consciente ao sujeito, relacionando-se com um sistema particular de signos. Essas representações, constituídas por diferentes signos, apresentam regras próprias de significação e funcionamento, associando de diferentes modos formas representantes e conteúdos representados. Para Duval (1995, p. 17), a especificidade destas representações consiste no fato de que elas são relativas a um sistema particular de signos e podem ser convertidas em representações equivalentes em um outro sistema semiótico, ou seja, elas possibilitam "mudar a forma pela qual um conhecimento é representado"[25].

As representações mentais, computacionais e semióticas são diferenciadas por suas funções. As representações mentais realizam função de objetivação; as representações computacionais realizam função de tratamento automático ou quase automático (por exemplo, o estudante pode conhecer toda a tabuada, sem compreender o seu significado e funcionamento); e as representações semióticas realizam, indissociavelmente, funções de objetivação, de expressão e, de certa forma, de tratamento.

O quadro a seguir apresenta os tipos e funções de representações.

Quadro 2 – Tipos e funções de representações

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	**Mental** Função de objetivação	**Semiótica** Função de objetivação Função de expressão Função de tratamento intencional
NÃO CONSCIENTE	**Computacional** Função de tratamento automático ou quase automático	

Fonte: Duval (1995, p. 27, tradução própria).

Nesse quadro, Duval (1995, p. 24-25) opera com duas oposições: a oposição *consciente* e *não consciente* e a oposição *externa* e *interna*. A primeira oposição é aquela que distingue "o que aparece ao sujeito e que ele observa por um lado e o que lhe escapa completamente e que ele não pode observar por outro lado"[26]. A segunda oposição é aquela

[24] « La notion de représentation devient alors essentielle en tant que **forme** sous laquelle une information peut être décrite et prise en compte dans un système de traitement ».

[25] « Changer la forme par laquelle une connaissance est représentée ».

[26] « Ce qui apparaît à un sujet et qu'il remarque d'une part, et, ce qui lui échappe complètement et qu'il ne peut pas remarquer d'autre part ».

entre “aquilo que de um indivíduo, de um organismo ou de um sistema é diretamente visível e observável e aquilo que, ao contrário, não o é”[27].

Para Duval (1995), esta oposição permite concluir que toda representação dita externa é produzida como tal por um sujeito ou por um sistema e que a produção de uma representação externa só pode ser efetuada por meio de um sistema semiótico. Assim, as representações semióticas são representações externas. Elas preenchem a função de comunicação e, do ponto de vista cognitivo, as funções de objetivação e de tratamento, sendo acessíveis a todos que aprendam o sistema semiótico utilizado.

A *função de objetivação* permite a transição do não consciente para o consciente. Para ver como isso ocorre, considere uma atividade que demanda do estudante escrever algebricamente a lei de uma função fornecida inicialmente em língua natural. Para obter êxito nessa atividade, o estudante pode construir uma tabela, destacando a relação entre as variáveis. Essa conversão/mudança é a função de objetivação que ocorre no funcionamento cognitivo consciente, que poderá ocorrer de dois modos. O *modo interno* ocorre mentalmente por meio da função de objetivação; o *modo externo* ocorre por meio das funções de objetivação, expressão e tratamento intencional, ou seja, por meio das representações semióticas.

O *funcionamento cognitivo não consciente*, por sua vez, dá-se somente pelo modo interno, que ocorre computacionalmente por meio de um tratamento quase instantâneo. Este funcionamento acontece na elaboração das primeiras hipóteses que possibilitam a resolução da atividade. Assim, o funcionamento cognitivo não consciente ocorre quando se decide, por exemplo, construir uma tabela para verificar uma generalização matemática, o que pode permitir que ele expresse a lei da função por meio de uma fórmula matemática[28].

Segundo Duval, é impossível efetuar os tratamentos matemáticos sem recorrer a um sistema semiótico de representação, e procedimentos e respectivos custos cognitivos dependerão do registro de representação escolhido[29]. Desta forma, os diferentes registros de representação semiótica são importantes por duas razões fundamentais:

> Primeiramente, há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático [...] dependem do sistema de representação utilizado. [...] A seguir, há o fato de que os

---

[27] « Ce qui d’un individu, d’un organisme, ou d’un système, est directement visible et observable et ce qui, au contraire, ne l’est pas ».

[28] Como argumentaremos mais adiante, uma hipótese abdutiva antefactual.

[29] Como argumentaremos mais adiante, redundando em diferentes graus de relevância cognitiva.

> objetos matemáticos, [...] não são diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. (DUVAL, 2008, p. 13-14, colchetes nossos).

Distinguidas as noções de representações mentais, computacionais e semióticas, discorreremos na próxima seção sobre as atividades cognitivas fundamentais de representação associadas à *semiósis*: formação de uma representação identificável, tratamento e conversão.

2.3 ATIVIDADES COGNITIVAS ASSOCIADAS À *SEMIÓSIS*

Duval (1993, 1995, 2008, 2009) considera que a compreensão em matemática está vinculada aos diferentes registros de representações semióticas. Para o autor, três fenômenos estão estritamente relacionados quando se pretende analisar o desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas representações fundamentais relativas ao raciocínio, à análise, à compreensão e à aquisição de tratamentos e registros específicos da matemática. Quando um indivíduo consegue atender a todas estas condições, é possível dizer que ele é capaz de diferenciar o conteúdo matemático de sua representação. São elas:

a) a *diversificação* dos registros de representação semiótica, que se relaciona às especificidades dos diferentes registros de representação;
b) a *diferenciação* entre representante (forma) e representado (conteúdo) da representação semiótica, que se relaciona à capacidade de compreender o que determinado registro representa e, ainda, à possibilidade de associá-lo a outros registros, integrando-os aos procedimentos de tratamento;
c) a *coordenação* entre diferentes registros de representação semiótica disponíveis, que exige o preenchimento de duas condições: a utilização de dois registros diferentes para representar uma mesma situação e a conversão "espontânea" de um registro a outro.

Conforme Duval (1993, 1995), a *semiósis* é inseparável de uma variedade de sistemas semióticos passíveis de serem colocados em correspondência. Desta forma, os sistemas semióticos devem cumprir três atividades cognitivas, que são inerentes a qualquer representação:

> Constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificados como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações em outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas aquilo que é representado. (DUVAL, 1995, p. 20-21)[30].

O autor (2008, p. 14) considera que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação ao mesmo tempo” ou então “na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”[31]. Para tanto, as atividades cognitivas de formação de uma representação identificável, de tratamento e de conversão são indispensáveis ao processo de ensino e aprendizagem da matemática:

a) A *formação de uma representação identificável* consiste na mobilização de um ou vários signos para chamar a atenção para um objeto, estando relacionada às unidades e às regras de formação específicas de determinado registro de representação, seja para “exprimir”, seja para “evocar” um objeto real, viabilizando a atividade de tratamento neste registro;
b) O *tratamento* consiste nas transformações efetuadas em um objeto matemático dentro de um mesmo registro de representação;
c) A *conversão*, por fim, consiste nas transformações que permitem representar um mesmo objeto matemático em diferentes registros de representações.

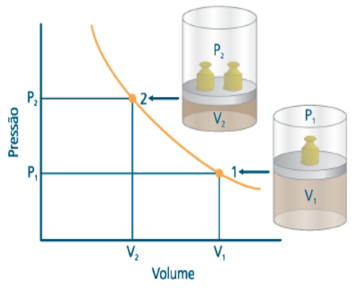
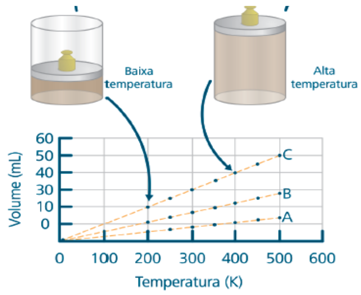
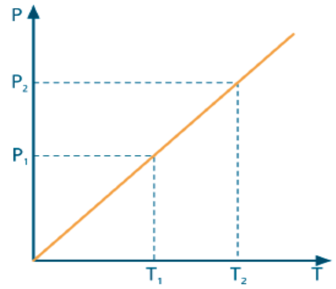
Para melhor compreensão dessas atividades cognitivas, consideremos o quadro 3 a seguir. Nesse quadro, apresentamos possibilidades de registros de representação semiótica para as transformações gasosas isotérmicas – nas quais as variáveis pressão e volume são grandezas inversamente proporcionais, isobáricas – nas quais as variáveis volume e temperatura são grandezas diretamente proporcionais e isovolumétrica – nas quais as variáveis pressão e temperatura são grandezas diretamente proporcionais.

---

[30] « Constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient indentifiables comme *une représentation de quelque chose* dans un système déterminé. Ensuite, transformer les représentations par les seules règles propres au système de façon à obtenir d’autres représentations pouvant constituer un apport de connaissance par rapport aux représentations initiales. Enfin, convertir les représentations produites dans un système en représentations d’un autre système, de telle façon que ces dernières permettent d’expliciter d’autres significations relatives à ce qui est représenté ».

[31] O autor reconhece que determinado registro pode estar explicitamente privilegiado na resolução de um problema ou em certos domínios ou as fases da pesquisa, mas considera que deve sempre existir a possibilidade de passar de um registro ao outro.

Quadro 3 – Registros de representação semiótica relacionados às transformações gasosas

<table>
<tr><th>Transformação isotérmica</th><th>Transformação isobárica</th><th>Transformação isovolumétrica</th></tr>
<tr><td>Registro algébrico:
$p \times V = k \rightarrow p_1 \times V_1 = p_2 \times V_2$</td><td>Registro algébrico:
$\frac{V}{T} = k \rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$</td><td>Registro algébrico:
$\frac{p}{T} = k \rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$</td></tr>
<tr><td>Registro gráfico:

</td><td>Registro gráfico:

</td><td>Registro gráfico:

</td></tr>
</table>

Fonte: O autor, fundamento em Souza (2016, p. 24).

Como se pode observar no quadro acima, são mobilizados dois registros de representação, o algébrico e o gráfico, cada qual com regras de formação específicas. Por exemplo, o eixo horizontal deve representar a variável independente e o eixo vertical a variável dependente no registro gráfico. Na segunda linha do quadro apresentamos duas possibilidades de representação para o registro algébrico. A primeira, destacando a característica de cada uma das transformações, onde o produto (ou a razão) entre as variáveis deve ser constante (k). Já a segunda ressalta a característica da propriedade anterior, ou seja, o produto (ou a razão) deve ser igual para cada par ordenado da transformação. Essa mudança, representada por '→', caracteriza o que Duval denominou de *tratamento*. Por fim, na terceira linha do quadro, apresentamos a representação de cada transformação no registro gráfico. A transformação da representação dada no registro algébrico para o gráfico (ou vice-versa), exemplifica o que Duval chama de *conversão*.

Para Duval (1995, p. 37), a atividade cognitiva de formação de uma representação identificável "é o recurso de um (ou mais) signos(s) para atualizar a percepção de um objeto ou para substituir a percepção deste objeto"[32]. Essa formação implica obrigatoriamente uma seleção no conjunto de caracteres e de determinações do que se deseja representar, devendo respeitar regras específicas do sistema, seja por razões de comunicação, seja para viabilizar o tratamento oferecido pelo sistema semiótico empregado (DUVAL, 1993, 1995).

Desta forma, o conjunto de regras que permite o reconhecimento das representações como representações num determinado registro é denominado *regras de conformidade*. Em

[32] « Est le recours à un (ou à plusieurs) signe(s) pour actualiser la visée d'un objet ou pour se substituer à la visée de cet objet ».

linhas gerais, as regras de conformidade determinam os tipos de unidades constitutivas de todas as representações possíveis em um registro, versando sobre:

> - A determinação (estritamente limitada, ou ao contrário, aberta) de unidades elementares (funcionalmente homogêneas ou heterogêneas...): símbolos, vocabulário...
> - As combinações admissíveis de unidades elementares para formar unidades de nível superior: regras de formação para um sistema formal, gramática para linguagens naturais...
> - As condições para que uma representação de ordem superior seja uma produção relevante e completa: regras canônicas própria a um gênero literário ou um tipo de produção em um registro. (DUVAL, 1995, p. 38)[33].

Parafraseando Duval (1995), essas regras definem um sistema de representação e, consequentemente, os tipos de unidades constitutivas possíveis em determinado registro. Na modelagem matemática, o reconhecimento dessas regras é fundamental, pois elas possibilitam ao estudante representar a situação matematicamente. Por exemplo, considere uma atividade de cinética química sobre adsorção. Geralmente, esse fenômeno é representado por uma curva do tipo $y = C_0 \cdot a^{\pm kt}$. Assim, por exemplo, o estudante deve compreender que o coeficiente 'C_0' representa a concentração inicial, que o sinal '$+$' em 'k' representa aumento da concentração e '$-$', consequentemente, um decaimento da concentração. No exemplo acima, são justamente essas regras que permitem inferir que o produto $p_1 \times V_1 = p_2 \times V_2$ gera uma hipérbole e que os produtos $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ e $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ geram uma reta no registro gráfico.

A atividade cognitiva de tratamento, segundo Duval (1995), está diretamente associada à propriedade fundamental de toda representação semiótica: a possibilidade se ser transformada em outra representação. Para o autor, há tratamento "quando a transformação produz uma outra representação no mesmo registro" (p. 36)[34], ou seja, quando a transformação é interna ao registro, gerando expansão informacional.

Para Damm (2008), os tratamentos matemáticos se relacionam à forma e não ao conteúdo do objeto matemático. Por exemplo, podemos citar a adição de dois números

---

[33] - La détermination (strictement limitée, ou au contraire ouverte) d'unités élementaires (fonctionnellement homogènes ou hétérogènes...) : symboles, vocabulaire...

- Les combinaisons admissibles d'unités élémentaires pour former des unités de niveau supérieur : règles de formation pour un système formel, grammaire pour les langues naturelles...

- Les conditions pour qu'une représentation d'ordre supérieur soit une production pertinente et complète : règles canoniques propres à un genre littéraire ou à un type de production dans un registre.

[34] « Lorsque la transformation produit une autre représentation dans le même registre ».

racionais. Observe-se que é preciso recorrer a diferentes formas de tratamento quando essa adição é representada pelo registro numérico decimal ou fracionário.

> a) 0,25 + 0,25 = 0,5 (representação decimal, envolvendo um tratamento decimal);
> b) ¼ + ¼ = ½ (representação fracionária, envolvendo um tratamento fracionário).
> Ou seja, duas representações diferentes envolvendo tratamentos completamente diferentes para o mesmo objeto matemático. Esses dois registros de representação possuem graus de dificuldades diferentes (custo cognitivo diferente) para quem aprende, e este é um dos problemas que educador precisa enfrentar na hora de ensinar, tendo presente que trabalha sempre o mesmo objeto matemático [...], porém, o registro de representação utilizado exige tratamento muito diferente, que precisa ser entendido, construído e estabelecidas relações para o seu uso. (DAMM, 2008, p. 180, colchetes nossos).

A atividade cognitiva de conversão é uma transformação externa em relação ao registro de partida e, assim como a atividade de tratamento, está relacionada à propriedade de transformação de uma representação em outra. Duval (1995, p. 40) define a atividade de conversão como "a transformação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada em um registro em uma representação deste mesmo objeto, desta mesma situação ou da mesma informação em outro registro"[35]. Assim, a atividade cognitiva de conversão consiste na transformação de um objeto matemático representado em determinado registro em uma representação em outro registro diferente do inicial.

A conversão permite a explicação e/ou visualização de diferentes aspectos ou propriedades do objeto. Isso ocorre porque diferentes representações de um mesmo objeto não apresentam o mesmo conteúdo. Consequentemente, a conversão se torna essencial ao processo de ensino e aprendizagem, de tal modo que converter um objeto matemático implica muito mais do que uma mudança de tratamento.

Para Duval (1993, 1995), a necessidade da coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica[36] no processo de ensino e aprendizagem se justifica por três argumentos: o argumento dos custos de tratamento e do funcionamento de cada registro, o argumento das limitações específicas de cada registro, e o argumento da conceitualização implicando uma coordenação de registros de representação. Em relação ao *custo de tratamento*, Duval destaca que determinados registros permitem efetuar os tratamentos de forma mais econômica e possante que outros. As *limitações específicas de cada registro* sugerem sua

[35] « La transformation d'un objet, d'une situation ou d'une information donnée dans un registre en une représentation de ce même objet, de cette même situation ou de la même information dans une autre registre ».

[36] "A coordenação é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos" (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 470).

complementaridade. Essa complementaridade é necessária, na medida em que cada registro representa uma visão parcial do objeto representado. Assim, cada um dos registros apresenta uma especificidade que, quando percebida, torna-se um caminho para a compreensão do objeto matemático como um todo. A *coordenação entre registros*, por sua vez, é a chave para compreensão dos diferentes objetos matemáticos.

Posto isso, a atividade conceitual não pode ocorrer de forma isolada da atividade semiótica, já que ela se relaciona à descoberta de uma invariância de representações semioticamente heterogêneas (DUVAL, 1995). Logo, a atividade cognitiva de conversão possibilita ao estudante visualizar diferentes aspectos de determinado objeto e compreendê-lo.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 538),

> para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário.

Contudo, a conversão não ocorre de forma natural. Tal dificuldade se dá por dois motivos: inicialmente porque os estudantes podem não reconhecer um mesmo objeto em diferentes registros de representações; e ainda porque esta transformação enfrenta o fenômeno de não congruência (DUVAL, 2008, p. 15).

> A extensão das dificuldades que a operação de conversão suscita coloca não apenas a questão geral do papel da semiósis no funcionamento do pensamento, mas também a das condições de uma diferenciação entre representante e representado nas representações semióticas. (DUVAL, 1995, p. 19)[37].

Definidas as atividades cognitivas de formação de uma representação identificável, tratamento e conversão, apresentamos na próxima seção o fenômeno da não congruência.

---

[37] « L'ampleur des difficultés que l'opération de conversion suscite pose non seulement la question générale du rôle de la sémiosis dans le fonctionnement de la pensée mais aussi celle des conditions d'une différenciation entre représentant et représenté, dans les représentations sémiotiques ».

2.4 CONGRUÊNCIA

Duval (1995), ao discorrer sobre os problemas específicos à atividade cognitiva de conversão, destaca que ela ocorre quando as unidades elementares de cada um dos registros são postas em correspondência, podendo ser congruentes ou não. O autor estabelece três critérios para descrever a congruência entre dois registros de representação semiótica.

> O primeiro é a possibilidade de uma correspondência ‘semântica’ dos elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma representação, pode-se associar uma unidade significante elementar.
> O segundo critério é a univocidade ‘semântica’ terminal: cada unidade significante elementar da representação de partida corresponde somente uma unidade significante elementar do registro de chegada.
> O terceiro critério é relativo à organização das unidades significantes: as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender as unidades as unidades em correspondência semântica segundo a mesma ordem nas duas representações[38].

Portanto, para analisar a congruência de uma conversão segundo os critérios estabelecidos por Duval (1995), é necessário segmentar as unidades significativas do registro de partida e colocá-las em correspondência com as unidades significativas do registro de chegada. Feita esta segmentação e efetuadas as respectivas correspondências, deve-se analisar a relação entre as unidades significativas de ambos os registros.

Consideremos os exemplos de Duval (1995, p. 45-46), conforme adaptados em Andrade Filho e Rauen (2018, p. 531) no quadro 4.

---

[38] Le premier est la possibilité d’une correspondance ‘sémantique’ des éléments signifiants : à chaque unité signifiante simple de l’une des représentations, on peut associer une unité signifiante élémentaire.

Le second critère est l’univocité ‘sémantique’ terminale : à chaque unité signifiante élémentaire de la représentation de départ, il ne correspond qu’une seule unité signifiante élémentaire dans le registre de la représentation d’arrivée.

Le troisième critère est relatif à l’organisation des unités signifiantes. Les organisations respectives des unités signifiantes des deux représentations comparées conduit à y appréhender les unités en correspondance sémantique selon le même ordre dans les deux représentations.

Quadro 4 – Conversão de enunciados em língua natural para o registro algébrico

Registro de partida	Registro de chegada
Registro em Língua Natural	Registro Algébrico
O conjunto dos pontos cuja *ordenada*$_i$ é *superior*$_j$ à *abscissa*$_k$	$y_i >_j x_k$
O conjunto dos pontos que têm uma *abscissa*$_i$ *positiva*$_j$	$x_i >_j 0_j$
O conjunto dos pontos que têm *abscissa*$_i$ e *ordenada*$_j$ de *mesmo sinal*$_k$	$x_i \times_k y_j >_k 0_k$

Fonte: Andrade Filho e Rauen (2018, p. 531).

Conforme Duval (1995), uma correspondência termo a termo (unidade significante simples) é suficiente para comparar unidades significativas nos registros de partida e de chegada no enunciado (a): a unidade significativa ‘ordenada’ equivale à unidade significativa ‘y’; a unidade significativa ‘superior’ equivale à unidade significativa ‘$>$’; a unidade significativa ‘abscissa’ equivale à unidade significativa ‘x’. Mesmo se realizarmos a conversão inversa, é possível obter novamente o registro de partida: ‘$y > x$’ corresponde a ‘ordenada maior/superior a abscissa’. Para o autor, a conversão (a) atende aos critérios de correspondência semântica, de univocidade semântica terminal e de organização sintática das unidades significantes entre um registro de representação de partida e um registro de representação de chegada que permitem classificá-la como congruente.

Para que seja possível efetuar a conversão solicitada no enunciado (b), é necessário combinar unidades significativas simples no registro de chegada para veicular uma informação expressa por uma única unidade no registro de partida. Se a unidade significativa ‘abscissa’ corresponde à unidade significativa ‘x’, isso não acontece com a unidade significativa ‘positiva’, que corresponde a duas unidades significativas no registro de chegada, a saber ‘$>$’ e ‘0’. Ao realizar a conversão inversa, podemos obter duas versões em língua natural, tal que ‘$x > 0$’ pode corresponder a ‘abscissa maior que zero’ ou a ‘abscissa positiva’. Postas essas questões, Duval (2009) conclui que esta conversão não atende ao primeiro critério, tratando-se de uma conversão não congruente.

No enunciado (c), a unidade significativa ‘ordenada’ equivale à unidade significativa ‘y’, a unidade significativa ‘abscissa’ equivale à unidade significativa ‘x’, e a unidade significativa ‘mesmo sinal’ equivale à unidade significativa ‘> 0’. Neste terceiro exemplo, além de não haver uma correspondência termo a termo, é preciso reorganizar o registro de partida para se obter correspondências no registro de chegada. A conversão inversa pode redundar em interpretação que não corresponde ao enunciado original em língua natural, uma vez que ‘$xy > 0$’ pode ser convertido por ‘o produto da abscissa pela ordenada é positivo’ e não 'o produto dos pontos que têm abcissa e ordenada de mesmo sinal'. Dessa maneira, conforme Duval (2009), esta conversão também deve ser classificada como não congruente.

Como podemos observar nesses exemplos, todas as coordenações entre os registros de representação semiótica em língua natural e algébrico demandaram inferências cognitivas, notadamente quando levamos em consideração a heterogeneidade dos sentidos da conversão[39]. No primeiro exemplo, as inferências foram simples em função da correspondência semântica, da univocidade semântica terminal e da organização sintática das unidades significantes dos registros de partida e de chegada (a rigor, próximas de processos de decodificação e recodificação). Nos dois últimos exemplos, há um acréscimo de custos de processamento justamente porque esses critérios não podem ser garantidos. Posto isso, pode-se argumentar que há uma relação inversamente proporcional entre níveis de congruência e custos de processamento. Parafraseando Duval (1988, p. 13), quanto menor a semelhança cognitiva, maior é o custo de processamento da conversão e a probabilidade de ela não ser compreendida ou efetuada pelos indivíduos.

Para Andrade Filho e Rauen (2018, p. 536),

> a noção de congruência entre registros de representação semiótica pode ser mais bem compreendida em termos de grau, de tal sorte que conversões podem ser mais ou menos congruentes conforme o conjunto de inferências requerido pela tarefa, pelos registros de representação em pauta, pelo sentido da conversão, pelo nível de explicitação da formalização requerido e pelo domínio de regras de formação envolvidas.

Assim, somente depois de dominar cada registro de representação que o estudante pode converter com eficiência. Com isso, ele poderá escolher o registro ótimo que ofereça um menor esforço de processamento e gere um maior efeito cognitivo na realização dos tratamentos e conversões necessários. Retomando o quadro 3, percebe-se que transformações isotérmicas apresentam menor nível de congruência do que transformações isobáricas e isovolumétricas. Ao converter o registro gráfico para o algébrico o estudante pode, por exemplo, representar a transformação por segmentos de retas e não por uma hipérbole.

Se considerarmos uma atividade de modelagem matemática, é justamente a mobilização de diferentes registros de representação que possibilitará ao estudante a construção

[39] Duval argumenta que "nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada" (2008, p. 20). Esta dificuldade se dá porque as regras de conversão diferem quando alteramos o sentido em que ela é efetuada. Para Duval o fenômeno da heterogeneidade geralmente não é considerado no ensino, pois se considera que o treinamento efetuado num certo sentido implicaria o domínio do sentido oposto.

de um modelo adequado. Assim, o próximo capítulo é dedicado a modelagem matemática no âmbito da educação matemática.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 535-536), ao abordar a competência três, relacionada à interpretação e à construção de modelos, bem como à resolução e à formulação de problemas matemáticos envolvendo diferentes noções e conceitos, define dezesseis habilidades a serem desenvolvidas pelo estudante. Entre essas habilidades destacamos:

> Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
> Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
> Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
> Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
> Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
> Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

O documento ressalta que é importante contemplar contextos diversos, sejam relativos à própria Matemática, sejam oriundos do desenvolvimento tecnológico, sejam relacionados às outras áreas do conhecimento, justificando assim nossa escolha em organizar uma sequência didática no contexto da físico-química.

Em relação a resolução de problemas, segundo a BNCC, os estudantes podem identificar conceitos e procedimentos necessários ou que possam ser utilizados na formulação matemática do problema num primeiro momento e, posteriormente, aplicá-los e validar os resultados obtidos. É importante ainda comunicar a solução aos colegas utilizando argumentação consistente e linguagem adequada.

Contudo, de acordo com a BNCC, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes, porque é possível que o estudante se depare com três tipos de problemas:

a) aqueles onde a tarefa está explicita e deve-se apenas aplicar de imediato um determinado conceito ou procedimento;
b) aqueles onde, apesar de a tarefa estar explícita, deve-se fazer adaptações antes de aplicar conceitos e procedimentos, demandando esforço de interpretação;
c) aqueles onde as tarefas não estão explícitas. Nesse contexto, devem-se mobilizar conhecimentos e habilidades, a fim de identificar conceitos e conceber a resolução. Em alguns casos, é necessário identificar ou construir um modelo para que respostas adequadas possam ser obtidas.

Sobre a competência cinco, que define habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, a BNCC (BRASIL, 2018) ressalta a importância de o estudante, ao formular conjecturas com base em suas investigações, apresentar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com *argumentos empíricos*, mas deve considerar *argumentos formais*, incluindo a demonstração de algumas proposições.

Assim, neste capítulo, refletimos sobre algumas concepções de modelagem matemática no contexto da educação matemática por entenderemos que ela favorece o desenvolvimento das competências elencadas acima e contribui com as competências e habilidades da área de Ciências da Natureza e suas tecnologias. Para dar conta dessa demanda, dividimos o capítulo em quatro seções. Na primeira seção, definimos modelo, modelo matemático e modelagem. Na segunda seção, definimos modelagem matemática. Na terceira seção, discutimos sobre modelagem matemática no contexto da educação matemática. Na quarta seção, por fim, apresentamos alguns estudos que relacionam modelagem matemática e registros de representações semiótica.

3.1 MODELO, MODELO MATEMÁTICO E MODELAGEM

A palavra ‘modelo’, mesmo entre pesquisadores de educação matemática, pode apresentar diferentes significados. Para responder o que é um modelo matemático, qual(is) deve(m) ser sua(s) característica(s) e qual(is) sua(s) finalidade(s), resgatamos algumas definições, compreendendo-as no contexto da educação matemática.

Etimologicamente, a palavra ‘modelo’, do latim *modulus*, do francês *modelle* e do italiano *modelo*, está relacionada a ideia de semelhança à escala, pequena medida ou padrão[40]. Segue dessa primeira abordagem que um modelo deve garantir semelhança com aquilo que é modelado, apresentando um padrão, uma pequena medida.

De acordo com a *Internet Encyclopedia of Philosophy* IEP[41], a palavra ‘modelo’ é ambígua e não há uma terminologia uniforme adotada por cientistas e filósofos. Na definição apresentada pela IEP, “um modelo é considerado uma representação de algum objeto, comportamento ou sistema que se deseja entender”[42]. Jeffrey Koperski, autor do verbete, destaca que os modelos mais familiares são os físicos e os matemáticos. Os modelos físicos (réplica de uma ponte, por exemplo) são utilizados por apresentarem analogias com os objetos modelados. Além desses, há as representações abstratas. Modelos matemáticos, embora nem sempre considerados legítimos pelos filósofos, consistem em conjuntos de equações.

O conceito dicionarizado de ‘modelo’ revela a profusão de acepções[43]:

> 1 Objeto que se destina a ser reproduzido por imitação. 2 V maquete, acepção 1. 3 ART PLÁST V modelo-vivo. 4 ESCULT Figura feita em argila, cera ou gesso, que posteriormente será reproduzida em bronze, mármore ou pedra. 5 Desenho em papel pelo qual se corta algo; molde. 6 Fôrma oca de metal, usada em fundição, que permite a reprodução de determinada peça; molde. 7 Réplica tridimensional de algo, de tamanho natural, ampliada ou reduzida, usada como recurso didático, como o corpo humano ou suas partes isoladas. 8 Protótipo de algo que se destina à produção industrial em série. 9 Cada uma das variedades de um determinado produto, como carro, geladeira, televisão etc. 10 Peça de vestuário criada por um estilista. 11 Coisa ou pessoa que serve de exemplo ou padrão a ser imitado; standard. 12 Impresso usado em empresas, bancos etc., com lacunas a serem preenchidas pelo interessado para fazer pedidos, prestar declarações etc.; formulário. 13 Indivíduo considerado o representante típico de sua categoria. 14 FÍS Esquema de representação de um fenômeno ou conjunto de fenômenos físicos e eventualmente a previsão de novos fenômenos, tendo-se como base um determinado número de leis físicas.

Entre as definições dicionarizadas apresentadas, duas nos fazem refletir sobre as características de um modelo: ‘desenho em papel, pelo qual se corta algo’ e ‘esquema de

[40] “Likeness made to scale; architect’s set of designs,” from Middle French modelle (16c., Modern French modèle), from Italian modello “a model, mold,” from Vulgar Latin *modellus, from Latin modulus “a small measure, standard,” diminutive of modus “manner, measure”. Disponível em: https://bit.ly/2gLkAqt. Acesso em: 5 abr. 2018.

[41] Disponível em: http://www.iep.utm.edu/models/. Acesso em: 5 abr. 2018.

[42] “A model is considered to be a representation of some object, behavior, or system that one wants to understand”.

[43] Disponível em: http://michaelis.uol.com.br/. Acesso em: 5 abr. 2018.

representação de um fenômeno ou conjunto de fenômenos físicos e eventualmente a previsão de novos fenômenos, tendo-se como base um determinado número de leis físicas’. Estas definições, embora não sejam específicas de modelo matemático, permitem acrescentar algumas características à definição de modelo. Um modelo deve cortar/representar algo de alguma maneira e permitir prever fenômenos, padrões ou comportamentos. Isso sugere que um modelo deve permitir analisar o problema sobre determinando aspecto, considerando determinadas variáveis e sendo válido dentro de condições estabelecidas previamente.

Biembengut (2016) classifica os modelos em dois grupos: os modelos físicos, que compreendem os icônicos ou de escala e os analógicos, e os modelos simbólicos, que compreendem os modelos teóricos e filosóficos. Os *modelos icônicos* ou *modelos de escala* são aqueles que representam os objetos reais ou imaginários. Eles preservam proporções e mantêm propriedades e características relevantes daquilo que representam. Incluem-se nesse grupo as maquetes ou as fotografias. Os *modelos analógicos* “são os que compõem um objeto material, um sistema, ou mesmo um processo para representar, em um novo meio, outro objeto, outro sistema, outro processo” (BIEMBENGUT, 2016, p. 85). Para a autora, eles são fáceis de manipular, tratando-se de uma representação simbólica de algo real ou imaginário e sendo dependentes de regras para interpretar ou inferir as características relevantes do objeto, do sistema ou do processo original. Pode-se citar como exemplo um gráfico que representa variáveis e suas relações. Os *modelos teóricos* são geralmente expressos por meio de relações matemáticas, viabilizando manipulações experimentais e, consequentemente, resolver situações-problema, descobrir ou inventar algo. Os *modelos filosóficos* são aqueles que apresentam fundamentos, pressupostos, implicações sobre alguma proposição, tese ou questão.

Conforme Biembengut (2016), podemos utilizar esses dois tipos de modelos na resolução de uma situação-problema. Um modelo físico pode ser utilizado para obter uma versão inicial aproximada dos dados ou uma avaliação ou compreensão da situação. Em seguida, esta versão pode ser aprimorada com a formulação de um modelo simbólico.

Bassanezi (2010, p. 19-20), por sua vez, apresenta dois tipos de modelos, o modelo objeto e o modelo teórico.

> *Modelo objeto* é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser *pictórica* (um desenho, um esquema compartimental, um mapa, etc), *conceitual* (fórmula matemática), ou *simbólica*. A representação por estes modelos é sempre parcial deixando escapar variações individuais e pormenores do fenômeno ou objeto modelado.
> Um *modelo teórico* é aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve

> conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais). (itálico no original).

Bassanezi (2010, p. 20) considera um modelo matemático como “[...] um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. O autor ressalta ser importante que este modelo apresente uma linguagem concisa e expresse as ideias de maneira clara e sem ambiguidades. Além disso, é importante que ele proporcione um conjunto de resultados, permitindo calcular soluções numéricas.

Barbosa (2009, p. 70), ao discutir os modelos matemáticos na educação científica, define-os como um modelo simbólico “que emprega símbolos matemáticos, sejam tabelas, gráficos, equações, inequações etc., ou, em outras palavras, empregam conceitos, notações e/ou procedimentos matemáticos”.

Para Biembengut e Hein (2010, p. 12), “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir de alguma forma, um fenômeno em questão, ou problema de situação real, denomina-se modelo matemático”. Para eles, um modelo pode ser formulado em termos familiares, por exemplo, usando diferentes registros de representação semiótica.

Para Biembengut (2014, p. 20), um modelo é

> um conjunto de símbolos os quais interagem entre si representando alguma coisa. Essa representação pode se dar por meio de desenho ou imagem, projeto, esquema, gráfico, lei matemática, dentre outras formas. Na matemática, por exemplo, um modelo é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem, de alguma forma, um fenômeno em questão.

Biembengut (2016) considera que modelos possibilitam o processamento de informações, estimulando novas ideias e compreensões, provendo uma visão estruturada e global, o que inclui relações abstratas. Assim, “o valor de um modelo está na utilidade, na adequação ao fenômeno observado, na aplicação de dados que conduza a uma solução, a um resultado, a um produto, a uma teoria” (p. 66).

Almeida e Vertuan (2014, p. 2) definem modelo matemático como

> um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, em geral, não matemático.

Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 13) complementam que um modelo pode permitir a realização de previsões, tal como Bassanezi e Biembengut.

No quadro 5 a seguir, retomamos as diferentes definições apresentadas ao longo dessa seção para percebermos as características que devem permear um modelo matemático. Para tanto, agrupamos com os índices $_i$ e $_j$ aspectos que julgamos que devam ser considerados.

Quadro 5 – Definições de modelo matemático

Autor	Definição
Bassanezi (2010)	"[...] **um conjunto de símbolos e relações matemáticas**$_i$ que **representam de alguma forma o objeto estudado**$_j$".
Barbosa (2009)	Modelo simbólico "que emprega **símbolos matemáticos**$_i$, sejam tabelas, gráficos, equações, inequações etc., ou, em outras palavras, **empregam conceitos, notações e/ou procedimentos matemáticos**$_i$".
Biembengut e Hein (2010)	"**um conjunto de símbolos e relações matemáticas**$_i$ que procura **traduzir de alguma forma, um fenômeno em questão, ou problema de situação real**$_j$, denomina-se modelo matemático".
Biembengut (2014)	"**um conjunto de símbolos**$_i$ os quais interagem entre si **representando alguma coisa**$_j$. Essa representação pode se dar por meio de desenho ou imagem, projeto, esquema, gráfico, lei matemática, dentre outras formas. Na matemática, por exemplo, **um modelo é um conjunto de símbolos e relações matemáticas**$_i$ que **traduzem, de alguma forma, um fenômeno em questão**$_j$".
Almeida e Vertuan (2014)	"**um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática**$_i$ e que **tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema**$_j$, em geral, não matemático".

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Como se pode observar, um modelo matemático é definido como um conjunto de símbolos ou relações matemáticas, ou seja, ele deve mobilizar a linguagem matemática (registros de representação semiótica). Observa-se ainda que um modelo matemático pretende descrever e/ou explicar determinado fenômeno ou problema de alguma maneira. Logo, modelos devem relacionar-se com um fenômeno e viabilizar tratamentos matemáticos. Trata-se, conforme Almeida, Silva e Vertuan (2016), de uma simplificação da realidade produzida a partir da óptica do modelador, cuja formulação não tem um fim em si mesma, mas o de fomentar a solução de um problema.

O termo 'problema' "é entendido aqui como uma situação a qual o indivíduo não possui esquemas *a priori* para sua resolução e não há procedimentos específicos previamente conhecidos ou soluções já indicadas" (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 3). Em relação à definição de 'problema da realidade', assumiremos aquela presentada por Almeida, Silva e Vertuan (2016) que o consideram como uma situação que possa ser investigada e transformada em um problema passível de uma abordagem por meio da matemática, aqui incluímos aquelas analisadas com o auxílio de simuladores.

Sobre o modelo obtido, conforme Biembengut e Hein (2010), ele sempre será tão bem elaborado quanto de matemática dispuser o modelador, cabendo a ele avaliá-lo, validando-o ou não. Em outras palavras, o grau de elaboração de um modelo é diretamente proporcional aos conhecimentos matemáticos do modelador ou, como propõe a teoria da relevância, elaborado segundo habilidades e preferências do indivíduo. Desta maneira, considerando as transformações gasosas em pauta, diferentes conceitos podem ser utilizados para a construção de modelos matemáticos que representem o fenômeno em questão. Entre eles, podemos destacar o uso dos seguintes conceitos: 'função polinomial de grau 1', 'função racional', 'proporção' (regra de três diretamente e inversamente proporcional). Além disso, tendo em vista que um modelo matemático deve bem representar aos dados coletados, é possível ainda mobilizar outros conceitos, tais como: 'função polinomial de grau n', 'função exponencial', 'função logarítmica'. Para tanto, o estudante pode utilizar-se de softwares e ferramentas estatísticas para analisar e validar o modelo obtido[44].

No quadro 6, a seguir, ilustramos algumas possibilidades considerando a transformação isobárica a seguir[45]:

> Considere um cilindro no qual está contido um gás. O cilindro tem um êmbolo móvel, e sua extremidade inferior está tampada. Esse cilindro está mergulhado em água e é aquecido.
> Os dados coletados durante o experimento estão expressos na tabela abaixo:

T(K)	279	286	306	315	329	343
V(mL)	49	50	54	56	58	60

> Considerando os dados acima, obtenha um modelo matemático que permita obter o volume, em mL, para diferentes temperaturas, em K.

Quadro 6 – Possibilidades de modelos para uma transformação isobárica:[46]

Proporção: Regra de três diretamente proporcional	Visto que em transformações isobáricas $\frac{v_1}{T_1} = \frac{v_2}{T_2}$, temos: $\frac{49}{279} = \frac{v}{T}$.
Razão	Visto que em transformações isobáricas $\frac{v}{T} = k$, temos $\frac{v}{T} = \frac{50}{286} \rightarrow \frac{v}{T} = 0{,}17$.
Função polinomial de grau 1	Visto que em transformações isobáricas volume e temperatura são grandezas diretamente proporcionais, é possível representá-la por meio de uma função polinomial de grau 1: $v(T) = 0{,}1771T - 0{,}3276$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

[44] Essas possibilidades serão retomadas na seção 6.1, dedicada a análise preliminar.

[45] Adaptado de https://www.xprovas.com.br/questao?page=8617. Acesso em: 23 fev. 2020.

[46] Neste quadro acima apresentou-se somente o modelo matemático já finalizado, sem considerar as atividades cognitivas de formação de uma representação identificável, tratamento e conversão, que são essenciais à atividade de modelagem matemática. Para a obtenção do modelo $v(T) = 0{,}1771T - 0{,}3276$, por exemplo, uma possibilidade é a conversão da representação dada no registro tabular para o algébrico, selecionando, para tanto, dois pares ordenados e, por fim, realizar os tratamentos no registro algébrico.

Cabe destacar que um modelo não é um objeto matemático, mas uma representação que permite acessar, reproduzir ou representar alguma situação sob determinado aspecto. Portanto, para que um modelo possa ser determinado, é necessária uma série de procedimentos que configura o que se denomina de modelagem.

> A representação ou reprodução de alguma coisa – modelo – requer do modelador uma série de procedimentos que perpassam pela observação cuidadosa da situação ou do fenômeno a ser modelado, pela interpretação da experiência realizada, pela captação do significado que produz. Esse conjunto de procedimentos denomina-se **modelagem**. (BIEMBENGUT, 2016, p. 94, negrito no original).

Definido modelo, modelo matemático e modelagem, abordaremos na próxima seção a questão da modelagem matemática.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Conforme o dicionário Michaelis, a palavra modelagem (modelar + agem) significa "ato ou resultado de modelar; moldação, moldagem, modelação"[47]. Biembengut (2004, p. 17), define modelagem como "um conjunto de procedimentos requeridos na elaboração de modelo de qualquer área do conhecimento"[48]. Já Bassanezi (2015, p. 15) define modelagem como "o processo de criação de modelos em que estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente sobre a sua realidade, carregada de interpretações e subjetividade próprias de cada modelador".

O termo 'modelagem matemática' como processo para descrever, formular, modelar e resolver uma situação problema já se encontra registrado no início do século XX em textos das áreas de engenharia e ciências econômicas (BIEMBEGUT, 2009).

Bassanezi (2010, p. 16) considera a modelagem matemática como "a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando soluções na linguagem do mundo real".

O autor complementa:

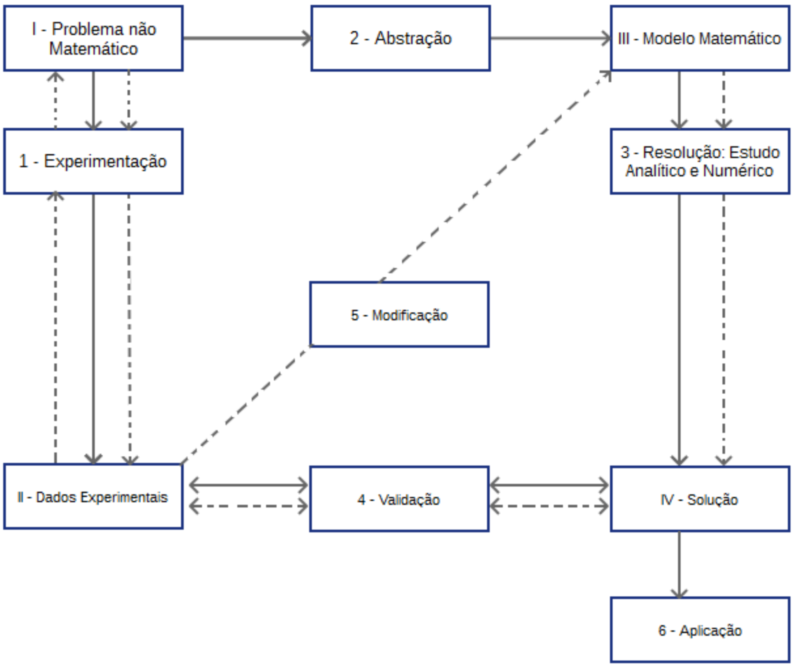
[47] Disponível em: https://bit.ly/33DDbIJ. Acesso em: 6 maio 2018.

[48] Para a autora, este procedimento requer que o modelador tenha algumas habilidades, tais como: talento para a pesquisa, conhecimento matemático e capacidade de fazer leitura do fenômeno sob a ótica da matemática.

> *Modelagem Matemática* é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (2010, p. 24, itálico no original).

O autor propõe que a modelagem matemática deva seguir uma sequência de etapas, que pode ser visualizada no esquema da figura a seguir. Neste esquema, conforme o autor, as setas contínuas indicam a primeira aproximação. Já a busca do modelo torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas.

Figura 2 – Modelagem matemática conforme Bassanezi (2010)



Fonte: Bassanezi (2010, p. 27).

Em linhas gerais, as diferentes fases propostas pelo autor podem ser assim explicadas. Na fase de experimentação, busca-se a obtenção dos dados. Na abstração, ocorrem os procedimentos que levarão ao modelo matemático. Na resolução, o modelo é obtido quando as hipóteses apresentadas em língua natural são convertidas para a linguagem matemática adequada. Na etapa de validação ocorre a aceitação ou não do modelo. Nesta etapa, modelo e hipóteses devem ser testados em confronto com os dados empíricos. Para o autor, um bom modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram. Na quinta etapa, a de modificação, alguns fatores ligados ao problema inicial podem provocar a rejeição do modelo, já que sua solução não conduz a previsões corretas e definitivas. A etapa de abstração pode consistir na seleção de variáveis; problematização ou formulação aos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando; formulação de hipóteses; e simplificação, ou seja, restrição e isolamento do campo de estudo de forma apropriada, tornando o problema tratável, sem torná-lo irrelevante. Na fase de modificação, é preciso verificar a razão do erro na previsão, já que esta pode estar relacionada a diferentes fatores, tais como uma hipótese falsa ou não suficientemente verdadeira; dados experimentais ou informações obtidas erroneamente; hipóteses e dados, embora verdadeiros, insuficientes; existência de outras variáveis na situação real não consideradas durante o processo; algum erro no tratamento matemático.

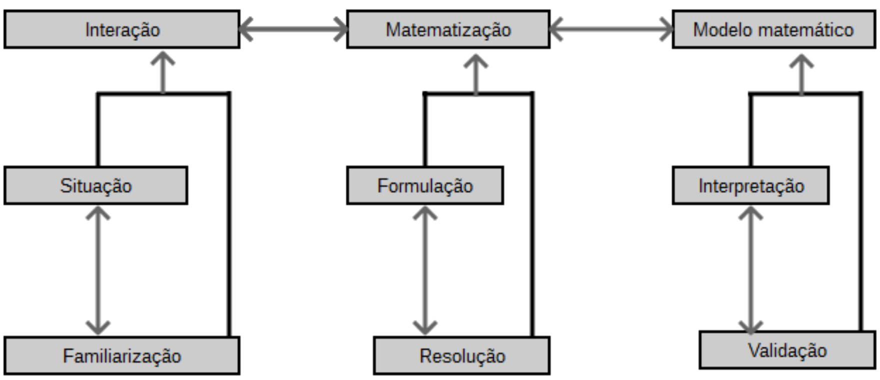
Bassanezi (2010) destaca que é preciso utilizar uma linguagem equilibrada e circunscrita ao problema e ao objetivo estabelecido durante a modelagem. Assim, ela é eficiente apenas se estivermos conscientes de que ela permite somente uma aproximação da realidade.

Biembengut e Hein (2010), por sua vez, denominam modelagem matemática ao processo de se obter um modelo, permitindo uma interação entre matemática e realidade.

> A modelagem matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias. (BIEMBENGUT; HEIN, 2010, p. 13).

Para Biembengut e Hein (2010) o procedimento para modelagem matemática pode ser agrupado em três etapas: *interação*, que inclui o reconhecimento da situação-problema e a familiarização com o assunto a ser modelado (referencial teórico); *matematização*, que inclui a formulação do problema (hipótese) e a resolução do problema em termos do modelo; e *produção de um modelo matemático*, que inclui a interpretação da solução e a validação do modelo (avaliação).

Figura 3 – Dinâmica da modelagem matemática conforme Biembengut e Hein (2010)



Fonte: Biembengut e Hein (2010, p. 15).

Sobre a interação, delimitada a situação, é preciso estudar o assunto a ser modelado, seja por meio de materiais bibliográficos, seja por meio de dados experimentais. As etapas de reconhecimento e familiarização não seguem ordem e podem ocorrer de forma simultânea. Na verdade, quanto mais profundo o nível de interação, mais clara a situação vai se tornando.

Na etapa de matematização, dividida em formulação e resolução do problema, ocorre a mobilização dos diferentes registros de representação semiótica. É nesta etapa que ocorrem tratamentos e conversões, representando o problema em linguagem matemática a partir da atividade cognitiva de formação de uma representação identificável.

Durante a formulação do problema, é preciso identificar os fatos envolvidos, classificando as informações (suposições) em relevantes ou não relevantes, levantar as hipóteses (meta a ser perseguida), selecionar variáveis relevantes e constantes envolvidas, decidindo sobre a melhor forma de representá-las e, por fim, converter essas relações em termos matemáticos. Todo este processo precisa culminar com algum registro de representação ou programa computacional que leve ou permita a dedução de uma solução. Na sequência, passa-se à resolução ou análise com as ferramentas matemáticas à disposição.

Para concluir a modelagem matemática nessa perspectiva, a avaliação do modelo é importante para verificar o nível de aproximação do modelo com a situação-problema. Caso a solução não seja adequada, torna-se necessário retomar a etapa anterior ou, como propõe a teoria de conciliação de metas, caso a meta não seja conciliada, reformular o plano de ação intencional estabelecido inicialmente.

Sobre o tema Biembengut (2014) apresenta duas categorias de modelagem matemática, não necessariamente disjuntas, uma referindo-se a expressão física e outra a expressão abstrata.

> - A *modelagem matemática física* constitui em um processo envolvido na expressão, na reprodução e/ou na descrição de um conjunto de dados ou de imagem ou um ente físico. O modelo resultante desta forma de modelar pode ser de *escala* (desenho e/ou réplica) ou de *analogia* (representação gráfica e/ou algébrica).
> - A *modelagem matemática simbólica* constitui em um processo envolvido na compreensão e na análise de um conjunto de dados de um ente físico (produto ou processo), da natureza ou do ambiente social. O modelo simbólico resultante requer uma teoria matemática e/ou das demais áreas envolvidas mais complexas. (BIEMBENGUT, 2014, p. 22, itálico no original).

Para a autora (p. 26) "a modelagem matemática é área de pesquisa voltada à elaboração ou criação de um modelo matemático não apenas para uma solução particular, mas como suporte para outras aplicações e teorias". Sobre a condução do processo de modelar, a autora, ao remodelar a ideia anterior, propõe três fases não disjuntas, onde ocorre um 'ir e vir' na medida em que se está modelando. O esquema a seguir ilustra esse ‘movimento’.

Figura 4 – Fases da modelagem matemática conforme Biembengut (2014)

Fonte: Biembengut (2014, p. 23, com adaptações).

A fase de percepção e apreensão caracteriza-se pelo reconhecimento da situação problema e pela familiarização com o assunto a ser modelado. O importante nesta fase é a realização de uma descrição detalhada dos dados levantados, os quais serão utilizados durante todo o processo de modelagem matemática. A fase de compreensão e explicitação divide-se em formulação do problema, formulação do modelo e resolução. Segundo a autora o objetivo principal desta fase é a obtenção de um modelo que conduza à solução ou permita a dedução de uma solução. A fase de significação e expressão caracteriza-se pela interpretação e avaliação dos resultados, consistindo na verificação da adequabilidade e do quão significativa e relevante é a solução encontrada, ou seja, a validação.

Para Biembengut (2016, p. 98), por sua vez, “modelagem (matemática) é um método para solucionar alguma situação-problema ou para compreender um fenômeno utilizando-se de alguma teoria (matemática)”. Dito de outra maneira, é um método que permite organizar os dados de uma determinada situação representando-os matematicamente, de forma a possibilitar uma descrição, uma resposta, uma solução ou uma previsão.

É importante destacar que a modelagem matemática pode ser utilizada como um método de pesquisa em Matemática ou como uma metodologia para o ensino de Matemática. No primeiro caso, pode-se citar os trabalhos de Matemática Aplicada. No segundo caso, como é o caso deste estudo em particular, a modelagem matemática é vista como uma estratégia para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, razão pela qual apresenta-se algumas concepções de modelagem matemática no contexto da educação matemática na próxima seção.

3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O debate relacionando à modelagem matemática no contexto da educação matemática ocorre na década de 1960 no cenário internacional e no final dos anos 1970 e início de 1980 no Brasil (BIEMBENGUT, 2009). Atualmente, a modelagem matemática possui diferentes concepções[49], que se diferenciam basicamente pela ênfase dada a escolha do problema a ser modelado (MALHEIROS, 2008).

Conforme Souza e Barbosa (2014, p. 32), "a modelagem matemática, na perspectiva da educação matemática, pode ser definida, de maneira geral, como a abordagem de problemas da realidade, utilizando conteúdos matemáticos".

Araújo (2002**,** p. 39) propõe que a modelagem matemática como

> uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não-matemático da realidade, ou de uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da educação matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho.

Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) discutem modelagem matemática em termos de projetos, considerando primordial que se trabalhe com problemas da realidade propostos pelos alunos. Na concepção dos autores (2011), não há uma preocupação com a Matemática em sim mesma, mas em utilizá-la para discutir problemas da realidade.

Os autores destacam que, para se trabalhar com modelagem matemática, é necessário inicialmente reconhecer a existência de um problema real e, na sequência, mobilizar hipóteses de simplificação que converterão esse problema em um problema matemático. Tais hipóteses, segundo os autores, são determinadas de acordo com os objetivos estabelecidos, visando a facilitar a resolução matemática ou a adequar o problema ao nível dos estudantes envolvidos. Nesta etapa da modelagem matemática, os estudantes estão diante de um problema matemático a resolver, que requer uma análise dos dados e variáveis envolvidas e uma avaliação dos resultados obtidos (modelo), validando-os. Desta forma, os autores (2011) simplificam o processo de modelagem matemática em cinco momentos: determinar situação, simplificar hipóteses dessa situação, resolver problemas matemáticos decorrentes, validar soluções

---

[49] Não iremos discorrer sobre as diferentes concepções de modelagem matemática na educação matemática nesta tese, apenas apresentá-las em linhas gerais. Vecchia (2012), Souza e Barbosa (2014), Ferreira (2016), Kaviatkovski (2017) e Soares (2017), por exemplo, revisam literatura e/ou estado de arte sobre essa questão.

matemáticas de acordo com a questão real e definir tomadas de decisão com base nos resultados.

Barbosa (2006) adota uma perspectiva sociocrítica de modelagem matemática em educação matemática, discutindo o papel dos modelos na sociedade. O autor considera que a modelagem matemática precisa decorrer de um problema extraído de contextos não puramente matemáticos e não de exercícios. Para o autor, "modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade" (2001, p. 6).

Burak (1992, 2010) considera modelagem matemática como um conjunto de procedimentos que visam a explicar matematicamente fenômenos presentes no cotidiano, auxiliando-o a elaborar predições e a tomar decisões. O autor considera fundamental que o fenômeno escolhido seja de interesse do grupo. Sobre procedimentos, o autor (2010) propõe cinco etapas não rígidas: escolha de tema, pesquisa exploratória, levantamento de problemas, resolução de problemas e desenvolvimento de conteúdos no contexto do tema, e análise crítica de soluções.

Para Bassanezi (2010, p. 38), "a modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem-sucedido, mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado". Neste contexto, adota a nomenclatura de modelação matemática (modelagem na educação), onde a etapa de validação pode não ser prioritária. Para o autor, mais importante que o modelo obtido é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sociocultural.

Beimbengut e Hein (2010, p. 18) denominam de *modelação matemática* o método que utiliza a essência da modelagem matemática em cursos regulares norteados por um conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático.

Biembengut (2014, p. 30), ao discutir modelagem na educação, também a denomina de modelação matemática.

> Denomino de *modelação matemática* ao método que se utiliza das fases do processo de modelagem na Educação Formal, com a estrutura vigente: currículo, período, horário, espaço físico, números de horas-aula por período letivo, número de estudantes por classe, dentre outros aspectos. A modelação orienta-se pelo ensino do conteúdo curricular (e não curricular) a partir de reelaboração de modelos matemáticos aplicados em alguma área do conhecimento e, paralelamente, pela orientação dos estudantes à pesquisa. (itálico no original).

Almeida e Vertuan (2015, p. 22) compreendem "a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática".

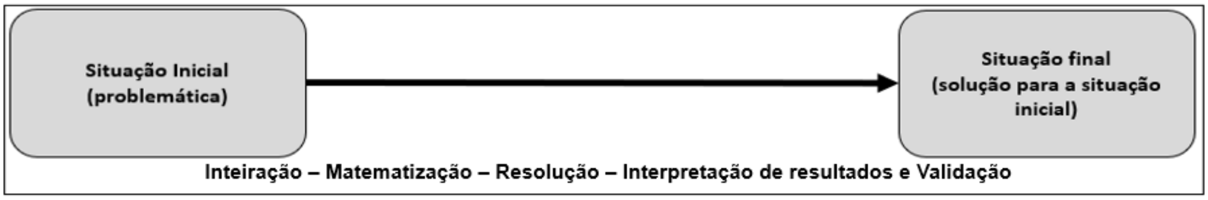
Para Almeida e Vertuan (2015, p. 21) e Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 12),

> uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.

Nesse caso, a situação inicial consiste numa situação problema e a situação final numa representação matemática, ou seja, num modelo matemático. O termo ‘problema’ é entendido por Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 12, itálico no original) “como uma situação na qual o indivíduo não possuo esquemas *a priori* para sua solução”.

Almeida, Silva e Vertuan (2016), caracterizam as fases da modelagem matemática em inteiração, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação.

Figura 5 – Fases da modelagem matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 15).

Na etapa de *inteiração*, o estudante tem um primeiro contato com a situação-problema para conhecer características e especificidades da situação[50]. Esta etapa conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução.

Na etapa de *matematização*, que ocorre paralelamente à fase de resolução, dá-se a conversão de uma representação na linguagem natural, com a qual o problema é apresentado, para uma representação específica da linguagem matemática, resultando na construção de um modelo matemático.

Na etapa de *resolução*, há a construção de um modelo matemático, com o objetivo de descrever a situação, analisar seus aspectos relevantes, responder às questões formuladas e, dependendo o contexto, viabilizar previsões.

Na etapa de *interpretação de resultados*, há uma análise do problema a partir do modelo construído. Esta análise gera a validação da representação matemática obtida. A validação deve considerar procedimentos e adequação da representação da situação.

[50] Esta etapa, embora inicial, pode ocorrer durante toda a atividade.

Almeida, Silva e Vertuan (2016) também consideram que essas etapas podem ocorrer de forma não linear, pois são dinâmicas e apresentam movimentos constantes de ‘idas e vindas’. Para eles, isso evidencia alguns aspectos da modelagem matemática: “o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução” (2016, p. 17).

Como vimos, modelo e modelagem matemática podem assumir diferentes definições, dependendo da perspectiva considerada. Nesta pesquisa, assumiremos as definições de Almeida, Silva e Vertuan (2016), porque eles consideram, além das etapas de modelagem matemática, as ações cognitivas dos estudantes durante a atividade[51].

Cabe ainda destacar que, ao se discutir modelagem matemática em sala de aula, diferentes questões podem ser levantadas, tais como:

> *Como utilizar/fazer modelagem em sala de aula?*
> *Por que utilizá-la?*
> *Em que momento a inserir no contexto escolar?*
> *Como conciliar as atividades de modelagem e o currículo escolar?*
> *Como deve ocorrer a definição do tema?*

Contudo, dados os objetivos desta pesquisa, não adentraremos nessas questões. Nossos esforços se concentrarão nas inferências nas etapas de inteiração, matematização, interpretação de resultados e validação do modelo. Para isso, arbitramos analisar e discutir aspectos cognitivos envolvidos na obtenção do modelo matemático.

Definida modelagem matemática no contexto da educação matemática, procuraremos relacioná-la à teoria dos registros de representações semiótica na próxima seção.

3.4 MODELAGEM, EDUCAÇÃO E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Entre as pesquisas que trabalham modelagem matemática no contexto da educação matemática e a correlacionam com a teoria de registros de representação semiótica, destaca-se a pesquisa de Vertuan (2007). Vertuan procurou identificar os diferentes registros de

---

[51] As ações cognitivas dos alunos serão apresentadas no capítulo 4.

representação semiótica utilizados pelos estudantes. Para isso, o autor investigou se “as atividades de Modelagem que tem por objetivo o estudo de um objeto matemático dão lugar à exploração de diferentes registros de representação semiótica”, “viabilizam o tratamento e a conversão destes registros” e “provocam a coordenação entre os diferentes registros” (p. 17). Além disso, procurou “inferir, a partir do referencial teórico, se a interação Modelagem Matemática e Registros de Representação Semiótica leva à compreensão, tanto do problema não matemático em estudo quanto dos objetos matemáticos envolvidos no estudo desse problema” (p. 17).

Para o autor, os estudantes vão além do simples uso de diferentes registros na modelagem matemática. Eles são conduzidos a relacioná-los, apresentando uma solução para o problema em estudo, ou seja, eles são levados a coordenar diferentes registros para que a obtenção do modelo seja possível. Para Vertuan, essa coordenação permite a compreensão do objeto matemático e da situação estudada. Sobre as conversões, o autor observou que elas “aconteciam ora para se obter um registro em que os tratamentos eram considerados mais fáceis, ora para se obter um registro que melhor respondesse ao problema inicial e ora para se obter um registro cujas interpretações complementassem as interpretações advindas dos registros iniciais” (VERTUAN, 2007, p. 134).

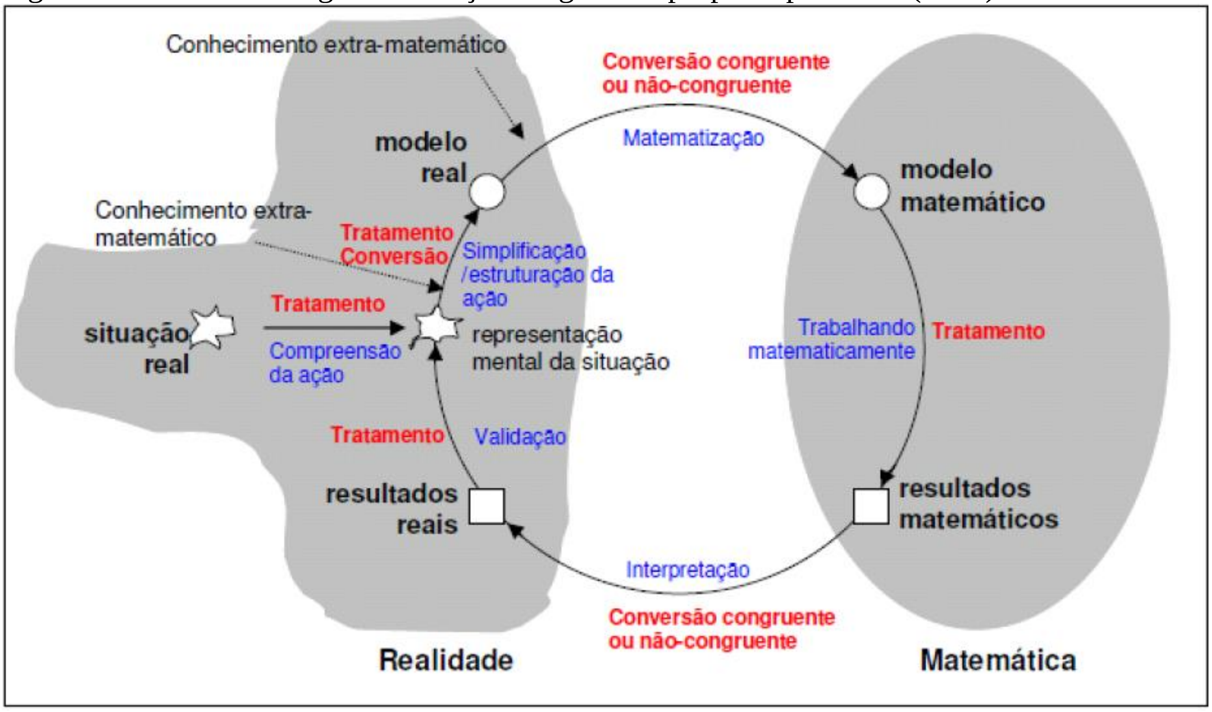
Silva (2008) investigou relações entre modelagem matemática e semiótica. No que diz respeito à teoria dos registros de representação semióticas, a autora questionou:

> O fenômeno de congruência e não-congruência (estabelecido por Duval) de conversões realizadas entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática influencia a caracterização do objeto matemático?
> As tarefas de produção e de compreensão (caracterizadas por Duval) interferem na coordenação entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática? (SILVA, 2008, p. 22).

Para a pesquisadora, o fato de o modelador estabelecer hipóteses para o problema de forma adequada pode significar que ele evidenciou o objeto matemático em questão, tanto em conversões congruentes como em conversões não congruentes. Ela considera que, “ao realizar a validação da hipótese no modelo obtido implica que ‘o modelo deixa transparecer’ estas hipóteses. Para evidenciar se o registro de chegada deixa transparecer o registro de saída o modelador precisa conhecer o ‘objeto matemático’” (p. 214, aspas simples no original).

Nesse sentido, a autora elabora o esquema a seguir, onde são apresentadas as atividades e ações cognitivas que podem ocorrer em uma atividade de modelagem matemática.

Figura 6 – Atividades cognitivas e ações cognitivas proposta por Silva (2008)



Fonte: Silva (2008, p. 214).

O esquema de Silva (2008) destaca atividades e ações cognitivas prevalentes em modelagem. Para a autora, da situação real à validação do modelo, os estudantes realizam tratamentos e conversões, coordenando diferentes registros de representação semióticas.

Rosa (2009) estudou fenômenos de congruência em conversões realizadas por estudantes do ensino médio. Segundo a autora, a utilização da modelagem no ambiente escolar proporciona ao estudante oportunidades para que ele decida caminhos a percorrer, tornando esse processo algo particular. Para Rosa (2009) os estudantes podem obter resultados diferentes, quando estão livres para interpretar o problema e encontrar uma 'matemática adequada' para resolvê-lo. Nesse processo, mobilizam diferentes registros de representação semiótica desde a definição do problema até a interpretação dos resultados, e a mobilização desses diferentes registros complementa a compreensão do fenômeno estudado.

Conforme Rosa (2009, p. 133, aspas no original):

> No decorrer do desenvolvimento das atividades, notamos que para os estudantes o objetivo era chegar na solução do problema inicial. As conversões realizadas possuíam esta finalidade. Isso ficou evidente para nós em algumas falas como: "Já resolvemos o problema, para que fazer o gráfico?", "professora, esse caminho não é mais fácil para encontrar a solução?". Com isso muitas vezes eles não estabeleciam relações entre os registros ao realizar as conversões, ou seja, a conversão era realizada satisfatoriamente, mas não com o objetivo de obter maiores esclarecimentos do problema, mas sim como cumprimento de uma solicitação do professor.

A autora concluiu que os estudantes, embora realizassem conversões para encontrar a solução do problema, em geral, não coordenavam os registros. Além disso, observou que as conversões só ocorriam com naturalidade em casos com alto nível de congruência. Nos demais casos, ou ela não era realizada, ou era realizada de forma errada.

Burak e Brandt (2010) analisam possibilidades de contemplar modelagem e teoria de representações semióticas para a conceitualização dos objetos de conhecimento necessários para a resolução de problemas. Para os autores, a teoria de representações semióticas contribui para a conceitualização dos objetos matemáticos. Os autores consideram que as atividades cognitivas (formação, tratamento e conversão) são essenciais na modelagem matemática.

Almeida e Vertuan (2010) tecem reflexões sobre a utilização da modelagem matemática no ensino da Matemática e suas contribuições para a discussão dos conteúdos matemáticos associados à construção dos modelos visando à aprendizagem. Eles também discutem funções cognitivas ativadas na modelagem, sugerindo que os estudantes vão além de simplesmente utilizar diferentes registros, ou seja, eles relacionam estes registros para resolver a situação-problema. Para Almeida e Vertuan (2010, p. 40), o mais importante é “os alunos perceberem que estes diferentes registros incorporam características do mesmo objeto matemático, e chegarem a noésis (compreensão e conceitualização do objeto matemático) realizando a coordenação destes diferentes registros”.

Almeida e Vertuan (2011) observam três situações de utilização de registros de representação semiótica em modelagem. Em estudo reportado pelos autores, diferentes registros eram mobilizados em alguns momentos, mas não eram relacionados entre si. A atividade cognitiva de tratamento era a única transformação presente, gerando incoerências na análise da situação. Eles apontam que, em outros casos, diferentes registros surgiam em conversões. Contudo, as relações eram estabelecidas entre pares de registros e não entre todos os registros utilizados: as conversões eram realizadas por necessidade e não por escolha.

> As conversões não são realizadas por uma questão de escolha, mas de necessidade. Necessidade de trocar de registro para melhor interpretar a situação em estudo, necessidade de obter uma representação em outro registro a fim de complementar os registros iniciais ou a fim de responder ao problema discutido, ou ainda, de trocar de registro para realizar tratamentos matemáticos sem tantas dificuldades. (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p. 117).

Outra prática apontada pelos autores consistia na coordenação dos registros associados aos objetos matemáticos envolvidos. Os autores concluíram que as interpretações advindas dessa coordenação eram utilizadas para responder à situação-problema. Para eles, essa coordenação ocorre na medida em que o estudante se familiariza com atividades de modelagem.

Costa (2016) investigou, à luz da teoria dos registros de representação semiótica, como se dá a compreensão da Matemática e do problema na modelagem matemática. Para o autor, a compreensão do problema acontece, na medida em que os estudantes confrontam informações contidas na situação-problema com a linguagem matemática nas diferentes fases da modelagem nas quais os estudantes não somente utilizam registros, mas os relacionam. Costa considera que “o conteúdo a ser utilizado em uma atividade de modelagem emerge de alguma característica observada nos registros mobilizados e demanda dos alunos certo domínio das características específicas de cada conteúdo” (2016, p. 135)

Corrêa (2017) investigou se e como os acadêmicos mobilizam registros de representação semiótica para explorar o conceito de volume de combustível em um cilindro por meio de atividades que seguem os princípios de modelagem. A autora concluiu que atividades de modelagem permitiram mobilizar diferentes registros de representação semiótica e realizar a transição das situações-problema do contexto real para a linguagem matemática.

Barros (2017) investigou o potencial de uma sequência de situações, envolvendo modelagem de problemas na perspectiva dos registros de representação semiótica e das mudanças de domínio na condução da aprendizagem de equações diferenciais ordinárias. Para a autora, os resultados apontaram que a sequência de situações possibilitou a compreensão do problema proposto e que a mobilização de diferentes registros de representação semiótica auxiliou a estabelecer as relações matemáticas necessárias.

> O estudo em diferentes domínios e o uso de diferentes registros de representação semiótica auxiliou no estabelecimento de relações entre a família de soluções e a derivada, entre a EDO e o seu campo de vetores e entre o sinal da derivada e o campo de vetores. Particularmente, no desenvolvimento dos problemas de Modelagem Matemática, esses conhecimentos permitiram aos alunos interpretar as relações entre a equação e o fenômeno modelado, pois esse tipo de atividade solicita que o aluno interprete a situação estudada e não somente resolva a EDO. Neste processo de análise e de interpretação do fenômeno se faz necessária a utilização de ferramentas de diferentes domínios matemáticos e requer o uso de diferentes registros de representação, o que possibilita o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros (BARROS, 2017, p. 9).

Ronchetti (2018) analisou a aprendizagem das grandezas massa e comprimento, por meio de atos dialógicos e representações semióticas de objetos matemáticos em uma atividade de modelagem na perspectiva sociocrítica. Para o autor “as atividades de modelagem permitem o surgimento dos modelos matemáticos, e tais modelos são os objetos matemáticos apresentados na Teoria dos Registros de Representação semiótica” (p. 111). O autor conclui que as atividades de modelagem são propícias ao surgimento de diversos objetos matemáticos reconhecidos pelos alunos. Isso pôde ser observado tanto em seus cadernos como no desenvolvimento das interações realizadas.

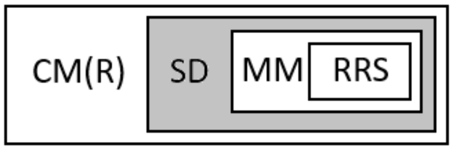
> Os resultados indicam que a prática de Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica favorece o surgimento de diversos objetos matemáticos, neste caso as grandezas massa e comprimento, e permite que este mesmo objeto seja representado por diferentes representações semióticas, o que torna viável a identificação das operações de tratamento e conversão, contribuindo para a aprendizagem dos alunos. (RONCHETTI, 2018, p. 115).

Dalvi (2018) analisou a compreensão do conceito de número racional pela mobilização de registros semióticos em uma prática pedagógica de modelagem. A autora concluiu que "o encaminhamento dado à prática pedagógica da modelagem matemática na perspectiva sociocrítica deu espaço a um trabalho pedagógico que valorizasse os diversos registros semióticos de um objeto matemático" (p. 107). A autora concluiu ainda que os tratamentos em diferentes registros viabilizaram a compreensão do objeto matemático.

Observamos que nesses estudos há uma preocupação em analisar como se dá a mobilização dos registros de representação semiótica em atividades de modelagem matemática. Contudo, buscamos avançar nessa temática procurando compreender o processo ostensivo inferencial envolvido em atividades de modelagem. Dito de outro modo, esse estudo visa a contribuir com essa discussão ao defender que a arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas permite tanto planejar, executar e validar sequências didáticas envolvendo modelagem matemática, como descrever e explicar como os estudantes selecionam e articulam os diferentes inputs (aqui se incluem os diferentes registros de representação semiótica) na elaboração de modelos matemáticos.

Definidos modelo e modelagem matemática, no próximo capítulo apresentaremos a teoria das situações didáticas, associando-as à atividade de modelagem matemática na educação matemática.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA E TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS



Biembengut (2016, p. 96) considera que, diante de uma situação-problema a modelar, o estudante precisa:

> - Tomar ciência dos dados disponíveis e da situação-problema que se apresenta;
> - Supor algumas possíveis causas e/ou meios para solucionar: pressupostos, hipóteses;
> - Realizar algum tipo de experiência que for requerida;
> - Interpretar a experiência, captando os significados produzidos;
> - Passar a expressar os dados, numa tentativa de formular um modelo.

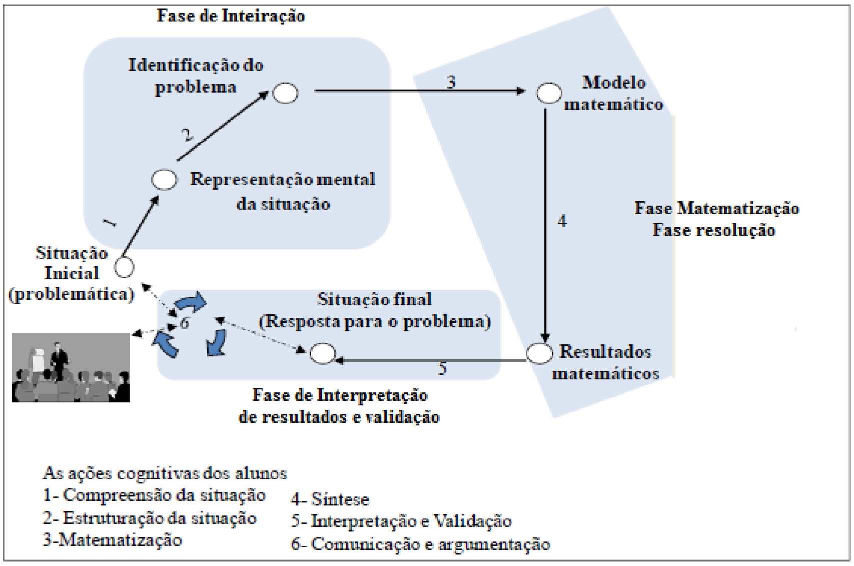
A autora considera que é necessário que os envolvidos possuam amplo conhecimento da área em que a situação-problema está inserida, bem como senso criativo, lúdico e crítico para refletir sobre os dados e variáveis envolvidas na modelagem matemática.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2016), a modelagem matemática é alternativa pedagógica relevante para abordar matematicamente uma situação-problema, pois envolve um conjunto de ações cognitivas do indivíduo, envolve representação de objetos matemáticos (e a manipulação dessas representações) e direciona-se a objetivos e metas estabelecidas e/ou reconhecidas pelo estudante.

O esquema a seguir ilustra estas diferentes fases e as ações cognitivas dos estudantes em uma atividade de modelagem matemática[52].

[52] As diferentes fases e ações cognitivas serão explicadas na seção 4.6.

Figura 7 – Fases da modelagem matemática e ações cognitivas dos alunos



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 19).

No entanto, parafraseando Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 17), para identificar as ações cognitivas dos estudantes é preciso considerar que o estudante, ao se deparar com a situação inicial, identifica intenções e limitações para o desenvolvimento da atividade e a busca da situação final; realiza ações cognitivas implícitas, relacionadas aos procedimentos, e explícitas, relacionadas às representações; e faz interagir conhecimentos matemáticos e extramatemáticos como pano de fundo no decorrer da situação. Conforme os autores, se a modelagem matemática é percebida como uma abordagem matemática de um problema não essencialmente matemático, o foco deve estar nos encaminhamentos e procedimentos que possibilitam a transição da situação inicial para a situação final.

Para Bassanezi e Biembengut, na modelagem matemática a atividade do estudante compara-se a uma atividade científica. Para Brousseau (1997, p. 49),

> Saber matemática não é apenas aprender definições e teoremas, reconhecer a oportunidade de usá-los e aplicá-los; sabemos bem que fazer matemática implica lidar com problemas. Fazemos matemática somente se ocupamos de problemas, mas esquecemos as vezes que resolver um problema é somente uma parte do trabalho, achar boas questões é tão importante quanto achar soluções. Uma boa reprodução pelo estudante de uma atividade científica requer que ele atue, que ele formule, que ele prove, que ele construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, que ele troque com outros, que ele reconheça aqueles que são conforme à cultura, que é útil para ele, etc.[53]

[53] « Savoir des mathématiques, ce n'est pas seulement apprendre des définitions e des théorèmes, pour reconnaître l'occasion de les utiliser et de les appliquer ; nous savons bien que faire des mathématiques implique que l'on s'occupe des problèmes. On ne fait des mathématiques que l'on s'occupe de problèmes mais o oublie parfois que résoudre un problème n'est qu'une partie du travail ; trouver de bonnes questions est aussi important que

Para isso ser possível, cabe ao professor "imaginar e propor aos alunos situações que eles possam vivenciar e nos quais o conhecimento aparecerá como a solução ideal e passível de descoberta dos problemas colocados" (BROUSSEAU, 1997, p. 49)[54].

Desta maneira, considerando que se analisa o processo de conversão em sequências didáticas envolvendo modelagem matemática, defende-se nesse estudo que o modelo proposto pela teoria das situações didáticas permite o planejamento, a execução e a validação deste tipo de atividade, favorecendo a aprendizagem do estudante.

Para dar conta dessa demanda, este capítulo se estrutura em seis seções. Na primeira seção, definimos situação didática, situação a-didática e *milieu*, apresentamos a noção de devolução e sua relação com o contrato didático e definimos conhecimento, saber e repertório didático. Na segunda seção, abordamos a classificação de uma situação a-didática. Na terceira seção, modelizamos o funcionamento do conhecimento em uma situação a-didática, apresentando a estruturação do *milieu* e as análises possíveis do papel do professor e do estudante nos diferentes níveis de *milieu*. Na quarta seção, abordamos as fases da engenharia didática. Na quinta seção, definimos e caracterizaremos o raciocínio do estudante e do professor em uma situação a-didática e apresentaremos um modelo multidimensional para a análise do raciocínio de um estudante. Por fim, na sexta seção, tecemos algumas relações entre a teoria das situações didáticas e a modelagem matemática.

4.1 SITUAÇÃO DIDÁTICA E SITUAÇÃO A-DIDÁTICA

As pesquisas relacionadas à didática da matemática tiveram sua origem nas reflexões inerentes ao movimento da matemática moderna na década de 70. Brousseau (2010, p. 1-2) define didática da matemática como

> a ciência das condições específicas da difusão do conhecimento matemático necessário para as ocupações dos homens (sentido amplo). Ela trata (num sentido restrito) das condições em que uma instituição denominada 'professor' tenta

leur trouver des solutions. Une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu'il échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc. ».

[54] « [...] imaginer et proposer aux élèves des situations qu'ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale et découvrable aux problèmes posés ».

> (designada à necessidade por uma outra instituição) modificar o conhecimento de outro dito 'ensinado' enquanto este último não é capaz de o fazer de forma autônoma e não sente necessariamente a necessidade.[55]

Bloch (2007, p. 13) destaca que o objetivo da didática da matemática é "construir modelos para a análise dos fenômenos de ensino e de aprendizagem da matemática em um ambiente didático: um meio social concebido para o ensino".

Almouloud (2007, p. 17) define didática da matemática "como uma ciência que tem por objetivo investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da matemática e o estudo de condições que favorecem a sua aquisição pelos estudantes".

Neste contexto, insere-se a teoria das situações didáticas desenvolvida por Guy Brousseau (1997, 2008), que permite modelizar e refletir as interações estabelecidas entre o aprendiz, o saber e o meio no qual a aprendizagem de conceitos matemáticos deve se desenrolar.

Segundo Brousseau (1997, 2008), esta teoria começou a ser desenvolvida a partir de suas inquietações sobre as abordagens adotadas no ensino da matemática. Para o autor, é preciso organizar o ensino não pela descrição do saber, onde o professor programa uma sequência de aulas para explicá-la, e o estudante deve aprendê-la, mas pela prática, priorizando a aculturação e a adaptação independente. Desta maneira, é necessário que o professor planeje uma situação que ofereça ao estudante as informações necessárias para que este, utilizando os conhecimentos já adquiridos, possa agir e refletir sobre elas. Portanto, esta teoria visa a estudar situações que possibilitam a aquisição de conhecimento, bem como a discutir as relações estabelecidas entre estudante, professor e saber em uma situação didática.

Brousseau (2008, p. 21) define situação como um modelo de interação de um sujeito com um *milieu*, ou seja, com um dispositivo criado por um sujeito que deseja ensinar um conhecimento ou controlar sua aquisição. Para Brousseau (2010, p. 3) o termo '*milieu*' pode ser definido como "o sistema antagonista do agente. Em uma situação de ação, chamamos milieu tudo que age sobre o aluno e/ou sobre o que o aluno age"[56]. O autor complementa que "o agente é o que no modelo atua no *milieu* de modo racional e economicamente dentro do quadro das regras da situação. Como modelo de um estudante ou mais geralmente de um sujeito, ele age

---

[55] « la science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques nécessaires aux occupations des hommes (sens large). Elle s'occupe (sens restreint) des conditions où une institution dite « enseignante » tente (mandatée au besoin par une autre institution) de modifier les connaissances d'une autre dite « enseignée » alors que cette dernière n'est pas en mesure de le faire de façon autonome et n'en ressent pas nécessairement le besoin ».

[56] « le système antagoniste de l'actant. Dans une situation d'action, on appelle 'milieu' tout ce qui agit sur l'élève ou / et ce sur quoi l'élève agit ».

de acordo com seu repertório de conhecimento”[57]. Margolinas (2002) salienta que um *milieu* é dito antagonista quando ele é suscetível de produzir retroações nos conhecimentos do estudante, ou seja, ele deve permitir ao estudante um ajuste de sua ação sobre o *milieu*, avaliando suas hipóteses e escolhendo entre várias soluções possíveis a melhor.

Segundo Almouloud (2007, p. 32-33), a teoria das situações didáticas se apoia em três hipóteses: o aprendizado do estudante ocorre quando este se adapta a um *milieu* que é fator de dificuldades, de contradições e desequilíbrio; o *milieu* precisa ser criado e organizado de maneira que as situações propostas provoquem a aprendizagem, ou seja, o *milieu* precisa ter uma intenção didática; o *milieu* e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Sobre a situação, Brousseau (1999) considera que ela modeliza as relações e as interações de um ou vários agentes com um milieu. Brousseau (2010, p. 2) considera situação didática como aquela “onde um agente, professor, por exemplo, organiza um dispositivo que mostra sua intenção para modificar ou dar luz ao conhecimento de outro agente, um estudante, por exemplo, e lhe permite se expressar em ações”[58]. Portanto, uma situação didática é caracterizada como o conjunto de relações estabelecidas entre estudante, um milieu e o professor (sistema educacional) que permita que esse estudante adquira um determinado saber. Essas relações abrangem o que Brousseau (2008) denominou milieu material, que compreende as informações disponíveis no dispositivo criado pelo professor para ensinar um saber[59]. Assim, o milieu material pode ser composto por um problema, um desafio, um jogo, bem como as regras da atividade proposta. No presente estudo, o milieu material será estruturado em duas etapas. A primeira etapa é composta de um contexto inicial seguido por questões norteadoras discussões, e a segunda etapa é organizada a partir de um roteiro experimental relacionados às transformações gasosas.

Parte essencial de situações didáticas são as *situações a-didáticas* enquanto

> situações de aprendizagem em que o professor conseguiu remover sua vontade, suas intervenções, como informações determinantes do que o aluno fará: são aquelas que

---

[57] « l’actant est ce qui dans le modèle agit sur le milieu de façon rationnelle et économique dans le cadre des règles de la situation. En tant que modèle d’un élève ou plus généralement d’un sujet, il agit en fonction de son répertoire de connaissances ».

[58] « Où un actant, un professeur, par exemple, organise un dispositif qui manifeste son intention de modifier ou de faire naître les connaissances d’un autre actant, un élève par exemple et lui permet de s’exprimer en actions ».

[59] Um *milieu* material: as peças de um jogo, uma prova, um problema, um exercício, etc. e as regras de interações do estudante com o dispositivo criado.

> funcionam sem a intervenção do professor no nível do conhecimento. (BROUSSEAU, 1997, p. 47).[60]

Contudo, Bloch (1999) destaca que é concebível que o professor possa ser obrigado a intervir com conhecimentos e/ou saberes na situação em algum momento, considerando as ações dos estudantes. Desta forma, o meio é enriquecido pelas contribuições dos estudantes e pelas intervenções do professor. Portanto, a situação a-didática pode comportar uma dimensão a-didática para o estudante, onde o *milieu* permite a ação do estudante, oferecendo uma certa margem para a atividade matemática do estudante, bem como para a exploração desta atividade durante a institucionalização[61] (BLOCH, 1999).

Paschoal (2016), fundamentado em Dias e Santo (2014), relacionou teoria das situações didáticas com modelagem matemática. Para ele, características de situações a-didáticas se manifestam nas etapas de modelagem matemática. Segundo Dias e Santo (2014, p. 358)

> tratar a Modelagem dentro da perspectiva proposta pela TSD significa tipificá-la como situação didática ou a-didática. Na segunda opção, o aluno assume as características de um pesquisador ao buscar a melhor solução para determinada situação matemática a partir da manipulação dos elementos presentes em seu milieu.

Assim, assumiremos modelagem matemática como uma situação a-didática (ou com uma dimensão a-didática) com objetivo de reproduzir as condições de uma atividade matemática. Para tanto, "o estudante deve ser o responsável por ter iniciativa na condução da situação e o professor delega parte da responsabilidade de justificar, conduzir e corrigir as ações do estudante para o *milieu* organizado por ele" (NETO, 2015, p. 38, itálico no original). Portanto, consideramos que o professor deve assumir papel mediador e criar condições para que o estudante seja ator principal da construção de seus conhecimentos a partir da sequência didática envolvendo modelagem matemática.

Nesse contexto, gerando uma 'ruptura' do contrato didático convencional entre professor e estudante, o professor deve propor um *milieu* material, de modo que o estudante aceite atuar, falar, refletir e evoluir sobre ele de forma autônoma. Essa mudança de contrato é denominada de devolução, onde o estudante aceita o problema proposto pelo professor. Assim,

---

[60] « Les situations d'apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances ».

[61] Definimos o processo de institucionalização na seção 4.2.2.

"a devolução é o ato no qual o professor faz o estudante aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (a-didática) ou de um problema e aceita ele mesmo as consequências dessa transferência" (BROUSSEAU, 1997, p. 41)[62].

4.1.1 Contrato didático e devolução

Para Brousseau (2010, p. 3), "o contrato didático é o resultado de uma 'negociação' frequentemente implícita dos procedimentos para estabelecer relações entre um aluno ou grupo de alunos, um certo ambiente e um sistema educacional"[63]. Dito de outra maneira, é o contrato didático que determina o papel de professor e estudante no processo de ensino e aprendizagem.

Brousseau (1998) destaca que o professor deve garantir que conhecimentos anteriores e condições permitam a aquisição do conhecimento nesta ruptura de contrato. Ou seja, é necessário criar condições suficientes para a apropriação do conhecimento, devendo o professor reconhecer esta aquisição quando ocorrer. O estudante, por sua vez, deverá satisfazer estas condições, mobilizando seus conhecimentos antigos na construção de novos. Assim, quando ocorre a devolução, o estudante reconhece que o problema foi escolhido com a intenção didática de promover um conhecimento novo, justificado pela lógica interna da situação.

Brousseau e Gibel (2005) e Gibel (2018) apresentam três possibilidades de devolução ao professor conforme o tipo de problema proposto aos estudantes. No primeiro caso, o professor pode apresentar uma situação onde a elaboração da solução seja justificada por conhecimentos já adquiridos e por informações da situação objetiva (*milieu* material). No segundo caso, pode-se utilizar um raciocínio original, logicamente dedutível dos dados disponíveis e dos conhecimentos anteriores dos estudantes, como no caso anterior. Aqui, o professor, voluntariamente ou não, aposta (ganha com uns, perde com outros) nas habilidades heurísticas dos estudantes. No terceiro caso, a solução pode requerer condições que não decorrem dos conhecimentos adquiridos e nem são logicamente dedutíveis dos dados. Este caso ocorre em situações abertas, em modelagem matemática, por exemplo, onde a solução-padrão

---

[62] « La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert ».

[63] « Le contrat didactique est le résultat d'une 'négociation' souvent implicite des modalités d'établissement des rapports entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif ».

não é unicamente construída pelos estudantes, mas com intervenções pontuais do professor.

Para os autores, nos dois primeiros casos, as condições da situação objetiva são suficientes para explicar e justificar a formulação dos estudantes, podendo comportar uma dimensão a-didática. O raciocínio produzido é uma ação fundamentada nas condições que definiram a situação objetiva a qual ele é confrontado. Desta forma, o raciocínio aparece como uma 'razão do saber', onde "os raciocínios produzidos permitem justificar a validade dos conhecimentos através de suas relações lógicas com outros, ou seja, por razões 'internas' ao saber" (BROUSSEAU, GIBEL, 2005, p. 6)[64]. No terceiro caso, o estudante admite a solução considerando a autoridade do professor, não havendo uma aprendizagem autônoma. Assim, o professor pode utilizar certas razões didáticas, como metáforas e analogias, que não podem ser justificadas por raciocínio lógico, e são, portanto, irrelevantes para a razão do saber; mas podem constituir estratégia de ensino e serem consideradas como "causas da aprendizagem".

Neste sentido, um aspecto a ser considerado na elaboração de uma sequência didática envolvendo modelagem matemática é o repertório didático da classe, definido como "o conjunto de meios, conhecimentos e saberes que o professor utiliza, e aqueles que ele pensa que pode esperar dos estudantes, como resultado de seu ensino durante as fases de validação e institucionalização"[65] (GIBEL, 2015, p. 6)[66]. Este repertório não se limita ao conjunto de conhecimentos e saberes da classe, mas também aos meios que podem permitir ao estudante gerenciar novos conhecimentos, novas fórmulas, possibilitando a reutilização de ações, métodos, formulações e justificativas anteriores[67].

4.1.2 Conhecimento, saber e repertório didático

Bloch (1999) destaca a importância de distinguir os termos 'conhecimento' e 'saber' no estudo de uma situação a-didática. Para Brousseau (2008, p. 31-32), "o conhecimento é uma maneira de controlar uma situação e obter um resultado de acordo com uma

[64] « les raisonnements produits permettent de justifier la validité des connaissances par leurs rapports logiques avec d'autres, autrement dit par des raisons 'internes' au savoir ».

[65] Definimos as fases de validação e institucionalização na seção 4.2.

[66] « L'ensemble des moyens, connaissances et savoirs, que le professeur met en œuvre, et ceux qu'il pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement lors des phases de validation et d'institutionnalisation ».

[67] Cabe destacar que o repertório didático de um estudante pode ser diferente do repertório didático da classe.

expectativa”[68]. Já o saber “são os meios sociais e culturais de identificar, organizar, validar e usar o conhecimento”[69] (BROUSSEAU, 1997, p. 9). Para Chauvat (1997 apud BLOCH, 1999, p. 6), “o conhecimento está do lado do controle da situação pelo aluno, enquanto o saber está do lado do controle da situação pela instituição”[70].

Margolinas (2012, p. 7) considera que o conhecimento mobilizado na resolução da situação proposta equilibra a relação do estudante com o *milieu*. Já o saber é uma construção social e cultural institucional. A autora destaca que o saber não é pessoal, contextual ou temporal. Ele é formulado, formalizado, validado, memorizado e passível de linearização. Assim, o conhecimento está relacionado a uma situação e o saber a uma instituição.

Brousseau (1998) considera que o papel do professor diante do saber é inverso ao do matemático. O matemático apresenta o saber de forma geral, atemporal, descontextualizada e despersonalizada, utilizando uma linguagem específica. O professor segue o caminho inverso, recontextualizando e repersonalizando o saber, procurando situações que permitam dar sentido ao conhecimento a ser ensinado. Se o professor obtiver êxito, o estudante será capaz de transformar suas respostas e seus conhecimentos em saberes no término do processo.

Para Bloch (1999, p. 6-7, itálico no original),

> O professor transporta para o *milieu* da situação uma parte de seus saberes, na forma de *conhecimentos*, para que o estudante possa encontrá-los e utilizá-los para controlar sua ação na situação; ao mesmo tempo, o professor utiliza conhecimentos (diferentes daquele do aprendiz) para verificar se o estudante está utilizando os conhecimentos adequados para controlar a ação no *milieu* adidático criado graças aos saberes do professor.[71]

Ao considerar a situação, o conjunto de meios de resolução que o estudante pode utilizar e o repertório didático do estudante, é possível distinguir duas categorias de meios: um *meio direto*, onde o próprio conhecimento do estudante permite a resolução da situação, e um *meio indireto*, que corresponde ao estabelecimento deste conhecimento pelo estudante.

Desta forma é possível distinguir três níveis no repertório didático: o *sistema*

---

[68] « La connaissance est un moyen de contrôler une situation et d’obtenir un résultat selon une attente ».

[69] « Sont les moyens sociaux et culturels d’identification, d’organisation, de validation et d’emploi des connaissances ».

[70] « Les connaissances se situent du côté du contrôle de la situation par l’élève, tandis que les savoirs sont du côté du contrôle de la situation par l’institution ».

[71] « L’enseignant transporte dans le milieu de la situation une partie de ses *savoirs*, sous forme de *connaissances* afin que l’élève puisse les rencontrer et les utiliser pour contrôler son action dans la situation ; en même temps l’enseignant emploie, lui, des connaissances (différentes de celles de l’enseigné) pour contrôler que l’élève utilise bien les connaissances adéquates au contrôle de l’action dans le milieu a-didactique aménagé grâce aux savoirs de l’enseignant ».

produzido, ou seja, o registro de fórmulas; o *sistema organizador*[72] utilizado para gerenciar conhecimentos, sejam novos ou antigos; e o *repertório de decisão*, que é assimilável a um repertório de saberes em relação a um conjunto de situações. É justamente o repertório de decisão que comanda o repertório de ação do estudante (GIBEL, 2018).

Outro elemento que compõe o repertório didático, da classe ou do estudante, é o *repertório de representação*, composto por registros de representação, por ferramentas e seus usos, bem como elementos linguísticos que permitam nomear os objetos, formular propriedades e resultados (e, consequentemente, as atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão propostas por Duval (1995)).

Para Gibel (2018, p. 33),

> O repertório de representação refere-se à capacidade do sujeito de utilizar seu sistema organizador para responder a uma situação a fim de: a) perceber e se apropriar das relações entre os diferentes objetos que definem o *milieu* objetivo (o estudante deve representar a situação objetiva); b) fazer a ligação entre a situação devolvida e as situações encontradas anteriormente; c) decidir quais fórmulas convém mobilizar, reativar ou combinar para agir sobre a situação. As ações do sujeito resultam, então, do funcionamento do sistema gerador de seu repertório de representação. (adaptações e itálico nossos).[73]

Segundo o autor, os estudantes decidirão uma sequência de ações sobre o *milieu* material a partir do repertório de representação, que revelarão o repertório de ação do estudante. Como resultado, o estudante modificará seu repertório de representação.

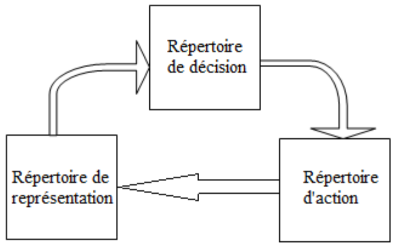
O esquema a seguir modela o funcionamento do repertório didático do estudante durante uma situação a-didática ou de dimensão a-didática.

---

[72] "O sistema organizador é o que permite ao estudante reencontrar ou reativar afirmações já encontradas em situações anteriores, mas também gerar novas fórmulas articulando certos enunciados, ou combinando-os para responder à situação" (GIBEL; ENNASEF, 2012, p. 93). Em francês: « Le système organisateur est ce qui permet à l'élève de retrouver ou de réactiver des énoncés déjà rencontrés dans des situations antérieures, mais aussi de générer de nouvelles formules en articulant entre eux certains énoncés, ou en les combinant entre eux afin de répondre à la situation ».

[73] le répertoire de représentation réfère à la capacité du sujet à utiliser son système organisateur pour répondre à une situation afin de: 1) Percevoir et s'approprier les relations entre les différents objets qui définissent le milieu objectif (l'élève doit se représenter la situation objective). 2) Faire le lien entre la situation dévolue et les situations rencontrées précédemement. 3) Décider des formules qu'il convient de mobiliser, de réactiver ou de combiner afin d'agir sur la situation. Le actions du sujet résultent alors du fonctionnement du système générateur de son répertoire de représentation.

Figura 8 – Modelização do funcionamento do repertório didático



Fonte: Gibel, Ennassef (2012, p. 93).

Desta maneira, em uma sequência didática envolvendo modelagem matemática de transformações gasosas, espera-se que o estudante mobilize seu repertório didático na busca de um modelo adequado para a situação inicial proposta. É justamente esse repertório que possibilitará o engajamento do estudante nos diferentes níveis de *milieux* e nas diferentes fases da modelagem matemática.

Definidos os termos ‘situação didática’, ‘situação a-didática’, ‘*milieu*’ e a noção de ‘devolução’, abordamos na próxima seção as fases de uma situação a-didática.

4.2 CLASSIFICAÇÃO DA SITUAÇÃO A-DIDÁTICA

Há quatro tipos de situação a-didática: uma situação de ação, uma situação de formulação, uma situação de validação e uma situação de institucionalização. Em cada uma delas, o estudante pode mobilizar diferentes conhecimentos e saberes, que definem repertórios de ação, formulação e validação do estudante (GIBEL, 2015).

4.2.1 Ação, formulação e validação

Numa *situação de ação*, o estudante deverá agir sobre o *milieu*, que lhe retornará informações sobre a ação. Logo, uma boa situação de ação é aquela onde o estudante pode agir sem a intervenção do professor, já que a situação permite que ele avalie hipóteses, estratégias e decisões, ajustando-as por meio de ações e retroações do *milieu*[74]. Assim, a situação inicial proposta na modelagem matemática, que irá compor o *milieu*, deve provocar o estudante a formular hipóteses, definir estratégias e tomar decisões, ou seja, deve permitir a fase inteiração[75].

Brousseau (2010, p. 3) assim define uma situação de ação:

> É uma situação em que o conhecimento do sujeito se manifesta apenas por decisões, por ações regulares e efetivas sobre o milieu e onde é irrelevante para a evolução das interações com o milieu o agente possa ou não identificar, explicar ou explicar o conhecimento necessário.[76]

Esta sucessão de interações do estudante com o *milieu* é denominada *dialética da ação*. Durante esta dialética, o estudante organizará estratégias e construirá uma representação da situação, que lhe servirá de modelo para sua tomada de decisões (BROUSSEAU, 1998).

Na *situação de formulação*, o objetivo é a troca de informações entre os estudantes, seja em língua natural, seja em linguagem matemática, compartilhando e complementando informações e estratégias. Nessa etapa, o estudante expõe a solução encontrada para o problema, bem como as ferramentas utilizadas. Portanto, durante a situação de formulação, o estudante adentra nas fases de matematização e resolução de uma atividade de modelagem matemática, podendo retornar a etapas anteriores, caso necessário[77].

Brousseau (2010, p. 3-4) assim define uma situação de formulação:

> É uma situação que relaciona pelo menos dois agentes a um *milieu*. Seu sucesso comum requer que se formule o conhecimento em questão (de alguma forma) para o benefício do outro que precisa, a fim de convertê-lo em uma decisão efetiva sobre o *milieu*. A formulação consiste em que estes agentes usem um repertório conhecido para formular uma mensagem original, mas a situação pode levar a mudar este repertório. Pode-se deduzir teoricamente e verificar experimentalmente que uma formulação "espontânea" do conhecimento requer que esse conhecimento exista de antemão como um modelo implícito de ação nos dois agentes.[78]

---

[74] Segundo Almouloud (2007) quando os estudantes trabalham em grupo, o conhecimento de cada um dos alunos faz parte do milieu de cada um deles, o que também poderá proporcionar retroações.

[75] Em nosso estudo, conforme será exposto no capítulo 6, a situação de ação seria aquela onde os estudantes entram em contato com cada um dos contextos iniciais propostos, fazendo a leitura e inferindo informações que possibilitarão a tomada de decisões para obter a solução da atividade proposta.

[76] « C'est une situation où la connaissance du sujet se manifeste seulement par des décisions, par des actions régulières et efficaces sur le milieu et où il est sans importance pour l'évolution des interactions avec le milieu que l'actant puisse ou non identifier, expliciter ou expliquer la connaissance nécessaire ».

[77] Em nosso estudo, a situação de formulação pode ser associada ao momento em que os estudantes começam a refletir sobre a relação entre as grandezas em cada um dos contextos propostos e a mobilizar diferentes conceitos e registros de representação semiótica para construir um modelo matemático.

[78] « C'est une situation qui met en rapport au moins deux actants avec un milieu. Leur succès commun exige que l'un formule la connaissance en question (sous une forme quelconque) à l'intention de l'autre qui en a besoin

Este desenvolvimento progressivo de uma linguagem compreensível, que considera objetos e relações pertinentes da situação de forma adequada, ou seja, que permite raciocínios e ações, é denominado de *dialética da formulação* (BROUSSEAU, 1998). É justamente esta dialética que torna possível explicitar as ações utilizadas no decorrer da situação e avaliar a validade das hipóteses construídas.

Na *situação de validação*, o estudante deve mostrar a validade de seu resultado a um interlocutor. Assim, o estudante precisa justificar exatidão e pertinência de seu modelo, fornecendo, se possível, uma validação semântica e sintática, que poderá (ou não) ser aceita pela audiência. Nessa etapa ocorre um debate entre os estudantes, estabelecendo provas ou refutando-as e permitindo interações com o meio. Em síntese, o objetivo é validar sintática, semântica ou pragmaticamente as discussões anteriores (ALMOULOUD, 2007). Assim, durante a situação de validação, ocorre a fase de interpretação de resultados e validação de uma atividade de modelagem matemática, e, tal como na situação de formulação, o estudante pode retornar a etapas anteriores.

Brousseau (2010, p. 4) assim define uma situação de validação:

> Uma situação de validação é uma situação cuja solução exige que os agentes estabeleçam juntos a validade do conhecimento característico desta situação. Sua realização efetiva depende, então, também da capacidade dos protagonistas de estabelecer explicitamente essa validade. ela é baseada no reconhecimento por todos de uma conformidade com uma norma, uma construtibilidade formal em um certo repertório de regras ou teoremas conhecidos, uma relevância para descrever elementos de uma situação, e/ou uma adequação verificada para resolvê-lo. Implica que os protagonistas confrontem suas opiniões sobre a evolução do milieu e concordem segundo com as regras do debate científico.[79]

Conforme Brousseau (1998), uma situação de validação conduz a uma *dialética da validação*, em que os estudantes devem discutir situação e resultados, podendo comportar dialéticas da ação e formulação.

Para Balacheff (1987), há diferentes níveis e formas de validação, cuja mobilização

---

pour la convertir en décision efficace sur le milieu. La formulation consiste pour ce couple d'actants à utiliser un répertoire connu pour formuler un message original, mais la situation peut conduire à modifier ce répertoire. On peut déduire théoriquement et vérifier expérimentalement qu'une formulation 'spontanée' de connaissance exige que cette connaissance existe préalablement comme modèle implicite d'action chez les deux actants ».

[79] « Une situation de validation est une situation dont la solution exige que les actants établissent ensemble la validité de la connaissance caractéristique de cette situation. Sa réalisation effective dépend donc aussi de la capacité des protagonistes d'établir ensemble explicitement cette validité. Celle-ci s'appuie sur la reconnaissance par tous d'une conformité à une norme, d'une constructibilité formelle dans un certain répertoire de règles ou de théorèmes connus, d'une pertinence pour décrire des éléments d'une situation, et/ou d'une adéquation vérifiée pour la résoudre. Elle implique que les protagonistes confrontent leurs avis sur l'évolution du milieu et s'accordent selon les règles du débat scientifique ».

e utilização são provocadas pelas exigências da situação. Para ele, um processo de validação está diretamente relacionado a propósitos práticos, para decidir sobre a veracidade de uma afirmação ou de um resultado, recorrendo a produção de uma prova[80]. Contudo, há situações que requerem a mobilização de uma situação de decisão, que "demandam à mobilização de meios de decisão e, consequentemente, de meios de validação, sem que seja necessária a produção explícita de provas. É uma proposição verdadeira e não uma prova dessa proposição que deve ser produzida" (BALACHEFF, 1987, p. 8)[81]. E complementa:

> Na situação de decisão, as operações intelectuais de raciocínio hipotético-dedutivo (como um sistema legítimo e confiável de produção de informação) podem ser implementadas sem que nenhuma prova seja produzida. Os controles lógicos e semânticos funcionam localmente no curso do desenvolvimento da solução. Eventualmente, como matemáticos, reconhecemos neste processo uma organização que é da ordem da demonstração; mas aqui ela é na operação do sujeito uma ferramenta e não um objeto. (BALACHEFF, 1987, p. 8)[82].

Assim, o debate sobre as decisões permite transformar uma situação de decisão em uma situação de validação, por garantir sua validade ou então refutá-la. Gibel (2018) destaca que este debate pode ser mobilizado por estudantes e professores. Esse fato pode ser observado, por exemplo, quando o professor solicita que o estudante explique a validade de determinada afirmação (ou mesmo de determinado registro de representação), onde proposições verdadeiras podem ser apontadas sem necessariamente ter o *status* de uma demonstração.

4.2.2 Situação de institucionalização

Por fim, a fase de institucionalização é caracterizada como "aquela onde o professor

---

[80] Balacheff (1987, p. 2) distingue os termos explicação, prova e demonstração. Para ele, uma *explicação* é discurso visando tornar inteligível o caráter de verdade de uma proposição ou de um resultado adquirido pelo interlocutor, uma *prova* é uma explicação aceita por uma determinada comunidade, num dado momento e uma *demonstração* é uma prova considerada verdadeira por ser deduzida de um conjunto de regras bem definidas.

[81] « Demande la mobilisation de moyens de décision et donc de moyens de validation, sans que pour autant soit exigée la production explicite de preuves. C'est une proposition vraie et non la preuve de cette proposition qui doit être produite ».

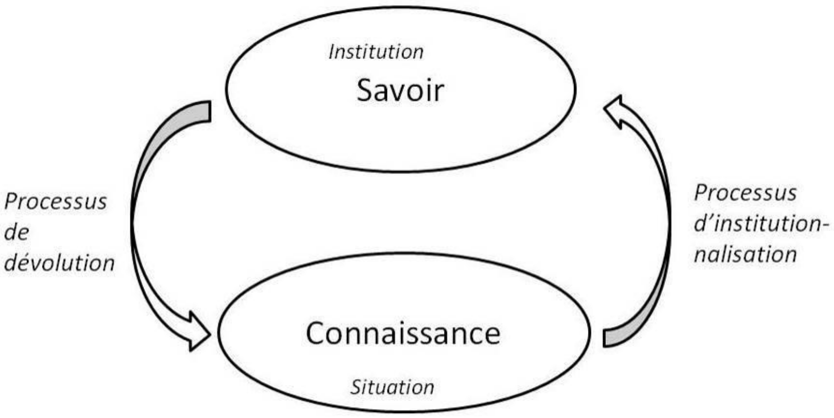
[82] « Dans la situation de décision, les opérations intellectuelles du raisonnement hypothético-déductif (en tant que système légitime et fiable de production d'informations) peuvent être mises en œuvre sans que pour autant une preuve soit produite. Les contrôles logiques et sémantiques fonctionnent localement dans le cours de l'élaboration de la solution. Éventuellement, en tant que mathématiciens, nous reconnaitrons dans ce processus une organisation qui est de l'ordre de la démonstration ; mais ici elle est dans le fonctionnement du sujet un outil et non un objet ».

fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber" (ALMOULOUD, 2007, p. 40). Brousseau (2010, p. 4) a define como "uma situação que se desenvolve pela passagem do papel de um conhecimento como meio de resolver uma situação de ação, formulação ou prova, para um novo papel, o de referência para usos futuros, pessoais ou coletivos"[83].

Nessa fase o professor retoma a condução da aula e, a partir de observações, modifica o repertório dos estudantes (da turma), acrescentando novos conhecimentos, aperfeiçoando aqueles já existentes e corrigindo conceitos construídos erroneamente[84]. Logo, no decorrer da fase de institucionalização, o professor fixa explicitamente o status cognitivo do saber, ou seja, nesta fase o conhecimento passa a ter status de saber.

O esquema a seguir, apresentado por Margolinas (2012), permite relacionar conhecimento e saber nas fases de devolução e institucionalização. Na primeira, o professor, partindo de um saber, espera propor uma situação que lhe permita adquirir os conhecimentos correspondentes ao saber que ele deseja ensinar. Na segunda, há um movimento inverso, ou seja, o professor relaciona conhecimentos mobilizados pelos estudantes durante as fases de ação, de formulação e de validação, ensinando-os um saber (MARGOLINAS, 2015).

Figura 9 – Saber e conhecimento nos processos de devolução e institucionalização



Fonte: Margolinas (2012, p. 9).

Comin (2000) ressalta que a institucionalização é um processo complexo, exigindo atenção especial, porque ela condiciona a aprendizagem, e o estabelecimento cultural do objeto

---

[83] « Une situation qui se dénoue par le passage d'une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives ».

[84] Para Almouloud (2007), se a institucionalização for feita antecipadamente, pode interromper a construção de significado pelo estudante e impedir uma aprendizagem adequada; se feita tardiamente, reforça interpretações equivocadas e atrasa a aprendizagem

do saber. Para o autor, a institucionalização é o reconhecimento coletivo do status atribuído a um objeto, apresentando ao menos quatro aspectos: uma intenção, as condições, uma realização e o uso.

A *intenção* refere-se ao projeto didático. O professor pretende dar um status a um objeto, segundo a organização didática que ele projeta. Assim, esta organização sofre influência da epistemologia do professor, da importância que ele atribui a esse objeto, sua interpretação do currículo escolar e da organização existente deste saber matemático.

As *condições* relacionam-se à importância matemática ou didática deste objeto. No primeiro caso, o objeto apresenta papel importante na organização dos saberes matemáticos. No segundo, aparece como necessário para uma lição ou para uma progressão. Por exemplo, a institucionalização de um objeto supõe vocabulário e uso padrão.

A *realização* é um contrato implícito ou explicito entre professor e estudante, onde a institucionalização não pode ser efetiva sem que os estudantes percebam a importância, a consistência, a pertinência e a funcionalidade do objeto.

Por fim, o *uso* considera que a institucionalização vai além de declarações públicas do professor. Comin (2000) destaca que é preciso que o professor verifique se os estudantes sabem reconhecer e identificar o objeto institucionalizado, dispõem de um vocabulário para o designar e sabem as condições em que este objeto pode ser empregado.

Em nossa concepção, concordando com Paschoal (2016), a teoria das situações didáticas em um trabalho conjunto com a modelagem matemática possibilita ao professor um melhor direcionamento do processo de ensino. A teoria das situações didáticas permite refletir a fase de devolução e institucionalização, refletindo a relação entre professor, saber e estudante nos diferentes níveis de *milieux*. Em contrapartida, a modelagem matemática proporciona uma reflexão sobre as diferentes fases da atividade proposta, desde a inteiração até a validação.

Para Bloch (1999), a situação (e o *milieu*) precisa ter uma dimensão a-didática para o estudante, permitindo o desenvolvimento das fases de ação, formulação e validação e a exploração durante a fase de institucionalização. Neste sentido, discutiremos a modelização do funcionamento do conhecimento em uma situação a-didática na próxima seção.

4.3 ESTRUTURAÇÃO DO *MILIEU*

A noção central da teoria das situações didáticas é a de *milieu*. É o *milieu* que possibilita a análise da relação entre estudante, conhecimento/saber e situação, bem como a relação entre conhecimento e situação. Conforme Almouloud (2007, p. 42), o objetivo desta teoria é "estudar os fenômenos que interferem no processo de ensino e de aprendizagem da matemática e propor um modelo teórico para a construção, a análise e a experimentação de situações didáticas". Portanto, ao organizar o *milieu*, o professor deve propor uma situação-problema com características de situação a-didática (ou de dimensão a-didática), com a qual o estudante possa interagir.

Margolinas (1994, 1995), fundamentada em Brousseau, propõe uma estruturação do *milieu* para caracterizar as posições possíveis do *milieu*, do professor e do estudante em uma situação didática. A seguir, apresenta-se a versão de Bloch (1999) do quadro de Margolinas[85].

Quadro 7 – Estruturação do Milieu

M_3: M- de construção		P_3: P- noosfera	S_3: Situação noosférica	Sobre didática
M_2: M- de projeto		P_2: P- construtor	S_2: Situação de construção	
M_1: M- didático	E_1: E- reflexivo	P_1: P- planejador	S_1: Situação de projeto	
M_0: **M- de aprendizagem: institucionalização**	**E_0:** **Estudante**	**P_0:** **Professor**	**S_0:** **Situação didática**	
M_{-1}: M- de referência: **formulação, validação**	E_{-1}: E- aprendiz	P_{-1}: P regulador	S_{-1}: Situação de aprendizagem	a-didática
M_{-2}: M- objetivo: **Ação**	E_{-2}: E- agindo	P_{-2}: P-observador, devolvedor	S_{-2}: Situação de referência	
M_{-3}: M- material	E_{-3}: E- objetivo		S_{-3}: Situação objetiva	

Fonte: Bloch (2005, p. 74, negrito no original).

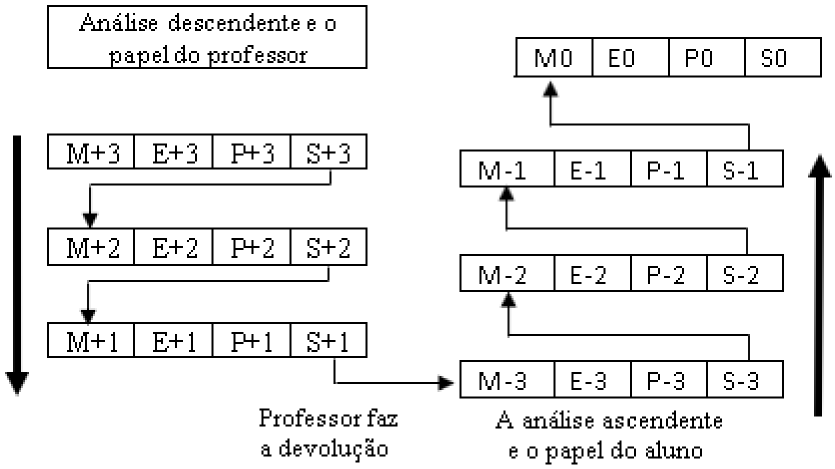
Margolinas (1994/1995) desenvolveu duas análises possíveis de uma situação didática, que serão apresentadas na sequência, a análise ascendente $S_{-3} \longrightarrow S_0$ e a análise descendente $S_3 \longrightarrow S_0$, associadas respectivamente às atividades do estudante e do professor.

[85] Na estrutura proposta, M refere-se ao *milieu*, E refere-se à estudante e P refere-se a professor.

4.3.1 Análise descendente

Segundo Almouloud (2007), para uma melhor compreensão das análises propostas é preciso considerar que o professor antes de entrar em S_0 faz a devolução do problema ao estudante, desencadeando o nível S_{-3}.

Figura 10 – Estruturação do *milieu*: análise descendente e ascendente



Fonte: Almouloud (2007, p. 44).

O nível 3 ou de *noosfera* caracteriza a atividade do professor[86], que deve refletir o ensino da matemática em linhas gerais. Neste nível, ocorre a discussão sobre o currículo escolar, documentos oficiais e o papel do objeto matemático a ser ensinado.

O nível 2 ou de *construção* é aquele no qual o professor começa a refletir sobre o ensino de determinado conteúdo. O professor seleciona/constrói uma situação (ou um conjunto de situações) e analisa as variáveis envolvidas, bem como os conhecimentos prévios necessários para que o estudante possa resolvê-la. Portanto, S_2 corresponde a M_3. Em relação a M_2, ele compreende as situações onde o debate matemático pode ocorrer.

O nível 1 ou de *projeto*, é aquele onde o professor planeja a aula, fundamentado nos dados obtidos em 2. Assim, S_1 equivale a M_2. Neste nível, os conhecimentos de P_1 justificam suas escolhas na construção da sequência e em sua gestão (MARGOLINAS, 1994).

O nível 0 ou *didático* é o da institucionalização, caracterizando a ação do professor

[86] Cabe destacar que neste nível o professor é entendido como aquele que organiza o sistema de ensino, não sendo o mesmo que irá organizar a atividade que será aplicada em sala de aula.

em sala de aula. Neste nível M_0, E_0 e P_0 interagem, formando S_0. Margolinas (1994, p. 11) considera M_0 como resultante de S_{-1}. Neste momento E_0 é confrontado com uma situação didática e P_0, fundamentando nas observações de P_{-2} e P_{-1}, deve decidir quais intervenções precisam ser realizadas. Portanto, S_0 inclui a fase de conclusão dos resultados obtidos nas fases a-didáticas e a fase institucionalização.

O nível -3 é aquele onde ocorre a devolução, sendo caracterizado pela *situação objetiva não finalizada*. É nesse momento que estudante E_{-3} toma conhecimento da atividade que lhe é proposta, ou seja, o estudante entra em contato com o *milieu* material. Margolinas (2004) ressalta que é preciso que situação objetiva e conhecimentos sejam naturalizados para que a devolução seja bem-sucedida. Segundo Margolinas (1994, p. 6), "a situação objetiva deve ser transparente para as pessoas engajadas na situação didática. Esta situação objetiva serve, então, efetivamente, de *milieu* objetivo para a situação de referência"[87]. Considerando uma modelagem matemática, a situação objetiva é formulada a partir do problema proposto. Já o *milieu* material é composto por informações relacionadas a este problema, podendo, por exemplo, apresentar um texto em linguagem natural, em conjunto com uma tabela ou um gráfico.

O nível -2 é caracterizado pela *situação de referência*. Para Margolinas (1994, p. 7), S_{-2} pode ser descrita como o estudo exaustivo (ou quase exaustivo) das informações apresentadas na atividade. Nesse nível, os estudantes estão resolvendo o problema e o professor mediando e observando ações e retroações e antecipando possíveis intervenções para as fases de validação e de institucionalização. Segundo Margolinas (1997), diferentes conhecimentos serão mobilizados neste nível, produzindo diferentes interpretações. Assim, M_{-2} decorre de ações e retroações do estudante sobre M_{-3}.

Para Brousseau (1997, p. 21-22), "o *milieu* objetivo é mobilizado em uma situação de ação constituindo, seja o *milieu* efetivo sobre o qual o estudante é chamado a agir, seja um *milieu* fictício onde ele deve imaginar o funcionamento ou as transformações para responder uma questão"[88]. Neste nível, em uma atividade de modelagem matemática, o estudante deve construir suas hipóteses, escolher os tratamentos e conversões necessárias para resolução da situação, formular um modelo matemático e, por fim, apresentar uma justificativa.

---

[87] « la situation objective doit être transparente pour les personnes engagées dans la situation didactique. Cette situation objective sert donc effectivement de milieu objectif pour la situation de référence ».

[88] « Le milieu objectif est mobilisé dans une situation d'action dont il constitue soit le milieu effectif sur lequel l'élève est appelé à agir soit un milieu fictif dont il doit imaginer le fonctionnement ou les transformations pour répondre à une question ».

Em relação ao papel do professor no *milieu* objetivo, Bloch (1999, p. 20) destaca que ele se relaciona à observação sistemática dos estudantes, permitindo:

> - Engajar a devolução;
> - Observar o funcionamento adequado da situação de referência, os procedimentos dos estudantes, os erros, o funcionamento da classe (trocas nos grupos e entre os grupos. Formulações, oposições...);
> - Reconhecer os conhecimentos dos estudantes, e em primeiro lugar assegurar-se que eles têm a sua disposição os conhecimentos necessários para se engajar no jogo proposto;
> - Preparar a etapa seguinte da situação, de forma que o jogo dos estudantes seja possível na fase de formulação e validação.[89]

O nível -1 é onde a situação de aprendizagem dos estudantes pode ser identificada, sendo M_{-1} composto pelas produções de S_{-2} segundo Margolinas (1994). Nesse nível, o estudante tenta, mas não conclui a atividade por falta de conhecimentos. Isso ocorre porque ele é confrontado por uma situação de aprendizagem problemática que não é transparente como as anteriores (MARGOLINAS, 1994). Assim, este nível é caracterizado pelas fases de formulação e validação, onde o estudante justifica matematicamente suas hipóteses.

Para Gibel (2015, p. 11), "o estudante em situação de aprendizagem é levado a produzir formulações de métodos gerais e a se interrogar sobre a validade de cada uma delas"[90]. Se considerarmos uma atividade de modelagem matemática, o estudante deverá se interrogar neste nível sobre a validade de suas formulações e do modelo obtido. Assim, E_{-1} deverá refletir sobre os objetos, as regras e as condições nas quais o modelo foi elaborado na fase de formulação. Já a fase de validação permite ao estudante E_{-1} considerar o raciocínio construído em situações de argumentação e de prova, ou seja, ele deve debater a validade do modelo.

Para Margolinas (1997), o papel do professor no *milieu* de referência é interpretar as ações dos estudantes e tomar decisões. Bloch (1999, p. 22) completa: "neste *milieu*, ele continua a triar, classificar as produções dos estudantes e a relacioná-las com os

---

[89] « - engager la dévolution ;

- observer : le fonctionnement convenable de la situation de référence, les procédures des élèves, les erreurs, le fonctionnement de la classe (échanges dans les groupes et entre groupes. Formulations, oppositions...) ;

- reconnaître les connaissances des élèves, et en tout premier lieu s'assurer que ceux-ci ont bien à leur disposition les connaissances nécessaires pour s'engager dans le jeu proposé ;

- préparer l'étape suivante de la situtation, de façon à ce que le jeu des élèves s'avère possible dans la phase de formulation et validation. »

[90] « L'élève en situation d'apprentissage est amené à produire des formulations de méthodes générales et à s'interroger sur la validité de chacune d'elles ».

conhecimentos"[91]. Assim, conforme Bloch (1999), é essa atividade que permitirá ao professor se engajar nas fases de validação e institucionalização.

Bloch (1999), ao analisar a estrutura proposta por Margolinas, destaca a importância de se discutir o papel do professor, propondo uma análise ascendente da situação do professor. A autora destaca que se queremos compreender o funcionamento da situação é preciso estudar a atividade matemática do professor e do estudante em conjunto. Como argumentaremos mais adiante, nos termos da teoria de conciliação de metas (RAUEN, 2014, 2018), professor e estudante precisam coordenar colaborativamente suas metas e submetas no decorrer da situação.

4.3.2 Análise ascendente da situação do professor

A proposta de Bloch (1999) em relação a análise ascendente da situação do professor se refere a ideia que a observação de situações de ensino e aprendizagem não leva em consideração apenas os conhecimentos, erros, concepções dos estudantes, mas também as interações entre professor e estudante. A autora considera que durante a situação a-didática professor e estudante aprendem, já que ambos interagem com o *milieu*, apesar de, conforme Conne (1992), o *milieu* do professor não ser o mesmo do aluno e, consequentemente, a aprendizagem não ser a mesma para ambos.

Bloch (1999) considera que a atividade deve ser observada do ponto de vista do estudante e do ponto de vista do professor. Do ponto de vista do estudante deve-se analisar os conhecimentos que o *milieu* criado o fará encontrar. Do ponto de vista do professor, os conhecimentos e saberes que ele deve considerar para poder conduzir a atividade.

Para estudar o *milieu* do professor é preciso então considerar dois objetos:

> - Os elementos objetivos do *milieu* (os estudantes, os elementos da situação, a relação entre o estudante e os vários *milieux* a-didáticos...);
> - Os conhecimentos e os saberes que o professor coloca em jogo na situação.[92]

---

[91] « Dans ce milieu, il continue à trier, classer, les productions des élèves, et à les mettre en relation avec des connaissances ».

[92] « - les éléments objectifs du milieu (les élèves, les éléments de la situation, les rapports entre l'élève et les différents milieux a-didactique...) ;

Para Bloch, a análise ascendente do papel do professor é pertinente se for possível identificar os diferentes níveis do *milieu* do professor e as características de sua interação com esses *milieux*; identificar a atividade matemática do professor e do estudante; caracterizar o papel e os conhecimentos do professor em uma situação a-didática; e atualizar os critérios da atividade matemática em classe, permitindo avaliar a eficácia de sua relação com o saber.

Desta forma, a análise permite identificar as características do *milieu* material do professor, do *milieu* objetivo do professor, do *milieu* de referência do aluno e do *milieu* de referência para o professor.

O *milieu* material do professor é definido por Bloch (1999) como aquele composto pelos estudantes e pelo *milieu* material dos estudantes. De acordo com a autora o professor é o responsável pela adequação do *milieu* material para a continuidade do projeto e pela utilização deste *milieu* material pelos estudantes conforme o planejado. Portanto, o *milieu* antagonista do professor é formado pelo estudante e pelo *milieu* do estudante, sendo possível identificar dois componentes: o *milieu* material do estudante, que o professor controla e as reações dos estudantes, as quais não podem ser controladas pelo professor.

O *milieu* objetivo do professor é formado pelos elementos da situação, das ações dos estudantes e, principalmente, dos conhecimentos destes e das modificações que estes conhecimentos provocam no *milieu* objetivo dos estudantes (BLOCH, 1999). Desta forma, o *milieu* do professor é parcialmente modelado pelas ações, tentativas, erros e conhecimentos dos estudantes, oriundas do *milieu* objetivo do estudante. Portanto, o professor precisa observar as ações dos alunos, de modo que ele possa antecipar as intervenções necessárias durante a fase de validação, ou seja, o *milieu* de referência é um *milieu* para a validação.

O *milieu* de referência do estudante, conforme Bloch (1999), é aquele onde o estudante toma consciência da situação, começando a transformar conhecimentos em saberes. Para a autora, pode haver uma ruptura do contrato inicial no *milieu* de referência do estudante, já que o estudante visa a não mais tatear a situação, mas compreender o porquê e como obter a solução. Dito de outra maneira, o estudante renegocia o contrato sobre a fase de validação. Desta maneira, Bloch (1999) considera que o momento onde o estudante pode elaborar seus saberes da situação, ao menos parcialmente, é aquele onde o *milieu* material se encontra em segundo plano e a fase de formulação se encontra em primeiro plano. É justamente aqui que o professor deve se ocupar em gerenciar as formulações dos estudantes, tanto do ponto de vista matemático, tanto do ponto de vista didático.

- les connaissances et les savoirs que le professeur met en jeu dans la situation ».

Considerando esta característica do *milieu* de referência de estudante a autora conclui: “o milieu de referência do estudante é um *milieu para a ação* do professor” (BLOCH, 1999, p. 17, itálico no original)[93].

A partir desta análise ela identifica três *milieux* para o professor em classe:

> - Um *milieu* de observação, correspondente ao milieu objetivo do estudante agindo;
> - Um *milieu* para a ação, correspondente ao milieu de referência do estudante aprendiz;
> - Um *milieu* para a institucionalização, correspondente ao milieu de aprendizagem do estudante na situação didática. (BLOCH, 1999, p. 18)[94].

O *milieu* de referência do professor é constituído dos elementos de referência da situação, do trabalho visível dos estudantes sobre estes elementos (testes, erros, formulações, estratégias) e dos conhecimentos manifestados pelos estudantes em suas ações e declarações (BLOCH, 1999). Assim, o *milieu* de referência é um *milieu* onde os estudantes estão engajados na formulação e validação. Trata-se de um *milieu* específico para a manifestação e construção dos conhecimentos do professor.

Neste *milieu*, o professor precisa agir sobre as ações realizadas pelos estudantes no decorrer das fases de formulação e de validação, contribuindo para:

> - Continuar a devolução da situação;
> - Permitir e gerenciar formulações públicas;
> - Engajar a problemática de validação (por exemplo, através de avaliações, debates, confrontos nos resultados dos estudantes) e conduzi-la a até a obtenção ou, pelo menos, o reconhecimento de critérios de validade satisfatórios (visados pelo professor para sua utilização na próxima fase, de institucionalização, por um lado; e adequado ao trabalho da noção a este nível, por outro lado). (BLOCH, 1999, p. 18)[95].

No processo de ensino e aprendizagem, conforme Almouloud (2007), o professor deve utilizar seus conhecimentos para controlar os meios antagônicos, sendo justamente a

---

[93] « Le milieu de référence de l’élève est un *milieu pour l’action* du professeur ».

[94] « - un milieu d’observation, correspondant au milieu objectif d’élève agissant ;

- un milieu pour l’action, correspondant au milieu de référence de l’élève apprenant ;

- un milieu pour l’institutionnalisation, correspondant au milieu d’apprentissage de l’élève dans la situation didactique ».

[95] « - poursuivre la dévolution de la situation ;

- permettre et gérer les formulations publiques ;

- engager la problématique de validation (par exemple par des bilans, débats, confrontations sur les résultats des élèves) et la conduire jusqu’à l’obtention ou tout au moins la reconnaissance de critères de validité satisfaisants (visés par le professeur pour leur utilisation dans la phase suivante d’institutionnalisation, d’une part ; et adéquats au travail de la notion à ce niveau, d’autre part) ».

interação com os diferentes *milieux* (do estudante e do professor) que contribuem para aprendizagem dos estudantes e do próprio professor. Bloch (1999, p. 23) ressalta que construção e utilização dos conhecimentos do professor estão relacionadas ao número de parâmetros que ele precisa controlar em seu *milieu* de referência:

> - O *milieu* de referência dos estudantes;
> - Suas produções (ensaios, sucessos, perguntas, erros, interações com a calculadora ou qualquer outra ferramenta disponível no *milieu*);
> - O conhecimento de estudantes visíveis no *milieu* de referência;
> - O conteúdo matemático associado ao *milieu* de referência;
> - Os critérios de validade introduzidos, colocados em jogo, discutidos;
> - Os exemplos suplementares, ou aqueles já existentes no *milieu*, que permitem testar estes critérios de validade, e as possibilidades do seu tratamento pelos estudantes;
> - O resultado do controle e teste dos estudantes sobre esses critérios de validade.[96]

Portanto, em função de critérios construídos ou reconhecidos pelos estudantes, o papel do professor em P_{-2} e P_{-1} permite a adaptação da fase de institucionalização.

Desta maneira, para uma melhor organização de sequências didáticas envolvendo atividades de modelagem matemática, apresenta-se a engenharia didática, que tem por objetivo conceber, realizar, observar e analisar situações didáticas na próxima seção.

4.4 ENGENHARIA DIDÁTICA

A *engenharia didática* surge no contexto da didática da matemática no início dos anos 1980. Enquanto metodologia de pesquisa, trata-se de um esquema experimental baseado em experimentações didáticas em classe, contemplando a concepção, a realização, a observação e análise de sequências de ensino (ARTIGUE, 1988).

---

[96] « - le milieu de référence des élèves ;

- leurs Productions (essais, réussites, questions, erreurs, interactions avec la calculatrice ou tout autre instrument outillant le milieu) ;

- les connaissances des élèves visibles au milieu de référence ;

- le contenu mathématique associe au milieu de référence ;

- les critères de validité introduits, mis en jeu, discutés ;

- les exemples supplémentaires éventuels, ou ceux déjà en place dans le milieu, permettant d’éprouver ces critères de validité, et les possibilités de leur traitement par les élèves ;

- le résultat de la prise en mains et de l’essai, par les élèves, de ces critères de validité ».

Para Brousseau (2013, p. 4)

> A engenharia didática se ocupa da criação de modelos consistentes e pertinentes e de realizar dispositivos de ensino de um conhecimento preciso, destinados a descrever ou prever e explicar os eventos observáveis de um determinado episódio de ensino (situações ou currículo) observados ou previstos:
> - Observa, a fim de coletar as informações que permitirão explicá-las a posteriori seu progresso e seus resultados, e permitir sua reprodução;
> - Considera, a fim de determinar as condições reproduzíveis (viáveis e comunicáveis) de seu curso e seus resultados observáveis;
> O estudo da consistência e relevância desses modelos refere-se a um exame crítico de todos os conceitos relacionados ao ensino, à aprendizagem e à própria constituição do assunto ensinado.[97]

Artigue (1988) apresenta quatro fases para engenharia didática: a fase de análise preliminar, a fase de concepção e de análise *a priori* de situações didáticas, a fase de experimentação e a fase de análise *a posteriori* e de validação, a serem realizadas no capítulo 6.

4.4.1 Análise preliminar

A fase de *análise preliminar* se apoia sobre um quadro teórico didático geral e os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto abordado. Geralmente, ela se fundamenta na análise epistemológica dos conteúdos a serem ensinados; na análise do ensino usual e seus efeitos, ou seja, na análise das práticas usuais para ensinar determinado conteúdo; e na análise do perfil do estudante, ou seja, na análise de suas concepções, dificuldades e obstáculos[98].

---

[97] « L'ingénierie didactique s'occupe de créer des modèles consistants et pertinents et de réaliser des dispositifs d'enseignement d'une connaissance précise, destinés à décrire ou à prévoir, et à expliquer les évènements observables d'un épisode d'enseignement déterminé (situations ou curriculum) observé ou envisagé :

- observé, afin de recueillir les informations qui permettront d'en rendre compte, d'expliquer a posteriori son déroulement et ses résultats, et de permettre sa reproduction

- envisagé, afin de déterminer les conditions reproductibles (réalisables et communicables) de son déroulement et de ses résultats observables.

L'étude de la consistance et de la pertinence de ces modèles renvoie à un examen critique de tous les concepts relatifs à l'enseignement, à l'apprentissage et à la constitution même de la matière enseignée ».

[98] É importante destacar que a autora considera que esta análise preliminar pode ser retomada e aprofundada nas diferentes fases da engenharia didática

Assim, a análise preliminar considera três dimensões: uma *dimensão epistemológica*, associada às características do saber em jogo; uma *dimensão cognitiva*, associada às características dos estudantes que participarão da atividade; e uma *dimensão didática*, associada às características do sistema de ensino.

Para Artigue (1996, p. 254-255), um ponto de apoio da análise preliminar "[...] reside na fina análise preliminar das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes, e a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções"[99].

4.4.2 Análise *a priori*

A *fase de concepção* e *de análise a priori* tem como objetivo a definição das variáveis, denominadas de variáveis de comando, sobre as quais o pesquisador irá agir. Tais variáveis podem ser consideradas macro-didáticas, relativas à organização global da engenharia e micro-didáticas, sobre a organização local da engenharia, ou seja, a organização de uma sessão ou de uma fase (ARTIGUE, 1996).

Para Artigue (1988, p. 294), "o objetivo da análise prévia é, portanto, determinar como as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos e o significado dos alunos"[100]. Portanto, ela irá ser construída a partir de hipóteses, as quais serão validadas na quarta fase, a de *análise a posteriori*.

A autora destaca que esta análise comporta uma parte descritiva, uma parte preditiva e uma análise centrada nas características de uma situação a-didática que se deseja construir e, posteriormente, devolver aos estudantes. Segundo Artigue (1988), na análise *a priori*, a situação é planejada. Nela se descrevem as escolhas efetuadas em nível local (e eventualmente em nível global) e as características da situação a-didática; analisam-se as possibilidades para o estudante agir nas fases de ação, formulação e validação; e, por fim, preveem-se os comportamentos possíveis e procura-se mostrar como a análise construída

[99] « Réside dans l'analyse préalable fine des conceptions des élèves, des difficultés et erreurs tenaces, et l'ingénierie est conçue pour provoquer, de façon contrôlée, l'évolution des conceptions ».

[100] « L'objectif de l'analyse a priori est donc de déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens ».

permite controlar o sentido desses comportamentos.

Almouloud (2007) considera que a análise *a priori* deve considerar uma análise matemática e uma análise didática. Na análise matemática, identificam-se métodos e/ou estratégias de resolução da situação, evidenciando-se os conhecimentos e saberes envolvidos. Na análise didática, devem-se considerar, ao menos, os seguintes aspectos: analisar a pertinência das situações propostas, em relação ao saber matemático visado e em relação aos saberes já adquiridos; identificar as variáveis de comando da situação e escolher aquelas necessárias para o estudo; estudar a consistência da situação; prever e analisar possíveis dificuldades dos estudantes; identificar os novos conhecimentos e/ou métodos de resolução que os alunos podem adquirir; e prever os saberes/conhecimentos e/ou métodos de resolução que deverão ser institucionalizados. Nesse rol de aspectos, pode-se ainda acrescentar a necessidade de se prever quais registros de representação semióticas poderão ser mobilizados pelo estudante e quais as possíveis dificuldades em sua coordenação.

4.4.3 Experimentação, análise *a posteriori* e validação

A *fase de experimentação*, segundo Almouloud e Coutinho (2008), é o momento onde o dispositivo construído é posto em funcionamento, ocorrendo ajustes quando necessário.

Por consequência, a experimentação supõe:

> - A explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa, a população de alunos que participará da experimentação;
> - O estabelecimento do contrato didático;
> - A aplicação do instrumento de pesquisa;
> - O registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.). (MACHADO, 2002, p. 244).

A fase de *análise a posteriori* e *validação* se apoia sobre os dados recolhidos durante a fase anterior, podendo ser complementada com informações externas, obtidas por meio de questionários ou entrevistas, por exemplo. Para Artigue (1988), ocorre nessa fase a confrontação dos dados coletados e dos elementos da análise *a priori*, permitindo a validação das hipóteses estabelecidas.

Conforme já expusemos, a teoria das situações didáticas apresenta dois grandes processos que organizam uma situação didática, a devolução e a institucionalização. Assim, concordando com Bessot (2011), consideramos que a concepção e a realização de uma engenharia didática devem ser organizadas em várias fases e prever os possíveis papéis do professor nelas. Para Bessot (2011), algumas destas fases serão mais características de um processo de devolução (organização de um *milieu*, situação a-didática de ação) e outras de um processo de institucionalização (situação a-didática de formulação e validação).

Gibel (2018), ao analisar uma situação a-didática (ou uma situação de dimensão a-didática), destaca alguns inconvenientes e dificuldades na relação didática: o estudante, diante de numerosas incertezas, deve tomar múltiplas decisões, e o professor, de um lado, deve analisar e gerenciar as decisões dos estudantes e suas diferentes formas de raciocínio e, de outro, avaliar suas aquisições do ponto de vista dos conhecimentos e saberes mobilizados. Neste sentido, o autor se interessa pelas diferentes formas de raciocínios desenvolvidos durante uma situação a-didática. A próxima seção é destinada à análise do raciocínio em teoria das situações didáticas.

4.5 ANÁLISE DO RACIOCÍNIO EM TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Segundo Oléron (1997 apud GIBEL, 2015, p. 2), “um raciocínio é um encadeamento, uma combinação ou um confronto de enunciados ou representações respeitando restrições que podem ser explicadas e condutivas de acordo com um objetivo”[101].

Brousseau e Gibel (2005, p. 4, itálico no original) formulam a definição a seguir:

> Um *raciocínio* é, portanto, uma relação R entre dois elementos A e B tais que:
> A designa uma condição ou um fato observado, contigente;
> B é uma consequência ou uma decisão ou um fato previsto;
> R é uma relação, uma regra, mais geralmente um conhecido emprestado de um repositório considerado conhecido, aceito. A relação R leva o agente, na circunstância A, a tomar a decisão B ou a antecipar o fato B ou a afirmar que o fato B é verdadeiro.[102]

---

[101] « Un raisonnement est un enchaîment, une combinaison ou une confrontation d’énoncés ou de représentation respectant des contraintes susceptibles d’être explicitées, et conduit en fonction d’un but ».

[102] « Um raisonnement est donc une relation R entre deux éléments A e B telle que :

A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;

B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;

Para os autores, “um *raciocínio efetivo* compreende ainda um agente E, estudante ou professor, que utiliza a relação R bem como um projeto determinado por uma situação S cuja realização exige o uso dessa relação” (p. 4, itálico no original)[103]. Em outras palavras, o sujeito utiliza a relação R, onde A permite inferir B.

4.5.1 Identificação e caracterização do raciocínio

Gibel (2015, 2018) considera que um raciocínio é idenficado segundo sua função em uma situação, podendo ser utilizado para decidir uma ação, informar, comunicar, explicar ou provar. Ele pode estar associado a uma situação de ação, de formulação ou de validação.

Em uma situação a-didática (ou de dimensão a-didática) o raciocínio é produzido pelos estudantes como um meio para interrogar a situação, apresentando uma solução; como um meio para organizar o trabalho e estabelecer suas decisões numa situação de ação; como um meio de apoio um pouco formal para precisar uma informação em uma situação de formulação; como meio de convencer um interlocutor durante a situação de validação; ou como meio de controlar a validade ou a pertinência de um resultado (GIBEL, 2015, 2018).

Em uma situação didática o raciocínio do estudante é direcionado principalmente ao professor seja para responder a uma demanda explícita ou implícita do professor; seja para justificar uma ação ou para produzir uma resposta; ou seja para justificar a validade de uma declaração (GIBEL, 2015, 2018).

Em relação ao raciocínio do professor, ele pode ser produzido em sua ação didática para apoiar, provocar ou justificar um aprendizado, como um meio didático de convencer os estudantes, assemelhando-se assim a meios retóricos, e, claro, como meio ensino. Mas ele pode também ser direcionado por razões didáticas, conforme citado anteriormente. Neste caso, o raciocínio exprimido pelo professor é

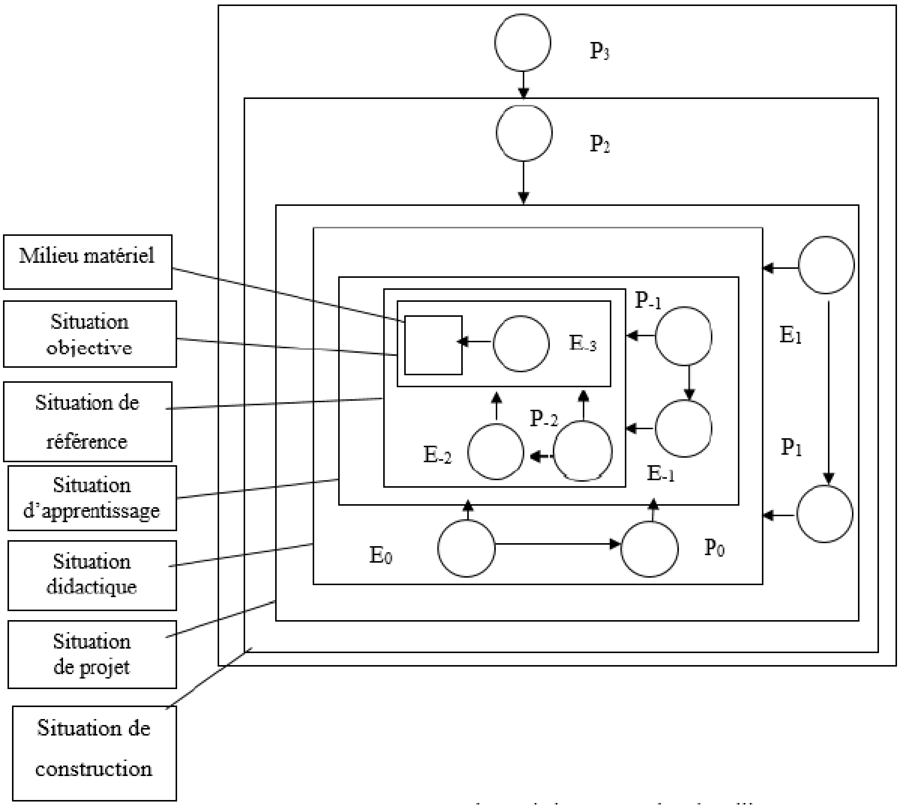
R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l’actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer le fait B est vrai ».

[103] « Un *raisonnement effecitf* comprend de plus un agent E, éléve ou professeur, qui utilise la relation R ainsi qu’un projet déterminé par une situation S dont la réalisation exige l’usage de cette relation ».

> - Um dado objeto de ensino a ser visto na fase de institucionalização ou em referência, mas não relacionado às condições que definem a situação objetiva (desde que exista realmente uma situação objetiva);
> - Um meio de escoramento, utilizável para a aprendizagem e a retenção da afirmação que é o objeto do ensino (comparável a um meio mnemônico "legítimo");
> - Um argumento de retórica didática, ou seja, um meio destinado a facilitar a apreensão de uma declaração do aluno. (BROUSSEAU, GIBEL, 2005, p. 7)[104].

Para explicar como um raciocínio é produzido, Gibel (2018) apresenta o esquema a seguir, elaborado a partir da estruturação do *milieu* já apresentada neste estudo.

Figura 11 – Estruturação do *milieu*



Fonte: Gibel (2018, p. 40).

No esquema de Gilbel, E_{-3} designa o estudante objetivo, E_{-2}, o estudante agindo e (M_{-3}, E_{-3}) define o *milieu* objetivo (M_{-2}) para E_{-2}. Neste nível, o estudante irá, a partir de seu repertório de conhecimentos, estabelecer uma ação (em geral sobre os objetos), que é motivada

---

[104] « - Soit un objet d'enseignement donné à voir en phase d'institutionnalisation ou en référence, mais sans lien avec les conditions qui définissent la situation objective (sous réserve qu'il y ait réellement une situation objective) ;

- Soit un moyen d'étayage, utilisable pour l'apprentissage et la rétention de l'énoncé qui est l'objet de l'enseignement (assimilable à un moyen mnémotechnique 'légitime') ;

- Soit un argument de rhétorique didactique, c'est-à-dire un moyen destiné à faciliter l'appréhension d'un énoncé par l'élève ».

pelo repertório didático que o estudante dispõe[105]. (M_{-2}, E_{-2}) constitui o *milieu* de referência (M_{-1}) para E_{-1}, onde a situação permite a E_{-1} de analisar sua sequência de decisões. (M_{-1}, E_{-1}) constituem o *milieu* de aprendizagem (M_0) para E_0. Este nível relaciona-se com o nível das asserções ou declarações relacionadas aos conhecimentos.

Nesta pesquisa, conforme Gibel (2018), consideraremos os níveis de *milieu* de M_{-1} a M_{-3} como correspondentes à situação experimental como objeto de análise. Esta escolha justifica-se, conforme o autor, pelo fato de que é justamente nesses níveis que surge um processo de prova durante uma situação a-didática ou de dimensão a-didática.

4.5.2 Modelo multidimensional para a análise do raciocínio

Segundo Bloch e Gibel (2011), um dos objetivos da teoria das situações didáticas é propor situações adequadas para um objeto do saber e estudar o confronto que pode ser organizado entre essa situação e o conhecimento dos estudantes. Nesse contexto, os autores propõem um modelo multidimensional para a análise do raciocínio dos estudantes em uma situação, que considera três eixos: modelagem global dos níveis de *milieu*, modelagem local ao nível dos argumentos produzidos no trabalho e das trocas em classe e modelagem de níveis signos emergentes deste trabalho.

Para os autores este modelo permite:

> - Afinar a análise a priori dos níveis de *milieu* de maneira que seja possível antecipar os signos e os raciocínios;
> - Identificar as situações de decisão, de formulação ou validação, relacionando-as as fases didáticas e as fases de institucionalização (análise a posteriori);
> - Analisar os signos produzidos na situação e as relacionar aos níveis de raciocínio elaborados pelos estudantes;
> [...] e, finalmente, comportar uma apreciação sobre a adequação dos signos, dos raciocínios e dos conhecimentos produzidos pelas apostas da situação. (BLOCH, GIBEL, 2011, p. 14)[106].

---

[105] Gibel (2018) destaca que no decorrer desta produção os estudantes precisam analisá-las em função de critérios relacionados a pertinência, a adequação, a complexidade, a consistência e a validade.

[106] « - D’affiner l’analyse a priori des niveaux de milieux de manière à pouvoir anticiper les signes et les raisonnements ;

- D’identifier les situations de décision, de formulation ou validation, en les reliant aux phases didactiques et aux phases d’institutionnalisation (analyse a posteriori) ;

O quadro 8, a seguir, elaborado por Bloch e Gibel (2011) indica os signos e raciocínios esperados em cada nível de *milieu* a partir da análise *a priori*.

Quadro 8 – *Milieu*, repertório e símbolos[107]

	Milieu -2	**Milieu -1**	**Milieu 0**
Função do raciocínio	R1.1 SEM - Intuição sobre um desenho - Decisão de cálculo - Meio heurístico - Exibição de um exemplo ou de um contraexemplo	R1.2 SIN/SEM - Cálculos genéricos - Formulação de conjecturas possíveis - Decisão sobre um objeto matemático	R1.3 SIN - Formalização de provas na teoria matemática requerida (com a ajuda de P eventualmente)
Nível de utilização de símbolos[108]	R2.1 SEM Ícones ou índices dependendo do contexto (esquemas, intuições)	R2.2 SIN/SEM Argumentos ‘locais’ ou mais genéricos: índices, cálculos	R2.3 SIN Argumentos formais específicos: aqui símbolos de análise
Nível de atualização do repertório	R3.1 SIN/SEM - Utilização pontual de conhecimentos anteriores - Enriquecimento do nível heurístico: Cálculos, conjecturas pontuais	R3.2 SIN/SEM Enriquecimento do nível de argumentação: - dos enunciados - do sistema organizador	R3.3 SIN - Formalização de provas; - Introdução de ostensivos organizados - Integração de elementos teóricos do domínio da matemática

Fonte: Bloch e Gibel (2011, p. 17, tradução própria).

Este quadro foi elaborado considerando três eixos (função do raciocínio, nível de utilização dos signos, repertório de representação) em cada *milieu* de níveis M_{-2}, M_{-1} e M_0. A progressão dos índices matriciais (R1.1, R1.2, etc.) leva em conta a sofisticação e a formalização crescente dos raciocínios e dos signos. Esta sofisticação crescente é possível graças ao sistema organizador, que permite aos estudantes reativar enunciados já encontrados e gerenciar novas fórmulas para responder a situação (BLOCH; GIBEL, 2011).

- D’analyser les signes produits en situation et de les relier aux niveaux des raisonnements élaborés par les élèves ;

... et, en définitive, de porter une appréciation sur l’adéquation des signes, des raisonnements et des connaissances produits aux enjeux de la situation ».

[107] SEM indica a dimensão semântica; SYNT indica a dimensão sintática.

[108] Selon Bloch e Gibel (2011, p. 7) “une interprétation iconique est de l’ordre de l’intuition, éventuellement sur un schéma, une figure ; un signe indiciel est de l’ordre d’une proposition ; un symbole/argument est de l’ordre d’une preuve mathématique”.

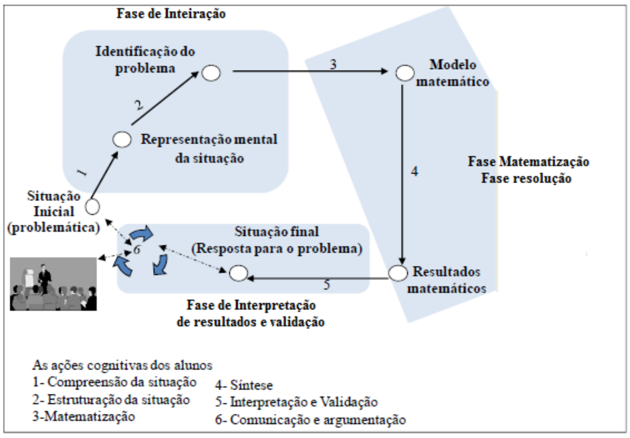
Nessa pesquisa, o modelo apresentado no quadro 8, acima, será utilizado para analisarmos a função do raciocínio, o nível de utilização de símbolos e de atualização do repertório didático nos diferentes níveis de *milieu* em uma situação didática envolvendo modelagem matemática.

4.6 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E MODELAGEM MATEMÁTICA

Considerando os elementos da teoria das situações didáticas e as características de uma atividade de modelagem matemática apresentadas no início deste capítulo, uma atividade de *modelagem matemática* pode ser associada à teoria das situações didáticas, já que: (a) o professor pode organizar um *milieu* com a intenção de modificar ou fazer surgir um conhecimento no estudante; (b) a situação inicial pode ser associada a uma situação objetiva (*milieu* material), que deve permitir ao estudante ações e retroações e mobilizar o repertório didático do estudante. No decorrer da atividade, as ações dos estudantes podem ser associadas as situações de ação, de formulação e de validação; e (c) a sequência organizada deve permitir ao estudante agir de maneira autônoma ou com o auxílio do professor, de modo que a situação pode ser caracterizada como a-didática ou de dimensão a-didática.

Em relação a etapas e ações cognitivas de uma atividade de modelagem matemática, retomamos o esquema das fases da modelagem matemática e das ações cognitivas dos alunos de Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 19) apresentado no início deste capítulo.

Figura 12 – Fases da modelagem matemática e das ações cognitivas dos alunos



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 19).

O esquema propõe cinco fases (inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação) e seis ações cognitivas. Na etapa de inteiração, há um contato inicial com a situação. Nela, ocorrem as ações cognitivas de *compreensão da situação* e *estruturação da situação* (flechas 1 e 2). Quando o estudante se depara com a situação-problema (situação objetiva), devolução, é preciso que ele a compreenda, fazendo aproximações ou idealizações, e construindo, assim, uma representação mental da situação. Nesta transição, é possível identificar a ação cognitiva de *compreensão da situação*, que se direciona à compreensão da situação inicial, à interpretação dos dados e ao agrupamento de ideias. A partir da representação mental da situação, os estudantes identificam o problema e definem uma meta para sua resolução, o que requer uma estruturação e/ou simplificação deliberadas das informações sobre a situação. Logo, é possível identificar a ação cognitiva de *estruturação da situação*.

Na etapa de matematização, ocorre a ação cognitiva homônima de *matematização* (flecha 3). O estudante realiza nesse momento a formulação de hipóteses, seleciona as variáveis pertinentes e as simplifica de acordo com o problema que se deseja resolver. A *matematização* culmina com a construção de um modelo matemático, que é mediada pelas relações estabelecidas entre as características da situação, os conceitos, os procedimentos e as técnicas adequadas para representar matematicamente o problema.

> A ação de *matematização*, que culmina na construção de um *modelo matemático*, é fundamentada na definição e no julgamento de hipóteses que guiam a construção do modelo. Esta ação também vem revestida de uma transição de linguagens: a situação-problema apresenta-se em linguagem natural e não parece diretamente associada a uma linguagem matemática; gera-se, assim, a necessidade da transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática). Esta linguagem matemática evidencia o problema matemático a ser resolvido; a elaboração de um modelo matemático é mediada por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente estas características. (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 6-7, itálico no original).

Na etapa de resolução, ocorre a ação cognitiva de *síntese* (flecha 4). O objetivo desta etapa é apresentar resultados matemáticos para o problema.

> Nessa fase, o sujeito utiliza conceitos, técnicas, métodos e representações matemáticas, usa seus conhecimentos prévios, busca padrões, recorre a ferramentas computacionais, coordena diferentes representações dos objetos matemáticos, busca conhecer conceitos novos e ressignifica os já conhecidos [...]. (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 7).

As etapas de matematização e de resolução são mediadas por conhecimentos e habilidades para identificar regularidades e relações. Nelas, o estudante mobiliza seu repertório didático: registro de fórmulas, sistema organizador, repertório de ação e representação.

Finalizada a resolução, ocorre a validação do modelo. Nesta etapa, é preciso pensar sobre planos de ação estabelecidos inicialmente e validá-los passo a passo. Assim, a interpretação dos resultados obtidos por meio do modelo consiste na análise de uma resposta para o problema em questão. Esta análise implica a validação da representação utilizada. Para que a resposta (modelo) seja validada, é necessário levar em consideração os procedimentos matemáticos utilizados e sua adequação para a situação. Aqui ocorre a ação cognitiva de *interpretação e validação* (flecha 5).

Por fim, a atividade de modelagem matemática precisa culminar com a comunicação dos resultados, ou seja, a apresentação do modelo. Para isso, é preciso argumentar, ou seja, justificar os procedimentos adotados nas etapas anteriores. Desta forma, os autores consideram a *comunicação e a argumentação* como uma ação cognitiva (flecha 6).

Posto isso, podemos conjecturar que em uma sequência didática envolvendo modelagem matemática a situação objetiva é formulada a partir do problema proposto[109]. Já o *milieu* material é composto, por exemplo, por informações relacionadas a este problema. Assim, "a devolução da situação é o trabalho que consiste em explicar aos estudantes o problema que eles têm para resolver, para apresentar-lhes o material" (BLOCH, 2019, p. 4)[110].

No quadro 9[111] a seguir, buscamos sintetizar, fundamentados em Neto (2015), as relações tecidas ao longo desse capítulo.

Quadro 9 – Relação entre TSD e Modelagem Matemática

Teoria das situações didáticas	Fases da modelagem matemática	Movimento dos estudantes
Situação/dialética de ação	Inteiração	Ações de caráter operacional realizada pelos estudantes. O estudante está engajado na fase de inteiração, buscando compreender e estruturar a situação.
Situação/dialética de formulação	Matematização e resolução	Conjecturas dos estudantes, levantamento de hipóteses. O estudante busca matematizar e sintetizar a situação.
Situação/dialética de validação	Interpretação de resultados e validação	Evidências acerca dos testes realizados sobre as conjecturas e hipóteses construídas. O estudante procura interpretar e validar o modelo obtido.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

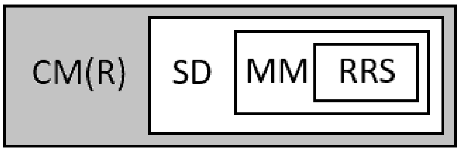
[109] Sabemos que não há um consenso na literatura relacionada a quem compete à escolha do problema proposto. Portanto, considerando os objetivos desta pesquisa, o problema será definido pelo professor e pelo pesquisador em conjunto.

[110] « La dévolution de la situation est le travail consistant à expliquer aux élèves le problème qu'ils ont à résoudre, à leur présenter le matériel ».

[111] Retomaremos esse quadro na sessão 6.5, considerando os achados desta pesquisa.

Apresentadas essas questões e considerando que as inferências são essenciais ao processo de conversão de representações semióticas e que a sequência didática será concebida como um plano de ação intencional em direção à heteroconciliação colaborativa de metas, discutimos os aportes da teoria da relevância, da teoria de conciliação de metas e a metodologia no próximo capítulo.

5 RELEVÂNCIA E CONCILIAÇÃO DE METAS



Neste estudo, defendemos que a modelagem matemática pode promover a representação e manipulação cognitiva ótima de objetos matemáticos em direção à consecução colaborativa da meta de resolver determinada situação-problema. Em ciências da linguagem, a teoria da relevância, de Sperber e Wilson (1986, 1995, 2001)[112] lida justamente com processos pragmático-cognitivos de processamento da linguagem, assumindo que a compreensão otimamente relevante de enunciados consiste numa inequação na qual efeitos cognitivos positivos a serem maximizados superam os esforços de processamento necessários para obtê-los. Rauen (2014) faz avançar essa perspectiva ao assumir que relevância é um conceito teórico dependente de meta, descrevendo e explicando a ação humana, inclusive comunicacional, em termos de emergência, execução e checagem de uma hipótese abdutiva antefactual em direção à consecução de metas. Neste capítulo, apresentaremos ambos os aportes teóricos a fim de os utilizar não somente no planejamento das atividades em sala de aula, mas também na análise das evidências fornecidas pela intervenção didática

5.1 CONCILIAÇÃO DE METAS

Em teoria de conciliação de metas, assume-se que os indivíduos são proativos e, dessa maneira, capazes de elaborar planos de ação intencional em direção à consecução de seus propósitos. Seguindo Bratman (1989 apud RAEN, 2018, p. 14), concebe-se intenção como "um plano de ação que o organismo escolhe e se compromete na busca de uma meta". Consequentemente, assume-se que tanto a meta como o plano para atingi-la constituem o domínio do conceito de intenção.

---

[112] Neste estudo apresentaremos os principais elementos da teoria da relevância. Para estudo aprofundado sobre interfaces entre teria da relevância e ensino da matemática, ver Andrade Filho (2013, 2017) e Cardoso (2015).

Posto isso, Rauen (2014) argumenta que um plano de ação intencional pode ser descrito e explicado em quatro estágios. O primeiro desses quatro estágios, que ele toma como axiomático, consiste na projeção de uma meta [1], e os três estágios seguintes consistem na formulação [2], execução [3] e checagem [4] de pelo menos uma hipótese abdutiva antefactual.

A originalidade da arquitetura descritivo-explanatória da teoria de conciliação de metas é a de que os três primeiros estágios são abdutivos. Conforme argumenta o autor, no caso de abduções de escopo explicativo, o indivíduo parte da observação de um fato: *x é Q*. Segue dessa observação uma abdução *ex-post-facto* de uma hipótese H_e[113], segundo a qual teria havido uma conexão *nomológica*[114] entre certa causa *P* no passado e o fato *Q* no presente, e a conclusão de que essa causa *P* no passado é a explicação mais plausível para a emergência desse fato: *x é P*. Por exemplo, se alguém se depara com uma rua molhada, a hipótese explicativa mais plausível é isso foi causado por uma chuva.

O que Rauen (2014) justamente faz é extrapolar essa arquitetura *a posteriori* para instâncias *a priori*. Nesses casos, um indivíduo *i* pode ser concebido como alguém capaz de se projetar em um estado de meta *Q* no futuro. Decorre disso que, uma descrição do tipo *x* é *Q* pode representar certo estado *x* que satisfará essa expectativa [estágio 1], ficando por descrever e explicar como o indivíduo alcança esse estado no futuro. Para dar conta disso, o autor propõe que o indivíduo *i* abduz *ex-ante-facto* uma hipótese H_a[115] de que há uma conexão *nomológica* entre certa ação antecedente *P* no presente ou em um futuro mais imediato que ele considera como pelo menos plausível para atingir esse estado consequente *Q* no futuro ou em um futuro menos que imediato [estágio 2]. Decorre disso que *x* é *P*, e o indivíduo *i* executa a ação *P* na expectativa de atingir *Q* [estágio 3].

Considerando os três últimos estágios, por sua vez, percebe-se que a arquitetura é também dedutiva[116]. Conforme Rauen (2018), isso ocorre porque a hipótese abdutiva antefactual [estágio 2] pode ser concebida neste plano de ação intencional como uma premissa

---

[113] O expoente ‘e’ em ‘H_e’ representa que a hipótese é explicativa ou *ex post fato*.

[114] Conforme Rauen (2018, p. 17, nota 7, itálico no original), por “conexão nomológica, do grego *nomos* ‘*lei*’ ou ‘*prescrição*’ e *logos* ‘*discurso*’, define-se certo nexo causal ou lei prescritiva entre uma causa antecedente e um efeito consequente”.

[115] O expoente ‘a’ em ‘H_a’ representa que a hipótese é antecipatória ou *ex ante facto*.

[116] Para Rauen (2015, p. 82), argumentos dedutivos partem de uma proposição “geral ou universal, que funciona como premissa maior” e de uma proposição particular “que funciona como uma premissa menor” em direção a uma conclusão particular, “cujo conteúdo já estava incluso, pelo menos implicitamente, nas premissas”.

maior em cujo contexto a ação antecedente *x é P* [estágio 3] se inscreve como premissa menor[117]. É no domínio dessas duas premissas que se deduz a conclusão *x é Q’*[118] [estágio 4].

Essa arquitetura pode ser resumida na figura 13, a seguir.

Figura 13 – Arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas

Abdução		[1]		Q
	Dedução	[2]	P	Q
		[3]	P	
		[4]		Q’

Fonte: Rauen (2018, p. 14).

Para exemplificar a arquitetura, Rauen (2018, p 21-24) toma como exemplo a noção teórica de *presunção de relevância ótima* na teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995). Em síntese, a teoria da relevância é uma abordagem pragmático-cognitiva de estímulos ostensivo-inferenciais[119] que se fundamenta em dois princípios: o *princípio cognitivo* de que a mente humana maximiza os *inputs* a que é submetida; e o *princípio comunicativo* de que enunciados geram expectativas ou presunções de relevância.

> **Princípio cognitivo da relevância**
> A cognição humana tende a dirigir-se para a maximização da relevância. (WILSON, 2005, lição 4, p. 1, negrito no original)[120].
>
> **Princípio comunicativo da relevância**
> Enunciados (ou outros estímulos ostensivos) criam **presunções de relevância**. (WILSON, 2005, lição 4, p. 4, negrito no original)[121].

---

117 A ação antecedente [estágio 3] pode ser executada materialmente ou simulada mentalmente.

118 ‘*Q*’’ representa a consecução da meta *Q* e indica certo deslocamento entre a projeção da meta e sua consecução no contexto da hipótese abdutiva. Esse deslocamento justifica a noção teórica de conciliação mais adiante.

119 Conforme a teoria da relevância, cabe ao falante produzir estímulos ostensivos com os quais pretende de forma intencional e aberta transmitir um conjunto de informações {I}, e cabe à audiência inferir essas informações com base na decodificação desses estímulos. Wilson (2005, lição 1, p. 5-8) distingue transmissão de informação acidental (sotaque, por exemplo) de intencional e, entre as formas de transmissão de informação intencional, a transmissão encoberta (pretendida como escondida) e aberta. Numa comunicação aberta, o falante não somente pretende transmitir certa mensagem, mas pretende que a audiência reconheça essa intenção. Nesse tipo de comunicação, há duas camadas de intenção a serem reconhecidas: uma intenção básica de informar algo – intenção informativa; e uma intenção de ordem superior de que se reconheça essa intenção básica – intenção comunicativa. Desse modo, um enunciado consiste numa evidência direta ou ostensiva (intenção comunicativa) de uma informação (intenção informativa). Para a autora, o domínio de uma pragmática cognitiva é justamente a análise desses eventos ostensivos de comunicação intencional e aberta.

120 “**Cognitive principle of relevance**: Human cognition tends to be geared to the maximization of relevance.”

121 “**Communicative Principle of Relevance**: Utterances (or other ostensive stimuli) create **presumptions of relevance**.”

Em teoria da relevância, a noção teórica de *relevância* é definida como uma propriedade não representacional[122] dos *inputs* – enunciados, pensamentos, sons, memórias, registros de representação etc. O que torna um *input* relevante é o fato de ele valer a pena ser processado, e isso ocorre quando efeitos cognitivos positivos de seu processamento superam esforços despendidos para obtê-los[123,124], fortalecendo suposições prévias do indivíduo, contradizendo e, dessa maneira, eliminando suposições prévias, ou gerando implicações derivadas de sua interação com suposições prévias[125]. Consequentemente, em contextos iguais, a relevância é maior quando maiores forem os efeitos cognitivos e/ou quando menores forem os esforços de processamento.

Segundo Wilson (2005, p. 1), segue do princípio cognitivo de relevância que a cognição humana foi desenvolvida de tal modo a maximizar seus recursos cognitivos escassos. Desta forma, a cognição humana aloca atenção a *inputs* disponíveis promissores e tende a processá-los do modo mais eficiente possível.

Consideremos, por exemplo, uma atividade de modelagem matemática no contexto da físico-química que requeira do estudante um modelo matemático que represente uma transformação isovolumétrica[126, 127]. Numa situação como essa, uma série de suposições S_1-S_n poderiam ser mobilizadas como contexto cognitivo inicial[128].

---

122 Conforme Silveira e Feltes (1999, p. 46), relevância é uma propriedade não representacional da mente, porque ela é disparada espontânea e inconscientemente. O que pode vir a ser representado são julgamentos sempre comparativos e intuitivos de relevância.

123 Por custo de processamento define-se "o esforço que um sistema cognitivo deve despender de modo a chegar a uma interpretação satisfatória da informação ingressante (envolvendo fatores como o acesso de um conjunto apropriado de suposições contextuais e de trabalho inferencial envolvido na integração da informação nova com as suposições existentes)" (CARSTON, 2002, p. 379).

124 Em Teoria da Relevância, um *efeito cognitivo positivo* é certo resultado de modificação ou reorganização de suposições cognitivas já existentes pelo processamento de um *input* em determinado contexto. Em uma atividade de modelagem, é justamente essa modificação e/ou reorganização das suposições existentes que conduzem o estudante a compreender a situação objetiva, a agir em situações concretas e a definir hipóteses durante o processo de modelagem, culminando com a fase de interpretação de resultados e validação do modelo obtido. Inversamente, se pensarmos n a identificação de unidades significativas, tratamentos e conversões de representações, perceberemos que há custos agregados. Para Wilson (2005, lição 3), a recentidade de uso, a frequência de uso, a complexidade linguística (aqui, leia-se, semiótica) e a complexidade lógica são fatores que afetam esforços de processamento para a compreensão de enunciados (ou outros estímulos ostensivos).

125 O fortalecimento e a contradição afetam o grau de força com que um indivíduo confia na veracidade de determinada suposição. Uma implicação consiste na elaboração de uma suposição nova a partir da interação dos *inputs* ingressantes com as suposições antigas que formam o contexto cognitivo do indivíduo.

126 Transformação gasosa em que a pressão e a temperatura são proporcionais e o volume se mantém constante.

127 Exemplo alternativo pode ser encontrado em Andrade Filho (2013, p. 35-36).

128 Para Wilson (2005), o contexto é um construto psicológico, determinado pelas representações mentais que o ouvinte constrói e usa na determinação do significado do falante, desempenhando papel fundamental na identificação de informações explícitas e implícitas de um enunciado. Se por *suposições* compreendem-se conjuntos estruturados de conceitos que se tornam manifestos para o indivíduo no decorrer do processamento

A seguir, listam-se algumas possibilidades:

> S_1 – O volume é constante em uma transformação isovolumétrica;
> S_2 – Pressão e temperatura são variáveis;
> S_3 – A pressão é dada em função da temperatura;
> S_4 – Pressão e temperatura são grandezas diretamente proporcionas;
> S_5 – Retas modelam graficamente grandezas diretamente proporcionais;
> S_6 – Uma reta é representada algebricamente pelo modelo $f(x) = ax + b$;
> S_7 – O volume do recipiente é $c.nm^3$[129];
> S_8 – A constante universal dos gases é $0{,}082\ atm.L/mol.K$.

Embora todas a suposições S_1-S_8 sejam verdadeiras, as suposições S_1-S_6 tenderiam a ser empregadas na atividade de modelagem matemática por um mecanismo de interpretação guiado pela relevância, uma vez que elas contribuem para a compreensão do fenômeno e, consequentemente, para a construção do modelo solicitado. Por outro lado, as suposições S_7-S_8 tenderiam a não ser utilizadas. Segundo Wilson (2005, lição 4, p. 1), isso se dá porque:

> [...] a cognição humana foi desenvolvida de tal modo que ela tende a fazer o uso mais eficiente da atenção e dos recursos de processamento, automaticamente alocando atenção a inputs potencialmente relevantes e tendendo a processá-los de modo mais produtivo.[130]

Assim como o princípio comunicativo de relevância emerge do princípio cognitivo de maximização da relevância, segue do princípio comunicativo de relevância a noção teórica de *presunção de relevância ótima*. Segundo a teoria da relevância, comunicar é ofertar informação, e ofertas criam presunções ou expectativas. Em outras palavras, se um falante oferece um enunciado (ou outro estímulo ostensivo), a audiência está autorizada a esperar que ele seja relevante o suficiente para merecer processamento[131] e justifique o esforço necessário durante o processo de compreensão no limite das habilidades e preferências do comunicador.

> **Presunção de relevância ótima**
> O enunciado (ou outro estímulo ostensivo) será:
> 1a. Ao menos relevante suficiente para merecer o esforço de processamento do ouvinte;
> 1b. O mais relevante compatível com as habilidades de preferências do falante.

---

das informações, por *contexto* quer-se significar um conjunto de suposições que são usadas na interpretação ou processamento de certo item de informação. Em síntese, um contexto é formado por um subconjunto de suposições que o ouvinte tem do mundo que é utilizado na compreensão de um enunciado.

[129] c representa o valor do volume, constante em uma transformação isovolumétrica.

[130] "[…] Human cognition has developed in such a way that it tends to make the most efficient use of attention and processing resources, automatically allocating attention to potentially relevant inputs and tending to process them in the most productive way".

[131] Segue que a interpretação que satisfizer essa presunção será aquela a ser perseguida pela audiência.

(WILSON, 2005, lição 5, p. 1, negrito no original)[132].

Considerando a presunção de relevância ótima, o princípio de comunicativo de relevância pode ser reescrito da seguinte forma

> **Princípio Comunicativo de Relevância**
> Cada enunciado (ou outro estímulo ostensivo) cria a presunção de sua própria relevância ótima.
> (WILSON, 2005, lição 5, p. 1, negrito no original)[133].

Decorre do princípio comunicativo revisado de relevância e da presunção de relevância ótima que enunciados (ou outros estímulos ostensivos) que comporão as situações didáticas deste estudo serão presumidos como otimamente relevantes pelos estudantes quando forem (a) ao menos relevantes o suficiente para merecerem o esforço de processamento deles, ao mesmo tempo em que forem (b) os mais relevantes possíveis conforme habilidades e preferências do docente/pesquisador[134].

Além disso, decorre do princípio comunicativo revisado de relevância e da presunção de relevância ótima um *procedimento de compreensão orientado pela noção teórica de relevância* para dar conta de três questões essenciais no processamento de um enunciado (ou outro estímulo ostensivo), ou seja, qual foi o significado explícito do falante; qual foi o significado implícito do falante e qual é o contexto apropriado (isto é, o conjunto de suposições contextuais) que é necessário mobilizar para responder a essas questões.

O problema é que enunciados, especialmente aqueles em língua natural, geram um conjunto expressivo de interpretações compatíveis com o significado decodificado da sentença, que são acessíveis ou prováveis de vir à mente da audiência da mesma forma. Segundo Rauen (2018, p. 21), a teoria da relevância propõe que a audiência está equipada com um procedimento que "habilita a avaliar interpretações *on-line* e, dessa maneira, aceitá-las ou rejeitá-las como

---

[132] "**Presumption of optimal relevance**: The utterance (or other ostensive stimulus) will be: 1a. At least relevant enough to be worth the hearer's processing effort; 1b. The most relevant one compatible with the speaker's abilities and preferences."

[133] "**Communicative Principle of Relevance**. Every utterance (or other ostensive stimulus) creates a presumption of its own optimal relevance"

[134] Conforme a teoria da relevância, um falante empenhado em obter relevância ótima tentaria não apenas obter suficientes efeitos cognitivos para valer a pena o processamento, mas também evitar desperdícios de esforço da audiência para alcançar esses efeitos. Evitar desperdícios de esforços de processamento produz duas consequências gerais que desempenham um papel importante numa pragmática cognitiva guiada pela noção teoria de relevância: (a) a primeira interpretação satisfatória será a única interpretação satisfatória da audiência e (b) qualquer esforço adicional de processamento tem de ser compensado por efeitos adicionais (ou diferentes).

hipóteses sobre o significado do falante"[135]. O autor complementa: "Essa ferramenta é poderosa o suficiente para identificar uma interpretação (ou um conjunto restrito de opções), de modo que o ouvinte tem o direito de assumir que a primeira hipótese que o satisfaz (se alguma) é a única plausível" (p. 21). Conforme esse procedimento, na expectativa de responder a essas questões, caberia à audiência seguir um caminho de esforço mínimo na computação de efeitos cognitivos (a) considerando interpretações em ordem de acessibilidade e (b) encerrando o processamento quando sua expectativa de relevância ótima for satisfeita[136].

> **Procedimento de compreensão guiado pela relevância**
> Siga um caminho de menor esforço na computação de efeitos cognitivos:
> 2a. Considere interpretações em ordem de acessibilidade;
> 2b. Pare quando sua expectativa de relevância é satisfeita.
> (WILSON, 2005, lição 5, p. 1, negrito no original)[137].

Rauen (2018) argumenta, todavia, que a arquitetura descritivo-explanatória da teoria da relevância corresponde a uma abdução *ex post facto*[138]. Segundo o autor, na contingência de processar um enunciado (ou outro estímulo ostensivo), a audiência parte da presunção de que um enunciado otimamente relevante foi produzido por um falante racional: *x é Q*. Decorre disso a hipótese abdutiva de escopo explicativo H_e de que a aplicação do procedimento de compreensão guiado pela noção teórica de relevância permite eleger pelo menos uma interpretação que se ajusta a essa presunção de relevância ótima. Ato contínuo, a audiência aplica o procedimento *x é Q* e, agora dedutivamente, obtém pelo menos uma interpretação congruente com essa expectativa *Q'*. A figura a seguir resume essa concepção.

Figura 14 – Arquitetura abdutivo-dedutiva pós-factual da presunção de relevância ótima

Abdução		[1]		Q presunção de relevância ótima
	Dedução	[2]	P procedimento de interpretação	Q presunção de relevância ótima
		[3]	P procedimento de interpretação	
		[4]		Q' interpretação relevante

Fonte: Rauen (2018, p. 22, adaptado).

[135] Conforme Rauen (2018, p. 21, nota 12), por *significado do falante*, "concebe-se tudo o que o falante pretende comunicar explícita ou implicitamente por uma sentença enunciada em determinado contexto. Esse significado, por definição, extrapola o significado independente de contexto atribuído à sentença pela gramática."

[136] O modo de funcionamento desse procedimento será visto mais adiante.

[137] "**Relevance-theoretic comprehension procedure**. Follow a path of least effort in computing cognitive effects: 2a. Consider interpretations in order of accessibility; 2b. Stop when your expectation of relevance is satisfied"

[138] Em outras palavras, a *presunção de relevância ótima* e o próprio *princípio comunicativo de relevância* nada mais são do que abduções ótimas para explicar a emergência ostensiva de um enunciado.

Feitas essas observações, Rauen conclui que qualquer processo de interpretação é, a rigor, abdutivo-dedutivo, podendo ser modelado em termos de um plano de ação intencional em direção à conciliação de uma meta[139]. Em outras palavras, no que diz respeito à modelação dos processos cognitivos envolvidos na interpretação de *inputs*, Rauen (2014) assume a pertinência do procedimento de interpretação guiado pela noção teórica de relevância de Sperber e Wilson (1996, 1995, 2001), mas o integra num esquema abdutivo-dedutivo.

> Nesse caso, baseado na presunção de que em todo enunciado há uma interpretação relevante, a meta Q do ouvinte é obtê-la e a hipótese abdutiva antefactual ótima é a de que a aplicação do procedimento de interpretação guiado pela relevância P viabiliza a obtenção dessa interpretação relevante Q. Assim, o ouvinte aplica o procedimento P e, em seguida, checa se a interpretação se concilia com essa expectativa Q'. (RAUEN, 2018, p. 22).

A figura a seguir, resume essa modelação.

Figura 15 – Arquitetura abdutivo-dedutiva aplicada à presunção de relevância ótima

Abdução		[1]		*Q* obter interpretação relevante
	Dedução	[2]	*P* aplicar procedimento de interpretação	*Q* obter interpretação relevante
		[3]	*P* aplicar procedimento de interpretação	
		[4]		*Q'* obter interpretação relevante

Fonte: Rauen (2018, p. 23).

Além disso, o autor afirma que a argumentação que sustenta a teoria da relevância é fundamentalmente reducionista, ao restringir comunicação a trocas informacionais e reativa, ao analisar apenas a audiência interpretando enunciados (ou outros estímulos ostensivos).

Segundo Rauen (2018, p. 24), a teoria de conciliação de metas supera essas questões, na medida em que visa a “descrever e explicar a comunicação ostensivo-inferencial em termos de hipóteses abdutivas antefactuais em direção à consecução ótima das metas do agente”, reintegrando o protagonismo do emissor e propondo um olhar proativo para as interações comunicativas, “de modo que a noção de relevância passa a ser considerada um predicado dependente de meta”[140]; e, em segundo lugar, reintegra a ação ao cenário descritivo-explanatório, uma vez que parte do processo de interpretação da audiência consiste em resgatar

[139] Em teoria de conciliação de metas, assume-se que a ampliação do contexto cognitivo é abdutiva, e a cognição é movida antes por uma conclusão presumida do que pela emergência de premissas, de maneira que a modelagem dedutiva é apenas parte do processo de avaliação ou de checagem de hipóteses abdutivas H_a.

[140] Conforme Rauen (2014), os indivíduos intervêm deliberadamente na realidade para atingir interesses prévios e não apenas reagem a estímulos muitos dos quais nada contribuíram. Nos termos de Silveira e Feltes (2002, p. 37), eles prestam atenção a estímulos que, em alguma medida, vêm ao encontro de seus interesses ou se ajustam às circunstâncias do momento.

qual é a meta do agente. Consequentemente, intenções comunicativas podem não apenas estar encaixadas no interior de intenções informativas, como já prevê a teoria da relevância, mas também encaixadas no interior de intenções práticas[141].

Além disso, a teoria de conciliação de metas produz uma importante distinção entre autoconciliação de metas e heteroconciliação de metas, reservando ao primeiro termo a descrição e a explicação de ações nas quais um indivíduo, ele mesmo, avalia a consecução de suas metas e a pertinência de suas hipóteses antefactuais e, ao segundo termo, a descrição e a explicação de ações colaborativas nas quais estímulos comunicacionais são essenciais. É essa distinção que justifica as duas próximas seções deste capítulo.

5.2 AUTOCONCILIAÇÃO DE METAS

Para ilustrar uma modelação de situação antefactual que não envolve estímulos comunicacionais, apresentamos o caso de um estudante, Paulo, que precisa resolver uma situação-problema qualquer que é potencialmente modelável por função e lhe foi apresentada em língua natural em um arquivo Word[142].

O primeiro estágio da modelação consiste na projeção da meta:

[1] O indivíduo *i* projeta uma meta Q em t_1;
[1'] Paulo *i* projeta a meta *Q* de Paulo *i* resolver a situação-problema em t_1.

Essa formulação captura o instante t_1 de projeção da meta *Q* de resolver a situação-problema, de tal modo que a meta *Q* é uma possibilidade futura ainda não existente.

Esse estágio pode ser representado esquematicamente do seguinte modo:

[1] *Q* resolver problema, Paulo

O segundo estágio consiste na formulação de pelo menos uma hipótese abdutiva antefactual H_a para atingir a meta *Q* – o dito plano de ação intencional – a saber:

[141] Como descreveremos adiante.

[142] Esta exposição é uma paráfrase de exemplo fornecido em Rauen (2014).

> [2] O indivíduo *i* abduz uma hipótese abdutiva antefactual ótima[143] H_a para atingir a meta *Q* em t_2;
> [2'] Paulo *i* abduz uma hipótese abdutiva antefactual ótima H_a para atingir a meta *Q* de resolver a situação-problema em t_2.

Como é possível conferir, o *output* da formulação (2') está incompleto porque não identifica a ação antecedente *P* admitida por Paulo como pelo menos plausível para atingir o estado consequente *Q* de resolver a situação-problema. Para dar conta dessa lacuna, considere-se a hipótese arbitrária de que a memória enciclopédica de Paulo contém apenas o conjunto restrito de suposições factuais $S_{1\text{-}4}$ a seguir:

> S_1 – Modelar o problema por uma função resolve a situação-problema;
> S_2 – Utilizar *software* resolve a situação-problema;
> S_3 – Ler novamente o problema resolve a situação-problema;
> S_4 – A situação-problema foi digitada em Word.

Sugerimos que a escolha de uma hipótese abdutiva antefactual ótima H_a no escopo arbitráriamente restrito das suposições factuais $S_{1\text{-}4}$ atende a pelo menos quatro critérios. Conforme o primeiro critério, a hipótese H_a deve ser mapeada por uma formulação hipotética "Se *P*, então *Q*", segundo a qual, minimamente, se uma ação antecedente *P* for executada, então um estado consequente *Q* pode ser atingido. Como é possível observar, a suposição factual S_4 não atende a esse critério, constituindo-se mera constatação irrelevante[144] de que a situação-problema foi digitada em um arquivo Word.

Conforme o segundo critério, a hipótese H_a deve conter uma ação antecedente *P* pelo menos plausível para resolver a situação-problema. As suposições factuais $S_{1\text{-}2}$ são ações executáveis. Contudo, a ação antecedente de "ler novamente o problema" na suposição S_3, pode ser insuficiente e racionalmente inútil para resolver um problema que supostamente já havia sido compreendido numa primeira leitura.

Conforme o terceiro critério, a hipótese H_a deve ser uma solução ótima para atingir a meta *Q* e, conforme o quarto critério, ela deve ser a primeira suposição consistente com o princípio de relevância. A ação antecedente de "utilizar um *software*" na suposição S_2

---

[143] Nos primeiros textos da teoria, influenciado pela noção de *inferência à melhor explicação* de Harman (1965), Rauen (2013, 2014) adotou a noção de *inferência à melhor solução*. Mais recentemente, o autor tem empregado uma noção menos restritiva de *inferência à solução ótima*. Segundo o autor, esse deslocamento foi necessário para destacar que soluções *ad hoc* encontradas pelos agentes são aquelas que ele acredita serem melhores diante de "constrições contextuais" e "repertório individual de preferências e habilidades". Rauen ressalta que essa medida evita discussões em torno de uma noção epistêmica de melhor solução. "Soluções nem sempre são as melhores, mas aquelas plausíveis no contexto dessas constrições e repertórios" (RAUEN, 2019, p. 10, inédito).

[144] Seu custo de seu processamento não produz qualquer efeito cognitivo adicional para a resolução do problema.

supostamente atinge a meta, mas é difícil de vê-la como a primeira solução a vir à mente de Paulo quando ele ainda não possui sequer um modelo para resolver a situação-problema.

Neste contexto restrito de opções, a suposição factual S_1 de "modelar o problema por uma função" seria uma solução ótima, pois ela se deixa mapear por uma formulação hipotética; é uma ação plausível para resolver a situação-problema; converte-se numa hipótese que, no conjunto restrito de suposições $S_{1\text{-}4}$, é a de mais baixo custo de processamento diante do efeito fixo resolver a questão; e converte-se numa hipótese que atende ao critério de solução ótima nesse contexto.

O resultado desse cotejo é a seguinte hipótese abdutiva antefactual H_a:

> [2"] Paulo *i* abduz que se Paulo usar função, então Paulo resolverá a situação-problema.

O output de [2"] – plano de ação intencional – pode ser assim representado:

[1]		Q		resolver problema, Paulo
[2]	P	Q	usar função, Paulo	resolver problema, Paulo

O terceiro estágio refere-se à provável execução da ação antecedente P:

> [3a] O indivíduo *i* executa *P* para atingir *Q* em t_3, ou
> [3b] O indivíduo *i* não executa *P* para atingir *Q* em t_3.

A execução é o momento em que Paulo (não) usa função para resolver a situação-problema[145]. Rauen argumenta nesse estágio que o esquema em primeiro plano será ativo, de tal modo que Paulo tenderá a usar função para resolver a situação-problema.

O output ativo do terceiro estágio (ação intencional) pode ser visto a seguir:

> [3'] Paulo *i* usa função para Paulo *i* resolver a situação-problema em t_3.

Ou, de modo mais esquemático:

[1]		Q		resolver problema, Paulo
[2]	P	Q	usar função, Paulo	resolver problema, Paulo
[3]	P		Paulo usa função	

[145] Embora modelemos uma situação materialmente executada nesta revisão teórica, reiteramos que os estágios de execução e de checagem podem ser meramente simulados.

O quarto estágio consiste na checagem dedutiva da formulação hipotética:

> (4a) O indivíduo *i* checa a consecução *Q'* em t_4, considerando [2] e [3a]; ou,
> (4b) O indivíduo *i* checa a consecução $\neg$*Q'* em t_4, considerando [2] e [3b].

Na checagem, o agente avalia ou monitora o resultado da ação antecedente *P* no escopo dedutivo da formulação "Se *P*, então *Q*". Em outras palavras, assumindo o cenário ativo (Q; Se P, então Q; P), Paulo avalia se a utilização da função resolve a situação-problema.

O *output* do quarto estágio em (4a) pode ser visto a seguir:

> (4') Paulo *i* checa a resolução da situação-problema em t_4.

Ou, de forma mais esquemática:

[1]		Q		resolver problema, Paulo
[2]	P	Q	usar função, Paulo	resolver problema, Paulo
[3]	P		Paulo usa função	
[4]		Q'		Paulo resolve o problema

É justamente no quarto estágio que Rauen (2014) propõe dois conceitos basilares em teoria de conciliação de metas: o de conciliação de metas e o de confirmação de hipóteses.

Por *conciliação de metas*[146], Rauen (2018, p. 15) define certa situação na qual "o estado de meta *Q'* em [4] satisfaz as expectativas de estado de meta *Q* em [1]", de tal modo que o resultado da ação *P* em t_4 é suficientemente semelhante com o resultado projetado pelo indivíduo *i* em t_1.

No domínio desse conceito, podemos observar quatro possibilidades: (a) *conciliação ativa* (1a), quando o indivíduo *i* executa a ação *P* no contexto da hipótese abdutiva antefactual H_a, e o estado *Q'* em t_4, como esperado, concilia-se com a meta *Q* em t_1; (b) *inconciliação ativa* (1b), quando o indivíduo *i* executa a ação *P*, mas o estado $\neg$*Q'* em t_4 não se concilia com a meta *Q* em t_1; (c) *conciliação passiva* (1c), quando o indivíduo *i* não executa a ação *P*, e o estado *Q'* em t_4, mesmo assim, concilia-se com a meta *Q* em t_1; e (d) *inconciliação passiva* (1d), quando o indivíduo *i* não executa a ação *P*, e o estado $\neg$*Q'* em t_4, como esperado, não se concilia com a meta *Q* em t_1.

[146] Conforme Rauen (2019, inédito), o termo *conciliação* é tomado tal como em Contabilidade. Numa conciliação bancária, por exemplo, compara-se o extrato de uma conta com as movimentações financeiras. Se for encontrada alguma inconciliação, realizam-se lançamentos complementares, estornos ou reclassificações.

Em termos simples: numa conciliação ativa (1a), Paulo usa função e resolve a situação-problema; numa inconciliação ativa (1b), Paulo usa função, mas não resolve a situação-problema[147]; numa conciliação passiva (1c), Paulo não usa função e, mesmo assim, resolve a situação-problema[148]; e numa inconciliação passiva (1d), Paulo não usa função e, como esperado, não resolve a situação-problema.

As quatro situações podem ser visualizadas na figura 16 a seguir:

Figura 16 – Possibilidades de consecução de metas

Estágios	(1a) Conciliação Ativa	(1b) Inconciliação Ativa	(1c) Conciliação Passiva	(1d) Inconciliação Passiva
[1]	Q	Q	Q	Q
[2]	P Q	P Q	P Q	P Q
[3]	P	P	¬P	¬P
[4]	Q’	¬Q’	Q’	¬Q’

Fonte: Rauen (2014, p. 604, tradução nossa).

Rauen (2018, p. 15) define por *confirmação* de uma *hipótese abdutiva antefactual* H_a a situação na qual “o estado de meta *Q’* em [4] satisfaz as expectativas de consecução lançadas pela hipótese em [2]”, de tal modo que o resultado da ação *P* reforça a hipótese abdutiva antefactual H_a de que a ação antecedente *P* causa o estado consequente *Q*.

O autor sugere que a avaliação de uma *hipótese abdutiva antefactual* H_a depende do grau de *confiança* ou *força* a ela atribuído pelos indivíduos, conforme a seguinte gradação:

a) *Hipótese abdutiva antefactual categórica*. Trata-se de uma formulação $P \Leftrightarrow Q$, cuja consecução é verdadeira somente quando *P* e *Q* são verdadeiros[149]. Nesse caso *P* e *Q* são suficientes, necessários e certos, e a única consecução admitida pelo indivíduo é a conciliação ativa (1a). Defendemos a hipótese de que, *por default*, hipóteses abdutivas antefactuais H_a emergem como categóricas em instâncias conscientes ou inconscientes[150];

b) *Hipótese abdutiva antefactual bicondicional*. Trata-se de uma formulação $P \longleftrightarrow Q$, cuja consecução é verdadeira nos casos em que *P* e *Q* são verdadeiros ou falsos simultaneamente. Hipóteses abdutivas antefactuais categóricas se revelam bicondicionais nas inexecuções de *P*. Nesses casos, a mera

[147] Por exemplo, produz erros de interpretação de unidades significativas, de conversão ou de tratamento, não é competente para modelar a situação-problema por função etc.

[148] Por exemplo, percebe regularidades por tentativa e erro ou frauda o exercício colando a resposta de um colega.

[149] A notação ‘⇔’ captura a ideia de conexão suficiente, necessária e certa entre os termos da proposição.

[150] Segue-se que o mecanismo abdutivo funciona tanto em situações automáticas inatas ou aprendidas como em situações de deliberação, quando a própria hipótese emerge como relevante.

consideração da possibilidade $\neg P \rightarrow \neg Q$, enfraquece a formulação hipotética categórica inicial, pois P e Q passam agora a ser suficientes e necessários, mas não certos, admitindo-se inconciliações passivas (1d);

c) *Hipótese abdutiva antefactual condicional.* Trata-se de uma formulação $P \longrightarrow Q$, cuja consecução é verdadeira nos casos em que a ação antecedente P se revela suficiente, mas não necessária para o estado consequente Q (implicação material). Nesses casos, há um novo enfraquecimento da força da hipótese abdutiva, porque o indivíduo passa a admitir conciliações passivas (1c);

d) *Hipótese abdutiva antefactual habilitadora.* Trata-se de uma formulação $P \longleftarrow Q$ [151], consecução é verdadeira nos casos onde a ação antecedente P se revela necessária, mas não suficiente para atingir o estado consequente Q. Trata-se de uma ação P que habilita, mas não garante a consecução Q, viabilizando inconciliações ativas (1b)[152];

e) *Hipótese abdutiva antefactual tautológica.* Trata-se de uma formulação P—Q [153], cuja consecução é verdadeira nos casos onde ambos, P e Q, são suficientes, mas não necessários, modelando situações do tipo “Se P, então possivelmente Q” e admitindo todos os tipos de consecução.

Essas possibilidades podem ser resumidas na figura 17, a seguir:

Figura 17 – Possibilidades de sucesso na consecução de planos de ação intencional

Tipos de Conciliação	Ação Antecedente P	Estado Consequente Q	Hipótese Categórica $P \Longleftrightarrow Q$	Hipótese Bicondicional $P \longleftrightarrow Q$	Hipótese Condicional $P \longrightarrow Q$	Hipótese Habilitadora $P \longleftarrow Q$	Hipótese Tautológica P—Q
Conciliação Ativa	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Inconciliação Ativa	Sim	Não	Não	Não	Não	Sim	Sim
Conciliação Passiva	Não	Sim	Não	Não	Sim	Não	Sim
Inconciliação Passiva	Não	Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim

Fonte: Rauen (2014, p. 606, tradução nossa).

[151] Terminologia emprestada de Johnson-Laird e Byrne (2002, p. 661).

[152] Quando Rauen (2014) acolhe hipóteses abdutivas antefactuais habilitadoras e, mais à frente, hipóteses tautológicas, abandona a pretensão epistêmica de que premissas verdadeiras gerem necessariamente conclusões verdadeiras. A notação ‘⟵’ captura a ideia de conexão necessária, mas não suficiente entre a proposição antecedente e a proposição consequente.

[153] Terminologia emprestada de Johnson-Laird e Byrne (2002, p. 660-661). A notação ‘—’ captura a ideia de ausência de conexão certa, necessária ou suficiente entre os termos da proposição.

Assumindo, por exemplo, que a hipótese abdutiva antefactual H_a foi tomada por Paulo como categórica $P \Leftrightarrow Q$ no estágio [2], as diferentes situações ilustradas neste estudo podem ser descritas e explicadas da seguinte forma[154].

Numa conciliação ativa, Paulo atinge a meta Q de resolver a situação-problema e confirma a hipótese abdutiva antefactual categórica H_a de que usar função resolve a situação-problema. Essa hipótese é fortalecida e estocada dinamicamente na memória enciclopédica como uma suposição factual a ser acionada em situações-problema similares futuras.

[1]	Q	Paulo projeta resolver a situação-problema;
[2]	P⇔Q	Certamente, se Paulo usar função, então Paulo resolve a situação-problema;
[3]	P	Paulo usa função;
[4]	Q’	Paulo resolve a situação-problema.

Numa inconciliação ativa (1b), Paulo não consegue resolver a situação-problema *¬*Q’* mesmo usando função, de tal modo que o conceito se revelou necessário, mas não suficiente para resolver a questão (hipótese habilitadora $P \longleftarrow Q$)[155].

[1]	Q	Paulo projeta resolver a situação-problema;
[2]	P⇔Q	Certamente, se Paulo usar função, então Paulo resolve a situação-problema;
[3]	P	Paulo usa função;
[4]	*¬Q’	Paulo não resolve a situação-problema;
[5]	P⟵Q	A função é necessária, mas não suficiente para resolver a situação-problema.

Como em casos de perseverança, a meta Q é mais forte do que a consecução $\neg Q'$, o processamento não pode parar no estágio [5] sob pena de a modelação ser implausível. Para manter a perseguição da meta, Rauen (2014) sugere cotejar Q e $\neg Q'$ por uma regra de *introdução-e*[156] e, como ambas as proposições são verdadeiras no caso em ilustração, sugere

[154] Sobre modelações com hipóteses bicondicionais, condicionais, habilitadoras e tautológicas, ver Rauen (2014).

[155] Destaque-se que essa inconciliação ativa é relevante tanto quando constrange o indivíduo a procurar novas soluções, quando o leva a formular hipóteses abdutivas pós-factuais ou explicativas para dar conta do revés.

[156] Sugerimos a inclusão de uma regra de introdução a despeito de Sperber e Wilson (1986, 1995) argumentarem que o mecanismo dedutivo atua exclusivamente por regras de eliminação, porque, a rigor, a regra de *introdução-e* em pauta não incorpora material arbitrário, uma vez que se trata da retomada da meta *Q*. Luciano (2014) desenvolve esse argumento em sua dissertação de mestrado *Relevância e conciliação de metas: adequação lógica e plausibilidade empírica*.

manter *Q* por regra de *eliminação-e*. Uma vez mantida a meta, emerge um novo problema, e abre-se a possibilidade de tantos novos ciclos abdutivo-dedutivos quanto possíveis.

[6]	$Q \wedge \neg Q'$	1, 4 por *introdução-e*;
[7]	Q	por *eliminação-e* (manutenção da meta).

Numa conciliação passiva (1c), ocorre a resolução da situação-problema a despeito da passividade de Paulo (alguém fornece a resposta sem que Paulo tenha agido). Nesse cenário, Paulo conclui que o uso de função é condição suficiente, mas não necessária para resolver a situação-problema $P \rightarrow Q$. Como a realidade retorna com a consecução da meta, é provável que a situação-problema deixe de ser relevante, e Paulo passe a dar atenção a outras metas ou demandas[157].

[1]	Q	Paulo projeta resolver a situação-problema;
[2]	$P \Leftrightarrow Q$	Certamente, se Paulo usar função, então Paulo resolve a situação-problema;
[3]	$*\neg P$	Paulo não usa função;
[4]	$P \longleftrightarrow Q$	Se e somente se Paulo usar função então Paulo resolve a situação-problema;
[5]	$*Q'$	A questão se resolve sem Paulo usar função;
[6]	$P \longrightarrow Q$	A função é suficiente, mas não é necessária para resolver a situação-problema.

Numa inconciliação passiva (1d), Paulo não resolve a situação-problema, como esperado, porque ele, por exemplo, percebe-se incompetente na tarefa. Isso gera dois efeitos cognitivos: o enfraquecimento da hipótese, que agora se revela bicondicional $P \longleftrightarrow Q$[158]; e, no domínio dessa nova hipótese bicondicional, a conclusão implicada de que o problema não será resolvido $\neg Q$. Assumindo mais uma vez que o indivíduo persevera, Rauen sugere que ele coteja a força da meta *Q* e da consecução $\neg Q'$ (regra de introdução-e) [6] e, por hipótese, dada a ascendência da meta, sugere que ele mantém Q por regra de eliminação-e [7][159].

[1]	Q	Paulo projeta resolver a situação-problema;
[2]	$P \Leftrightarrow Q$	Certamente, se Paulo usar função,

[157] Essa repentina conciliação, entretanto, pode também exigir uma explicação pós-factual quando involuntária ou mesmo ser fonte de novos problemas quando a inação decorre de hesitações, medos etc.

[158] Conforme Rauen (2014), não se segue da rejeição do grau categórico da hipótese $P \Leftrightarrow Q$ que a hipótese bicondicional $P \longleftrightarrow Q$ seja rejeitada. É essa flexibilidade *ad hoc* diante das (in)conciliações de metas justamente o que caracteriza a arquitetura aqui desenvolvida.

[159] Ou, como é comum em sala de aula, o estudante desiste.

		então Paulo resolve a situação-problema;
[3]	*¬P	Paulo não usa função;
[4]	P⟷Q	Se e somente se Paulo usar função então Paulo resolve a situação-problema;
[5]	¬Q	Paulo não resolve a situação-problema;
[6]	Q∧¬Q’	1, 5 por *introdução-e*;
[7]	Q	por *eliminação-e*.

Conhecidas em linhas gerais a modelação abdutivo-dedutiva em um caso de autoconciliação de metas, estamos em condições de apresentar a modelação em casos de heteroconciliação colaborativa, envolvendo, portanto, processos ostensivo-inferenciais.

5.3 HETEROCONCILIAÇÃO DE METAS

Para ilustrar um caso de heteroconciliação colaborativa de meta, tomemos como exemplo o caso em que Paulo precisa resolver a mesma situação-problema, mas a primeira hipótese abdutiva antefactual a lhe ocorrer é obter o método de resolução de Maria. Nessa situação, o plano de ação intencional de Paulo conteria três níveis. Para Paulo resolver a situação-problema *Q*, ele precisa obter o método de solução de Maria *P*; e, para isso, ele precisa que Maria lhe forneça o método de solução *O*.

[1]			Q resolver problema, Paulo
[2]		P obter método de Maria, Paulo	Q resolver problema, Paulo
[3]	O fornecer método, Maria	P obter método de Maria, Paulo	
[4]	O Maria fornece método		
[5]		P’ Paulo obtém método	
[6]			Q’ Paulo resolve o problema

O obstáculo óbvio neste contexto é que a meta *O* de caráter prático de que Maria forneça o método de solução da situação-problema precisa ser comunicada[160]. Para tanto, Rauen (2018, p. 24) propõe três camadas de intenções: “uma intenção prática que superordena uma

[160] Conforme definição formal de relevância dependente de meta de Lindsay e Gorayska (2004, p. 69), “P é relevante para G se e somente se G é uma meta e P é um elemento essencial de algum plano que é suficiente para alcançar G”. Posto isso, um estímulo comunicacional ostensivo qualquer direcionado à cognição não é relevante em si mesmo, mas em um contexto que se ajusta a um propósito próprio ou atribuído a outrem.

intenção informativa, uma intenção informativa que superordena uma intenção comunicativa, e uma intenção comunicativa propriamente dita”[161].

No caso, a intenção prática O de que Maria forneça o método de solução da situação-problema, como forma de atingir as intenções práticas P e Q de nível mais alto de Paulo obter o método e resolver o problema, superordena uma intenção informativa N de tornar manifesto ou mais manifesto um conjunto de informações {I} coerente com essa intenção prática O[162].

Esta intenção informativa N, por sua vez, superordena uma intenção comunicativa M de, mediante um estímulo ostensivo aberto, tornar mutuamente manifesto ou mais manifesto para ambos, Maria e Paulo, que Paulo torna manifesto esse conjunto de informações {I} coerente com a intenção prática O que superordena essa cadeia de intenções.

Finalmente, coerente com essa intenção prática O que superordena a cadeia de intenções, Paulo produz um estímulo ostensivo aberto que torna mutuamente manifesto ou mais manifesto para ambos, Maria e Paulo, que ele torna manifesto esse conjunto de informações {I} – intenção comunicativa M propriamente dita.

Essa cadeia de intenções pode ser vista a seguir:

			… … Q resolver problema, Paulo
			… P usar função, Paulo
[1]			O fornecer método, Maria
[2]		N informar pedido, Paulo	O fornecer método, Maria
[3]	M comunicar pedido, Paulo	N informar pedido, Paulo	
[4]	M Paulo comunica pedido		
[5]		N’ Paulo informa pedido	
[6]			O’ Maria fornece método
			… P’ Paulo obtém método
			… … Q’ Paulo resolve problema

No caso, dadas as suas preferências, ele próprio quer resolver a situação-problema, e habilidades, sua expertise em interagir com Maria, Paulo poderia dizer o que segue:

Paulo – Você pode me dizer como resolver a questão?

[161] Modelações com três camadas de intenção podem ser vistas, por exemplo, em Bez (2016), Caldeira (2016), Rauen e Ribeiro (2016, 2017), Luciano (2019).

[162] Sobre *manifestabilidade* e *manifestabilidade mútua*, sugerimos ler Sperber e Wilson (1995, p. 38-46).

Do ponto de vista de Maria, o primeiro passo consiste em mobilizar o procedimento de interpretação orientado pelo princípio de relevância. Como esperado, seguindo uma rota de esforço mínimo, Maria encaixaria a formulação linguística do enunciado de Paulo em uma forma lógica e elaboraria as respectivas explicaturas[163,164].

> (1a) Forma Linguística: Você pode me dizer como resolver a questão?
> (1b) Forma Lógica: (poder dizer x, y, z (poder resolver x, y, α_{modo})[165].
> (1c) Explicatura: você [MARIA] pode me [PARA PAULO] dizer como ∅ [PAULO] [PODE] resolver a questão [SITUAÇÃO-PROBLEMA][166, 167].
> (1d) Explicatura com ato de fala: PAULO DESEJA SABER SE MARIA PODE DIZER PARA PAULO COMO PAULO PODE RESOLVER A SITUAÇÃO-PROBLEMA.

Conforme vimos, em teoria da relevância, há três questões essenciais que a audiência tem de responder para identificar o significado do falante: qual é seu significado explícito, qual é seu significado implícito e qual é o conjunto de suposições contextuais adequado para interpretar esses significados (WILSON, 2005). A explicatura (1d) corresponde ao significado explícito do enunciado (1a) de Paulo, mas ainda não corresponde ao significado implícito tornado manifesto ou mais manifesto por seu enunciado. Para obter esse significado implícito, é necessário que Maria seja capaz de inferir que Paulo deseja que ela forneça o

---

[163] Para Sperber e Wilson, as representações conceituais necessitam ter propriedades lógicas, precisando ser capazes de fazer implicações, de se contradizerem umas às outras e de sofrerem regras de dedução. Essas representações podem ainda apresentar propriedades não lógicas: a propriedade de estar feliz ou não, por exemplo. Assim, para que uma representação conceitual esteja inserida num processo lógico é necessária que ela esteja em sua forma lógica, ou seja, “uma fórmula bem formada, um conjunto estruturado de constituintes que passa pelas operações lógicas formais determinadas pela sua estrutura” (SPERBER; WILSON, 2001[1986], p. 125). Formas lógicas podem ser proposicionais, sintaticamente bem formadas e semanticamente completas, e não proposicionais, sintaticamente bem formadas, mas semanticamente incompletas.

[164] Sobre a metodologia descritiva, sugerimos ler, por exemplo, Rauen (2011, 2009). De acordo com Silveira e Feltes (2002, p. 56), a teoria da relevância busca descrever e explicar os níveis de compreensão em três níveis representacionais: o nível da *forma lógica*, que depende da decodificação linguística; o nível da *explicatura*, onde a forma lógica é desenvolvida, inclusive através de implicaturas; e o *nível da implicatura*, para além das explicaturas. Para efeitos de exposição, a versão (1a) replica a forma linguística do enunciado; a versão (1b) apresenta uma descrição semântica da forma lógica subjacente da versão (1a); a versão (1c) apresenta como as entradas lógicas da forma lógica são preenchidas, compondo uma primeira descrição da explicatura da versão (1a); a versão (1d) apresenta a explicatura plenamente desenvolvida e o respectivo ato de fala; e, mais adiante, sequências de suposições $S_{1\text{-}n}$ representam implicaturas elaboradas a partir da versão (1d).

[165] Conforme RAUE (2009), destacam-se com letras gregas as diversas circunstâncias de um enunciado que, embora não caibam numa descrição proposicional *stricto sensu*, revelam-se relevantes na interação. No caso em pauta, o modo de resolução é a variável relevante.

[166] Utilizam-se aqui as seguintes convenções: expressões linguísticas, quando referenciadas, são apresentadas entre aspas simples: ‘Paulo’; entradas enciclopédicas são apresentadas em versalete ou caixa alta: PAULO; e as referências no mundo, quando pertinentes, são apresentadas sem qualquer indicativo: Paulo.

[167] Vale destacar que a estrutura linguística pode ser mais ou menos explícita. Quando a sentença do enunciado provê um conjunto maior de entradas linguísticas e, desse modo, menos lacunas existem para serem preenchidas inferencialmente, diz-se que a sentença é mais explícita. Inversamente, quando menores são as pistas linguísticas para compor a explicatura do enunciado, diz-se que a sentença é menos explícita.

método de resolução da situação e, para isso, Maria deve ser capaz de produzir, entre outras, a seguinte cadeia de inferências:

> S_1 – Paulo deseja saber se Maria pode dizer para Paulo como Paulo pode resolver a situação-problema (premissa implicada derivada da explicatura do enunciado de Paulo);
> S_2 – Paulo provavelmente quer que Maria forneça o método de resolução da situação-problema (conclusão implicada $S_1 \longrightarrow S_2$ por *modus ponens*)[168];

Somente quando Maria infere a suposição S_2 de que Paulo provavelmente quer que ela lhe forneça o método de resolução – intenção informativa *N* de Paulo – é que ela pode, de fato, fazer isso e, desse modo, viabilizar que Paulo atinja sua intenção prática *O*.

> S_3 – Maria provavelmente deve fornecer o método de resolução da situação-problema (conclusão implicada $S_1 \wedge S_2 \longrightarrow S_3$ por *modus ponens conjuntivo*).

Do ponto de vista do plano de ação intencional de Paulo, quando Maria lhe fornece o método para resolver a situação-problema, três camadas de intenção foram heteroconciliadas:

a) no que se refere à intenção comunicativa *M*, coube a Paulo tornar mutuamente manifesto ou mais manifesto seu desejo de informar o conjunto de informações {I} de saber se Maria poderia fornecer o método de resolução da situação-problema, e coube a Maria dispor-se a tornar esse enunciado relevante o suficiente para processá-lo;
b) no que se refere à intenção informativa *N*, coube a Paulo informar o conjunto de informações {I} de saber se Maria poderia fornecer o método de resolução da situação-problema, e coube a Maria acionar o procedimento de compreensão para interpretar do enunciado de Paulo;
c) no que se refere à intenção prática *O*, coube a Paulo sugerir que a inferência correta no cenário era a de que Maria fornecesse o método de resolução da

[168] Conforme Rauen (2009, p. 196, nota 5), Sperber e Wilson (1986, 1995, 2001) propõem haver um mecanismo ou módulo dedutivo na interpretação dos enunciados que toma como *input* certo conjunto de suposições e deduz todas as conclusões possíveis desse conjunto. Esse mecanismo não opera com as regras triviais da lógica formal, mas de modo não trivial (sensível à força das suposições) e não demonstrativo (passível de ser confirmado, mas não de ser provado). Nesse mecanismo, os atores argumentam haver apenas regras de eliminação do tipo *eliminação-e* e *modus ponens*. Na regra de *eliminação-e*, sendo consideradas em conjunto verdadeiras duas suposições *P* e *Q*, cada uma separadamente, *P* ou *Q*, é verdadeira. Formalmente: $P \wedge Q$, P ou $P \wedge Q$, Q. Na regra de *modus ponens*, se há uma relação de implicação entre duas suposições *P* e *Q*, quando a primeira é afirmada *P*, segue-se necessariamente a segunda *Q*. Formalmente: $P \longrightarrow Q$, P, Q. Por vezes, é possível combinar as duas regras por *modus ponens conjuntivo*: $(P \wedge Q) \longrightarrow R$, $P \longrightarrow R$, R ou então $(P \wedge Q) \longrightarrow R$, $Q \longrightarrow R$, R.

situação-problema, e coube a Maria proceder aos cálculos inferenciais pertinentes que permitissem a ela concluir o que estava em jogo nesta interação.

Em síntese, para que Paulo pudesse, ele mesmo, resolver a situação-problema com a sugestão de método fornecida por Maria, entrou em cena uma cadeia complexa de heteroconciliações e, para que isso fosse possível, ambos, Paulo e Maria, deveriam ser capazes de monitorar, cada qual a seu modo, o curso das ações – autoconciliações[169].

O esquema da figura a seguir resume essa cadeia complexa.

Figura 18 – Esquema básico para auto e heteroconciliação de metas

Paulo		Maria
Q	← Heteroconciliação →	Q
↑ Autoconciliação ↓		↑ Autoconciliação ↓
Q’	← Heteroconciliação →	Q’

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Todavia, como Rauen (2018, p. 26, nota 20) reconhece, “essa cadeia de inferências pode falhar de diferentes formas, e isso ocorre porque elas dependem do estímulo ostensivo que compõe a ação de nível mais baixo na cadeia de submetas e metas em pauta”[170]. A rigor, enunciados funcionam como hipóteses abdutivas antefactuais habilitadoras $P \longleftarrow Q$, uma vez que, embora necessários, eles não são suficientes para a heteroconciliação de intenções práticas.

Levando em conta justamente essas fragilidades, assumimos nesta pesquisa que qualquer plano de intervenção didática se comporta como um conjunto de hipóteses abdutivas habilitadoras em direção a metas potencialmente heteroconciliáveis. O plano de ação intencional que sustenta este estudo e é apresentado na próxima sessão não é diferente.

[169] Segundo Rauen (2014, p. X), esta modelação alinha-se com o argumento de Tomasello e colaboradores (2005, p. 680-681) de que “a diferença crucial entre a cognição humana e a de outras espécies é a capacidade humana de participar de atividades colaborativas com metas e intenções comuns – *intencionalidade compartilhada* ou *intencionalidade ‘nós’*”.

[170] Rauen (2019, inédito) desenvolve um conjunto de exemplos que demonstram modos como planos de ação intencional visando a heteroconciliação colaborativa de metas podem falhar.

5.4 PLANO DE AÇÃO INTENCIONAL

Conforme o capítulo anterior, para que se possa melhor organizar uma sequência didática envolvendo atividades de modelagem matemática, pode-se recorrer à engenharia didática, que tem por objetivo conceber, realizar, observar e analisar situações didáticas. Desta maneira, argumentamos nesse estudo que a organização de uma sequência didática pressupõe o estabelecimento de um plano de ação intencional em direção à consecução de metas.

Em linhas gerais, do ponto de vista do professor, essa cadeia de intenções pode ser assim representada:

[1]		... Q_1 – Habilitar o estudante a aplicar o conceito de função em atividades de modelagem matemática, professor.
[2]		P_1 – Habilitar o estudante a modelar situações no contexto da físico-química, professor.
[3]	O_1 – Habilitar os estudantes a representar matematicamente situações dadas em língua natural, professor.	
[4]	O_2 – Habilitar o estudante a mobilizar diferentes registros de representação semióticas, professor.	
[5]		P_2 – Propor ao estudante situações no contexto da físico-química que envolvam o objeto matemático função, professor.
[6]	O_3 – Possibilitar ao estudante a mobilização de diferentes objetos matemáticos na modelagem matemática, professor.	
[7]	O_4 – Habilitar o estudante nas diferentes atividades cognitivas de uma atividade de modelagem matemática: compreensão da situação, estruturação da situação, matematização, síntese, interpretação e validação, comunicação e argumentação, professor.	

Assumindo-se que a meta Q do professor é 'habilitar o estudante a aplicar o conceito de função em atividades de modelagem matemática', é necessário que o professor atinja as submetas $P_{1\text{-}2}$, e cabe ao professor atingir as ações antecedentes $O_{1\text{-}4}$ para atingir estas submetas. Portanto, a meta Q pode requer n submetas $P_{1\text{-}n}$ e m ações antecedentes O_{1-m}.

Para Luciano (2019, p. 114), "processos de auto e heterovigilância epistêmica e prática moderam a emergência e a avaliação da força da conexão entre ações antecedentes e estados consequentes de hipóteses abdutivas antefactuais mobilizadas no contexto de planos de ação intencional em direção à consecução ótima de metas” [171]. Assim, processos de auto e heterovigilância estarão em jogo na atividade proposta, tendo em vista que pesquisador, professor e estudantes buscarão, constantemente, monitorar seus planos de ação intencional.

Como expusemos ao longo deste estudo, defendemos que a arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas permite (a) planejar, executar e validar sequências didáticas envolvendo modelagem matemática, dimensão metodológica, e (b) descrever e explicar como os estudantes selecionam e articulam os diferentes inputs na elaboração de um modelo matemático, ou seja, na busca de uma meta, dimensão epistemológica.

Assim, lançamos a hipótese de que, do *ponto de vista dos estudantes*, as atividades cognitivas de mobilização de unidades significativas que representam matematicamente as transformações gasosas isotérmicas, isobáricas e isovolumétricas das situações-problema em diferentes registros, os tratamentos dessas representações no domínio de cada registro e as eventuais conversões dessas representações em representações de outros registros serão moderadas por relações relevantes de custo e benefício cognitivo em direção à conciliação colaborativa de submetas em favor da meta coletiva (grupos de estudantes entre si e grupos de estudantes e docente) de modelar matematicamente essas transformações gasosas.

Do *ponto de vista do docente*, por sua vez, lançamos a hipótese de que as consecuções dos grupos de estudantes estarão a serviço da consecução de uma sequência didática concebida como um plano de ação intencional em direção a conciliação colaborativa (grupos de estudantes e docente) de habilitar os estudantes a modelar as transformações gasosas isotérmicas, isobáricas e isovolumétricas nas situações-problema em pauta.

Do *ponto de vista do pesquisador*, por fim, lançamos a hipótese de que ambas as consecuções, aquela dos grupos de estudantes e aquela do docente, estarão a serviço da consecução do plano de ação intencional de avaliar a pertinência epistemológica e metodológica da arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas para descrever e explicar tanto a modelagem matemática das transformações gasosas como a implementação da sequência didática.

Retomados o objetivo e as hipóteses e levando em conta que esta pesquisa não pretende realizar uma generalização indutiva, após a etapa de revisão bibliográfica, realizou-se

---

[171] Segundo Luciano (2019), em teoria da relevância, a vigilância epistêmica assevera que falantes e ouvintes monitoram a veracidade da informação; a vigilância prática, por sua vez, assevera que falantes e ouvintes monitoram a intenção prática em jogo.

um estudo de caso[172] com desenho pré-experimental[173] de tipologia *depois sem grupo controle*[174], que foi aplicado no Instituto Federal de Santa Catarina – campus Criciúma.

Nessa pesquisa foram selecionados como participantes[175] estudantes matriculados no segundo ano do curso técnico de química integrado ao ensino médio no ano de 2019[176]. Foram convidados a participar todos os 39 estudantes regularmente matriculados na unidade curricular matemática da referida turma e curso, sendo selecionados para participação todos os 31 estudantes que se dispuserem a participar de forma voluntária no horário regular da unidade curricular. Destes, somente 20 estudantes participaram efetivamente da pesquisa.

Para realizar a coleta dos dados, elaboramos uma sequência didática, de acordo com os pressupostos da teoria de situações didáticas, envolvendo transformações gasosas isotérmicas, isobáricas e isovolumétricas.

Para o planejamento da sequência didática, constituiu-se uma equipe de trabalho, composta pelo pesquisador, pelo professor de matemática titular da turma, por um professor de físico-química e por um professor de física. O objetivo desta etapa foi obter subsídios para realizar as análises preliminar e *a priori*, como propõe a engenharia didática.

Para Gibel (2018, p. 19) a organização de engenharia didática, que visa a favorecer o raciocínio e o acesso as razões do saber, necessita que:

> - O estudante tem o ‘repertório didático’ necessário para conceber as estratégias básicas;
> - O conhecimento necessário para desenvolver as estratégias de resolução não está muito distante do ‘repertório didático’ da classe;
> - O estudante pode obter em resposta à sua ação as informações necessárias para resolver o problema;
> - O estudante pode determinar por si mesmo se o resultado obtido está correto ou não;

---

[172] Por *estudo de caso*, Rauen (2015, p. 559) define “uma análise profunda e exaustiva de um de poucos objetos, de modo a permitir o seu amplo e detalhando conhecimento”.

[173] Por *desenho pré-experimental*, Rauen (2015, p. 277), define “estudos que, quando comparados com o desenho experimental clássico (medida antes/depois com grupo experimental e de controle aleatórios), apresentam, pelo menos, uma deficiência no que se refere à presença à presença e à aleatoriedade dos grupos experimental e de controle”.

[174] Segundo Rauen (2015, p. 278, itálico no original), “por *desenhos depois sem grupo de controle* ou *estudo de caso único sem grupo de controle* definem-se os estudos com os quais o pesquisador mede o efeito da exposição de um único grupo à variável experimental”.

[175] Após aprovação do Comitê de Ética em pesquisa da Unisul, solicitou-se autorização do Departamento de Ensino, Pesquisa e Extensão do Instituto Federal de Santa Catarina – campus Criciúma, assentimento dos alunos e consentimento de seus pais e/ou responsáveis para a realização desta pesquisa (em anexo).

[176] A escolha deriva do fato de estes estudantes supostamente dominarem conceitos e técnicas pertinentes no relacionados à físico-química. Levou-se em conta ainda o fato de as unidades curriculares pertencentes a área técnica do 1° ano curso de química requerem apenas o uso de proporção diretamente proporcional.

- O estudante pode fazer várias tentativas[177].

O quadro 9, mas adiante, apresenta os níveis de *milieu* em uma situação didática de forma simplificada, destacando as ações do estudante e do professor. Neste quadro, após a devolução, o professor deve observar os estudantes e orientá-los, se necessário. Em modelagem matemática, durante o *milieu* heurístico, os estudantes devem construir hipóteses, escolher tratamentos e conversões necessários para resolver a situação-problema e, depois, formular e justificar um modelo matemático. Durante o *milieu* de referência, os estudantes devem questionar a validade de suas formulações e o modelo obtido.

Segundo Bloch (2019), a evolução do *milieu* nos conduz a elaborar resumo e síntese das pesquisas dos grupos em M_{-1}, geralmente começando com o menos avançado, culminando com a institucionalização, onde o professor apresenta o saber trabalhado. Neste processo, os estudantes devem refletir sobre objetos, regras e condições sob as quais o modelo foi desenvolvido e discutir a validade do modelo e os resultados obtidos.

Quadro 10 – Níveis de *milieu* em uma situação a-didática

M_0: milieu de aprendizagem	E_0 estudante	P_0 professor declara o saber	**Situação didática**
M_{-1}: milieu de referência	E_{-1} estudante aprendiz	P_{-1} P em ação, valida os resultados	**Níveis a-didáticos**
M_{-2}: milieu heurístico	E_{-2} o estudante busca resolver o problema	P_{-2} P observador e devolvedor	
M_{-3}: milieu material	E_{-3} o estudante descobre o material e as instruções	P_{-3} P prevê o ‘material e as instruções para E	

Fonte: Bloch (2019, p. 4).

Nas análises preliminar e *a priori*, foram definidos os conceitos envolvidos na sequência didática, os caminhos possíveis de resolução e as possíveis dificuldades. Experimentações em laboratório, se necessárias, também foram previstas.

[177] « - L’élève dispose du ‘répertoire didactique’ nécessaire pour concevoir les stratégies de base ;

- Les connaissances nécessaires pour élaborer les stratégies de résolution ne sont pas trop éloignées du ‘répertoire didactique’ de la classe ;

- L’élève peut obtenir en réponse à son action les informations nécessaires à la résolution du problème ;

- L’élève peut déterminer par lui-même si le résultat obtenu est correct ou non ;

- L’élève peut faire plusieurs tentatives ».

Seguindo a arquitetura descritivo-explanatória da teoria de conciliação de metas, a elaboração de uma sequência didática requereu a organização de um plano de ação intencional que conduzisse à autoconciliação e à heteroconciliação de metas.

Desta maneira, dado que a meta *R* do pesquisador foi a de "analisar o planejamento, a execução e os resultados de planos de ação intencional de sequências didáticas envolvendo modelagem matemática de transformações gasosas aplicadas a estudantes do curso técnico de nível médio integrado em química do IFSC – campus Criciúma", o plano de ação intencional, do ponto de vista do pesquisador, pode ser assim representado[178]:

[1] ... ... R – Analisar a concepção, a execução e os resultados de uma sequência didática concebida como um plano de ação intencional em direção a conciliação colaborativa da meta de estudantes do curso técnico de nível médio integrado em química do IFSC – campus Criciúma – modelarem matematicamente transformações gasosas., pesquisador.
[2] ... ... Q – Habilitar o estudante a aplicar o conceito de função sequências didáticas envolvendo modelagem matemática, pesquisador.
[3] ... ... P – Aplicar uma sequência didática, pesquisador.
[4] ... ... O_1 – Organizar a sequência didática, pesquisador.
[5] ... N_1 – Realizar a análise preliminar, pesquisador.
[6] M_1 – Analisar as interfaces entre a matemática e a físico-química, pesquisador.
[7] M_2 – Realizar uma análise das dimensões epistemológica, cognitiva e didática, pesquisador.
[8] ... N_2 – Realizar a análise *a priori*, pesquisador.
[9] M_3 – Organizar o experimento, inclusive o pré-teste, pesquisador.
[10] M_4 – Planejar a sequência didática, pesquisador.
[11] M_5 – Definir variáveis, descrever escolhas e definir características da sequência didática, pesquisador.
[12] M_6 – Analisar possibilidades de ação e prever possíveis dificuldades, pesquisador.
[13] ... ... O_2 – Realizar a experimentação da sequência didática, pesquisador.
[14] ... N_3 – Promover a devolução da sequência didática (nível -3), pesquisador
[15] ... N_4 – Mediar e observar as ações e retroações dos estudantes (nível -2), pesquisador.
[16] ... N_5 – Interpretar as ações dos estudantes (nível -1), pesquisador.
[17] ... N_6 – Institucionalizar o saber (nível 0), pesquisador.
[18] ... ... O_3 – Realizar a análise *a posteriori* e validação, pesquisador.
[19] ... N_7 – Analisar a produção dos estudantes nos diferentes níveis de *milieu*, pesquisador.

Nesse plano de ação intencional, tendo em vista que o pesquisador assumirá o papel de professor, a meta *Q* do professor, torna-se uma submeta para o pesquisador que, por sua vez, requer as ações antecedentes *P*, $O_{1\text{-}3}$, $N_{1\text{-}7}$ e $M_{1\text{-}6}$.

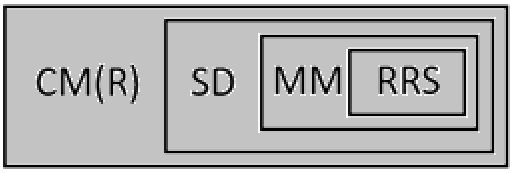
Mais adiante, para analisar como ocorre a conversão da língua natural para a linguagem matemática, aplicamos o mecanismo proposto pela teoria de conciliação de metas, considerando que nesta atividade o estudante tinha como meta elaborar um modelo adequado

[178] Para efeitos simplificação da exposição, os planos de ação intencional vindouros destacam somente metas e submetas, de modo a deixar implícitas as demais etapas da arquitetura descritivo-explanatória da teoria de conciliação de metas de Rauen (2014). Por exemplo, para habilitar o estudante a aplicar o conceito de função na modelagem matemática da situação-problema, submeta Q no plano em destaque [estágio 1], o docente abduz a hipótese antefactual de que a aplicação de uma situação didática, submeta P para os níveis mais baixos deste mesmo plano, é uma ação antecedente pelo menos plausível [estágio 2]. Decorre disso que, uma vez conciliada essa submeta P [estágio 3], isto é, aplicada a situação didática, espera-se que os estudantes estejam, de fato, habilitados a aplicar o conceito de função Q' na modelagem da situação-problema em pauta [estágio 4].

para representar o problema. Para viabilizar esta análise, o pesquisador realizou registro audiovisual e fotográfico das atividades, buscando garantir o registro de diálogos e procedimentos adotados pelos estudantes. Além disso, os participantes foram orientados a registrar e justificar os procedimentos em portifólio.

Uma vez vistos os conceitos teórico-metodológicos que orientam essa pesquisa, apresenta-se no capítulo seguinte a análise dos dados das evidências coletadas na fase de experimentação.

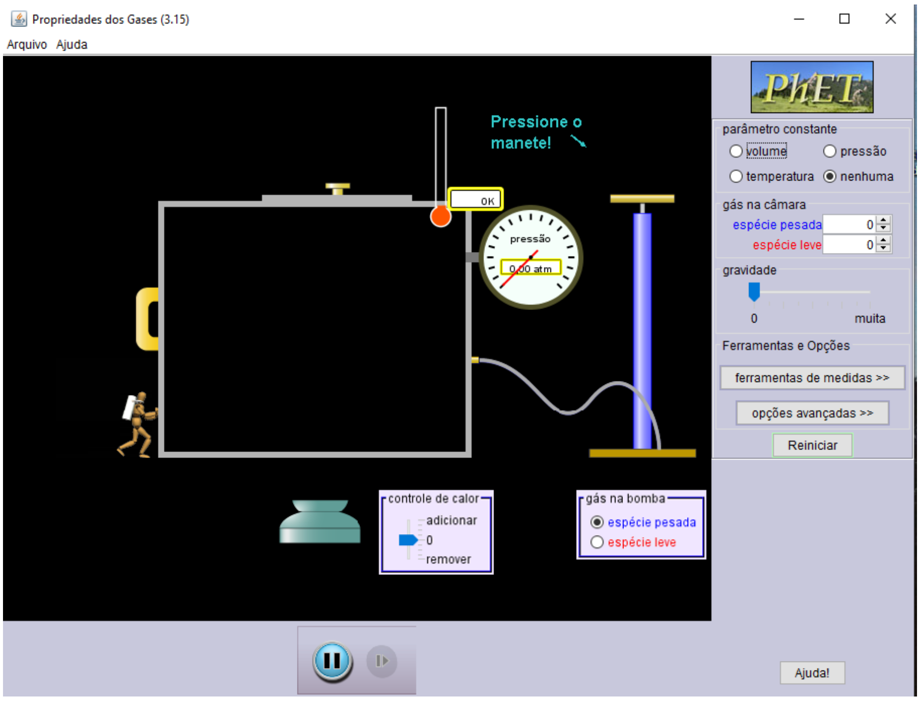
6 ANÁLISE DAS EVIDÊNCIAS



Este capítulo é dedicado à análise das evidências obtidas da aplicação da sequência didática *Transformações Gasosas* e foi organizado em cinco seções, dedicadas, à análise preliminar, à análise *a priori*, à experimentação, à análise *a posteriori* e validação, à institucionalização e, por fim, à análise global do estudo.

A sequência didática *Transformações Gasosas*[179], considerando os conhecimentos de físico-química e de matemática dos estudantes, foi organizada em três contextos, cada qual dividido em duas etapas. A primeira etapa de cada contexto consistiu na apresentação de um pequeno texto introdutório seguido de duas questões. A segunda etapa consistiu em um roteiro com orientações para utilização de um simulador e um conjunto de questões matemáticas.

Figura 19 – Simulador propriedade dos gases



Fonte: Captura de tela do Simulador *Propriedades dos Gases* desenvolvido em Java pelo Phet Simulações, 2020.

[179] Ver Apêndice 1.

Estruturamos as atividades de modo que os estudantes pudessem agir e refletir sobre as evidências, desenvolver sua autonomia de forma gradativa e utilizar conhecimentos matemáticos e de físico-química por meio de diferentes estratégias e registros de representação semiótica, favorecendo ações e retroações. Assim, em cada atividade, apresentamos um contexto inicial e, na sequência, um roteiro experimental com o auxílio do simulador *Propriedades dos Gases* (figura 19)[180] desenvolvido pelo Phet Simulações.

Passemos, a seguir, à análise preliminar, primeira fase da engenharia didática.

6.1 ANÁLISE PRELIMINAR

Para a realização da análise preliminar, executamos as ações antecedentes M_1 e M_2 do plano de ação intencional do pesquisador. Para isso, definimos e desenvolvemos o conceito de função, enquanto conceito básico utilizado para descrever relação entre variáveis, e apresentamos um breve estudo das transformações gasosas.

Para efeitos de exposição, apresentamos a seguir as habilidades previstas na BNCC (2018), os objetivos da unidade curricular matemática e de físico-química no curso técnico de nível médio integrado em química e as características da sequência didática elaborada.

6.1.1 Função: definição e representação

De acordo com Anton, Bivens e Davis (2014, p. 1) o termo função foi formalizado por Leibniz em 1673 para indicar a dependência de uma quantidade em relação a outra.

Formalmente, uma função pode ser assim definida: "*Sejam A e B subconjuntos do conjunto dos números reais. Uma função $f: A \to B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B*". (FLEMMING, 2006, p. 53).

---

[180] Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/gas-properties. Acesso em: 10 maio 2019.

Nessa definição, o conjunto A é chamando domínio da função ($D(f)$) e o conjunto B é chamando de contradomínio da função. Segundo Anton, Bivens e Davis (2014), na metade do século XVIII, Leohnard Euler concebeu a ideia de denotar uma função por letras do alfabeto.

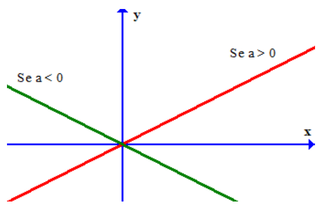
Conforme Flemming (2006, p. 53), podemos representar uma função por:

$$\begin{array}{l} f: A \longrightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} A \xrightarrow{f} B \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$$

A equação $y = f(x)$ expressa y (denominada variável dependente) como uma função de x (variável independente). Se as variáveis x e y estão relacionadas pela equação $y = f(x)$, então o conjunto de todos os valores possíveis para x é denominado domínio de f e o conjunto de todos os valores possíveis de y é denominado imagem de f. O conjunto de pares $(x, f(x))$, por sua vez, é denominado par ordenado.

As funções são apresentadas prevalentemente em quatro registros de representação semiótica, algébrico, tabular, gráfico e língua natural, cada qual com regras de formação específicas. Para exemplificar essas diferentes representações, consideremos uma função cuja lei de formação é dada por $f(x) = ax$.

Quadro 11 – Possibilidades de representação para o objeto matemático ‘função’

<table>
<tr><th>Registro em língua natural</th><th>Registro algébrico</th></tr>
<tr><td>y é igual ao produto de a por x.</td><td>$y = f(x) = ax$</td></tr>
<tr><th>Registro tabular</th><th>Registro gráfico</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$y = ax$</td><td>(x, y)</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>$y_1 = ax_1$</td><td>(x_1, y_1)</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>$y_2 = ax_2$</td><td>(x_2, y_2)</td></tr>
<tr><td>x_3</td><td>$y_3 = ax_3$</td><td>(x_3, y_3)</td></tr>
<tr><td>x_n</td><td>$y_n = ax_n$</td><td>(x_n, y_n)</td></tr>
</table>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Usualmente, as funções são classificadas de acordo com suas características. Nesse estudo estamos interessados em dois tipos específicos[181]: as funções polinomiais de grau 1 e as funções racionais do tipo $y = f(x) = \frac{1}{x^n}$ com $x \neq 0$.

[181] Cabe ressaltar que o objeto matemático função racional não figura na ementa da disciplina de matemática do curso técnico de nível médio integrado em Química.

Uma *função polinomial de grau 1* é definida como aquela que associa a cada número real x o número real $ax + b$. O coeficiente a é chamado coeficiente angular e o coeficiente b coeficiente linear. O domínio e a imagem de uma função polinomial de grau 1 é o conjunto dos números reais.

O quadro 12, a seguir, apresenta sua representação no registro algébrico e gráfico.

Quadro 12 – Representação algébrica e gráfica de uma função polinomial de grau 1

Representação no registro algébrico	$f(x) = ax + b$, com $a, b \in R$ com $a \neq 0$.
Representação no registro gráfico	No plano cartesiano uma função polinomial de grau 1 é representada por uma reta: Se $a > 0$ a função é dita crescente, Se $a < 0$ a função é dita decrescente.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

As funções polinomiais de grau 1 podem ser classificadas como *afim*, *linear* e *identidade* conforme os valores assumidos pelos coeficientes a e b.

Quadro 13 – Classificação de uma função polinomial de grau 1

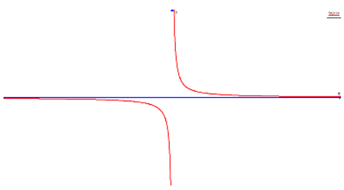
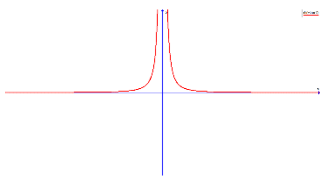
Nome da função	Valores assumidos pelos coeficientes	Registro de representação algébrica
Função afim	$a \neq 0$ e $b \neq 0$	$f(x) = ax + b$
Função linear	$a \neq 0$ e $b = 0$	$f(x) = ax$
Função identidade	$a = 1$e $b = 0$	$f(x) = 1x$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Uma função do tipo $y = \frac{1}{x^n}$, com $x \neq 0$ é um caso particular de função racional. O domínio desta função é o conjunto $\{x \in R | x \neq 0\}$ e a imagem é o conjunto $\{y \in R | y \neq 0\}$ se n é ímpar e $\{y \in R | y > 0\}$ se n é par.

O quadro 14 apresenta sua representação no registro algébrico e gráfico.

Quadro 14 – Representação algébrica e gráfica de uma função racional do tipo $y = \frac{1}{x^n}$

Representação no registro algébrico	$y = f(x) = \frac{1}{x^n}$, com $x \neq 0$.
Representação no registro gráfico	No plano cartesiano uma função racional $y = \frac{1}{x^n}$ é assim representada: Se n é ímpar:  Se n é par: 

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Em geral, os livros didáticos introduzem o conteúdo ‘função’ por uma situação-problema inicial, seguida de definição, algumas formas de representação e exercícios com base em problemas fechados. Os exercícios se relacionam com atividades que possibilitam ao estudante desenvolver habilidades que, em alguns casos, podem estar associadas às atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão.

6.1.2 Transformações gasosas

As transformações gasosas se relacionam ao estudo do comportamento das variáveis temperatura (T), pressão (p) e volume (V) de um gás ideal[182]. É comum realizar um estudo particular das transformações gasosas, mantendo constante uma dessas variáveis, e obtendo as seguintes transformações: isotérmica, isobárica e isovolumétrica[183].

Denominam-se *transformação gasosa isotérmica* aquela onde a variável temperatura (T) permanece constante e as variáveis pressão (p) e volume (V) sofrem variação.

Em transformações isotérmicas, as variáveis pressão e volume são inversamente proporcionais, ou seja, em igualdade de condições, reduções de volume implicam aumentos de pressão e aumentos de volume implicam reduções da pressão.

O quadro 15, mais adiante, apresenta representações gráfica[184] e algébricas da relação entre as variáveis pressão e volume.

De acordo com Levine (2012), Boyle investigou a relação entre pressão e volume em 1662 e concluiu que, para uma quantidade constante de gás mantido a uma temperatura fixa, pressão e volume são inversamente proporcionais. Segundo a autora, essa lei “é válida só aproximadamente para gases reais, com desvios da lei que se aproximam de zero no limite de pressão zero” (2012, p. 10).

Denominam-se *transformação gasosa isobárica* aquela onde a variável pressão (p) permanece constante e as variáveis temperatura (T) e volume (V) sofrem variação.

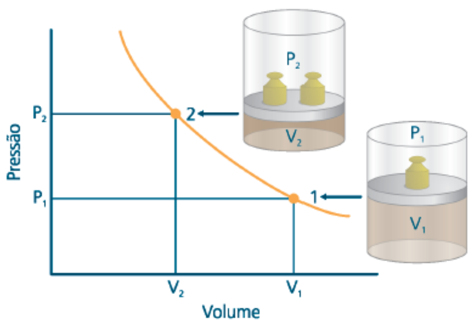
---

[182] “Um gás ideal é aquele no qual os efeitos perturbativos das forças intermoleculares e o tamanho finito das moléculas individuais podem ser desprezados. O ar e outros gases, sob pressões normais, se aproximam bastante das condições de gás ideal” (HEWITT, 2015, p. 270).

[183] Em todas essas transformações, considera-se que a variável quantidade de matéria (n) se mantém constante.

[184] A rigor, gráfico-pictográfica se considerarmos as duas ilustrações.

Quadro 15 – Representação gráfica e algébrica de uma transformação isotérmica

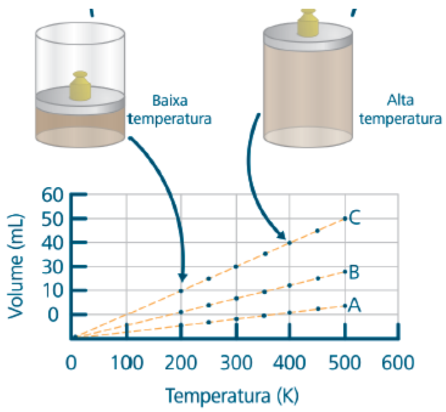
Registro de representação gráfico:	Registro de representação algébrico:
Representação gráfica por hipérbole cuja curva é denominada isoterma. 	Lei de Boyle $P \times V = k\ (constante)$ ou $P_1 \times V_1 = P_2 \times V_2$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020), fundamentado em Souza (2016, p. 22).

Em transformações isobáricas, as variáveis temperatura e volume são diretamente proporcionais, ou seja, em igualdade de condições, aumentos de temperatura implicam aumentos de volume e reduções de temperatura implicam reduções de volume.

O quadro 16 apresenta representações gráfica[185] e algébricas da relação entre as variáveis temperatura e volume.

Quadro 16 – Representação gráfica e algébrica de uma transformação isobárica

Registro de representação gráfico:	Registro de representação algébrico:
	Lei de Charles $\frac{V}{T} = k\ (constante)$ ou $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020), fundamento em Souza (2016, p. 23).

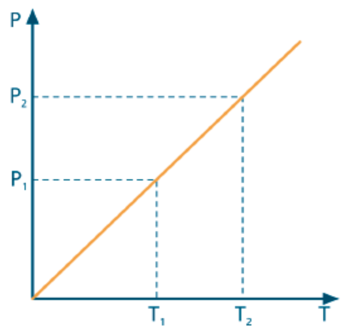
Denominam-se *transformação gasosa isovolumétrica* aquela onde a variável volume (V) permanece constante e as variáveis temperatura (T) e pressão (p) sofrem variação.

[185] A rigor, gráfico-pictográfica se considerarmos as duas ilustrações.

Em transformações isovolumétricas, as variáveis temperatura e pressão são diretamente proporcionais, ou seja, em igualdade de condições, aumentos de temperatura implicam aumentos de pressão e reduções de temperatura implicam reduções de pressão.

O quadro 17 apresenta representações gráfica e algébricas da relação entre as variáveis temperatura e volume.

Quadro 17 – Representação gráfica e algébrica de uma transformação isovolumétrica

Registro de representação gráfico:	Registro de representação algébrico:
	Lei de Charles-Gay Lussac $\frac{p}{T} = k\ (constante)$ ou $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020), fundamento em Souza (2016, p. 24).

Segundo Levine (2012, p. 13) Charles (1787) e Gay-Lussac (1802) “mediram a expansão térmica dos gases e encontraram um aumento linear de volume com a temperatura (medida experimentalmente na escala Celsius de mercúrio) a pressão constante e para uma quantidade fixa de gás”. Concordando com a autora, a explicação molecular da lei de Charles leva em consideração que um aumento na temperatura significa que as moléculas estão se movendo mais rápido e colidindo mais forte e mais frequentemente com as paredes. Desta maneira, é necessário que o volume aumente para que a pressão permaneça constante.

> As leis acima se aplicam quando a massa do gás (m) é mantida constante. Em casos onde P, V e T variam simultaneamente, com m sendo mantido constante. Para aplicar as leis de Boyle e Charles, imaginemos esse processo sendo aplicado em duas etapas:
>
> $$P_1, V_1, T_1 \xrightarrow{(a)} P_2, V_a, T_1 \xrightarrow{(b)} P_2, V_2, T_2$$
>
> Como T e m são constantes na etapa (a), usamos a lei de Boyle e $P_1V_1 = k = P_2V_a$; portanto, $V_a = P_1V_1/P_2$. O uso da lei de Charles para a etapa (b) dá $V_a/T_1 = V_2/T_2$. A substituição de $V_a = P_1V_1/P_2$ nesta equação dá $P_1V_1/P_2T_1 = V_2/T_2$ e $P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2$ gás ideal, com m constante. (LEVINE, 2012, p. 14).

A partir da equação acima, representada algebricamente como $\frac{p_1 \times V_1}{T_1} = \frac{p_2 \times V_2}{T_2}$, variando a massa m do gás ideal e mantendo P e T constantes, desenvolveu-se a *equação geral dos gases*:

$$p \times V = n \times R \times T$$

sendo:
n o número de mols do gás (mol);
R a constante geral dos gases, cujo valor pode é 0,082 $atm.L/mol.K$;
T a temperatura, dada em Kelvin (K); e,
p a pressão, dada em atm.

6.1.3 Matemática e Físico-química no Curso de Química

Segundo a BNCC (Brasil, 2018), a ênfase do Ensino Médio é a construção de uma visão integrada da Matemática, que seja aplicável em diferentes contextos, o que justifica a mobilização do objeto matemático 'função' no contexto do ensino da físico-química.

O documento ressalta a importância de se desenvolver as habilidades a seguir:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASI, 2018, p. 531).

O objetivo da unidade curricular matemática no Curso Técnico de Nível Médio Integrado em Química é "compreender a Matemática como um conhecimento social, historicamente construído e entender a sua importância no desenvolvimento científico e tecnológico, bem como desenvolver sua capacidade de formulação e interpretação de situações matemáticas” (IFSC, 2015, p. 15). No primeiro ano, a unidade curricular matemática I tem a seguinte ementa: “Conjuntos numéricos. Função. Função afim. Função quadrática. Função exponencial. Função logarítmica. Funções trigonométricas.” (p. 15). No segundo ano, a unidade curricular matemática II, tem a seguinte ementa: “Geometria Analítica. Sistemas Lineares. Matrizes. Determinantes. Polinômios.” (p. 25).

O objetivo da unidade curricular físico-química é “desenvolver no aluno um espírito científico capaz de compreender o comportamento físico-químico dos gases, das reações envolvendo energia térmica e a velocidade desses processos.” (IFSC, 2015, p. 31). No segundo ano, a unidade curricular físico-química I tem a seguinte ementa: “Estudo do comportamento dos gases. Obtenção e aplicação dos principais gases. Termoquímica e Termodinâmica: trabalho termodinâmico, energia interna e leis da termodinâmica. Cinética química. Propriedades coligativas da matéria.” (p. 31). No que diz respeito aos objetivos específicos, destacamos o quarto: “compreender e utilizar modelos explicativos para reelaborar conceitos e ideias sobre fenômenos químicos; selecionar e utilizar materiais e equipamentos para realizar cálculos, medidas e experimentos.” (p. 31).

Ao analisarmos os planos de ensino das unidades curriculares matemática e físico-química, verificamos que os estudantes já trabalharam teoricamente os conceitos de transformações gasosas isotérmicas, isobáricas e isovolumétricas e funções polinomiais de grau 1 e 2, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Analisando as interfaces possíveis entre conteúdos de ambas as unidades curriculares, elencou-se como saber da sequência didática o objeto matemático ‘função racional do tipo $f(x) = \frac{1}{x}$’, relacionando-o às ‘transformações gasosas’. Desse modo, organizamos três contextos para possibilitar aos estudantes a compreensão das características da situação objetiva (problemática/*milieu* material), reconhecendo o tipo de transformação gasosa envolvida e, em seguida, identificando a relação matemática entre as variáveis pressão, temperatura e volume.

A seguir, apresentam-se os três contextos:

> Assumindo que um gás é caracterizado por três propriedades, denominadas variáveis de estado: pressão (P), volume (V) e temperatura (T), analise os seguintes três contextos.
> **CONTEXTO 1 –** Considere o vapor de água dentro de uma panela de pressão, que está em perfeito funcionamento. Uma panela de pressão não tem um êmbolo móvel, o que permitiria a variação de volume do gás. Dessa forma, à medida que o vapor dentro da panela aquece, a pressão interna aumenta e o volume atinge um valor máximo.
> **CONTEXTO 2** – Imagine um balão com baixa resistência em suas paredes contendo em seu interior oxigênio com ¼ da sua capacidade aproximadamente. Ao colocarmos o balão em um recipiente com água quente, sua temperatura aumentará e seu volume

também (ele encherá); já ao colocarmos em um recipiente com água e gelo, sua temperatura baixará e seu volume também (ele murchará).
CONTEXTO 3 – Considere uma seringa cheia de ar. Você fecha a ponta da seringa com o dedo e começa a pressionar o êmbolo.

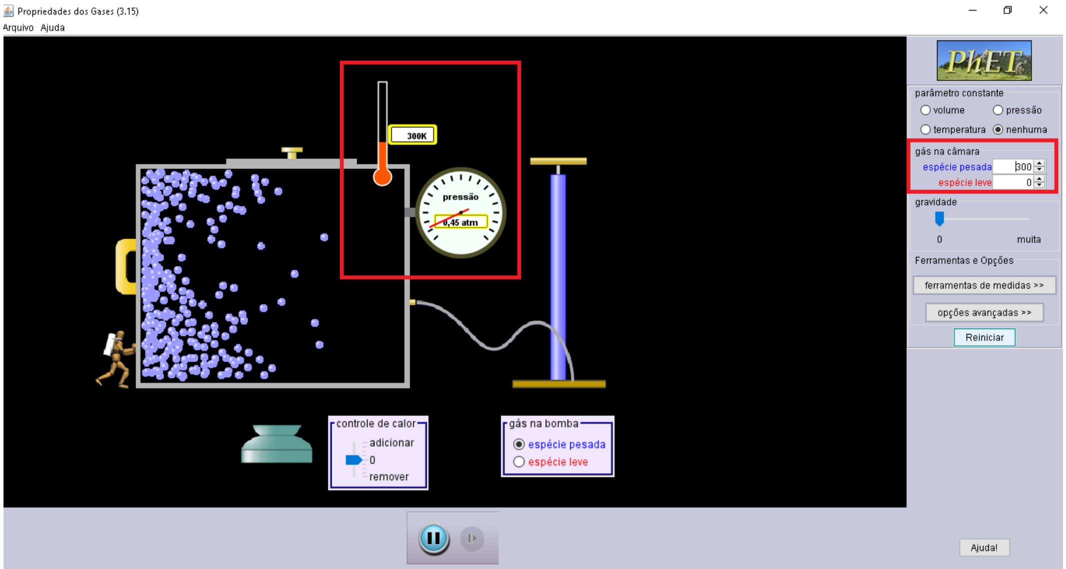
Para viabilizar o planejamento da sequência didática e a fase de experimentação, utilizamos o simulador *Propriedades dos Gases*, desenvolvido pelo Phet Simulações.

6.1.4 Simulador propriedades dos gases

O simulador *Propriedades dos Gases* que permite bombear moléculas de gás em uma caixa e analisar o que ocorre quando o usuário altera o volume, adiciona ou remove o calor, muda a gravidade, por exemplo. Para tanto, ele possibilita controlar quais parâmetros serão mantidos constantes.

Para utilizar o simulador, é necessário inserir gás na câmera, que pode ser de espécie pesada ou leve (destacado em vermelho no canto superior direito da figura a seguir). Após bombear as moléculas de gás, o simulador fornece a temperatura - em K, e a pressão - em atm (destacado em vermelho no centro da figura a seguir).

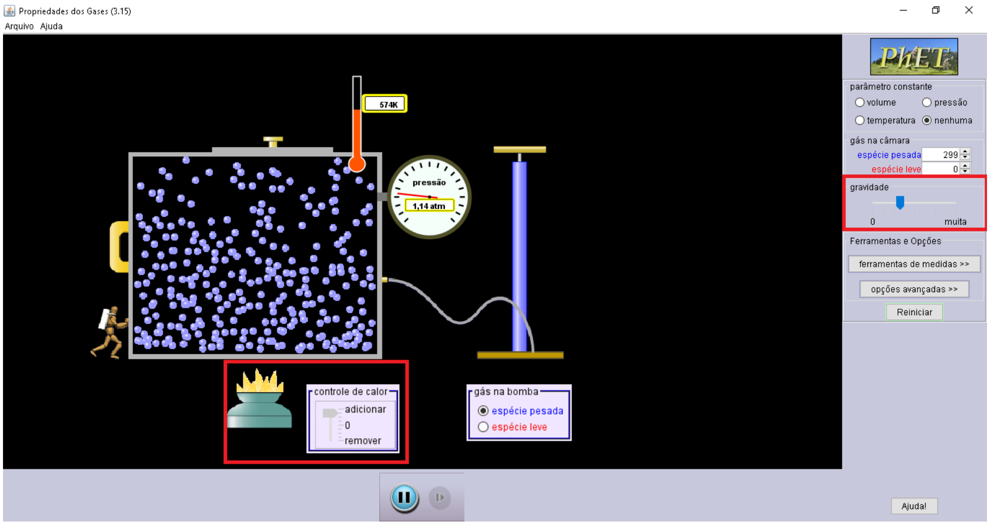
Figura 20 – Simulador *Propriedades dos Gases*



Fonte: Captura de tela do Simulador Propriedades dos gases desenvolvido em Java pelo Phet Simulações, 2020.

Inserido gás na câmera, é possível adicionar o remover calor (destacado em vermelho no centro da figura a seguir) e alterar a gravidade (destacado em vermelho no lado direito da figura a seguir).

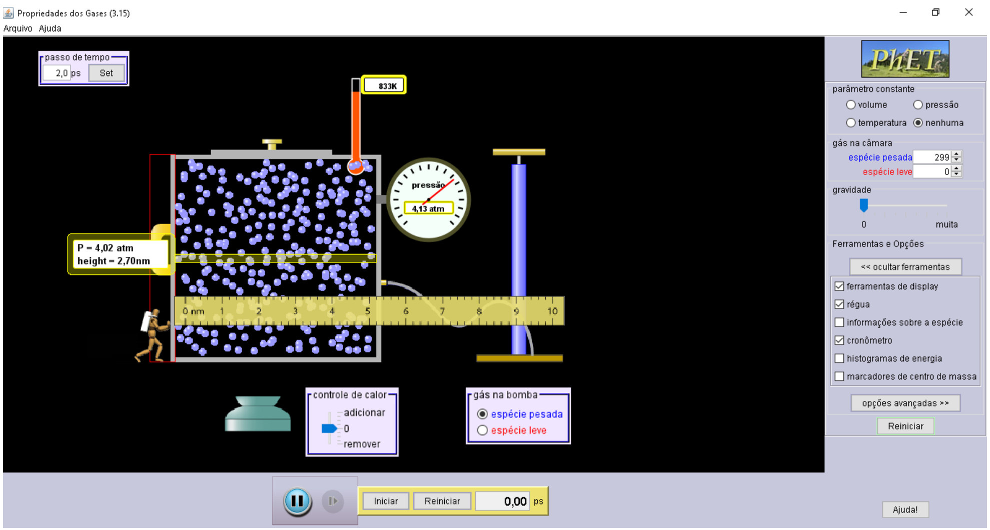
Figura 21 – Simulador *Propriedades dos Gases*



Fonte: Captura de tela do Simulador Propriedades dos gases desenvolvido em Java pelo Phet Simulações, 2020.

Além disso, o simulador permite a escolha de ferramentas, tais como régua, ferramentas de display - retorna a altura da caixa e a pressão e cronômetro. É possível também alterar a dimensão da base da caixa.

Figura 22 – Simulador *Propriedades dos Gases*



Fonte: Captura de tela do Simulador Propriedades dos gases desenvolvido em Java pelo Phet Simulações, 2020.

Passemos à análise *a priori*, segunda fase da engenharia didática.

6.2 ANÁLISE *A PRIORI*

A análise *a priori* consistiu na execução das ações antecedentes M_3, M_4, M_5 e M_6 propostas em nosso plano de ação intencional. Concordando com Almouloud (2007), julgamos pertinente considerar os seguintes aspectos para organizar a sequência didática levando-se em conta a teoria das situações didáticas:

a) os estudantes devem compreender com determinada facilidade os dados apresentados, permitido que eles se engajem na modelagem matemática;
b) a situação deve colocar em jogo conhecimentos relacionados ao conceito que se deseja efetivamente explorar;
c) os conhecimentos dos estudantes devem ser insuficientes para a modelagem matemática completa da situação proposta;
d) a sequência deve ser concebida tendo em vista os resultados obtidos na análise preliminar, possibilitando aos estudantes o desenvolvimento de determinadas competências e habilidades;
e) a sequência deve permitir que os estudantes possam agir, expressar-se, refletir e avançar por iniciativa própria;
f) o professor deve atuar como mediador, intervindo de maneira a não prejudicar a participação do estudante no processo de aprendizagem.

Além disso, dado que pretendemos planejar e aplicar uma sequência didática envolvendo modelagem matemática nesse estudo, ponderamos ser relevante prever a realização de atividades em grupos para o desenvolvimento de habilidades argumentativas e para estimular o estabelecimento de hipóteses pelos estudantes, favorecendo a construção de argumentos que permitam a interpretação e validação do modelo construído.

Considerando os aspectos acima, determinamos as variáveis macrodidáticas e microdidáticas. Neste estudo, as seguintes variáveis foram consideradas macrodidáticas:

a) Conceitos mobilizados na modelagem: transformações gasosas isotérmicas, isovolumétricas e isobáricas, função polinomial de grau 1 e função racional;
b) Uso de recursos tecnológicos: simulador de propriedade dos gases e *software LibreOffice Calc*.

As variáveis microdidáticas, por sua vez, foram:

a) Tipo de transformação gasosa: isotérmica, isovolumétrica ou isobárica;

b) Relação entre grandezas envolvidas: direta ou inversamente proporcionais;

c) Registros de representação: numérico, gráfico, algébrico ou tabular;

d) Modelo matemático para representar a situação: proporção ou função.

As atividades tiveram como objetivo geral:

a) Introduzir do conceito de função racional do tipo $f(x) = \frac{1}{x}$;

b) Aplicar o conceito de função em atividades de modelagem matemática.

Tendo em vista a particularidade desse tipo de atividade, organizamos contextos iniciais, possibilitando aos estudantes:

a) o reconhecimento do tipo de transformação gasosa e da relação entre as variáveis envolvidas, possibilitando a ação dos estudantes na fase de interação;

b) a retomada de conceitos relativos ao estudo das funções: classificação das variáveis, domínio e imagem; e do objeto matemático ‘função polinomial de grau 1, habilitando os estudantes a agir nas diferentes fases de uma atividade de modelagem matemática, desde a interação até a validação.

Levando em conta as variáveis e objetivos acima, planejamos um roteiro experimental seguido de questões norteadoras para cada um dos três contextos. A intenção prática dessa etapa foi permitir que os estudantes pudessem compreender e estruturar a situação, realizar a coleta de dados e os interpretar, modelar, validar, comunicar e argumentar em seminário de socialização, mobilizando diferentes registros de representação semiótica.

Os roteiros experimentais propostos foram os seguintes:

CONTEXTO 1

Usando o simulador de propriedade dos gases:
• Fixe V como constante e insira no sistema 300 partículas (espécie pesada).
• Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente (300K) e registre a pressão (a unidade do simulador é atm).
• Obs.: após cada alteração, aguarde em torno de 1min e pause o simulador.
• Faça alterações na temperatura (aqueça/resfrie) e observe como a pressão se comporta (registre os dados).

Considerando os dados obtidos:
a) Modele matematicamente essa transformação.
b) Usando o modelo obtido, calcule a pressão para diferentes temperaturas e, em seguida, valide seu resultado com o simulador.
c) É possível calcular o volume do recipiente a partir desse modelo? Como seria esse procedimento?
d) Em qual temperatura ocorre um rompimento do recipiente? O que isso significa matematicamente?

CONTEXTO 2

Usando o simulador de propriedade dos gases:
• Fixe p e insira no sistema 300 partículas.
• Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente.
• Faça alterações na temperatura (aqueça/resfrie) e observe como o volume do recipiente se comporta (registre as medidas do recipiente).

> • Obs.: considere a profundidade (x) do recipiente como constante.
> • nm (nanómetro) = $1 \cdot 10^{-9}$ m
> Considerando os dados obtidos:
> a) Modele matematicamente essa transformação, de maneira que seja possível obter o volume para cada temperatura.
> **CONTEXTO 3**
> Usando o simulador de propriedade dos gases:
> • Fixe T e insira no sistema 300 partículas e registre p;
> • Faça alterações no volume do recipiente e verifique como a pressão se comporta.
> Considerando os dados obtidos:
> a) Modele matematicamente essa transformação, de maneira que seja possível obter a pressão em função do volume.

O contexto inicial que compõe a situação objetiva de cada uma das atividades foi analisado pelos estudantes com a mediação do professor a partir de duas questões norteadoras:

> *a) O que se pode observar em relação ao V, p e T?*
> *b) Como se dá essa relação?*

Em seguida, explicamos as funcionalidades do simulador aos estudantes, procedemos à devolução das atividades, destinamos tempo hábil para os estudantes modelar matematicamente a relação entre as variáveis nos diferentes contextos, apresentamos os resultados e, por fim, realizamos a institucionalização, refletindo como os estudantes obtiveram os resultados e fixar o saber 'função racional do tipo $f(x) = \frac{1}{x}$'.

O plano de ação intencional do professor com esse conjunto de atividades de modelagem matemática, em linhas gerais, pode ser assim representado:

[1] ... ... Q – Habilitar os estudantes a modelar as situações nos contextos 1, 2 e 3, professor.
[2] ... ... P – Habilitar os estudantes a mobilizar atividades cognitivas de formação de representação identificável, tratamento e conversão nos contextos 1, 2 e 3, professor.
[3] ... ... O – Habilitar os estudantes a analisar relação entre as variáveis nos contextos 1, 2 e 3, professor.
[4] ... N – Habilitar os estudantes a identificar tipo de transformação gasosa nos contextos 1, 2 e 3, professor.
[5] M – Organizar e fazer a devolução dos contextos 1, 2 e 3, professor.
[6] M – O professor organiza e faz a devolução dos contextos 1, 2 e 3.
[7] ... N' – O professor habilita os estudantes a identificar tipo de transformação gasosa nos contextos 1, 2 e 3.
[8] ... ... O' – O professor habilita os estudantes a analisar relação entre as variáveis nos contextos 1, 2 e 3.
[9] ... ... P' – O professor habilita os estudantes a mobilizar atividades cognitivas de formação de representação identificável, tratamento e conversão nos contextos 1, 2 e 3.
[10] ... ... Q' – O professor habilita os estudantes a modelar as situações nos contextos 1, 2 e 3.

Passemos a análise *a priori* das três atividades.

6.2.1 Atividade 1

A atividade 1 destacou transformações isovolumétricas, ou seja, transformações gasosas nas quais o volume se mantém constante e a pressão e a temperatura sofrem alterações.

> **Atividade 1: Transformação isovolumétrica**
> Assumindo que um gás é caracterizado por três propriedades, denominadas variáveis de estado: pressão (p), volume (V) e temperatura (T), analise os seguintes três contextos.
> **CONTEXTO 1 –** Considere o vapor de água dentro de uma panela de pressão em perfeito funcionamento. Uma panela de pressão não tem um êmbolo móvel, o que permitiria a variação de volume do gás. Dessa forma, à medida que o vapor dentro da panela aquece, a pressão interna aumenta, e o volume atinge um valor máximo.
> Etapa 1 - Um gás é caracterizado por três propriedades, denominadas variáveis de estado, que são: pressão (p), volume (V) e temperatura (T).
> Assim, considerando o contexto 1 acima:
> *O que se pode observar em relação ao V, p e T?*
> *Como se dá essa relação?*
> Etapa 2 – Simulador propriedade dos gases
> Fixar o V como constante e inserir no sistema 300 partículas (espécie pesada).
> Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente (~300K) e registre a pressão (unidade do simulador: atm).
> **Obs.: após cada alteração realizada aguarde em torno de 1min e pause o simulador.**
> Faça alterações (aqueça/resfrie) na temperatura e observe como a pressão se comporta.
> Considerando os dados obtidos:
> *Modele matematicamente essa transformação.*
> *Usando o modelo obtido, calcule a pressão para diferentes temperaturas e, em seguida, valide seu resultado com o simulador.*
> *É possível calcular o volume do recipiente a partir desse modelo? Como seria esse procedimento?*
> *Em qual temperatura ocorre um rompimento do recipiente? O que isso significa matematicamente?* (O autor, 2020).

Na etapa 1, esperamos que os estudantes percebessem que o volume era constante e que pressão e temperatura eram variáveis diretamente proporcionais, de modo a concluir que as transformações eram isovolumétricas. Em nível específico, a meta *QP* do pesquisador era a de “habilitar o estudante a identificar o tipo de transformação gasosa e a relação entre as variáveis envolvidas no contexto 1”; e a meta *QE* do estudante era a de “identificar a relação entre as variáveis e compreender como se dá essa relação”[186].

---

[186] Durante as etapas 1 e 2 da atividade, em cada um dos itens, pesquisador e estudante estabelecem metas *QP* e *QE*, respectivamente, e planos de ações intencionais e devem monitorar se as consecuções *QP’* e *QE’* estão conciliadas com as metas estabelecidas (autoconciliações). E ainda, para que ocorra sucesso na atividade é necessário que professor e estudantes heteroconciliem metas *Q* e consecuções *Q’*.

Nesta subseção, apresentamos o processamento cognitivo da atividade de modo mais exaustivo, iniciando pela análise do próprio contexto apresentado em língua natural[187].

> **CONTEXTO 1 –** Considere o vapor de água dentro de uma panela de pressão em perfeito funcionamento. Uma panela de pressão não tem um êmbolo móvel, o que permitiria a variação de volume do gás. Dessa forma, à medida que o vapor dentro da panela aquece, a pressão interna aumenta, e o volume atinge um valor máximo.

Seguindo o procedimento de compreensão guiado pela relevância, o processamento cognitivo do texto do contexto 1, por hipótese, geraria o seguinte conjunto de suposições[188,189]:

> S_1 – O docente solicita que o estudante deve considerar o vapor de água dentro de uma panela de pressão em perfeito funcionamento (premissa implicada da explicatura do primeiro enunciado);
> S_2 – O docente afirma que uma panela de pressão não tem um êmbolo móvel (premissa implicada da explicatura da primeira proposição do segundo enunciado);
> S_3 – O docente afirma que um êmbolo móvel em uma panela de pressão em perfeito funcionamento permitiria a variação de volume do gás (premissa implicada da explicatura da segunda proposição do segundo enunciado);
> S_4 – O docente afirma que a pressão interna aumenta à medida que o vapor aquece em uma panela de pressão sem êmbolo móvel em perfeito funcionamento (premissa implicada da explicatura do terceiro enunciado);
> S_5 – O docente afirma que o volume atinge um valor máximo à medida que o vapor aquece em uma panela de pressão sem êmbolo móvel em perfeito funcionamento (premissa implicada da explicatura do terceiro enunciado).

Dado esse processamento arbitrariamente idealizado, os estudantes poderiam elaborar com base nessas informações as inferências de que vapores de água são gases[190] e de que o volume de vapor de água não varia em uma panela de pressão sem êmbolo móvel.

> S_6 – Vapor de água é um gás (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \rightarrow S_6$);
> S_7 – O volume de gás/vapor de água dentro de uma panela de pressão em perfeito funcionamento não é variável (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_6 \rightarrow S_7$).

Retomemos a proposição da primeira atividade

[187] Mais adiante, por parcimônia, deixaremos implícita parte significativa dos processamentos cognitivos.

[188] Entre outros conjuntos viáveis.

[189] A elaboração das respectivas explicaturas será apresentada mais adiante na análise do comando da atividade.

[190] As cadeias inferenciais, embora constrangidas pelo texto, são indefinidas e mesmo imprevisíveis. Se um estudante não possui a suposição de que vapores de água são gases em seu repertório didático ou conhecimento enciclopédico ou mesmo se ele estiver desatento na tarefa, pode ser o caso de não gerar as inferências em pauta. Por outro lado, um estudante pode inferir que vapores de água são gases já no processamento da sequência lexical ‘vapor de água’ do primeiro enunciado ou mesmo antecipar que a tarefa é sobre transformações isovolumétricas do próprio processamento da sequência lexical ‘panela de pressão’.

> Etapa 1 - Um gás é caracterizado por três propriedades, denominadas variáveis de estado, que são: pressão (p), volume (V) e temperatura (T).
> Assim, considerando o contexto 1 acima:
> *O que se pode observar em relação ao V, p e T?*
> *Como se dá essa relação?*

Por hipótese, o processamento dessas proposições gera as seguintes suposições:

> S_8 – Um gás é caracterizado por três propriedades (premissa implicada da explicatura da primeira proposição do primeiro enunciado da primeira atividade);
> S_9 – As três propriedades de um gás são denominadas variáveis de estado (premissa implicada da explicatura da primeira proposição do primeiro enunciado da primeira atividade);
> S_{10} – As três propriedades de um gás/variáveis de estado são pressão (p), volume (V) e temperatura (T) (premissa implicada da explicatura da primeira proposição do primeiro enunciado da primeira atividade);
> S_{11} – O professor solicita que o estudante responda o que se pode observar em relação às propriedades/variáveis de estado volume, pressão e temperatura considerando o vapor de água/gás dentro da panela aquece em uma panela de pressão sem êmbolo móvel em perfeito funcionamento (premissa implicada da explicatura da primeira proposição da primeira questão da primeira atividade);
> S_{12} – O professor solicita que o estudante responda como se dá a relação entre as propriedades/variáveis de estado volume, pressão e temperatura considerando o vapor de água/gás aquece em uma panela de pressão sem êmbolo móvel em perfeito funcionamento (premissa implicada da explicatura da primeira proposição da segunda questão da primeira atividade).

A consecução (heteroconciliação) ideal é a de os estudantes sejam capazes de inferir, dado o contexto $S_{1\text{-}12}$, que o volume do vapor de água se mantém constante, que a temperatura e a pressão são variáveis, que a atividade se refere a transformações gasosas isovolumétricas, que a temperatura é uma variável independente e a pressão é uma variável dependente, e que essas grandezas são diretamente proporcionais.

> S_{13} – O volume de vapor de água/gás se mantém constante em uma panela de pressão sem êmbolo móvel em perfeito funcionamento (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_{1\text{-}12} \rightarrow S_{13}$);
> S_{14} – A temperatura e a pressão são variáveis em uma panela de pressão sem êmbolo móvel em perfeito funcionamento (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_{1\text{-}13} \rightarrow S_{14}$);
> S_{15} – O volume do gás se mantém constante e a temperatura e a pressão variam em transformações gasosas isovolumétricas (premissa implicada da memória enciclopédica);
> S_{16} – A transformação gasosa é isovolumétrica em uma panela de pressão sem êmbolo móvel em perfeito funcionamento (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_{13} \wedge S_{14} \wedge S_{15} \rightarrow S_{16}$);
> S_{17} – O aumento da temperatura causa aumento da pressão em uma panela de pressão sem êmbolo móvel em perfeito funcionamento (conclusão implicada por *modus ponens* $S_{14} \rightarrow S_{17}$);
> S_{18} – A temperatura é variável independente em uma panela de pressão sem êmbolo móvel em perfeito funcionamento (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_{14} \wedge S_{17} \rightarrow S_{18}$);

> S_{18} – As variáveis temperatura e pressão são grandezas diretamente proporcionais em uma panela de pressão sem êmbolo móvel em perfeito funcionamento (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_4 \wedge S_{15} \rightarrow S_{17}$).

Na etapa 2, item *a*, esperamos que os estudantes obtenham um modelo matemático. No caso, a meta *QP* do pesquisador era "habilitar o estudante a modelar a problemática dada no contexto 1", e a meta *QE* do estudante era "modelar a problemática dada no contexto 1".

Nessa etapa, fornecemos orientações de modo que os estudantes obtivessem diferentes pares ordenados no simulador. Para isso, era necessário que eles concluíssem que os valores da variável pressão eram uma função dos valores da variável temperatura, ou seja, a pressão será a variável dependente e a temperatura a variável independente.

> Fixar o V como constante e inserir no sistema 300 partículas (espécie pesada).
> Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente (~300K) e registre a pressão (unidade do simulador: atm).
> **Obs.: após cada alteração realizada aguarde em torno de 1min e pause o simulador.**
> Faça alterações (aqueça/resfrie) na temperatura e observe como a pressão se comporta.

Conforme os comandos, solicitamos que os estudantes fixassem o volume como constante no simulador e acrescentassem 300 partículas de espécie pesada, parametrizando a temperatura inicial em aproximadamente 300K e registrando a pressão em atm. Além disso, acrescentamos que os estudantes deviam aguardar em torno de 1 minuto para realizar novas medições simulando temperaturas mais altas ou mais baixas, conforme o caso.

Seguem as suposições supostamente mais manifestas a partir do processamento cognitivo desse texto.

> S_{19} – O professor solicita que o estudante fixe o volume como constante no simulador (premissa implicada da explicatura da primeira proposição do primeiro enunciado da proposição da etapa 2);
> S_{20} – O professor solicita que o estudante insira 300 partículas de espécie pesada no simulador (premissa implicada da explicatura da primeira proposição do primeiro enunciado da proposição da etapa 2);
> S_{21} – O professor solicita que o estudante registre a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente/300K no simulador (premissa implicada da explicatura da primeira proposição do segundo enunciado da proposição da etapa 2);
> S_{22} – O professor solicita que o estudante registre a pressão em atm no simulador (premissa implicada da explicatura da primeira proposição do segundo enunciado da proposição da etapa 2);
> S_{23} – O professor solicita que o estudante aguarde em torno de 1 minuto após cada alteração de temperatura realizada no simulador (premissa implicada da explicatura da observação da proposição da etapa 2);
> S_{24} – O professor solicita que o estudante pause o simulador após cada alteração de temperatura realizada no simulador (premissa implicada da explicatura da observação da proposição da etapa 2);

> S_{25} – O professor solicita que o estudante aqueça ou esfrie a temperatura no simulador (premissa implicada da explicatura da observação da proposição da etapa 2);
> S_{26} – O professor solicita que o estudante observe como a pressão se comporta (premissa implicada da explicatura da observação da proposição da etapa 2).

Aqui, uma possível inferência (a rigor, uma hipótese abdutiva) é a de que os dados podem ser registrados em uma tabela ou por pares ordenados.

> S_{27} – Os dados devem ser registrados numa tabela/em pares ordenados (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_{1\text{-}26} \rightarrow S_{27}$).

Finalizado esse primeiro conjunto de suposições, os estudantes deveriam processar o comando principal da atividade e, consequentemente, modelar essa transformação.

> (1) Modele matematicamente essa transformação.

Uma vez que esse é o enunciado-chave da atividade, usaremos como exemplo para uma análise mais detalhada de seu processamento cognitivo pelo procedimento de compreensão orientado pela relevância[191]. A relembrar, Sperber e Wilson (1986, 1995) consideram que durante o processo comunicativo a mente humana tem a capacidade de processar a forma lógica não proposicional de um enunciado semanticamente incompleto por meio do desenvolvimento de esquemas de suposições organizados na memória enciclopédica até que essa proposição se torne plenamente proposicional, isto é, capaz de ser avaliada como verdadeira ou falsa.

No caso do comando principal da atividade, a forma lógica do enunciado (1) não é plenamente proposicional ou semanticamente completa. Ela precisa ser pragmaticamente enriquecida, uma vez que não explicita, por exemplo, quem deve modelar matematicamente a transformação ou de que transformação se trata. Como vimos no capítulo 5 desta tese, podemos descrever esse enriquecimento progressivamente. Na versão (1a), apresentamos os elementos linguísticos do comando; na versão (1b), descrevemos a forma lógica subjacente; na versão (1c), apresentamos os preenchimentos das entradas lógicas, de modo a compor a explicatura

> (1a) Forma Linguística: Modele matematicamente essa transformação (forma lógica não proposicional).
> (1b) Forma lógica: Modelar alguém x, de algum modo y, algo z.

---

[191] A rigor, procedimentos semelhantes foram aplicados ao processamento dos enunciados anteriores, mas, por parcimônia, não foram integralmente descritos e explicados na tese.

(1c') Explicatura: Modele ∅ [ESTUDANTE$_X$] matematicamente$_y$ essa transformação [GASOSA ISOVOLUMÉTRICA DO CONTEXTO 1$_Z$][192] (forma lógica proposicional).
(1c") Explicatura: MODELE ESTUDANTE MATEMATICAMENTE A TRANSFORMAÇÃO GASOSA ISOVOLUMÉTRICA DO CONTEXTO 1.

Para completar o processamento desse comando, além de obter a explicatura, representada a seguir como uma proposição semanticamente completa *P*, o estudante tem de encaixá-la em um esquema com o ato de fala do professor, gerando as descrições (1d-f) a seguir.

(1d) Esquema de suposição: O professor solicita que _________.
(1e) Encaixe da proposição P: O professor solicita que *P*.
(1f) Suposição com o respectivo ato de fala: O professor solicita que *o estudante modele matematicamente a transformação gasosa isovolumétrica do contexto 1*.

O resultado dessas operações é o acréscimo da suposição contextual S_{28} no conjunto de suposições $S_{1\text{-}27}$ – contextualização da informação. Todas essas suposições ($S_{1\text{-}28}$) são insumos (*inputs*) para a compreensão da atividade e para a obtenção do modelo matemático.

S_{28} – O professor solicita que o estudante modele matematicamente a transformação gasosa isovolumétrica do contexto 1 (premissa implicada da explicatura do comando da atividade).

Na análise *a priori*, perseguimos possíveis conjuntos de inferências que seriam empregadas pelo estudante, fornecendo subsídios para a ação do professor em sala de aula e assumindo a contingência de nenhum desses conjuntos ser usado efetivamente.

Considerando que os estudantes utilizariam o registro gráfico para a análise dos dados e buscariam obter uma representação em registro algébrico posteriormente, apresentamos a seguir um conjunto de inferências possíveis, a rigor um plano de ação intencional[193].

S_1 – Modelar a transformação gasosa isovolumétrica (do processamento cognitivo do comando principal da atividade – Q);
S_2 – Usar coeficiente de determinação (R^2) habilita modelar a transformação gasosa isovolumétrica (*hipótese abdutiva antefactual habilitadora* P⟵Q);

[192] Mais explicitamente, nos termos das suposições $S_{1\text{-}27}$, "a transformação gasosa isovolumétrica (cujo volume é constante e temperatura e pressão são variáveis) numa simulação semelhante àquela do vapor de água em uma panela de pressão sem êmbolo na qual o volume é constante, há 300 partículas (espécie pesada), a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente (~300K), a pressão é registrada em atm., aguarda-se em torno de 1minuto em cada medida pausando-se o simulador, fazem-se alterações (aquecimento e resfriamento) na grandeza independente temperatura e se observa o comportamento da grandeza dependente pressão".

[193] A novidade aqui é a proposição-tentativa (Rauen e Andrade Filho) de um mecanismo abdutivo-dedutivo em termos paralelos à arquitetura descritivo-explanatória de Sperber e Wilson (1986, 1995).

> S_3 – Descrever a transformação gasosa isovolumétrica em curvas no registro gráfico habilita usar coeficiente de determinação (R^2) (*hipótese abdutiva antefactual habilitadora* O⟵P);
> S_4 – Usar software para representar a transformação gasosa isovolumétrica em curvas no registro gráfico habilita descrever a transformação gasosa isovolumétrica em curvas no registro gráfico (*hipótese abdutiva antefactual habilitadora* N⟵O);
> S_5 – O estudante usa o software para representar a transformação gasosa isovolumétrica em curvas no registro gráfico (*execução da ação antecedente* N);
> S_6 – O estudante descreve a transformação gasosa isovolumétrica em curvas no registro gráfico (*expectativa de conciliação da submeta* O');
> S_7 – O estudante usa coeficiente de determinação (R^2) (*expectativa de conciliação da submeta* P');
> S_8 – O estudante modela a transformação gasosa isovolumétrica (*expectativa de conciliação da meta* Q').

A seguir, descrevemos esse conjunto de suposições em termos mais próximos da teoria de conciliação de metas (cada suposição $S_{1\text{-}8}$ corresponde a uma etapa [1]-[8]).

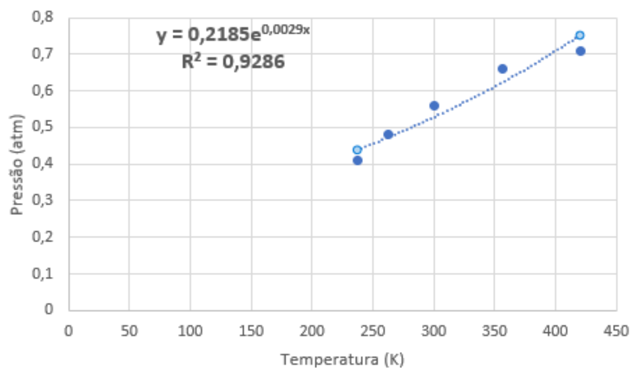
[1] ... ... Q – Modelar a transformação gasosa isovolumétrica, estudante.
[2] ... ... P – Usar coeficiente de determinação (R^2), estudante.
[3] ... O – Descrever a transformação gasosa isovolumétrica em curvas no registro gráfico, estudante.
[4] N – Usar software para representar a transformação gasosa isovolumétrica em curvas no registro gráfico, estudante.
[5] N – O estudante usa software para representar a transformação gasosa isovolumétrica em curvas no registro gráfico.
[6] ... O' – O estudante descreve a transformação gasosa isovolumétrica em curvas no registro gráfico.
[7] ... ... P' – O estudante usa coeficiente de determinação (R^2).
[8] ... ... Q' – O estudante modela a transformação gasosa isovolumétrica.

Passemos a análise dos possíveis modelos obtidos com o auxílio de um *software*.

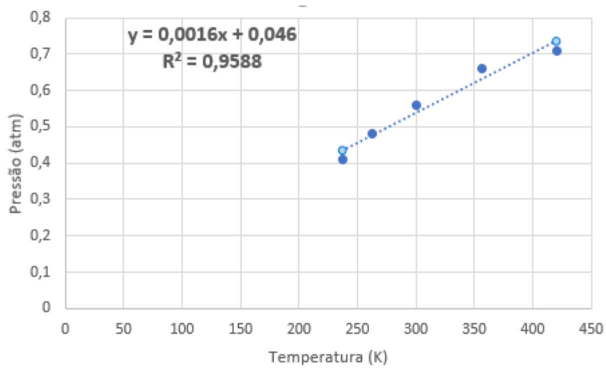
Quadro 18 – Registros de representação semiótica: Atividade 1 (possibilidade 1)

T (K)	P (atm)
237	0,41
263	0,48
300	0,56
357	0,66
420	0,71

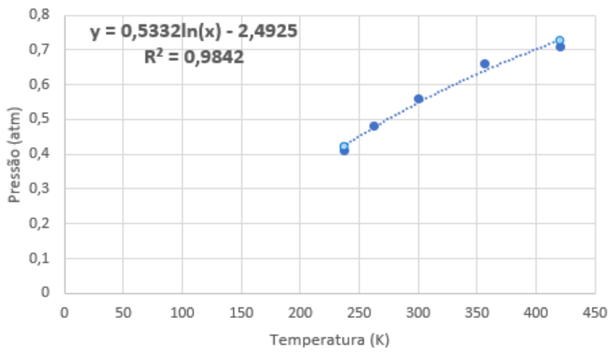
S_{9a} – Uma função exponencial de base *e* modela a transformação gasosa isovolumétrica



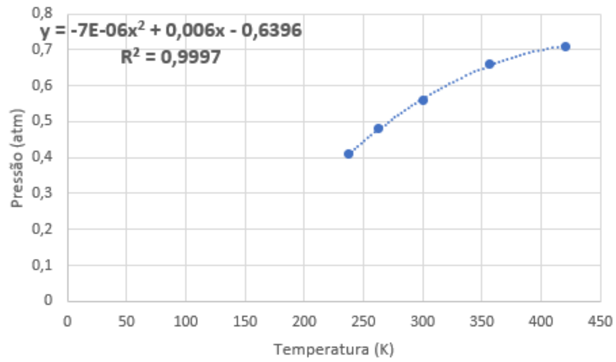
S_{9b} – Uma função polinomial de grau 1modela a transformação gasosa isovolumétrica



S_{9c} – Uma função logarítmica modela a transformação gasosa isovolumétrica



S_{9d} – Uma função polinomial de grau 2 modela a transformação gasosa isovolumétrica



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Considerando somente o coeficiente de determinação (R^2) para a escolha do modelo mais adequado para modelar matematicamente os dados obtidos da transformação dada, os estudantes poderiam, por hipótese, construir as suposições a seguir:

> S_1 – A validade do modelo é maior quando o coeficiente de determinação é mais próximo de 1 (suposição derivada da memória enciclopédica);
> S_2 – O valor de R² função exponencial de base *e* é 0,9286 (suposição derivada dos dados do software);
> S_3 – O valor de R² função polinomial de grau 1é 0,9588 (suposição derivada dos dados do software);
> S_4 – O valor de R² função logarítmica é 0,9842 (suposição derivada dos dados do software);
> S_5 – O valor de R² função polinomial de grau 2 é 0,9997 (suposição derivada dos dados do software);
> S_6 – A função polinomial de grau 2 apresenta melhor aproximação para os dados obtidos (conclusão implicada por *modus ponens* $S_{1\text{-}5} \rightarrow S_6$);
> S_7 – A função polinomial de grau 2 modela a transformação gasosa isovolumétrica (conclusão implicada por *modus ponens* $S_6 \rightarrow S_7$).

Essa cadeia de suposições $S_{1\text{-}7}$ permite que o estudante conclua que a transformação isovolumétrica pode ser modelada por uma função polinomial de grau 2. Contudo, nesse tipo de transformação isovolumétrica, temperatura e pressão são diretamente proporcionais e, desse modo, devem ser modelados por uma reta do tipo $y = ax + b, com\ b = 0$[194].

> S_1 – Grandezas diretamente proporcionais são representadas graficamente por uma reta (suposição derivada da memória enciclopédica);
> S_2 – As variáveis temperatura e pressão são grandezas diretamente proporcionais em uma panela de pressão sem êmbolo móvel em perfeito estado de funcionamento (premissa implicada derivada do processamento anterior);
> S_3 – Uma função polinomial de grau 1 deve modelar a transformação gasosa isovolumétrica (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \wedge S_2 \rightarrow S_3$).

Uma possível solução poderia ser voltar a analisar os dados obtidos. Dado que o simulador não estabiliza; há, portanto, uma variação no valor real da pressão. Como em físico-química a razão $\frac{p}{T}$ deve ser constante numa transformação isovolumétrica, uma possibilidade é utilizar apenas os pontos em que essa razão possui valores aproximados.

> S_4 – A razão $\frac{P}{T}$ deve ser constante em uma transformação isovolumétrica (premissa implicada da memória enciclopédica);
> S_5 – Calcular a razão para cada um dos pontos calculados habilita verificar os pontos em que a transformação isovolumétrica permanece constante (premissa implicada da memória enciclopédica);

---

[194] Dado que em modelagem matemática o que se busca é um modelo que melhor se aproxime da realidade, o que se propõe a partir desse ponto é um refinamento do modelo obtido. A rigor os estudantes poderiam ter concluído que a função polinomial de grau 2 modela a transformação em pauta.

S_6 – Os pares ordenados são

T(k)	P (atm)	razão P/T
237	0,41	0,00173
263	0,48	0,001825
300	0,56	0,001867
357	0,66	0,001849
420	0,71	0,00169

(premissa implicada do *input* tabular);
S_7 – Os pares ordenados (263; 0,48), (300; 0,56) e (357; 0,66) apresentam valores aproximados para a razão $\frac{P}{T}$ (premissa implicada do input tabular);
S_8 – Os pares ordenados (263; 0,48), (300; 0,56) e (357; 0,66) podem gerar um melhor modelo para representar a transformação gasosa do contexto 1 (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_{1\text{-}7} \rightarrow S_8$).

As suposições apresentadas a seguir (quadro 19, a seguir) levam em consideração somente pares ordenados em que a razão $\frac{P}{T}$ se aproximou de 0,0018. Os dados dess quadro possibilitam, por hipótese, a construção das suposições a seguir:

S_1 – A validade do modelo é maior quando o coeficiente de determinação é mais próximo de 1 (suposição derivada da memória enciclopédica);
S_2 – O valor de R² função exponencial de base *e* é 0,9893 (suposição derivada dos dados do software);
S_3 – O valor de R² função polinomial de grau 1 é 0,9966 (suposição derivada dos dados do software);
S_4 – O valor de R² função logarítmica é 0,9998 (suposição derivada dos dados do software);
S_5 – O valor de R² função polinomial de grau 2 é 1,0000 (suposição derivada dos dados do software);
S_6 – A função polinomial de grau 2 apresenta melhor aproximação para os dados obtidos (conclusão implicada por *modus ponens* $S_{1\text{-}5} \rightarrow S_6$);
S_7 – A função polinomial de grau 2 modela a transformação gasosa isovolumétrica (conclusão implicada por *modus ponens* $S_6 \rightarrow S_7$).

Conforme essa simulação, observamos que a função polinomial de grau 2 apresenta melhor aproximação para os dados obtidos. Assim, para melhor aproximação da equação da reta, os estudantes podem inferir que no contexto considerado $p = 0atm$, quando $T = 0k$.

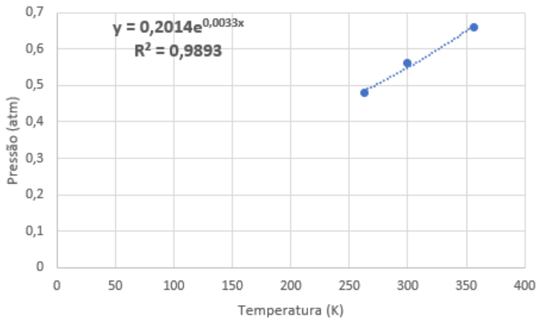
S_1 – A pressão é de $0atm$ quando a temperatura for de $0k$ em uma transformação isovolumétrica (premissa implicada da memória enciclopédica);
S_2 – A obtenção do par ordenado (0,0) nos dados habilita a obtenção de melhor aproximação para o modelo matemático desejado (conclusão implicada por *modus ponens* $S_1 \rightarrow S_2$).

Incluindo-se o par ordenado $(0,0)$ nos dados, obtém-se o modelo polinomial de grau 2 com $R^2 = 0{,}9998$ e o modelo polinomial de grau 1 com $R^2 = 0{,}9997$. Entretanto, considerando os erros nos dados obtidos e o comportamento de uma transformação isovolumétrica, o estudante poderia inferir que a função $p(T) = 0{,}0019T - 0{,}0007$ modela a situação dada, e obter as representações da figura 23 (a seguir).

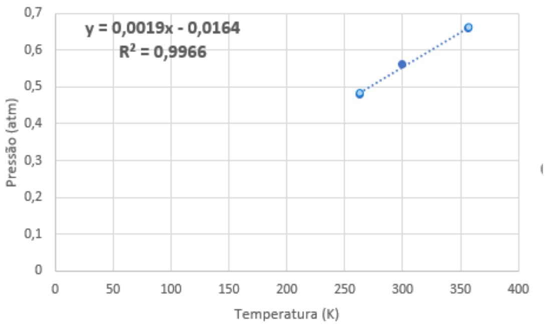
Quadro 19 – Registros de representação semiótica: Atividade 1 (possibilidade 2)

T (K)	P (atm)	razão P/T
263	0,48	0,001825
300	0,56	0,001867
357	0,66	0,001849

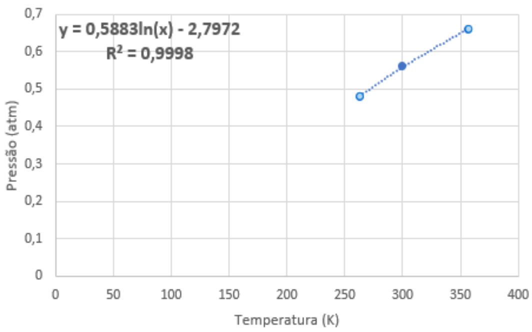
S_{9a} – Uma função exponencial de base *e* modela a transformação gasosa isovolumétrica



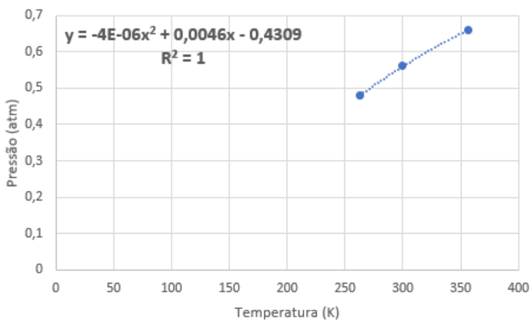
S_{9b} – Uma função polinomial de grau 1modela a transformação gasosa isovolumétrica



S_{9c} – Uma função logarítmica modela a transformação gasosa isovolumétrica

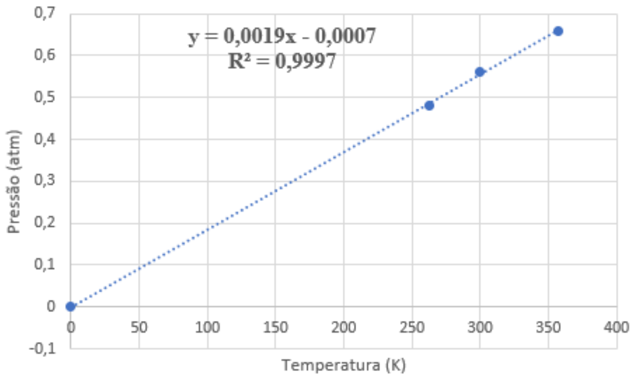


S_{9d} – Uma função polinomial de grau 2 modela a transformação gasosa isovolumétrica



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 23 – Registro gráfico e algébrico: transformação isovolumétrica



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Essa conclusão pode ser obtida, por hipótese, pela seguinte cadeia de suposições:

> S_1 – Os pares ordenados (0, 0), (263; 0,48), (300; 0,56) e (357; 0,66) podem gerar um melhor modelo para representar a transformação gasosa do contexto 1 (conclusão implicada);
> S_2 – A função polinomial de grau 1 gera $R^2 = 0{,}9997$ (conclusão implicada);
> S_3 – A função polinomial de grau 2 gera $R^2 = 0{,}9998$ (conclusão implicada);
> S_4 – A função polinomial de grau 1 modela a transformação isovolumétrica (conclusão implicada por *modus ponens disjuntivo* $S_2 \vee S_3 \rightarrow S_4$);
> S_5 – A função pela função $p(T) = 0{,}0019T - 0{,}0007$ modela a transformação isovolumétrica do contexto 1 (conclusão implicada por *modus ponens* $S_4 \rightarrow S_5$).

É importante ressaltar que os estudantes podem seguir outras cadeias de suposições, bem como mobilizar outros objetos matemáticos, como por exemplo, proporção[195].

Para validar o modelo, os estudantes poderiam realizar tratamentos e verificar a variação entre os valores obtidos do simulador e aqueles obtidos pelo modelo. Para tanto, a relembrar, três perguntas foram formuladas:

> *b) Usando o modelo obtido, calcule a pressão para diferentes temperaturas e, em seguida, valide seu resultado com o simulador.*
> *c) É possível calcular o volume do recipiente a partir desse modelo? Como seria esse procedimento?*[196]
> *d) Em qual temperatura ocorre um rompimento do recipiente? O que isso significa matematicamente?*

O objetivo do item *b* era o de verificar a validade do modelo e, se necessário, fazer ajustes nos coeficientes ou nos dados. Neste item, portanto, a meta *QP* do pesquisador era a de

---

[195] Por parcimônia, os caminhos de resolução possíveis de agora em diante serão apresentados discursivamente.

[196] A rigor, '*É possível calcular a medida do volume do recipiente a partir desse modelo? Como seria esse procedimento?*'.

“habilitar o estudante a verificar a validade do modelo matemático obtido”, e a meta QE do estudante era a de “verificar a validade do modelo matemático obtido”.

O objetivo do item c, antes de realizar o tratamento necessário para obtenção do volume, era discutir o procedimento. Esperou-se como resposta a utilização da equação geral dos gases $pV = nRT$. Neste item, portanto, a meta QP do pesquisador era o de “habilitar o estudante a refletir sobre os procedimentos para obtenção do volume em uma transformação isovolumétrica”, e a meta QE do estudante era a de “refletir sobre os procedimentos para obtenção do volume em uma transformação isovolumétrica”.

O objetivo item d era discutir o domínio e imagem do modelo matemático. Esperamos que os estudantes fizessem alterações gradativas no simulador verificando o valor máximo suportado pelo sistema para a variável independente. Neste item, a meta QP do pesquisador era a de “habilitar o estudante a definir o domínio e a imagem do modelo matemático obtido, ou seja, o intervalo onde o modelo é válido”, e a meta QE do estudante era “definir o domínio e a imagem do modelo matemático obtido”. Isso possibilitaria aos estudantes definir os parâmetros para os quais o modelo matemático obtido seria válido.

6.2.2 Atividade 2

A atividade 2 levou em consideração transformações isobáricas, nas quais a pressão se mantém constante, e o volume e a temperatura sofrem alterações.

Atividade 2: Transformação isobárica
CONTEXTO 2 – Imagine um balão com baixa resistência em suas paredes contendo em seu interior oxigênio com aproximadamente em ¼ da sua capacidade. Ao colocarmos um balão em um recipiente com água quente, sua temperatura aumentará e seu volume também. Isso é visto pelo enchimento do balão. Já ao ser colocado em um recipiente com água e gelo, ele murchará.
Etapa 1 - Considerando o contexto 2 acima:
o que se pode observar em relação ao V, p e T?
Como se dá essa relação?
Etapa 2 – Simulador propriedade dos gases
Fixar p como constante e inserir no sistema 300 partículas (espécie pesada).
Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente (~300K) e registre a pressão (unidade do simulador: atm).
Obs.: após cada alteração realizada aguarde em torno de 1min e pause o simulador.
Faça alterações (aqueça/resfrie) na temperatura e observe como o volume do recipiente se comporta (registre as medidas do recipiente).
Obs.: considere a profundidade (x) do recipiente como constante.

1 nm (nanómetro) = 1.10^{-9} m
Considerando os dados obtidos:
Como modelar matematicamente essa transformação, de maneira que seja possível obter o volume para cada temperatura? (O autor, 2020).

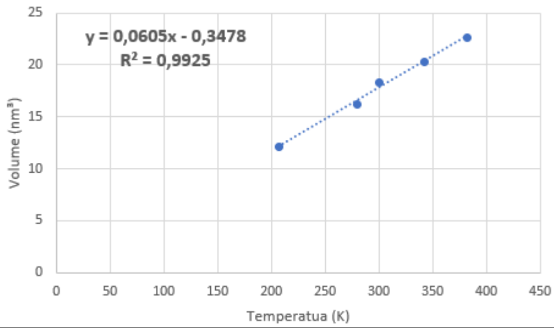
Na etapa 1, esperamos que os estudantes percebessem que a pressão era constante (transformação isobárica) e que volume e temperatura eram variáveis diretamente proporcionais. Na etapa 2, esperamos que os estudantes seguissem procedimentos similares aos adotados na atividade anterior. Eles precisariam concluir que a variável dependente volume seria obtida em função da variável independente temperatura.

Em linhas gerais, o conjunto de suposições requeridos para essa atividade era similar àquele apresentado na atividade anterior. Contudo, esta atividade é diferente da anterior na medida em que o simulador não fornece o valor da variável volume. Assim, os estudantes deveriam registrar o valor da altura do recipiente (constante) e a largura (variável) e, ainda, considerar a profundidade como constante. Assim, além dos procedimentos adotados na atividade 1, o estudante deveria inferir que o volume será dado por $V = a \cdot b \cdot c$.

O quadro a seguir apresenta o registro tabular, o registro gráfico e o registro algébrico construído a partir de dados obtidos pelo pesquisador seguindo o roteiro acima. Nessa segunda atividade, esperamos que o estudante já concluísse que o modelo mais adequado é dado por uma função do tipo $y = ax + b$, realizando apenas os ajustes, caso necessário.

Quadro 20 – Registros de representação semiótica da Atividade 2 (possibilidade 1)

T (K)	Altura	largura	V
207	2,7	4,5	12,15
280	2,7	6	16,2
300	2,7	6,8	18,36
342	2,7	7,5	20,25
382	2,7	8,4	22,68

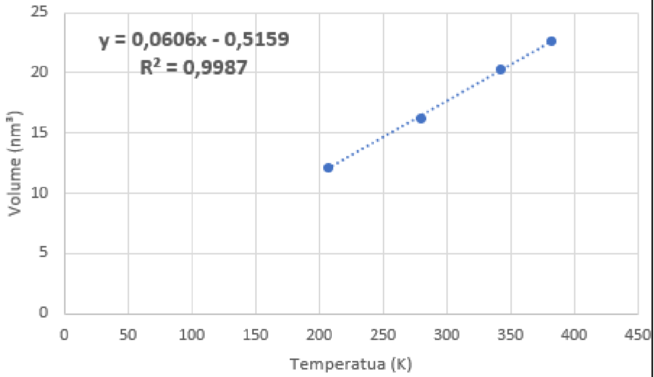


Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Para uma melhor aproximação da equação da reta, o estudante poderia inferir que a razão $\frac{V}{T}$ deve ser constante no caso e, uma possibilidade seria a de utilizar apenas os pontos em que essa razão possuísse valores aproximados. O quadro a seguir apresenta um possível modelo obtido, considerando apenas os pontos em que a razão $\frac{V}{T}$ se aproximou de 0,05.

Quadro 21 – Registros de representação semiótica da Atividade 2 (possibilidade 2)

T (K)	Altura	largura	V	V/T
207	2,7	4,5	12,15	0,058696
280	2,7	6	16,2	0,057857
342	2,7	7,5	20,25	0,059211
382	2,7	8,4	22,68	0,059372



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Para validar o modelo obtido, o estudante poderia realizar os tratamentos necessários a partir dos dados obtidos e verificar a variação entre os valores simulados e os obtidos pelo modelo matemático. Além disso, o estudante poderia também mobilizar o objeto matemático ‘proporção’ nessa atividade.

6.2.3 Atividade 3

A atividade 3 estuda transformações isotérmicas nas quais a temperatura se mantém constante, e o volume e a pressão sofrem alterações.

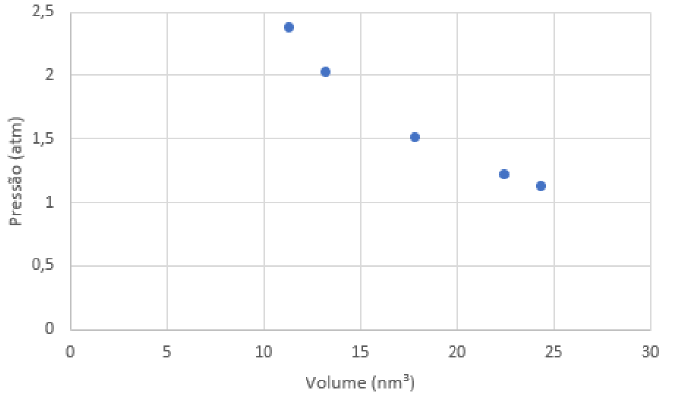
> **Atividade 3: Transformação isotérmica**
> **CONTEXTO 3 –** Considere uma seringa cheia de ar. Você fecha a ponta da seringa com o dedo e começa a pressionar o êmbolo.
> Etapa 1 - Considerando o contexto 3 acima:
> *O que se pode observar em relação ao V, p e T?*
> *Como se dá essa relação?*
> Etapa 2 – Simulador propriedade dos gases
> Fixar T, inserir no sistema 300 partículas e registrar p e V;
> Faça alterações no volume do recipiente e verifique como P se comporta.
> Considerando os dados obtidos:
> *Como modelar matematicamente essa transformação, de maneira que seja possível obter a pressão em função do volume?* (O autor, 2020).

Na etapa 1, esperamos que o estudante percebesse que a temperatura seria constante (transformação isotérmica) e que volume e pressão são grandezas inversamente proporcionais, ou seja, quanto menor o volume, maior será a pressão e vice-versa. Na etapa 2, esperamos que o estudante seguisse os procedimentos adotados na atividade anterior. Eles precisariam concluir que a variável dependente pressão seria obtida em função da variável independente volume.

O quadro 22 apresenta o registro tabular e o registro gráfico construído a partir de dados obtidos pelo pesquisador seguindo o roteiro acima sem incluir a linha de tendência.

Quadro 22 – Registros de representação semiótica da Atividade 3

A	L	V (nm^3)	P(atm)
2,7	9	24,3	1,13
2,7	8,3	22,41	1,22
2,7	6,6	17,82	1,51
2,7	4,9	13,23	2,03
2,7	4,2	11,34	2,38



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

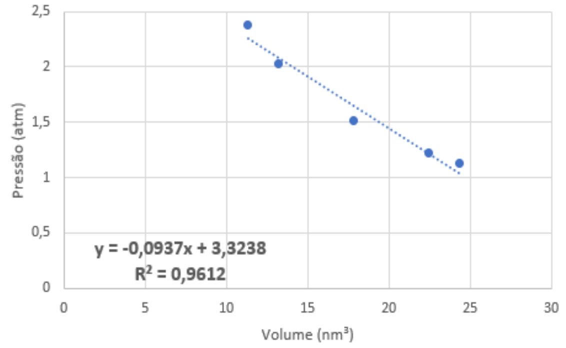
Nesta atividade, considerando grandezas inversamente proporcionais, uma possível dificuldade para a obtenção do modelo matemático se relacionaria à quantidade de pontos considerados e à variação dos valores. Caso os estudantes determinassem apenas três pontos, ou pontos muito próximos, correriam o risco de obter uma função de grau 1 como melhor modelo. Outra possibilidade seria a de se considerar vários pontos, e a transformação ser modelada com uma função exponencial. Contudo, considerando que uma transformação isobárica tem um comportamento inversamente proporcional, esperamos obter uma hipérbole e uma função racional do tipo $y = C \cdot \frac{1}{x^n}, com\ x \neq 0$.

O quadro 23, mais adiante apresenta possibilidades, considerando cinco pontos.

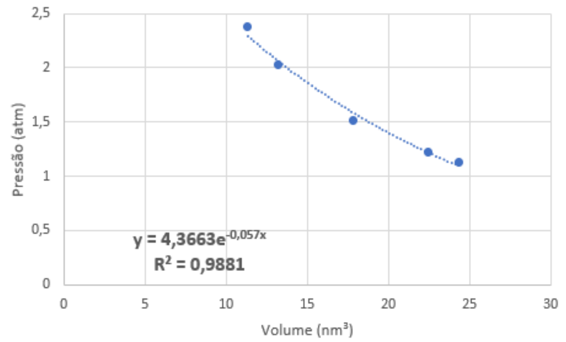
Para validar o modelo obtido, o estudante poderia, além de utilizar os procedimentos adotados nas atividades anteriores, verificar o comportamento do produto $P \cdot V$, que deveria se manter constante para todos os pontos. Outra possibilidade nessa atividade seria a utilização do objeto matemático ‘proporção inversa’.

Quadro 23 – Registros de representação semiótica da Atividade 3

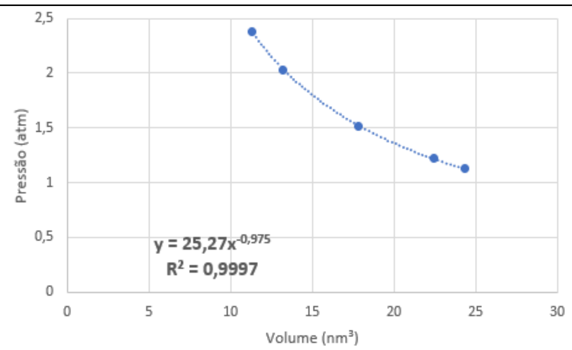
A	L	V (nm^3)	P(atm)
2,7	9	24,3	1,13
2,7	8,3	22,41	1,22
2,7	6,6	17,82	1,51
2,7	4,9	13,23	2,03
2,7	4,2	11,34	2,38



A	L	V (nm^3)	P(atm)
2,7	9	24,3	1,13
2,7	8,3	22,41	1,22
2,7	6,6	17,82	1,51
2,7	4,9	13,23	2,03
2,7	4,2	11,34	2,38



A	L	V (nm^3)	P(atm)
2,7	9	24,3	1,13
2,7	8,3	22,41	1,22
2,7	6,6	17,82	1,51
2,7	4,9	13,23	2,03
2,7	4,2	11,34	2,38



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Finalizada a análise *a priori*, apresentamos na sequência a experimentação, análise *a posteriori* e validação com o objetivo de descrever a produção dos grupos e aplicar o mecanismo proposto pela teoria de conciliação de metas na análise dos dados.

6.3 EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Para a realização da experimentação (ação antecedente O_2), buscou-se realizar as ações antecedentes $N_{3\text{-}6}$ e para efetivar a análise *a posteriori* e validação (ação antecedente O_3) a ação antecedente N_7, propostas no plano de ação intencional do pesquisador.

A experimentação foi desenvolvida em dois encontros nas dependências do Instituto Federal de Santa Catarina – campus Criciúma, sendo quatro horas/aula no dia 10 de junho de 2019 em laboratório de informática com acesso à internet; e duas horas/aula no dia 13 de junho de 2019 em sala de aula com computador e projetor.

Participaram das atividades vinte e quatro estudantes[197] distribuídos em cinco grupos *A*-*E*, dentre as quais os grupos *A*-*D* foram compostos por vinte estudantes que aceitaram participar da pesquisa, e o grupo E foi composto pelos quatro estudantes restantes[198].

No primeiro encontro, entregamos um portifólio contendo orientações gerais (a seguir) e a sequência didática (*milieu* material – M_{-3}), explicamos os procedimentos aos estudantes e apresentamos o simulador. Dito de outro modo, procedemos à devolução, e os estudantes entraram em contato com o *milieu* material – M_{-3}.

> **Orientações Gerais:**
> - Registre o maior número de informações possíveis (cálculos, estratégias etc.);
> - Você pode utilizar diferentes recursos (internet, calculadora, softwares, biblioteca etc.) e estratégias;
> - Em caso de o grupo decidir pela utilização de recursos computacionais printar a tela e encaminhar para o e-mail bazilicioandrade@gmail.com. No título do e-mail informar o nome do grupo (A, B, ...);
> - Finalizada a atividade, encaminhar o vídeo pelo endereço acima, podendo ser utilizado o Google drive para compartilhar. (O autor, 2020).

Na sequência, demos início à resolução das atividades. Para dar conta dos objetivos dessa seção, nós a dividimos em cinco subseções. As quatro primeiras subseções são dedicadas, respectivamente, aos contextos um, dois e três e à institucionalização da sequência didática. Nestas subseções, descrevemos as produções dos grupos, considerando os registros de representação semiótica mobilizados e os planos de ação intencional estabelecidos. Por fim, na quinta subseção, procedemos a uma análise global da sequência didática, levando em conta as fases da modelagem matemática e os níveis de *milieu*.

[197] Durante os dias 10/06/2019-12/06/2019 estava ocorrendo os jogos do Instituto Federal de Santa Catarina, na cidade de Blumenau, o que reduziu o número de estudantes em sala.

[198] Os grupos ficaram assim distribuídos: Grupo A: cinco estudantes; Grupo B: seis estudantes; Grupo C: quatro estudantes; Grupo D: cinco estudantes; e Grupo E: quatro estudantes.

6.3.1 Contexto 1 – Transformação isovolumétrica

6.3.1.1 Etapa 1

A etapa 1 do contexto 1 foi resolvida coletivamente. Nós lemos o contexto e questionamos os estudantes sobre a relação entre volume, pressão e temperatura.

Em sala de aula, após a leitura do contexto 1, estabeleceu-se o diálogo a seguir:

> – Professor: O que a gente pode falar sobre essas três variáveis?
> – Estudantes: silêncio
> – Professor: Ao lerem esse contexto, qual é a primeira coisa que vocês concluem?
> – Estudante 1: Se é diretamente proporcional ou não.
> – Professor: Mas em relação a quem esse diretamente proporcional? Porque nós temos três variáveis. Nesse contexto... (um aluno interrompe para responder)
> – Estudante 1: Elas são diretamente proporcionais.
> – Professor: Todas elas são diretamente proporcionais?
> – Estudante 2: O volume é constante.
> – Estudante 3: A pressão e a temperatura são diretamente proporcionais.
> Nesse momento o professor explica por que o volume é constante. E retoma o diálogo.
> – Professor: Alguém falou (ela falou) que pressão e temperatura são diretamente proporcionais. O que significa isso?
> – Estudante 3: Eu aumento a temperatura, eu aumento a pressão.

Estimulados pelo docente, o estudante 1 sugere que as variáveis poderiam ser diretamente proporcionais ou não. A partir dessa resposta, o professor questionou em relação a quem as variáveis seriam diretamente proporcionais ou não, argumentando a existência de três variáveis. Os estudantes concluíram que o volume seria constante e a pressão e a temperatura seriam diretamente proporcionais. Após debate e reflexão, o professor explicou que isso se dá porque aumentos de temperatura implicam aumentos de pressão, e reduções de temperatura implicam reduções de pressão. Desta maneira, os estudantes concluíram que a pressão é obtida em função da temperatura nesse contexto, valendo destacar que as suposições construídas pelos estudantes nessa etapa foram similares às apresentadas na análise *a priori*.

O quadro 24, a seguir, apresenta as respostas registradas pelos grupos após as discussões conduzidas pelo professor.

Quadro 24 – Contexto 1, Etapa 1: Resposta dos grupos

Grupo A

a) O que se pode observar em relação a V, P e T?

Que o volume é constante e a pressão e temperatura possuem uma relação.

b) Como se dá essa relação?

Pressão e temperatura são: diretamente proporcional.

Grupo B

Contexto 1.

a) O volume é constante e há uma relação entre as variáveis pressão e temperatura.

b) Elas são diretamente proporcionais, sendo que a pressão varia em função da temperatura. Conforme a temperatura aumenta a pressão também aumenta.

Grupo C

a) O que se pode observar em relação a V, P e T?

Volume constante

relação entre pressão e temperatura.

b) Como se dá essa relação?

Diretamente proporcional.

Grupo D

a) O que se pode observar em relação a V, P e T?

Volume é constante, há uma variação da pressão em função da temperatura.

b) Como se dá essa relação?

A relação entre P e T é diretamente proporcional, a medida que a temperatura aumenta a pressão também aumenta.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Observe-se que professor e estudantes, durante a resolução da etapa 1, estabeleceram planos de ação intencional e conciliaram metas e submetas projetadas, objetivando responder aos itens *a* e *b*, caracterizando um processo de auto e heteroconciliação de metas.

Para alcançar a meta *Q* de "habilitar o estudante a compreender a relação entre as variáveis envolvidas no contexto 1", projetamos a submeta *P* "habilitar o estudante a identificar o comportamento de cada uma das variáveis envolvidas no contexto 1" e formulamos a hipótese abdutiva antefactual de "fomentar as discussões a partir do enunciado do contexto 1".

[1] ... ... Q – Habilitar o estudante a compreender a relação entre as variáveis envolvidas no contexto 1, professor.
[2] ... P – Habilitar o estudante a identificar o comportamento de cada uma das variáveis envolvidas no contexto 1, professor.
[3] O – Fomentar as discussões a partir do enunciado do contexto 1, professor.
[4] O – O professor fomenta as discussões a partir do enunciado do contexto 1.
[5] ... P' – O professor habilita o estudante a identificar o comportamento de cada uma das variáveis envolvidas no contexto 1.
[6] ... ... Q' – O professor habilita o estudante a compreender a relação entre as variáveis envolvidas no contexto 1.

Para alcançar a meta *Q* de "compreender como se dá a relação entre as variáveis no contexto 1", os estudantes projetaram a hipótese abdutiva antefactual de "mobilizar seus conhecimentos oriundos do repertório didático", a rigor, de mobilizar os conhecimentos e saberes de matemática e físico-química oriundos de seu repertório didático. O plano de ação intencional pode ser assim esquematizado:

[1] ... Q – Compreender como se dá a relação entre as variáveis no contexto 1, estudantes.
[2] P – Mobilizar seus conhecimentos oriundos do repertório didático, estudantes.
[3] P – Os estudantes mobilizam seus conhecimentos oriundos do repertório didático.
[4] ... Q' – Os estudantes compreendem como se dá a relação entre as variáveis no contexto 1.

Dado o trecho do diálogo apresentado acima, percebe-se que, para finalizar a etapa 1 de maneira satisfatória, tornou-se necessário que professor e estudantes avaliassem e monitorassem suas metas e submetas, caracterizando um processo de heteroconciliação de metas. A figura 24 ilustra esse processo.

Figura 24 – Auto e heteroconciliação de metas QP e QE na etapa 1 do contexto 1

Estudante		Professor
Compreender como se dá a relação entre as variáveis no contexto 1		Habilitar o estudante a compreender a relação entre as variáveis envolvidas no contexto 1
QE	← Heteroconciliação →	QP
↑ Autoconciliação ↓		↑ Autoconciliação ↓
QE'	← Heteroconciliação →	QP'

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Sobre a mobilização de registros de representação semiótica, constatamos que os grupos mobilizaram representações em língua natural ao longo das discussões.

6.3.1.2 Etapa 2

Na etapa 2 do contexto 1, os estudantes não mostraram dificuldades para utilizar o simulador. Em relação às orientações, questionaram quantos pontos deveriam ser registrados. Respondemos que deveria ser considerada uma quantidade que garantisse uma boa análise matemática dos dados. Alguns grupos pesquisaram na internet sobre as características das transformações gasosas e sobre o que é um modelo matemático[199].

A seguir descrevem-se e analisam-se os procedimentos adotados pelos grupos na resolução das questões *a*, *b*, *c* e *d*.

Resolução dos itens *a* e *b*

Inicialmente, os estudantes registraram os dados obtidos no simulador, sem se preocuparem com regras de formação específica da linguagem matemática.

[199] Ressalta-se que os estudantes se acanharam em fazer o registro das atividades em vídeo. Alguns optaram por áudio e outros por filmagens parciais. O que dificultou uma análise minuciosa da resolução.

Quadro 25 – Dados registrados pelos grupos na etapa 2 do contexto 1

Grupo A

- Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente (300K) e registre a pressão (a unidade do simulador é atm). 1,60atm
- **Obs.: após cada alteração, aguarde em torno de 1min e pause o simulador.**
- Faça alterações na temperatura (aqueça/resfrie) e observe como a pressão se comporta (registre os dados). 500K = 2,54atm / 200K = 1,06atm

Grupo B

300K $\xrightarrow{\Delta}$ 540K $\xrightarrow{\nabla}$ 179K

1,52 atm $\xrightarrow{\Delta}$ 2,74 atm $\xrightarrow{\nabla}$ 0,9 atm

Vconstante

Grupo C

- Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente (300K) e registre a pressão (a unidade do simulador é atm). 1.51 atm
- **Obs.: após cada alteração, aguarde em torno de 1min e pause o simulador.**
- Faça alterações na temperatura (aqueça/resfrie) e observe como a pressão se comporta (registre os dados). Quanto maior a temperatura, maior a pressão, quanto menor a temperatura menor a pressão.

Considerando os dados obtidos:

400K — 2atm

500K — 2,50atm

a) Modele matematicamente essa transformação.

b) Usando o modelo obtido, calcule a pressão para diferentes temperaturas e, em seguida, valide seu resultado com o simulador.

200K — 1atm

100K — 0,5atm

c) É possível calcular o volume do recipiente a partir desse modelo? Como seria esse

Grupo D

Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente (300K) e registre a pressão (a unidade do simulador é atm). 300K → 1,45 atm

Obs.: após cada alteração, aguarde em torno de 1min e pause o simulador.

Faça alterações na temperatura (aqueça/resfrie) e observe como a pressão se comporta (registre os dados). 669 K → 3,17 atm (pouco calor adicionado)

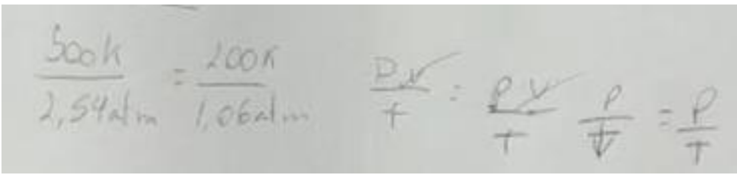
79 K → 0,44 atm (pouco resfriamento)

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Em seguida, com base nos dados coletados, os grupos A, C e D utilizaram representações em diferentes registros semióticos para analisar e validar os dados coletados.

O estudante B do grupo A, considerando que a razão entre as variáveis pressão e temperatura deveriam ser constantes, utilizou o registro numérico fracionário (RRNF) para representar a proporção e validar os dados.

Figura 25 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro numérico e algébrico



Fonte: Grupo A, 2019.

A resposta do estudante B, nos termos da teoria de conciliação de metas, pode ser modelada enquanto consecução da meta inicial *Q* de "validar os dados coletados" e abdução da hipótese antefactual de "utilizar o RRNF para validar a proporção".

[1] ... Q – Validar os dados coletados, grupo A.
[2] P – Utilizar o RRNF para validar a proporção, grupo A.

Ao ser questionado pelo estudante A sobre o motivo do uso de proporções, o estudante B apelou para a equação geral dos gases $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ – representação em registro algébrico (RRA) – e realizou os tratamentos necessários para simplificá-la e mostrar que em uma transformação isovolumétrica há proporção $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$. A meta Q_A do estudante foi a de "compreender o raciocínio utilizado pelo estudante B" e, para isso, estabeleceu a hipótese abdutiva antefactual de "solicitar que o estudante B explicasse o raciocínio utilizado".

O plano de ação intencional do estudante A pode ser assim representado:

[1] ... Q_A – Compreender o raciocínio utilizado pelo estudante B, estudante A.
[2] P_A – Solicitar que o estudante B explique o raciocínio utilizado, estudante A.
[3] P_A – O estudante A solicita que o estudante B explique o raciocínio utilizado.

Para responder a esse questionamento, observa-se que o estudante B constrói um raciocínio abdutivo-dedutivo, onde ele estabelece a meta Q_B de "explicar por que em uma transformação isovolumétrica a razão entre pressão e temperatura em diferentes pontos deve ser constante". Para isso, ele estabelece a hipótese abdutiva antefactual de "utilizar uma representação no RRA para realizar os tratamentos matemáticos necessários na simplificação da equação geral dos gases".

O plano de ação intencional do estudante B pode ser assim representado:

[1] ... Q_B – Explicar por que em uma transformação isovolumétrica a razão entre pressão e temperatura em diferentes pontos deve ser constante, estudante.

[2] P_B – Representar algebricamente a equação geral dos gases para realizar os tratamentos matemáticos necessários na para simplificá-la, estudante.

[3] P_B – O estudante representa algebricamente a equação geral dos gases para realizar os tratamentos matemáticos para simplificá-la.

[4] ... Q_B' – O estudante explica por que em uma transformação isovolumétrica a razão entre pressão e temperatura em diferentes pontos deve ser constante.

O estudante B usou as seguintes suposições para justificar seu raciocínio:

S_1 – Em uma transformação gasosa temos que $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ (premissa implicada, do repertório didático do estudante B);
S_2 – Nesse contexto o volume é constante (premissa implicada, do contexto 1);
S_3 – $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* $S_1 \wedge S_2 \rightarrow S_3$).

Com isso, o estudante A compreendeu o raciocínio utilizado pelo estudante B.

O plano de ação intencional do estudante A pode ser assim esquematizado:

[1] ... Q_A – Compreender o raciocínio utilizado pelo estudante B, estudante A.
[2] P_A – Solicitar que o estudante B explique o raciocínio utilizado, estudante A.
[3] P_A – O estudante A solicita que o estudante B explique o raciocínio utilizado.
[4] ... Q_A' – O estudante A compreende o raciocínio utilizado pelo estudante B.

Seguindo os pressupostos da teoria de conciliação de metas, percebe-se uma cadeia de auto e heteroconciliações de metas (figura a seguir), onde os estudantes A e B estabelecem planos de ação intencional para atingirem suas metas Q_A e Q_B.

Figura 26 – Auto e heteroconciliação de metas dos Q_A e Q_B dos estudantes A e B

Estudante A		Estudante B
Compreender o raciocínio utilizado pelo estudante B		Explicar por que a razão entre pressão em temperatura em diferentes pontos deve ser constante em uma transformação isovolumétrica
QA	← Heteroconciliação →	*QB*
↑ Autoconciliação ↓		↑ Autoconciliação ↓
QA'	← Heteroconciliação →	*QB'*

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Em seguida, para validar a proporção representada no RRNF, o grupo realiza a conversão para uma representação no registro numérico decimal RRND. Entretanto, com a conversão RRNF → RRND os estudantes do grupo perceberam que as razões eram diferentes

$(196{,}85 \neq 188{,}68)$, enfraquecendo a suposição até então factual de que as transformações isovolumétricas poderiam ser tratadas mediante o objeto matemático “proporção” – inconciliação ativa.

Esse plano de ação intencional pode ser visto no esquema a seguir:

[1] ... ... Q – Validar os dados coletados, grupo A.
[2] ... P – Utilizar representação numérica fracionária para representar a proporção, grupo A.
[3] O – Realizar a conversão da representação numérica fracionária para a decimal, grupo A.
[4] O – O grupo A realiza a conversão da representação numérica fracionária para a decimal.
[5] ... P' – O grupo A utiliza a representação numérica fracionária para representar a proporção.
[6] ... ... $\neg Q'$ – O grupo A não valida os dados coletados.

Por hipótese, a seguinte cadeia de suposições S_{1-4} foi mobilizada.

S_1 – $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ (premissa implicada do repertório didático do grupo A);

S_2 – Podem-se utilizar dois pontos coletados para representar a proporção $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ por meio de uma representação numérica fracionária (conclusão implicada $S_1 \rightarrow S_2$);
S_3 – Pode-se converter representações numéricas fracionárias em representações numéricas decimais (premissa implicada do repertório didático do grupo A);
S_4 – Pode-se converter a representação numérica fracionária para a decimal para validar a proporção $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ (conclusão implicada $S_3 \rightarrow S_4$).

Ao se deparar com a diferença entre as razões, o grupo avaliou os procedimentos adotados. Os estudantes abduziram ex-post-facto que a diferença decorria da oscilação do simulador. Essa estratégia permitiu conciliar os dados discrepantes e validá-los – conciliação ativa.

O plano de ação intencional do grupo pode ser assim representado:

[1] ... ... Q – Validar os dados coletados, grupo A.
[2] ... P – Utilizar o RRNF para representar a proporção, grupo A.
[3] O – Realizar a conversão RRNF → RRND, grupo A.
[4] O – O grupo A realiza a conversão RRNF → RRND.
[5] ... P’ – O grupo A utiliza o RRNF para representar a proporção.
[6] ... ... Q’ – O grupo A valida os dados coletados.

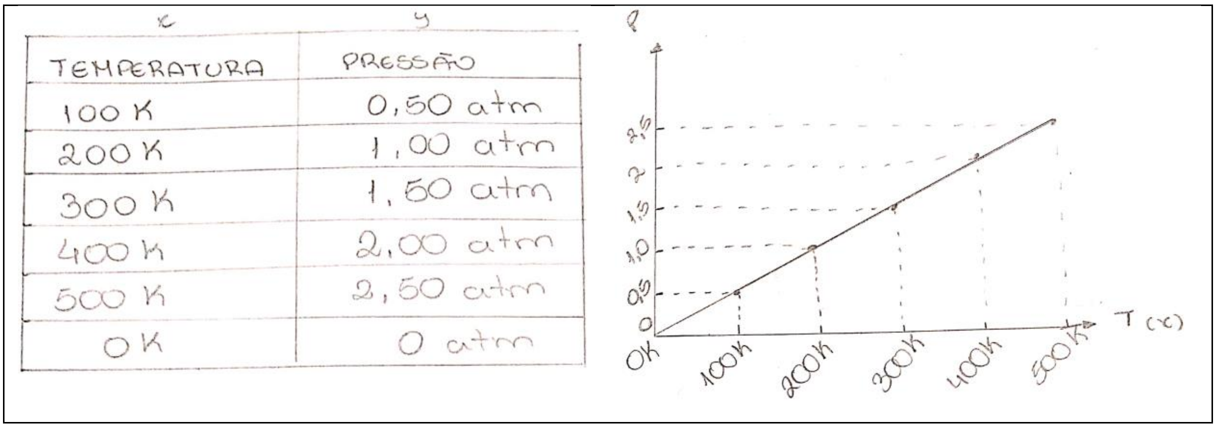
Por hipótese, a seguinte cadeia de suposições foi utilizada para o estabelecimento desse plano de ação intencional.

S1 – $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ (premissa implicada, do repertório didático do grupo A);
S2 – Pode-se utilizar dois pontos coletados para representar essa proporção por meio do RRNF (conclusão implicada);
S3 – Pode-se realizar a conversão RRNF → RRND para validar a proporção (conclusão implicada).

Essa cadeia de suposições permitiu ao grupo atingir a meta *Q* de "validar os dados coletados", sendo que a ação antecedente *O* possibilitou a avaliação da hipótese abdutiva antefactual, caracterizando uma conciliação ativa.

O grupo C, por sua vez, organizou os dados mediante representação em registro tabular (RRT) e gráfico (RRG), caracterizando a atividade cognitiva de conversão.

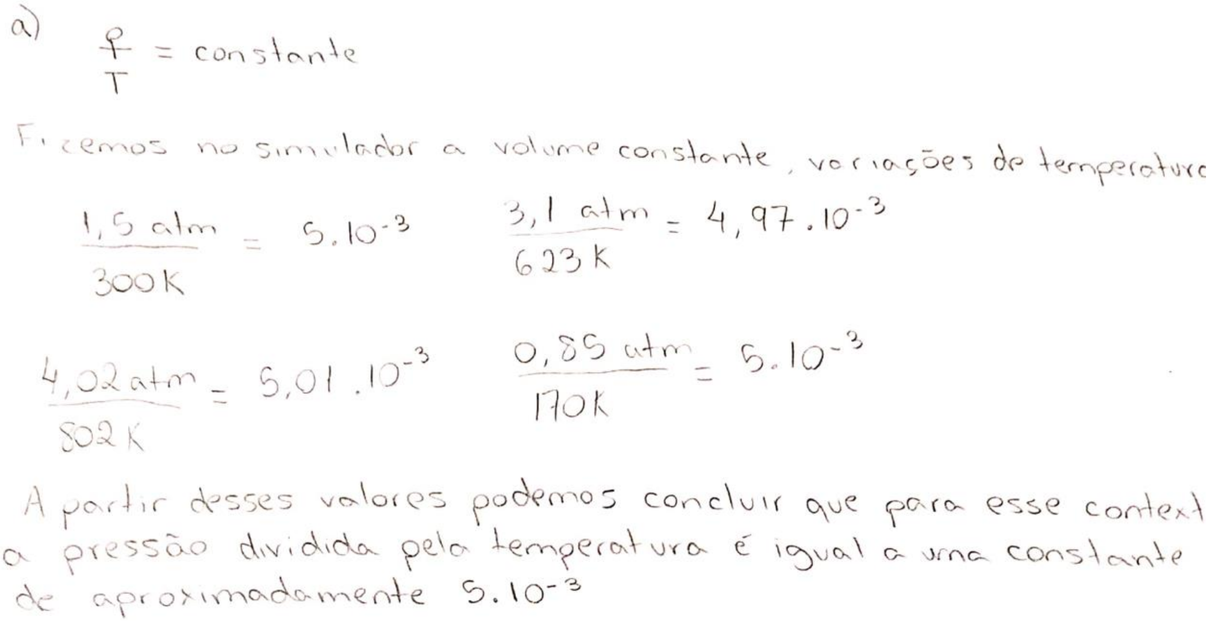
Figura 27 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo C: Evidências em registro tabular e gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

O grupo D, por fim, utilizou uma representação no registro numérico (RRN) para a organização e validação dos dados.

Figura 28 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo D: Evidências em registro numérico



a)

$\frac{P}{T}$ = constante

Fizemos no simulador a volume constante, variações de temperatura

$\frac{1,5 \text{ atm}}{300 \text{K}} = 5.10^{-3}$ $\frac{3,1 \text{ atm}}{623 \text{K}} = 4,97.10^{-3}$

$\frac{4,02 \text{ atm}}{802 \text{K}} = 5,01.10^{-3}$ $\frac{0,85 \text{ atm}}{170 \text{K}} = 5.10^{-3}$

A partir desses valores podemos concluir que para esse context a pressão dividida pela temperatura é igual a uma constante de aproximadamente 5.10^{-3}

Fonte: Grupo D, 2019.

Inicialmente os estudantes concluíram que a razão $\frac{P}{T}$ deveria ser constante para todos os pontos. Em seguida, representaram os dados por meio do RRNF, e com o auxílio de uma calculadora, o converteram para o registro numérico em notação científica (RRNNC).[200]

Durante essa fase, observou-se que os grupos A, C e D definiram a meta *Q* de "validar os dados coletados" e estabeleceram diferentes hipóteses abdutivas antefactuais, caracterizando a constituição de um plano de ação intencional em direção à consecução da meta *Q*, como propõe a teoria da conciliação de metas. Nesse processo, os grupos avaliaram a força das suposições e seguiram o raciocínio a partir da hipótese supostamente mais eficiente, em consonância com o mecanismo de interpretação proposto pela teoria da relevância.

Mais adiante, os grupos discutiram o procedimento que seria adotado para a obtenção do modelo matemático. Assim, eles estabeleceram a meta *Q* de "obter um modelo matemático para modelar a transformação do contexto 1". Podemos representar a etapa [1], projeção da meta *Q*, do plano de ação intencional dos grupos da seguinte forma:

[1] Q – Obter um modelo matemático para modelar a transformação do contexto 1, grupos

No grupo A, um dos integrantes sugeriu a hipótese abdutiva antefactual de "obter

[200] Os planos de ação intencionais dos demais grupos e dos contextos 2 e 3 podem ser esquematizados de maneira similar ao do grupo A.

uma função para posteriormente construir um gráfico", e outro estudante argumentou que seria necessário "construir um gráfico para obter uma função". Esse diálogo sugere que os estudantes consideram que obter uma função significa representá-la por meio do registro algébrico, sendo o registro gráfico um facilitador nessa conversão.

O plano de ação intencional do grupo A, incluindo a submeta *P* de "modelar a transformação por meio de uma função representada pelo RRA", pode ser assim representado:

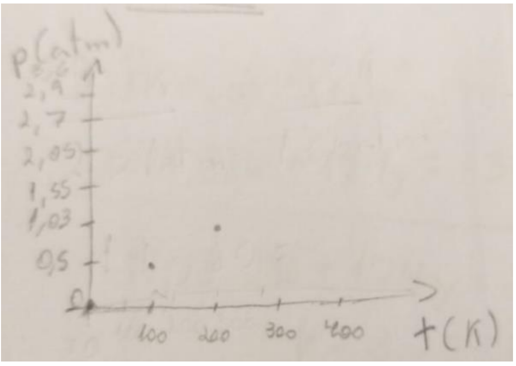
[1] ... Q – Obter modelo matemático para modelar a transformação do contexto 1, grupo A.
[2] P – Modelar a transformação por meio de uma função representada pelo RRA, grupo A

As suposições a seguir foram utilizadas pelo grupo A:

> S_1 – Funções habilitam elaboração de gráficos (premissa implicada do estudante A);
> S_2 – Gráficos habilitam elaboração de funções (premissa implicada do estudante B);
> S_3 – Um gráfico habilita a elaboração da função (conclusão implicada do grupo A por *modus tollendo ponens* $(S_1 \vee S_2) \rightarrow S_3)$[201];
> S_4 – A transformação é isovolumétrica (premissa implica do contexto 1);
> S_5 – O volume será constante nessa transformação (conclusão implica do grupo A por *modus ponens* $S_4 \rightarrow S_5$);
> S_5 – O gráfico representa P x T (conclusão implicada do grupo A).

Em seguida, observou-se uma tentativa de elaboração manual de uma representação no registro gráfico para a compressão, estruturação e matematização da situação.

Figura 29 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro gráfico 1



Fonte: Grupo A, 2019.

O plano de ação intencional do grupo A, incluindo a submeta *O* de "utilizar o RRG para obter uma representação no RRA", pode ser assim representado:

---

201 Formalmente: '(P∨Q)→R, ¬P, Q→R' ou então '(P∨Q)→R, ¬Q, P→R'. (o símbolo → equivale à operação lógica de implicação, 'se P então Q'; o símbolo ∧ equivale à operação lógica de conjunção; o símbolo ∨ equivale à operação lógica de disjunção; o símbolo ¬ equivale a negação) (RAUEN, 2009, p. 196).

[1] ... ... Q – Obter modelo matemático para modelar a transformação do contexto 1, grupo A.
[2] ... P – Modelar a transformação por meio de uma função representada pelo RRA, grupo A.
[3] O – Utilizar o RRG para obter uma representação no RRA, grupo A.

O registro gráfico presente na figura anterior nos permite concluir que os estudantes buscaram novos pares ordenados $((0; 0); (100; 0{,}5))$ e atualizaram os anteriores $((200; 1{,}03))$. Observa-se uma tentativa de os estudantes utilizarem as regras de formação específicas do registro gráfico para uma melhor compreensão da situação e a utilização do par ordenado $(0; 0)$, o que mais uma vez caracteriza a utilização do repertório didático relativos a físico-química, já que teoricamente a pressão é igual a zero quando a temperatura é zero em uma transformação isovolumétrica.

O plano de ação intencional do grupo A, incluindo a submeta *N* de "marcar diferentes pares ordenados no plano cartesiano", pode ser assim representado:

[1] ... ... Q – Obter modelo matemático para modelar a transformação do contexto 1, grupo A.
[2] ... ... P – Modelar a transformação por meio de uma função representada pelo RRA, grupo A.
[3] ... O – Utilizar o RRG para obter uma representação no RRA, grupo A.
[4] N – Marcar diferentes pares ordenados no plano cartesiano, grupo A.

Por hipótese, as suposições a seguir foram utilizadas pelo grupo A:

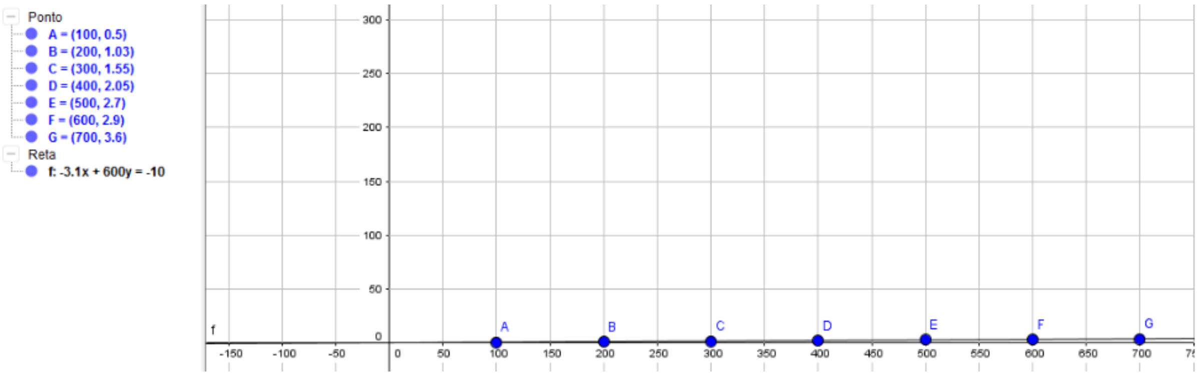
> S_1 – Gráficos habilitam a elaboração da função (premissa implicada pelo grupo A);
> S_2 – O gráfico representa uma função do segundo grau (premissa implicada pelo grupo A);
> S_3 – A pressão é zero quando a temperatura é zero, (premissa implicada pelo grupo A);
> S_4 – É possível obter pressão de 100 em 100 (premissa implicada pelo grupo A).

Na sequência os estudantes optaram por utilizar recursos computacionais para a construção da representação no registro gráfico. Inicialmente eles utilizaram o *software LibreOffice Calc*, mas migraram para o *software* Geogebra. Agora, os estudantes passaram a representar a transformação dada no contexto 1 por meio de uma função de grau 1 e não mais como uma função de grau 2 (figura 30 a seguir).

O plano de ação intencional do grupo A, incluindo a submeta *M* de "utilizar o software Geogebra", pode ser assim representado:

[1] ... ... Q – Obter modelo matemático para modelar a transformação do contexto 1, grupo A.
[2] ... ... P – Modelar a transformação por função representada pelo RRA, grupo A.
[3] ... ... O – Utilizar o RRG para obter uma representação no RRA, grupo A.
[4] ... N – Marcar diferentes pares ordenados no plano cartesiano, grupo A.
[5] M – Utilizar o software Geogebra, grupo A.

Figura 30 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro gráfico 2

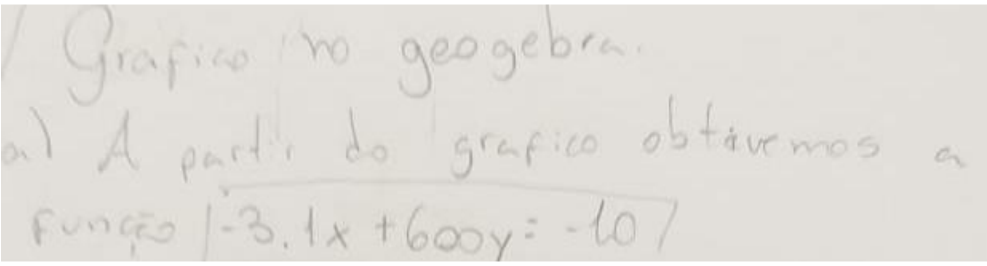


Fonte: Grupo A, 2019.

O gráfico acima nos leva a concluir que os estudantes aumentaram a quantidade de pares ordenados para uma melhor aproximação da reta que expressa a relação entre pressão e temperatura e, consequente, reduzir os erros oriundos das oscilações do simulador. Desta maneira, mobilizaram simultaneamente representações dadas em registro numérico, pares ordenados, em registro gráfico e em registro algébrico, convertendo a representação no registro numérico para uma representação no registro gráfico e, finalmente, convertendo a representação no registro gráfico para o algébrico. Observa-se ainda uma dificuldade na utilização do *software* no que diz respeito às regras de formação específicas da matemática concernentes a escala utilizada. O uso de uma escala adequada poderia favorecer os estudantes na interpretação do modelo matemático obtido.

A figura a seguir ilustra a resposta final dos estudantes para o item (a) da etapa 2.

Figura 31 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro algébrico



Fonte: Grupo A, 2019.

A seguir, ilustramos o raciocínio abdutivo-dedutivo utilizado pelo grupo A:

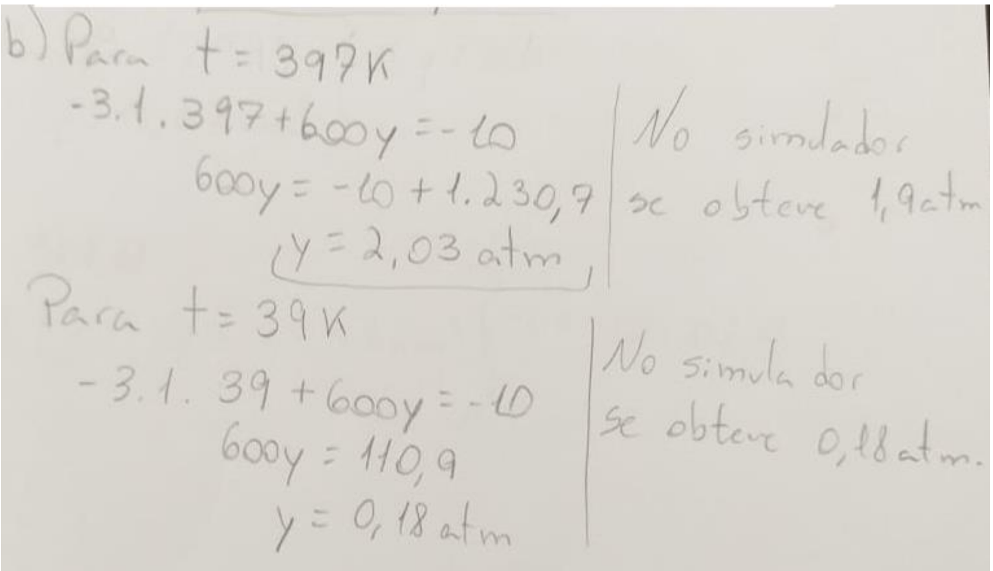
[1] ... ... Q – Obter modelo matemático para modelar a transformação do contexto 1, grupo A.
[2] ... ... P – Modelar a transformação por meio de uma função representada pelo RRA, grupo A
[3] ... ... O – Utilizar o RRG para obter uma representação no RRA, grupo A.
[4] ... N – Marcar diferentes pares ordenados no plano cartesiano, grupo A.
[5] M – Utilizar o software Geogebra, grupo A.

[6] M – O grupo A utiliza o software Geogebra.
[7] ... N’ – O grupo A marca diferentes pares ordenados no plano cartesiano.
[8] ... ... O’ – O grupo A utiliza o RRG para obter uma representação no RRA.
[9] ... ... P’ – O grupo A modela a transformação por meio de uma função representada pelo RRA.
[10] ... ... Q’ – O grupo A obtém modelo matemático para modelar a transformação do contexto 1.

Nesse ponto observamos a decisão do grupo por utilizar o objeto matemático ‘função’ para representar em registro algébrico a relação entre pressão e temperatura. Na socialização dos resultados com os demais grupos, o grupo A argumentou que decidiu “modelar a transformação com o objeto matemático função”, e estabeleceu como hipótese abdutiva antefactual “mobilizar uma representação no registro algébrico”.

Na continuidade, para responder ao item *b* da etapa 2, os estudantes do grupo A realizaram tratamentos no modelo obtido em *a* para obter a pressão a partir de valores aleatórios de temperatura e, na sequência, compararam os resultados obtidos matematicamente com os obtidos no simulador (figura a seguir).

Figura 32 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo A: Resolução do exercício (b)



Fonte: Grupo A, 2019.

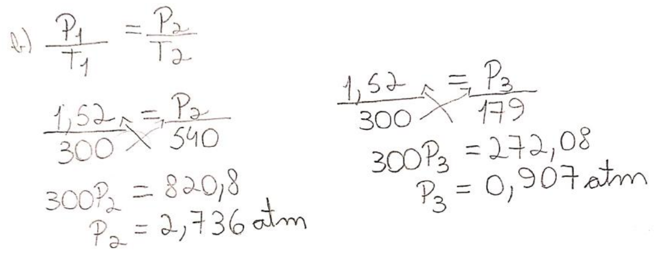
O grupo A observou que ocorreram variações entre os valores obtidos no simulador e os calculados com o modelo matemático. Contudo, atribuíram essa variação às oscilações do simulador. Nesse item, os estudantes puderam analisar o modelo obtido e interpretar e validar os resultados, bem como avaliar as hipóteses abdutiva-antefactuais formuladas anteriormente.

No grupo B, um dos estudantes sugeriu a hipótese de modelar a transformação por meio de uma fórmula. Contudo, os demais integrantes questionaram qual seria essa fórmula, o que os levou a construir diferentes hipóteses abdutivas antefactuais. Tais hipóteses se relacionavam a diferentes fórmulas de seu repertório didático.

Após uma pesquisa na internet o grupo concluiu que o modelo matemático que melhor representaria a transformação seria $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$. No entanto, um dos integrantes questionou: “O que a gente vai descobrir aqui sem botar nenhum valor?”. Uma outra integrante respondeu: “Mas não é para descobrir nada, é só para modelar matematicamente essa transformação”. O estudante replica: “Não sei ao que vai nos levar isso”.

Tendo optado por modelar a transformação utilizando a proporção $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$, ao lerem o enunciado do item *b*, os estudantes perceberam a necessidade de fixar valores na razão $\frac{P_1}{T_1}$.

Figura 33 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo B: Resolução do exercício (a) e (b)



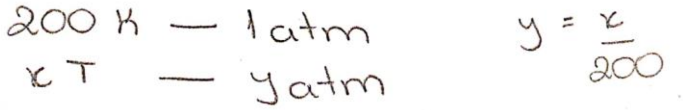
Fonte: Grupo B, 2019.

Observamos que o grupo B sentiu a necessidade de reavaliar o plano de ação intencional, já que a proporção $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$, por conter quatro variáveis, não viabilizava tratamentos matemáticos satisfatórios (inconciliação ativa). Com isso, eles elaboraram a hipótese abdutiva antefactual alternativa de “fixar valores para a razão $\frac{P_1}{T_1}$”, o que permitiu obter um modelo consistente que possibilitasse a realização de tratamentos.

Para validar os dados, os estudantes do grupo B realizaram tratamentos na proporção $\frac{1,52}{300} = \frac{P_2}{T_2}$, atribuindo os valores já coletados com simulador para a variável temperatura e verificando o valor obtido para a variável pressão. A análise dos diálogos nos permite inferir um processo de negociação constante de metas e submetas dos estudantes em busca da consecução da meta *Q* de “obter um modelo matemático para modelar a transformação do contexto 1” (heteroconciliação colaborativa de metas).

O grupo C, após representar os dados coletados por meio do registro tabular e gráfico, questionou-nos como ‘modelar matematicamente’ a transformação. Respondemos que a ideia era “usar algo da linguagem matemática” que permitisse “relacionar temperatura e pressão”. Nesse ponto, um dos estudantes do grupo elaborou a hipótese abdutiva antefactual de “utilizar regra de três”, como podemos ver a seguir

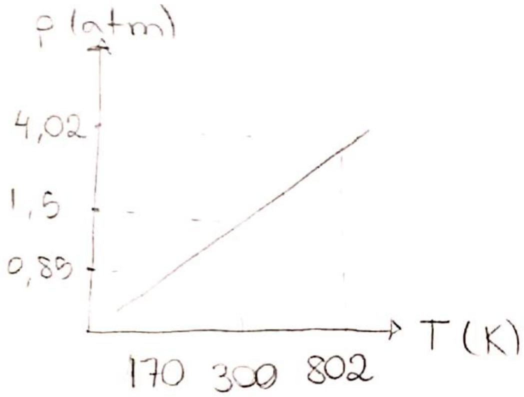
Figura 34 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo C: Resolução do exercício (a)



Fonte: Grupo C, 2019.

O grupo D, ao responder a atividade *a*, concluiu que um gráfico poderia modelar matematicamente a transformação, despreocupado com as regras de formação específicas do registro gráfico.

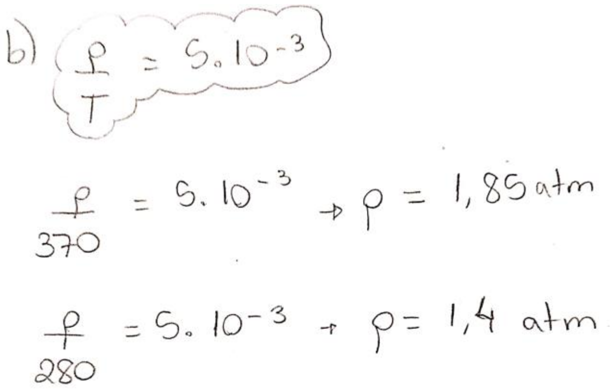
Figura 35 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo D: Resolução do exercício (a)



Fonte: Grupo D, 2019.

No entanto, ao tentar responder a letra *b*, o grupo percebeu a necessidade de representar a questão algebricamente. Para isso, os estudantes elaboraram a hipótese abdutiva antefactual de “que se a razão $\frac{P}{T}$ deve ser constante, e que se a constante é 5×10^{-3}, então um bom modelo seria $\frac{P}{T} = 5 \times 10^{-3}$”. Com isso, construíram um modelo mobilizando o registro algébrico e a partir dele calcularam diferentes valores para a pressão, caracterizando a atividade cognitiva de tratamento (Figura 36).

Figura 36 – Contexto 1, Etapa 2, Grupo D: Resolução do exercício (b)



Fonte: Grupo D, 2019.

De um modo geral, observamos planos de ação intencional nos grupos. De modo análogo a fase anterior, onde a meta Q era “validar os dados coletados”, percebemos que os grupos avaliaram a força das suposições ao longo da atividade e utilizaram o mecanismo de interpretação proposto pela teoria da relevância para avaliar a hipótese abdutiva antefactual e validar os modelos obtidos.

A seguir se ilustra o raciocínio abdutivo-dedutivo utilizado pelos grupos:

[1] ... Q – Obter um modelo matemático para modelar a transformação do contexto 1, grupos.
[2] P – Modelar a transformação por meio de um registro de representação semiótica, grupos.
[3] P – Os grupos modelam a transformação por meio de um registro de representação semiótica
[4] ... Q’ – Os grupos obtêm um modelo matemático para modelar a transformação do contexto 1.

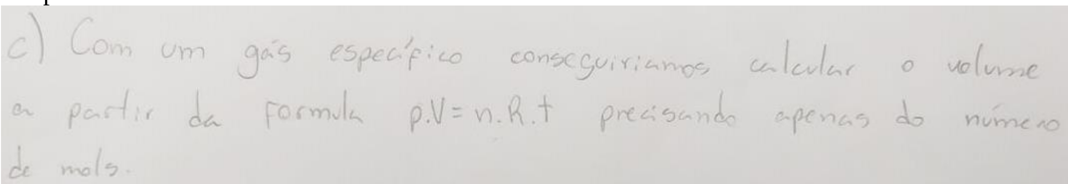
Constatamos também a mobilização de diferentes registros de representação semiótica e o uso das atividades cognitivas de formação de uma representação identificável, tratamento e conversão.

Resolução itens *c* e *d*

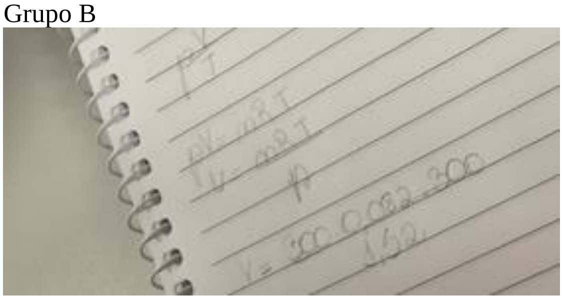
Para responder o item c (quadro 26, mais adiante), os estudantes dos grupos A, B e C concluíram que seria possível obter o volume do recipiente utilizando a fórmula $pV = nRT$. Para isso, era necessário somente conhecer o número de mols. O grupo B, no entanto, ao registrar a resposta no portifólio, respondeu que o modelo obtido em a não permitia determinar o volume do recipiente. O grupo D não respondeu a este item.

Quadro 26 – Contexto 1, Etapa 2, Grupos A, B e C: Resolução do exercício *c*

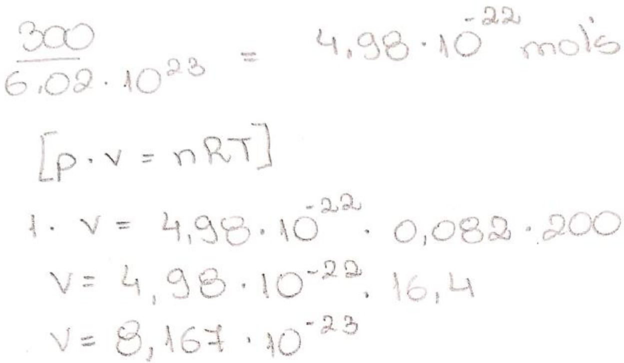
Grupo A


c) Com um gás específico conseguiríamos calcular o volume a partir da formula p.V = n.R.T precisando apenas do número de mols.

Grupo B



Grupo C


$\frac{300}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 4{,}98 \cdot 10^{-22}$ mols

$[p \cdot v = nRT]$

$1 \cdot v = 4{,}98 \cdot 10^{-22} \cdot 0{,}082 \cdot 200$

$v = 4{,}98 \cdot 10^{-22} \cdot 16{,}4$

$v = 8{,}167 \cdot 10^{-23}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Para finalizar o contexto 1, os estudantes concluíram que existe uma temperatura máxima suportada pelo sistema no item *d*. Contudo, não a relacionaram com o domínio e imagem de uma função (quadro 27, mais adiante).

O grupo A concluiu que haveria um rompimento ou quebra do sistema, quando a temperatura estivesse entre 1200K e 1300K, e que o volume deixaria de ser constante e a função obtida (modelo) não seria mais válida. O grupo B determinou os valores máximos para as variáveis pressão e temperatura com o auxílio do simulador. Os grupos C e D determinaram o valor máximo para a pressão do recipiente com o auxílio do simulador e, a partir do modelo obtido em *b*, realizaram os tratamentos necessários e obtiveram o valor máximo para a temperatura. O grupo C, depois de nos questionar o que significavam esses valores compreendeu que estavam relacionados ao domínio e imagem da função.

A resolução do item *d* evidencia a não congruência entre as limitações da variação das grandezas com a manipulação do simulador e os conceitos matemáticos de domínio e imagem. Essa associação, especificamente as relacionada ao domínio de uma função, revela-se fundamental em atividades de modelagem matemática por possibilitar aos estudantes a delimitação do intervalo em que o modelo construído é válido, cabendo ao professor realizar essa discussão na situação/dialética de institucionalização.

Quadro 27 – Contexto 1, Etapa 2: Resolução do exercício (d)

Grupo A

d) Em torno de 1.200K e 1300 K, vai alternar o volume, deixando de ser uma constante e mudando a função inicial.

Grupo B

d) T = 1633 K

P = 5,99 atm

Como nesta situação pressão e a temperatura são diretamente proporcionais, quanto mais foi aumentando a temperatura, a pressão consequentemente também aumentou até chegar no seu limite, fazendo com que a pressão no interior da panela se tornasse maior do que a pressão esctena, levando ao rompimento.

Grupo C

d- Em 6 atm ele explodiu

200 — 1   x = 1200 K

x — 6   ↳ Este sendo o fim do gráfico, como número maximo.

D = 1200 K

Imagem = 6atm

Grupo D

d) A pressão máxima onde a panela explode é 6 atm desse modo a temperatura $\frac{6}{T} = 5.10^{-3} \rightarrow T = 1200K$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

De um modo geral, durante a resolução do contexto 1, observou-se que os estudantes construíram planos de ação intencional individuais e coletivos (auto e heteroconciliação). Nos momentos em que os grupos não puderam validar suas hipóteses, ou tiveram dificuldades em compreender os dados, eles solicitaram auxílio ao professor, reformulando o plano de ação intencional, quando necessário, incluindo no processo outro nível de heteroconciliação de metas, aquele entre estudantes e professor.

Além disso, pudemos observar que os estudantes seguiram o procedimento de compreensão guiado pela relevância, especialmente nos momentos em que avaliavam hipóteses e suposições fortalecidas, contraditas ou combinadas com suposições prévias. Destaque-se que, justamente nos casos em que ocorriam contradições, os estudantes reavaliavam o plano de ação intencional ou recorriam ao professor.

6.3.1 Contexto 2 – Transformação isobárica[202]

6.3.1.3 Etapa 1

Na etapa 1 do contexto 2, procedemos à leitura do contexto, solicitamos que os grupos respondessem os itens *a* e *b*, e discutimos as respostas coletivamente.

Os grupos A, B e D concluíram que a pressão seria constante, e volume e temperatura seriam variáveis diretamente proporcionais.

Para responder à etapa 1 do contexto 2, o grupo D construiu diferentes hipóteses abdutivas antefactuais. Essas suposições foram sendo sucessivamente avaliadas durante o processamento inferencial. Quando essas suposições eram fortalecidas permaneciam em pauta; caso contrário, eram abandonadas. Observamos que os estudantes do grupo coordenaram metas e submetas projetadas individualmente para alcançar a meta coletiva do grupo de "responder aos itens *a* e *b* do contexto 2" (auto e heteroconciliação de metas).

O diálogo a seguir, formulado pelo grupo D, corrobora com essas asserções:

> - Estudante A: É parecido com o outro, não é?
> - Estudante C: Espera! Eu não consegui ler ainda.
> - Estudante B: Ah, dessa vez é temperatura e volume que são diretamente ... porque a pressão vai continuar a mesma;
> - Estudante C: A pressão é a mesma. Vai variar temperatura e volume.
> - Estudante B: Porque é um ambiente fechado.
> - Estudante B: Tá, mas daí é o volume né?
> - Estudante C: O volume não é constante e a pressão não é constante... Quer dizer, a pressão é, a pressão é constante, a temperatura não.
> - Estudante C: A pressão é constante, o volume e o T que mudam;

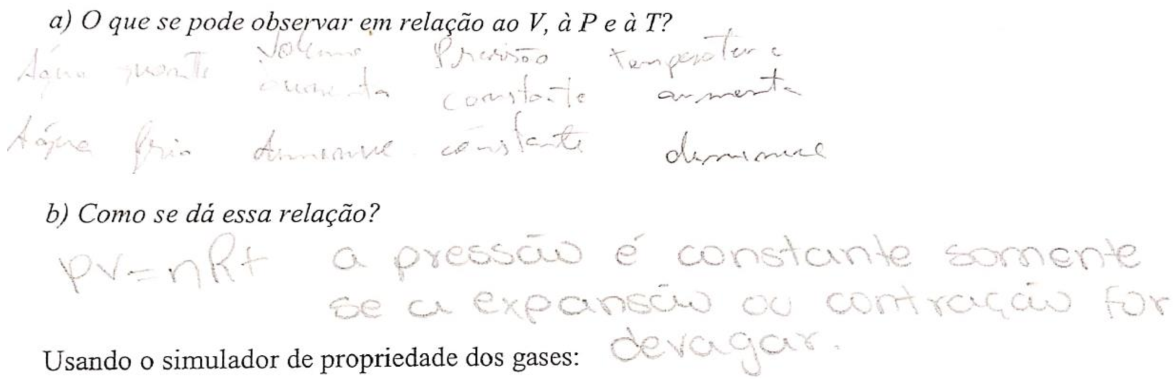
---

[202] Dadas as regularidades observadas nos contextos 2 e 3, priorizaremos somente evidências novas.

> - Estudante A: A pressão é constante?
> - Estudante C: Sim
> - Estudante B: A pressão é constante e o volume varia em função da temperatura.
> - Estudante C: É diretamente proporcional de novo né?
> - Estudante B: É diretamente proporcional volume e temperatura.
> - Estudante B: É V sobre T igual constante. É a mesma coisa da outra, mas agora é V sobre T.

O grupo C respondeu no item b que a relação se daria pela equação $pV = nRT$, sendo válida somente quando a dilatação ou contração do balão ocorresse de maneira muito lenta. A figura a seguir apresenta a resposta registrada pelo grupo C.

Figura 37 – Contexto 2, Etapa 1: Resposta do grupo C



a) O que se pode observar em relação ao V, à P e à T?

	Volume	Pressão	Temperatura
Água quente	aumenta	constante	aumenta
Água fria	Diminui	constante	diminui

b) Como se dá essa relação?

pV=nRt a pressão é constante somente se a expansão ou contração for devagar.

Usando o simulador de propriedade dos gases:

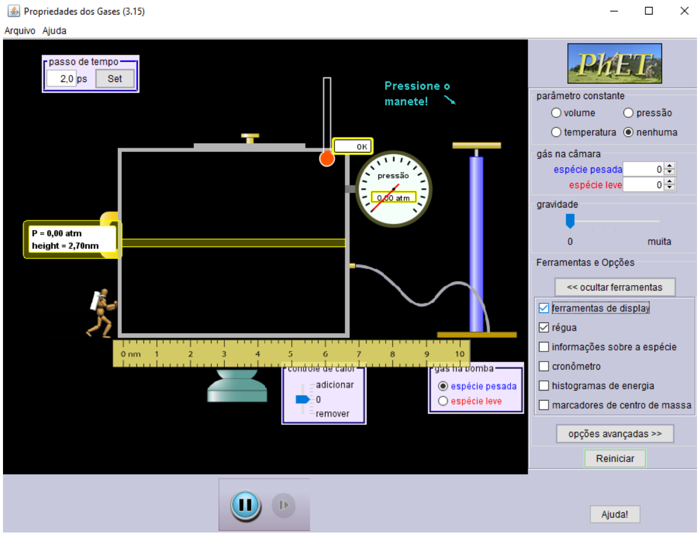
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Finalizada a resolução, o professor discutiu com os estudantes as respostas registradas, refletindo as especificidades do contexto 2.

6.3.1.4 Etapa 2

Em seguida, explicamos aos estudantes como utilizar a régua virtual do simulador que possibilitava a medição das dimensões do recipiente (figura 35). Na sequência, demos início à resolução da etapa 2 do contexto 2.

Figura 38 – Simulador *Propriedade dos Gases*



Fonte: Captura de tela do Simulador Propriedades dos gases desenvolvido em Java pelo Phet Simulações, 2020.

Na sequência, descrevemos e analisamos os procedimentos adotados pelos grupos na modelagem matemática do contexto 2. Para o registo dos dados, os grupos seguiram procedimento similar àqueles utilizados no contexto 1.

O quadro 28, mais adiante, apresenta os dados registrados pelos grupos.

Ao ler o enunciado, o grupo A produziu o diálogo a seguir.

> - Estudante A: Tá, então a gente tem que fazer uma representação para que isso seja possível;
> - Estudante B: Vamos fazer gráfico de novo?
> - Estudante A: Gráfico ou tabela?
> - Estudante C: Tabela eu acho mais fácil;
> - Estudante B: Mas tabela tem que ter uma função também, não?
> - Estudante C: Não.
> - Estudante A: Mas pede para achar o volume para cada temperatura. Então tipo, colocar num lugar e ter um volume para cada temperatura.
> - Estudante A: Então vamos fazer gráfico mesmo.
> - Estudante B: Isso, gráfico.
> - Estudante A: Tá. Vai ser volume e temperatura.
> - Estudante A: O volume é a variável e a temperatura é a independente.
> - Estudante C: Isso, temperatura é a independente.

Quadro 28 – Contexto 2, Etapa 2: Dados registrados pelos grupos

Grupo A

300K = 1,04 atm

- Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente.
- Faça alterações na temperatura (aqueça/resfrie) e observe como o volume do recipiente se comporta (registre as medidas do recipiente).
- Obs.: considere a profundidade (x) do recipiente como constante.
- nm (nanómetro) = $1 \cdot 10^{-9}$ m

Considerando os dados obtidos:

a) Modele matematicamente essa transformação, de maneira que seja possível obter o volume para cada temperatura?

Quando adicionadas as 300 partículas o volume foi de 17,82 nm³ para 18,9 nm³ (a 300K e pressão 1,51 atm).

Aumentando a temperatura para 374K o volume expandiu, se tornando 23,76 nm³ (pressão constante).

Diminuindo a temperatura para 200K o volume diminuiu para 11,88 nm³ (pressão constante)

Grupo B

a) h = 2,7 nm

↳ Comprimento 1 = 4,4 nm
T_1 = 300K

↳ Comprimento 2 = 5,8 nm
T_2 = 400K

↳ Comprimento 3 = 3 nm
T_3 = 200K

Grupo C

- Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente. – 297 K
- Faça alterações na temperatura (aqueça/resfrie) e observe como o volume do recipiente se comporta (registre as medidas do recipiente).
- Obs.: considere a profundidade (x) do recipiente como constante.
- nm (nanómetro) = $1 \cdot 10^{-9}$ m

400K – V +
600K – V +
200K ↓ V
2,6 nm de deslocamento

300K — 9,4 nm com pressão
200K — 6,6 nm constante de 1 atm

Grupo D

a) Modele matematicamente essa transformação, de maneira que seja possível obter o volume para cada temperatura?

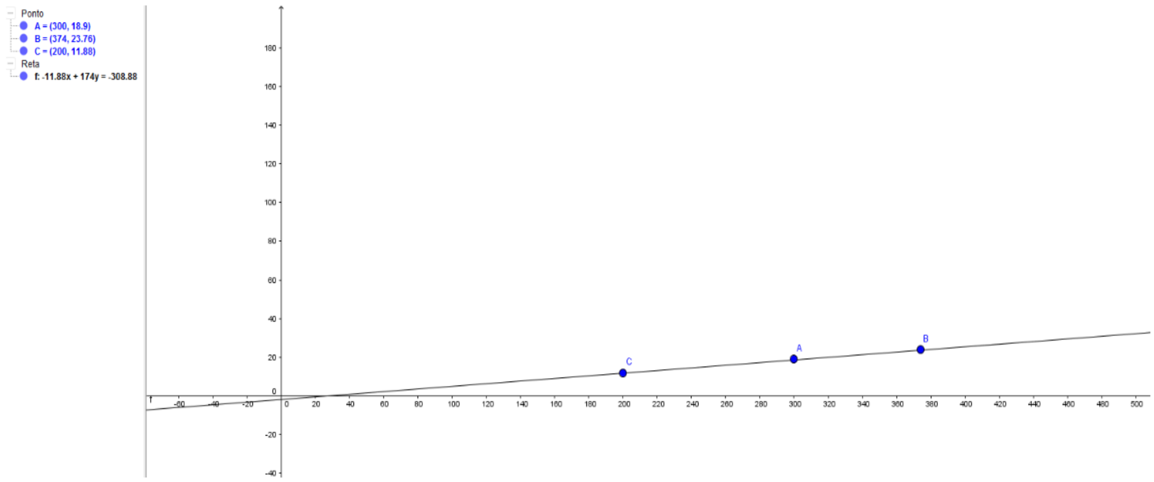
1. 190 K → 7,1 mm
2. 221 K → 8,2 mm
3. 460K → 6 mm

h = 5,3 mm

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

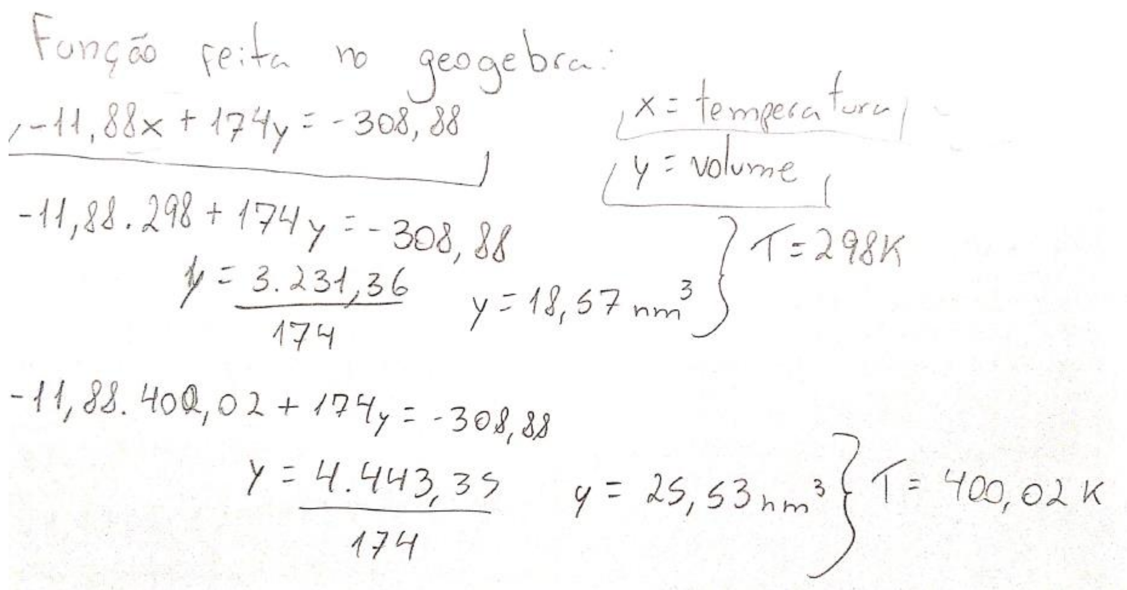
Os estudantes do grupo A formularam a hipótese abdutiva antefactual de “construir um gráfico para modelar matematicamente a transformação”. Os registros a seguir (figuras 39 e 40) evidenciam que os estudantes construíram uma representação no registro gráfico (RRG), a partir de três pares ordenados, e a converteram para o registro algébrico (RRA). É possível conjecturar que os estudantes projetaram a submeta *P* de “modelar a transformação utilizando o RRA” e que formularam a hipótese abdutiva antefactual de “utilizar o RRG para obter o RRA”, apontando para um aperfeiçoamento do plano de ação intencional estabelecido anteriormente. Constatamos ainda que, mesmo não sendo solicitado, os estudantes realizaram tratamentos no registro algébrico para validar o modelo construído.

Figura 39 – Contexto 2, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro gráfico



Fonte: Grupo A, 2019.

Figura 40 – Contexto 2, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro algébrico

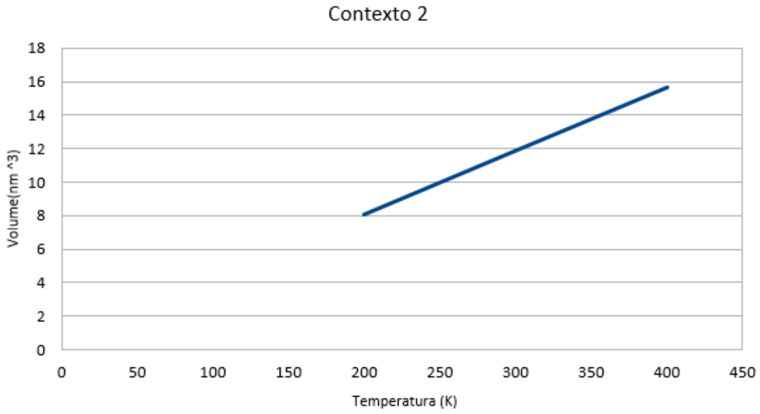


Fonte: Grupo A, 2019.

O grupo B representou matematicamente a transformação do contexto 2 utilizando o registro tabular e a converteu os dados para o registro gráfico, utilizando o *software LibreOffice Calc*. Contudo, o grupo finalizou a atividade utilizando a proporção $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, utilizando, portanto, raciocínio similar ao utilizado no contexto 1.

Quadro 29 – Contexto 2, Etapa 2, Grupo B: Evidências em diferentes registros

temperatura	volume
200	8,1
300	11,88
400	15,66



↳ Pode-se concluir
essa relação por $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

O grupo C novamente abduziu o uso de ‘regra de três’. Observamos que o grupo não levou em consideração o cálculo do volume do recipiente, mas apenas o seu comprimento nos tratamentos realizados.

Figura 41 – Contexto 2, Etapa 2, Grupo C: Evidências em registro algébrico

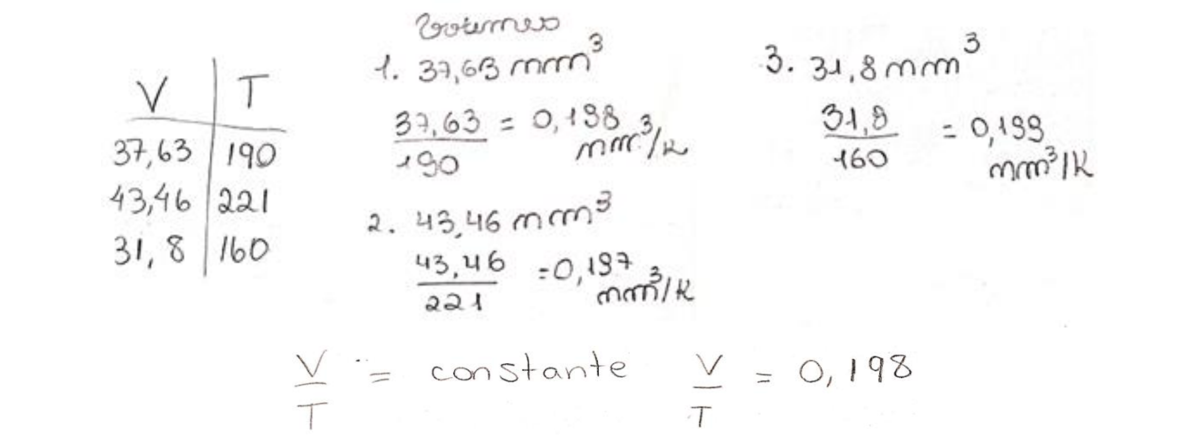
200K — 6,6 nm
xK — y nm

$$y = \frac{6{,}6x}{200}$$

Fonte: Grupo C, 2019.

O grupo D, assim como os grupos B e C, seguiu procedimento similar ao utilizado no contexto 1. Para isso, formulou a hipótese abdutiva antefactual de “utilizar a razão $\frac{V}{T}$ para modelar a transformação”. Observa-se que o grupo calculou o volume do recipiente e organizou os pares ordenados (V, T) em uma representação no registro tabular. Na sequência, mobilizou uma representação no registro numérico fracionário para representar a razão para diferentes pares ordenados (V, T) e converteu essa representação para o registro numérico decimal para obter a constante $\frac{V}{T}$. Feito isso, o grupo questionou ao professor se a atividade estava finalizada. Questionamos se as diferentes razões representadas permitiriam obter o volume para cada temperatura. Considerando essa questão, os estudantes concluíram ser possível modelar a transformar utilizando o modelo $\frac{V}{T} = constante \ \rightarrow \frac{V}{T} = 0{,}198$.

Quadro 30 – Contexto 2, Etapa 2, Grupo D: Evidências em diferentes registros



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A análise da produção dos grupos B, C e D nos permitiu inferir que os estudantes não se preocuparam com a interpretação de resultados e a validação do modelo. Uma hipótese para isso foi a utilização de procedimentos similares aos utilizados no contexto 1, o que fortaleceu as hipóteses construídas. Nos termos da teoria de conciliação de metas, isso sugere que os estudantes assumiram como categóricas as hipóteses construídas no contexto anterior. As evidências da resolução deste contexto nos conduzem a conjecturar que planos de ação intencional (individuais e coletivos) superordenaram as ações e retroações dos estudantes na atividade de modelagem matemática. Em relação a mobilização de registros de representação semiótica, observamos que os estudantes utilizaram atividades cognitivas similares àquelas utilizadas no contexto anterior e, ainda, que não estavam preocupados com o uso de representações semióticas, mas com a obtenção de um modelo matemático adequado.

6.3.2 Contexto 3 – Transformação isotérmica

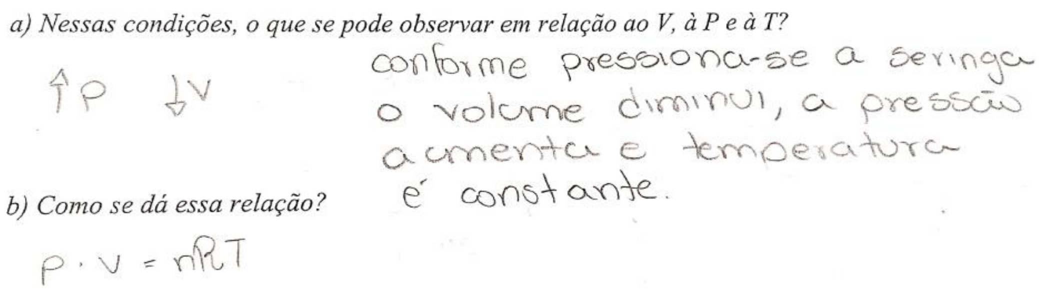
6.3.2.1 Etapa 1

Na etapa 1, do contexto 3, seguimos a mesma estratégia utilizada no contexto anterior: leitura coletiva do texto introdutório do contexto, resolução pelos grupos dos itens a e b e discussão das respostas.

Seguindo um raciocínio análogo aos contextos anteriores, os grupos A, B e D inferiram que a temperatura seria constante, e a pressão e o volume seriam variáveis inversamente proporcionais no contexto três.

O grupo C, respondeu que essa relação se daria pela equação $pV = nRT$ no item b, sendo válida somente quando a dilatação ou contração do balão ocorresse de maneira muito lenta. A figura a seguir apresenta a resposta registrada pelo grupo C.

Figura 42 – Contexto 3, Etapa 1: Resposta do grupo C



a) Nessas condições, o que se pode observar em relação ao V, à P e à T?

↑P ↓V

conforme pressiona-se a seringa o volume diminui, a pressão aumenta e temperatura é constante.

b) Como se dá essa relação?

$p \cdot V = nRT$

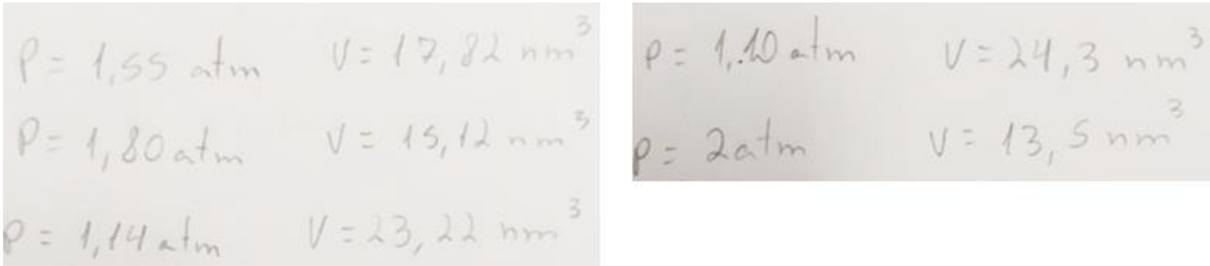
Fonte: Grupo C, 2019.

6.3.2.2 Etapa 2

A seguir analisamos os procedimentos adotados pelos grupos na modelagem matemática da etapa 2 do contexto 3.

No grupo A, os estudantes registraram os dados obtidos no simulador, realizaram os tratamentos no registro numérico para calcular o volume do recipiente visando compreender o comportamento das variáveis envolvidas.

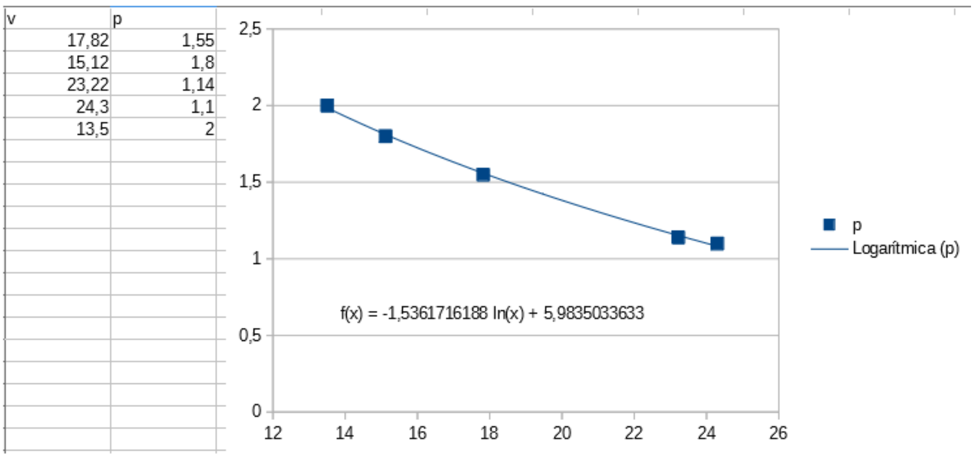
Figura 43 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo A: Dados registrados em registro numérico



Fonte: Grupo A, 2019.

Em seguida, eles seguiram o mesmo procedimento do contexto anterior para obtenção do modelo matemático, ou seja, representar a situação no registro gráfico para posteriormente convertê-la para o registro algébrico. Entretanto, ao observar que os pontos eram decrescentes e não eram expressos por uma reta, os estudantes buscaram primeiramente definir qual a melhor curva que representaria a função. Para isso, eles nos solicitaram ajuda. Nós os orientamos a utilizar o *software LibreOffice Calc* e determinar as equações dos gráficos e o coeficiente de correlação (R^2). Considerando que todos os modelos disponíveis no *LibreOffice Calc* ofereceram um valor aproximado para o coeficiente de correlação, os estudantes decidiram utilizar o modelo logarítmico, que mais se aproximou de 1 (0,9986), conforme figura a seguir. Assim, podemos observar que nesse terceiro contexto o fato de a conversão ser não congruente levou os estudantes a repensar as submetas projetadas

Figura 44 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo A: Evidências em diferentes registros

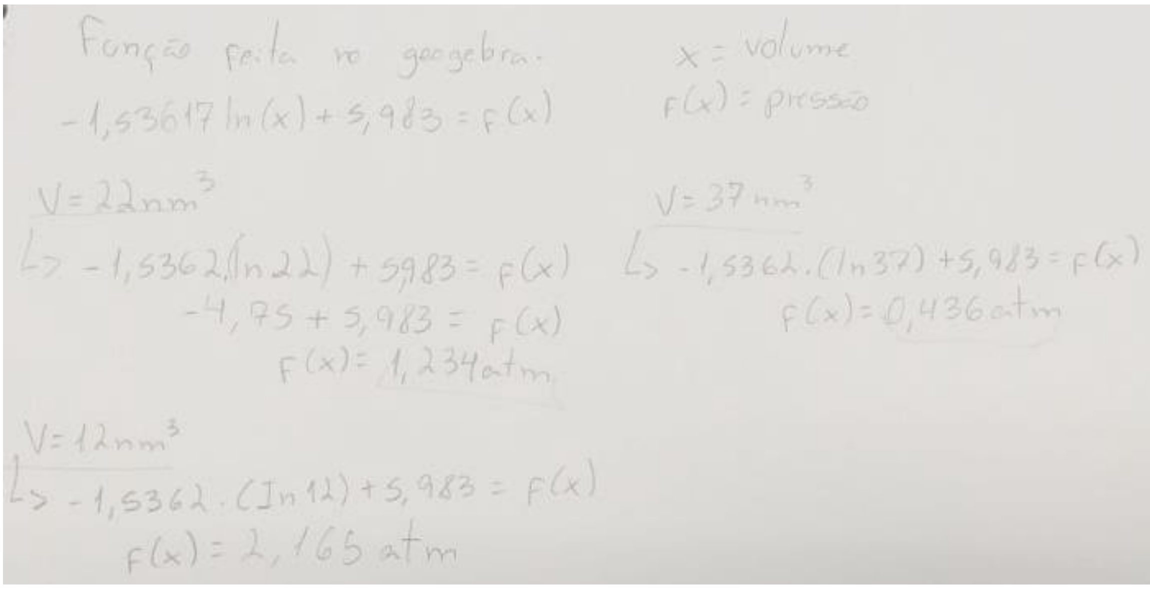


Fonte: Grupo A, 2019.

Como nos outros contextos, o grupo A mobilizou simultaneamente representações em diferentes registros, realizando as conversões necessárias com o auxílio do software.

Para finalizar a resolução do contexto 3 e validar o modelo obtido, os estudantes seguiram o mesmo procedimento dos contextos anteriores.

Figura 45 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo A: Evidências em registro algébrico e numérico



Fonte: Grupo A, 2019.

O grupo B registrou os dados utilizando uma representação no registro numérico, determinando o volume e a pressão correspondente. Para validar os dados, o grupo recorreu a fórmula $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$. Na sequência, o grupo utilizou o registro tabular para obter uma representação no registro gráfico. No entanto, observamos que os estudantes construíram o registro tabular com dados inconsistentes e, consequentemente, construíram uma representação no registro gráfico que não era compatível com uma transformação isotérmica.

A análise do registro gráfico nos permite inferir que os estudantes trataram a transformação como uma função definida por várias sentenças e, ainda, que os estudantes não utilizaram as conclusões da etapa 1 para validar os registros, porque grandezas inversamente proporcionais não são representadas por uma curva crescente. Mais uma vez observamos a influência do fenômeno de não-congruência na resolução da atividade.

O quadro a seguir apresenta as representações construídas pelo grupo.

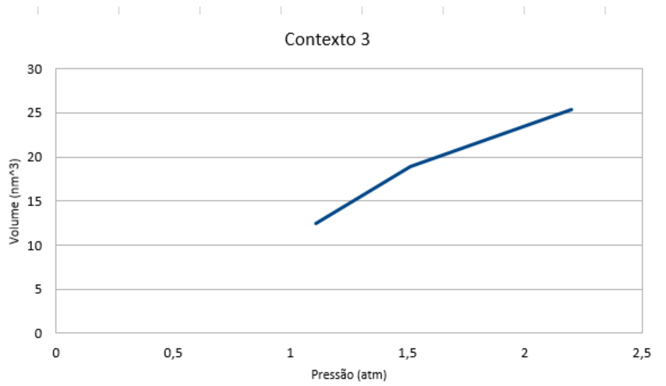
Quadro 31 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo B: Evidências em diferentes registros

a) $P_1 = 1,51\ atm$
$V_1 = 18,9\ nm^3$
$P_2 = 2,20\ atm$
$V_2 = 12,42\ nm^3$
$P_3 = 1,11\ atm$
$V_3 = 25,38\ nm^3$
$h = 2,7\ nm$

$C_1 = 7\ nm$
$C_2 = 4,6\ nm$
$C_3 = 9,4\ nm$

Podemos utilizar a seguinte fórmula para comprovar
$P_1 . V_1 = P_2 . V_2$

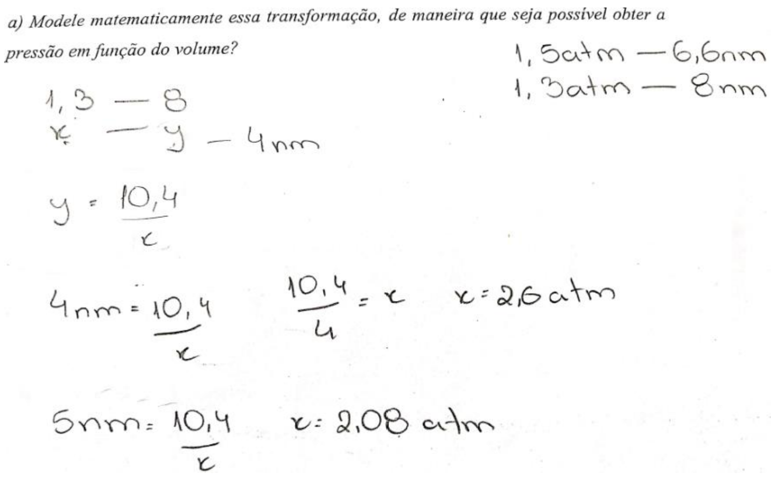
pressao	volume
1,11	12,42
1,51	18,9
2,2	25,38



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

O grupo C seguiu estratégia similar aos contextos anteriores, mobilizando o objeto matemático ‘regra de três inversa’. No entanto, mais uma vez, observamos que o grupo não considerou o cálculo do volume para a construção do modelo.

Figura 46 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo C: Evidências em registro numérico e algébrico


a) Modele matematicamente essa transformação, de maneira que seja possível obter a pressão em função do volume?

1,5atm — 6,6nm
1,3atm — 8nm

1,3 — 8
x — y — 4nm

$y = \frac{10,4}{x}$

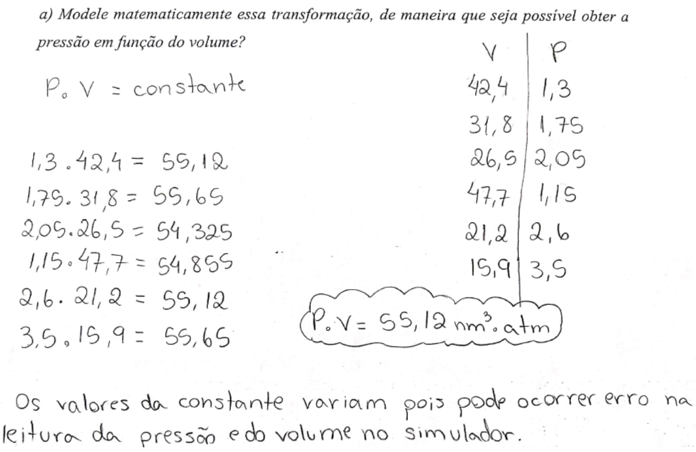
$4nm = \frac{10,4}{x}$ $\quad \frac{10,4}{4} = x$ $\quad x = 2,6\ atm$

$5nm = \frac{10,4}{x}$ $\quad x = 2,08\ atm$

Fonte: Grupo C, 2019.

O grupo D também utilizou o mesmo raciocínio de contextos anteriores. Para tanto, o grupo recorreu a suposição que em transformação isotérmica o produto $P \cdot V$ é constante e, a partir disso, realizou tratamento no registro numérico para calcular esse produto em diferentes pares ordenados (V, P). A análise dos dados nos permite verificar que o grupo organizou esses valores por meio de uma representação tabular e que o modelo matemático obtido foi representado algebricamente. Por fim, para determinar o valor da constante, o grupo calculou a média aritmética dos produtos $P \cdot V$, obtendo o modelo $P \cdot V = 55{,}12$.

Figura 47 – Contexto 3, Etapa 2, Grupo D: Evidências em diferentes registros


a) Modele matematicamente essa transformação, de maneira que seja possível obter a pressão em função do volume?

P. V = constante

1,3 . 42,4 = 55,12
1,75 . 31,8 = 55,65
2,05 . 26,5 = 54,325
1,15 . 47,7 = 54,855
2,6 . 21,2 = 55,12
3,5 . 15,9 = 55,65

V	P
42,4	1,3
31,8	1,75
26,5	2,05
47,7	1,15
21,2	2,6
15,9	3,5

P.V = 55,12 nm³.atm

Os valores da constante variam pois pode ocorrer erro na leitura da pressão e do volume no simulador.

Fonte: Grupo D, 2019.

Finalizada a análise da resolução dos três contextos, concluímos que em cada uma das atividades os estudantes estabeleceram um plano de ação intencional. Eles projetaram “modelar matematicamente a situação proposta” como meta global Q para a atividade. Em seguida, para alcançar essa meta Q, os estudantes estabeleceram planos de ação intencional sucessivamente menores. Esses planos de ação intencional menores podem ser associados às diferentes fases de uma atividade de modelagem matemática e aos níveis de *milieu*, onde ações específicas vão sendo requeridas em cada etapa do processo, a serviço da meta global.

Durante a abdução das hipóteses, observamos a mobilização de suposições da memória enciclopédica/repertório didático dos estudantes e de diferentes registros de representação semiótica. No que diz respeito à mobilização de suposições, constatamos que as suposições construídas nos contextos anteriores foram sendo avaliadas e, quando fortalecidas, usadas em contextos seguintes, como prevê as teorias de conciliação de metas e de relevância. No que diz respeito aos registros, observamos a utilização de regras de formação específicas da matemática e a realização de tratamentos e conversões em cada um dos contextos. No contexto

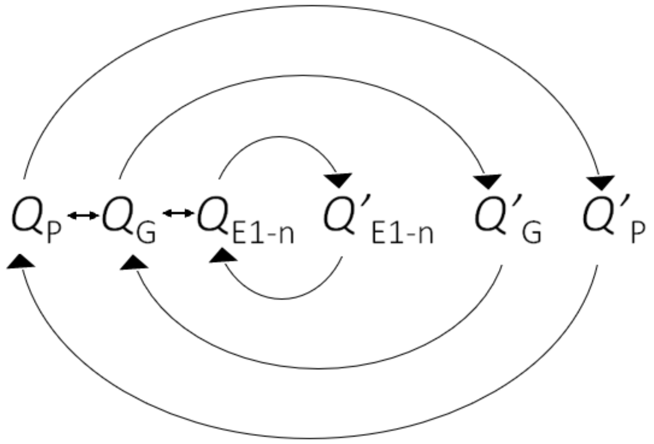
3, que pode ser classificado como não-congruente, observamos uma maior dificuldade dos estudantes na busca do modelo adequado para representar a situação.

Nos dados analisados não há evidências de que os estudantes efetuaram conversões em diferentes sentidos, como propõe a teoria dos registros de representação semiótica; contudo, o equívoco cometido pelo grupo B no contexto 3 reforça a importância dessa prática. Por hipótese, se os estudantes tivessem feito uma análise da representação no registro gráfico, tabular e numérico teriam percebido que um curva crescente não poderia representar uma transformação onde as grandezas são inversamente proporcionais.

Ainda em relação aos planos de ação intencional, um olhar para o processo de resolução dos grupos nos remete a concluir que auto e heteroconciliação de metas foram ocorrendo ao longo da atividade em três níveis: (a) os estudantes projetaram metas $QE_{1\text{-}n}$ e formularam hipóteses abdutivas antefactuais, que foram coletiva e colaborativamente (hetero)(in)conciliadas; (b) planos de ação intencional heteroconciliados passaram a ser assumidos como planos do grupo; (c) nos casos em que que se tornaram necessárias as intervenções do docente, houve acréscimo de uma camada extra de heteroconciliação de metas aquela entre professor e grupo;

O esquema a seguir representa esses diferentes níveis de auto e heteroconciliação.

Figura 48 – Auto e heteroconciliação em atividades de modelagem matemática[203]



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

[203] No esquema, Q_{E1-n}, Q_G, Q_P representam a meta de cada um dos estudantes, do grupo e do professor, respectivamente; Q'_{E1-n}, Q'_G, Q'_P representam a consecução da meta de cada um dos estudantes, do grupo e do professor, respectivamente.

Nesse esquema, as setas superiores representem processos de autoconciliação de metas; as setas inferiores representam processos de validação do plano de ação intencional em casos de inconciliação de metas; e as setas horizontais representam processos de heteroconciliação de metas requeridos ao longo da modelagem matemática.

Observamos, ao longo da execução da sequência didática, que processos de auto e heterovigilância epistêmica e prática moderaram a emergência e a avaliação da força da conexão entre ações antecedentes e estados consequentes de hipóteses abdutivas antefactuais mobilizadas no contexto de planos de ação intencional em direção à consecução ótima de metas. O fato de os estudantes serem gravados e orientados a registrar e a justificar os procedimentos em portifólio tornou essa vigilância epistêmica e prática determinante no contexto de planos de ação intencional em direção à consecução ótima de metas. Além disso, o fato de o professor, durante a etapa 1 de cada um dos contextos, questionar e apresentar evidências em torno das respostas apresentadas pelos estudantes fortaleceu ou enfraqueceu a força das hipóteses construídas por eles, levando-os a avaliar, quando necessário, seus planos de ação intencional.

Os registros apresentados ao longo desta análise reforçam nossa crença sobre a importância das atividades cognitivas de formação de representação identificável, tratamento e conversão no processo de ensino da matemática. Em relação às regras de formação, é preciso que o professor esteja atento às dificuldades dos estudantes, intervindo quando necessário durante a devolução e retomando-as durante a institucionalização. Essa intervenção pontual poderia possibilitar aperfeiçoamentos do modelo matemático e/ou melhor interpretação dos resultados apresentados por esse modelo. Isso ficou evidenciado pelo uso, algumas vezes incorretos, da noção de escala na elaboração de representações no registro gráfico.

No que tange à conversão de registros, constatamos que alguns grupos sentiram necessidade de converter, por exemplo, uma representação dada no registro numérico fracionário para uma representação no registro numérico decimal, buscando comparar as constantes e validar os dados coletados. Isso reforça a importância de se mobilizarem diferentes registros de representação, dado que cada um deles apresenta potencialidades particulares e recorta o objeto sob determinado aspecto.

Analisados e descritos os procedimentos adotados pelos grupos, na próxima seção descrevemos a fase de institucionalização.

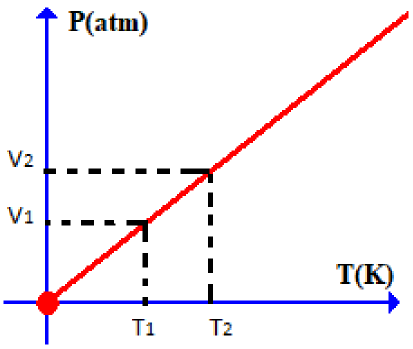
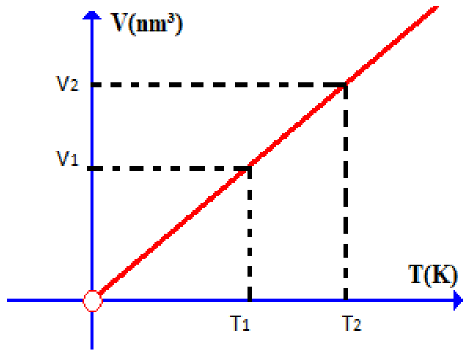
6.4 INSTITUCIONALIZAÇÃO

A institucionalização foi realizada no dia treze de junho de 2019 com duração de duas horas/aula. No primeiro momento, realizamos a socialização dos resultados na seguinte ordem: grupo A, grupo C, grupo D, grupo B e grupo E. Durante a socialização, os grupos não interagiram entre si, ou seja, não houve debate entre os grupos conforme previsto. Em função disso, fomentamos o debate em seguida, lançando questionamentos do tipo: "O modelo construído é válido?"; "Ele é adequado às características do contexto?"; "Ele permite fazer tratamentos matemáticos?". Em geral, os estudantes responderam com "sins", "nãos" e, somente em alguns casos, apresentaram uma justificativa. Segue um excerto do diálogo que ocorreu após o grupo B apresentar o modelo obtido no contexto 1.

> – Professor: Vocês acham que esse raciocínio deles é válido para modelar essa situação? É um bom modelo?
> – Estudante A: Sim.
> – Professor: Sim? Por que que eu posso usar esse modelo?
> – Estudante A: Porque elas são diretamente proporcionais.
> – Professor: Certo, então por elas serem diretamente proporcionais eu posso usar regra de três.
> [...]
> – Professor: E na c? Eles falaram que com aquela relação ali não é possível calcular. O que que vocês acham?
> – Estudante A: Faz sentido.
> – Professor: Sim, faz sentido. Então a conclusão deles estão está correta. Com aquela relação ali não é possível. Mas seria possível calcular, de alguma maneira? O que vocês acham?
> – Estudante B: Se tivesse o número de mols.
> – Estudante C: Daria pela $pV = nRT$.
> – Professor: E como seria?
> – Estudante do grupo B: Teria que usar a pressão e a temperatura que o simulador deu, e usar o n e o R. Daí é só substituir e calcular.

No segundo momento, iniciamos a institucionalização, refletindo inicialmente com os estudantes as características de um modelo matemático e retomando conceitos relacionados aos contextos 1 e 2 (quadro 32, a seguir).

Quadro 32 – Institucionalização contextos 1 e 2

Contexto 1	Contexto 2
$V\ constante \rightarrow \frac{P}{T} = constante$	$p\ constante \rightarrow \frac{V}{T} = constante$
Grandezas diretamente proporcionais	Grandezas diretamente proporcionais
P em função de T	V em função de T
	
$p(T) = aT + b, com\ b = 0$	$V(T) = aT + b, com\ b = 0$
$D = [0, +\infty[$	$D =]0, +\infty[$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Finalizada essa etapa, retomamos os quatro modelos elaborados pelos grupos durante a resolução dos contextos 1 e 2 e realizamos os tratamentos necessários para que fosse possível isolar a variável dependente (quadro 33, a seguir).

Quadro 33 – Modelos matemáticos dos grupos A, B, C e D, contextos 1 e 2

CONTEXTO 1			
Grupo A	**Grupo B**	**Grupo C**	**Grupo D**
$-3,1x + 600y = -10$	$200 - 1$ $x - y$	$\frac{1,52}{300} = \frac{p}{T}$	$\frac{p}{T} = 5 \cdot 10^{-3}$
$-3,1T + 600P = -10$ $600p = 3,1T - 10$ $p = 0,0052T - 0,17$	$200 - 1$ $\underline{T - p}$ $200P = T \rightarrow p = 0,005T$	$300p = 1,52T$ $p = 0,0051T$	$P = 0,005T$
CONTEXTO 2			
Grupo A	**Grupo B**	**Grupo C**	**Grupo D**
$-11,88x + 174y = -308,88$	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$	$y = \frac{6,6x}{200}$	$\frac{V}{T} = 0,198$
-11,88T+174V=-308,88 $V = 0,068T - 1,775$	$\frac{V}{T} = \frac{11,88}{300}$ $V = 0,0396T$	$V = 0,033$T	$V = 0,198T$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Finalizada essa etapa, os estudantes perceberam que todos os modelos obtidos no contexto 1 se aproximavam quando isolada a variável dependente. No entanto, um dos estudantes da turma questionou por que do coeficiente b, no modelo A, era diferente de zero. Nesse ponto voltamos a refletir sobre as características de um modelo, argumentando que eles constituem uma aproximação da realidade e que, nesse caso, por conta das oscilações do simulador, era comum que o melhor modelo não apresentasse o mesmo comportamento do modelo teórico. Na análise dos modelos obtidos no contexto 2, pudemos observar uma variação entre os coeficientes. Argumentamos sobre a importância da etapa de interpretação e de validação do modelo, ressaltando que o fato de o simulador não fornecer um volume exato poderia ter influenciado o resultado.

No segundo momento, discutimos as especificidades do contexto 3 (quadro 34, a seguir) e trabalhamos o saber ‘função racional particular do tipo $y = C\frac{1}{x^n}$’, conforme apresentado na análise preliminar.

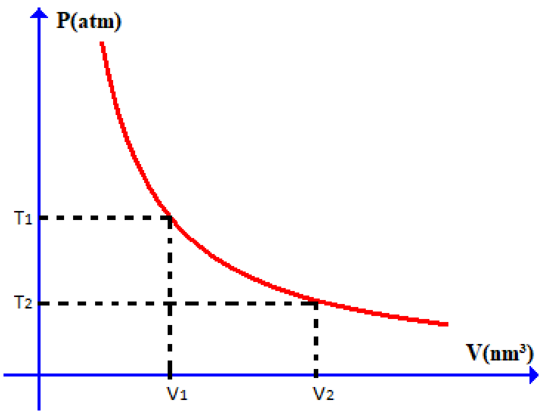
Quadro 34 – Institucionalização contexto 3

Contexto 3

$T\ constante\ \rightarrow\ p \cdot V = constante$

Grandezas inversamente proporcionais

P em função de V



$$p(V) = C \cdot \frac{1}{V}, com\ V > 0$$

$$D =]0, +\infty[$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Dando andamento, retomamos os quatro modelos obtidos pelos grupos durante a resolução do contexto 3 e realizamos os tratamentos necessários para que fosse possível isolar a variável dependente (quadro 35, a seguir).

Quadro 35 – Modelos matemáticos dos grupos A, B, C e D, contexto 3

CONTEXTO 1			
Grupo A	**Grupo B**	**Grupo C**	**Grupo D**
$-1{,}53617\ln(x) + 5{,}983 = f(x)$	$p \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$	$y = \frac{10{,}4}{x}$	$p \cdot V = 55{,}12$
$-1{,}53617\ln(V) + 5{,}983 = p$	$pV = 1{,}51 \cdot 18{,}9$ $p = 28{,}539 \cdot \frac{1}{V}$	$p = 10{,}4 \cdot \frac{1}{V}$ $p = 28{,}08 \cdot \frac{1}{V}$ (modelo 2: considerando a altura do recipiente)	$p = 55{,}12 \cdot \frac{1}{V}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na análise dos modelos obtidos no contexto 3, pudemos também observar uma variação entre os coeficientes no caso dos modelos B, C e D. Voltamos a argumentar com os estudantes sobre a importância da etapa de interpretação e de validação do modelo. Em relação ao modelo C, destacamos que a altura do recipiente não havia sido considerada em sua elaboração. No que diz respeito ao modelo obtido pelo grupo D, uma possível hipótese foi a utilização de uma modificação na altura padrão do recipiente.

No decorrer da institucionalização, ficou evidente a importância de se mobilizarem diferentes registros de representação no processo de ensino da matemática e a influência do fenômeno de congruência na atividade cognitiva de conversão. Isso é corroborado pela dificuldade de os estudantes visualizarem as especificidades de cada um dos modelos obtidos.

Finalizada a descrição e análise das atividades desenvolvidas, realizamos na próxima seção uma análise global da sequência didática *Transformações Gasosas*.

6.5 ANÁLISE GLOBAL DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Para avaliar e validar a sequência didática, buscamos identificar nessa sessão as ações dos estudantes ao longo da atividade em termos de níveis de *milieu* e fases de uma atividade de modelagem matemática.

Para o planejamento da sequência didática, propomos a organização de contextos iniciais, habilitando os estudantes o reconhecimento do tipo de transformação gasosa e da relação entre as variáveis envolvidas. Para tanto, a primeira etapa de cada um dos contextos continha uma contextualização seguida de questões norteadoras para discussão.

As evidências apresentadas ao longo das seções anteriores permitiram inferir que os estudantes E_{-3}, ao tentar compreender o contexto, agiram sobre o *milieu* material (M_{-3}) e, após entrar em contato com as informações e orientações fornecidas, deram início a resolução da atividade, caracterizando a ação de E_{-2} no *milieu* heurístico (M_{-2}). Já o professor P_{-2} fomentou as discussões. No contexto 1, por exemplo, a partir das questões que o professor levantou, os estudantes concluíram tratar de grandezas diretamente proporcionais. Em geral, percebemos que a etapa 1 favoreceu a interação com a situação, possibilitando a identificação do problema e uma representação mental inicial da situação, caracterizando a fase de interação e a ação cognitiva de compreensão da situação.

Nessa etapa, observamos um raciocínio abdutivo-dedutivo construído a partir dos diálogos, o que permitiu concluir o tipo de transformação gasosa associada a cada contexto. O grupo D no contexto 2, por exemplo, construiu diferentes hipóteses relacionadas ao comportamento da pressão, da temperatura e do volume, permitindo classificá-los como constantes ou variáveis e a relação estabelecida entre elas. Tal conclusão se deu a partir do repertório didático da classe e, consequentemente, propiciou um enriquecimento do nível heurístico (M_{-2}). Foi justamente essa etapa inicial que possibilitou aos estudantes aprofundar a fase de interação, dar início as fases de matematização e de resolução e aprofundar sua ação sobre o *milieu* heurístico (M_{-2}) ao concluírem a relação entre as grandezas em cada um dos contextos.

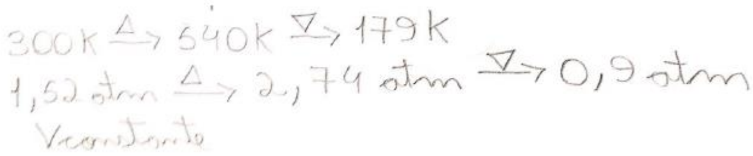
Nos contextos 2 e 3, para compreender o comportamento das grandezas envolvidas, observamos um raciocínio abdutivo-dedutivo. Tal conclusão se deu a partir do repertório didático, que, nesse momento, incluía os procedimentos adotados no contexto 1, reforçando a necessidade de familiarização dos estudantes com uma atividade de modelagem matemática. No diálogo estabelecido pelo grupo D, por exemplo, um dos estudantes usou o enunciado "é parecido com o outro, não é?", reforçando nossa asserção.

Observamos que a situação inicial proposta provocou nos estudantes ações e retroações, possibilitando um ajuste da ação deles sobre o *milieu*, como propõe Margolinas (2002). Desta maneira, o *milieu* material M_{-3} favoreceu aos estudantes o estabelecimento de hipóteses e conjecturas acerca do contexto proposto.

A utilização de recursos tecnológicos – simulador e *softwares* – possibilitou aos estudantes o engajamento nas fases de matematização e resolução. Para tanto, a segunda etapa de cada um dos contextos orientava os estudantes sobre os procedimentos a serem adotados durante o uso do simulador, o que possibilitou o registro dos dados necessários para a consecução da atividade. Essa fase inicial, onde os estudantes registraram os dados obtidos, caracterizou a fase de interação, e as ações cognitivas de compreensão da situação e de estruturação da situação e da ação de E_{-2} no *milieu* heurístico (M_{-2}), já iniciadas na etapa anterior de cada um dos contextos, quando os estudantes identificaram o tipo de transformação gasosa envolvida e a relação entre as variáveis. Verificamos que durante a manipulação do simulador os estudantes foram construindo intuições sobre o comportamento das variáveis e confirmando as conclusões da etapa anterior. Na etapa 2, do contexto 1, o registro dos dados realizados pelo grupo B, por exemplo, sugere que os estudantes buscaram validar no simulador as conclusões obtidas na etapa 1 - os “triângulos” presentes na figura 49, mais adiante, corroboram com essa asserção.

No entanto, destacamos que o *software LibreOffice Calc* foi substituído por alguns grupos pelo *software* Geogebra. Essa mudança sinaliza a importância de o professor considerar em sua análise preliminar os conhecimentos dos estudantes sobre os recursos tecnológicos.

Figura 49 – Dados registrados pelo grupo B na etapa 2 do contexto 1


$300K \xrightarrow{\Delta} 540K \xrightarrow{\nabla} 179K$
$1{,}52\ atm \xrightarrow{\Delta} 2{,}74\ atm \xrightarrow{\nabla} 0{,}9\ atm$
V constante

Fonte: Grupo B, 2019.

O planejamento da atividade previa a retomada de conceitos relativos ao estudo das funções, habilitando os estudantes a atuar nas diferentes fases de uma atividade de modelagem matemática, desde a interação até a validação. Para tanto, em cada um dos contextos, solicitamos que os estudantes modelassem matematicamente a situação proposta. As evidências sugerem a mobilização de diferentes objetos matemáticos, como função e proporção. Tratando-se de uma atividade de modelagem matemática, isso é considerado normal e desejável, já que os estudantes, em tese, não possuem esquemas de resolução a *priori*. Em linhas gerais, o procedimento adotado pelos estudantes para organização e validação dos dados, a partir dos comandos de cada um dos contextos, caracterizou aprofundamento das ações cognitivas de compreensão e de representação mental da situação, a continuidade das fases de matematização e de resolução, e a continuidade da ação cognitiva de matematização.

No nível de *milieu* heurístico (M_{-2}), pudemos observar intuições sobre os dados coletados, com a utilização do repertório didático dos estudantes, o que possibilitou a mobilização de diferentes registros de representação e, consequente, o enriquecimento do nível heurístico (M_{-2}), com a realização de cálculos e conjecturas sobre os dados coletados. Com isso, permitimos a tomada de decisão sobre as estratégias adotadas na continuidade das fases de matematização e de resolução. Podemos citar o caso do grupo A, que no contexto 1 utilizou diferentes registros de representação para validar os dados coletados e definir o plano de ação intencional que permitiria modelar a transformação.

Constatamos que durante as fases de matematização e de resolução e no *milieu* heurístico (M_{-2}), alguns grupos aumentaram a quantidade de pares ordenados para uma melhor aproximação dos dados e redução dos erros decorrentes das oscilações do simulador. Esse fato pode ser percebido na etapa 2 do contexto 1 quando os estudantes do grupo A utilizam o par ordenado $(0, 0)$ para uma melhor aproximação dos dados. Nesse ponto, observamos a decisão dos grupos em utilizar determinados objetos matemáticos para representar a relação entre as grandezas de cada um dos contextos, apontando para a ação dos estudantes no *milieu* de referência (M_{-1}).

O enunciado *b* da etapa 2 do contexto 1 (*usando o modelo obtido, calcule a pressão para diferentes temperaturas e, em seguida, valide seu resultado com o simulador*) pretendia conduzir os estudantes às fases de interpretação de resultados e de validação e às ações cognitivas de síntese e de interpretação e validação, caracterizando a ação dos estudantes no *milieu* de referência (M_{-1}). As evidências sugerem que essa ação garantiu que os estudantes pudessem interpretar e validar o modelo obtido. O grupo A, para dar conta dessa demanda, atribuiu valores aleatórios para a temperatura, realizaram os tratamentos necessários para obter a pressão correspondente e, por fim, validaram esses valores no simulador. No entanto, observamos que não houve uma preocupação em delimitar as condições de validade do modelo, como foi discutido na fase de institucionalização.

Nos contextos 2 e 3, observamos a utilização de estratégias similares àquelas utilizadas no contexto 1. Assim, constatamos que tais estratégias passaram a compor o repertório didático, permitindo ações e retroações sobre os diferentes níveis de *milieu* e fases de uma atividade de modelagem matemática. Constatamos ainda que, nos contextos 2 e 3, com exceção de um grupo, não houve preocupação com a fase de interpretação de resultados e validação. Argumentamos que isso se deu justamente porque os estudantes consideraram como categóricas as hipóteses que já haviam sido avaliadas e validadas anteriormente.

Consideramos também essencial a realização das atividades em grupos possibilitando o desenvolvimento de habilidades relativas à argumentação. Conforme expusemos, a organização da atividade em grupos possibilitou o estabelecimento de planos de ação intencional individuais e coletivos, o que favoreceu a argumentação em relação às estratégias e aos conhecimentos mobilizados. A análise dos dados evidencia que os estudantes, ao longo dos diferentes níveis de *milieu* e das fases da modelagem matemática, debateram e refletiram colaborativamente hipóteses, tratamentos e conversões que seriam necessários, formulando modelos e avaliando-os.

Por fim, a sequência didática elaborada buscava estimular o estabelecimento de hipóteses pelos estudantes, favorecendo aos estudantes a construção de argumentos que permitam a interpretação e validação do modelo construído. Constatamos que o *milieu* organizado, com o auxílio do simulador favoreceu que os estudantes refletissem sobre as variáveis envolvidas, bem como sobre os conceitos matemáticos e de físico-química envolvidas. No entanto, ressaltamos que não houve uma grande preocupação dos grupos em refletir as limitações dos modelos construídos.

Ao longo da descrição e da análise, evidenciamos a utilização de diferentes estratégias no processo de modelagem matemática, sendo estas definidas a partir das discussões dos grupos ou, em alguns casos, com orientação do professor. O grupo B, por exemplo, incialmente optou por modelar a transformação utilizando a proporção $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$, porém, após análise e discussão da atividade, perceberam a necessidade de fixar valores na razão $\frac{P_1}{T_1}$.

De um modo geral, os objetivos da sequência didática foram alcançados. O *milieu* material favoreceu ações e retroações dos estudantes e possibilitou ao docente retomar os conceitos relativos às funções e institucionalizar o saber matemático função racional do tipo $f(x) = C \cdot \frac{1}{x^n}, com\ x \neq 0$.

Retomando o quadro 9, apresentado na seção 4.6, buscamos refletir o movimento dos estudantes ao longo de uma situação a-didática (ou de dimensão a-didática) e fases da modelagem matemática. No quadro 36 a seguir, o fato de termos associado cada fase da modelagem a um nível de *milieu* não caracteriza que elas estejam assim limitadas, já que consideramos que durante o processo o estudante pode retomar fases anteriores para reavaliar as hipóteses estabelecidas e aperfeiçoar o modelo construído. Além disso, argumentamos que o movimento dos estudantes pode ser modelado por planos de ação intencional, incluindo uma meta global e submetas a serviço da consecução ótima dessa meta global. Nesse processo, auto e heteroconciliações vão ocorrendo conforme esquema apresentado anteriormente nesse estudo (figura 38). Concordando com Bloch (2019), ponderamos que o professor atua como mediador nessas diferentes situações/dialéticas e fases da modelagem matemática, prevendo instruções necessárias, observando e intervindo quando pertinente, e validando a ação dos estudantes.

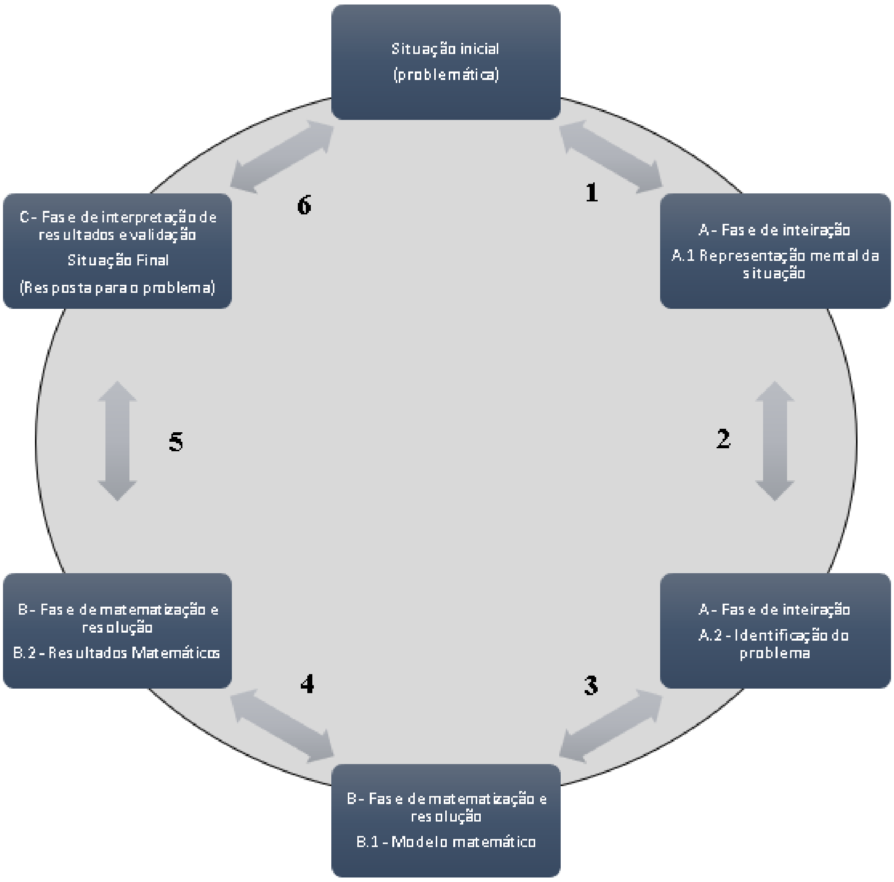
Quadro 36 – Relação entre teoria das situações didáticas e modelagem matemática

Situação/dialética	Fases da modelagem	Movimento do estudante
Validação	Interpretação de resultados e validação	Evidências acerca dos testes realizados sobre as conjecturas e hipóteses construídas. O estudante E_{-1} procura interpretar e validar o modelo obtido.
Formulação	Matematização e resolução	Conjecturas do estudante E_{-2}, levantamento de hipóteses. O estudante busca matematizar e sintetizar a situação, apresentando resultados matemáticos. Para tanto, E_{-2} busca mobilizar conhecimentos de seu repertório didático, escolhendo conceitos matemáticos e registros de representação semiótica.
Ação	Inteiração	Ações de caráter operacional realizada pelo estudante. O estudante E_{-3} dá início a fase de inteiração, buscando compreender e estruturar a situação. Portanto, E_{-3} entra em contato com a situação inicial proposta, e constrói as primeiras hipóteses e conjecturas.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Considerando o quadro 36, acima, e os achados apresentados ao longo desse estudo, revisitamos o esquema de modelagem matemática proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2016) e propomos o esquema representado pela figura 50 a seguir. Esse esquema busca considerar o movimento não linear das cinco fases (inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação) de uma situação didática envolvendo modelagem matemática. Para tanto, reorganizamos o modelo apresentado pelos autores de forma circular, utilizando setas biunívocas para representar a transição entre os diferentes momentos. Optamos por utilizar tais setas por julgarmos que elas podem melhor representar a possibilidade de o estudante retomar etapas anteriores, quando necessário.

Figura 50 – Esquema de modelagem matemática



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

No esquema, os índices A-C relacionam-se às diferentes fases da modelagem matemática. Os índices A.1, A.2, B.1, B.2 e C associam-se a diferentes momentos da atividade. Por fim, as setas de 1 a 6 indicam as ações cognitivas do estudante ao longo das fases da atividade: *compreensão da situação*, *estruturação da situação*, *matematização*, *síntese*, *interpretação e validação* e *comunicação e argumentação*.

Finalizada a análise dos achados desse estudo, passemos às considerações finais.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisamos nesta tese a concepção, a execução e os resultados de uma sequência didática concebida como um plano de ação intencional em direção a conciliação colaborativa da meta de modelar matematicamente transformações gasosas Para dar conta desse objetivo geral, concebemos três objetivos específicos: (a) elaborar, com base na arquitetura abdutiva-dedutivo da teoria de conciliação de metas, sequências didáticas para a modelagem matemática de transformações gasosas aplicáveis a estudantes do curso técnico de nível médio integrado em química do IFSC – campus Criciúma (dimensão metodológica); (b) analisar, com base na arquitetura abdutiva-dedutivo da teoria de conciliação de metas, processos ostensivo-inferenciais desses estudantes na mobilização de registros de representação semiótica em sequências didáticas envolvendo modelagem matemática de transformações gasosas (dimensão epistemológica); e (c) verificar a pertinência epistemológica e metodológica da arquitetura abdutiva-dedutivo da teoria de conciliação de metas para a descrição e a explicação de processos ostensivo-inferenciais na mobilização de registros de representação semiótica em sequências didáticas envolvendo modelagem matemática de transformações gasosas.

Mais formalmente, lançamos três hipóteses: (1) do ponto de vista dos estudantes, considerou que as atividades cognitivas de mobilização de unidades significativas que representam matematicamente as transformações gasosas isotérmicas, isobáricas e isovolumétricas das situações-problema em diferentes registros, os tratamentos dessas representações no domínio de cada registro e as eventuais conversões dessas representações em representações de outros registros serão moderadas por relações relevantes de custo e benefício cognitivo em direção à conciliação colaborativa de submetas em favor da meta coletiva (grupos de estudantes entre si e grupos de estudantes e docente) de modelar matematicamente essas transformações gasosas; (2) do ponto de vista do docente, por sua vez, asseverou que as consecuções dos grupos de estudantes estarão a serviço da consecução de uma sequência didática concebida como um plano de ação intencional em direção a conciliação colaborativa (grupos de estudantes e docente) de habilitar os estudantes a modelar as transformações gasosas isotérmicas, isobáricas e isovolumétricas nas situações-problema em pauta; e (3), do ponto de vista do pesquisador, por fim, sustentou que ambas as consecuções, aquela dos grupos de estudantes e aquela do docente, estarão a serviço da consecução do plano de ação intencional de avaliar a pertinência epistemológica e metodológica da arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas para descrever e explicar tanto a modelagem matemática das transformações gasosas como a implementação da sequência didática.

Para alcançarmos esse objetivo no contexto das hipóteses apresentadas, propusemos o esquema $\{\mathrm{CM(R)}\{\mathrm{SD[MM(RRS)]}\}\}$, que viabilizou o plano de ação intencional desse estudo. Conforme esse esquema, mobilizamos a teoria de registros de representação semiótica, de Raymond Duval (1993, 1995, 2008, 2009); assumimos a modelagem matemática, na perspectiva de Almeida, Silva e Vertuan (2016), como alternativa pedagógica e a associamos à teoria das situações didáticas, de Guy Brousseau (1997, 2008). Defendemos que a arquitetura abdutiva-dedutivo da teoria de conciliação de metas permite (a) planejar, executar e validar sequências didáticas envolvendo modelagem matemática, dimensão metodológica, e (b) descrever e explicar como os estudantes selecionam e articulam os diferentes inputs na elaboração de um modelo matemático, ou seja, na busca de uma meta, dimensão epistemológica.

Para subsidiar o presente estudo, foram convidados a participar da pesquisa estudantes do segundo ano do Curso técnico de nível médio integrado em química, do Instituto Federal de Santa Catarina – campus Criciúma.

Com esse propósito em mente, organizamos essa tese em seis capítulos, dedicados, respectivamente, à teoria dos registros de representação semiótica, à modelagem matemática na perspectiva da educação matemática, à teoria das situações didáticas, à teoria da relevância e à teoria de conciliação de metas, à análise dos dados e às considerações finais desta pesquisa.

No capítulo dois, discorremos sobre os fundamentos da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval (1993, 1995, 2008, 2009). Com o autor, assumimos que três atividades cognitivas são fundamentais para o ensino e aprendizagem em matemática, formação de uma representação identificável, tratamento e conversão, e que a conceitualização dos objetos matemáticos requer a coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica, a despeito de fenômenos de não-congruência tornarem essas coordenações opacas.

Para possibilitar que os estudantes estabelecessem relações entre as dimensões sintáticas, semânticas e pragmáticas dos objetos matemáticos, julgamos pertinente levar em conta a mobilização de diferentes registros de representações semiótica em atividade de modelagem matemática. Desta maneira, apresentamos no capítulo três definições de modelo e modelagem matemática e perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. Considerando o objetivo desse estudo, assumimos a perspectiva de Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 17), que percebem a modelagem matemática como uma alternativa pedagógica relevante para abordar matematicamente uma situação-problema.

Dadas as particularidades requeridas na organização de uma atividade envolvendo modelagem matemática e a mobilização de registros de representação semiótica, recorremos no capítulo quatro à teoria das situações didáticas de Guy Brousseau (1997, 2008), assumindo que ela permite organizar sequência didáticas envolvendo modelagem matemática, favorecendo a aprendizagem do estudante e a conceitualização dos objetos matemáticos. A teoria das situações didáticas possibilitou-nos modelizar e refletir as interações estabelecidas entre o aprendiz, o saber e o meio no qual a aprendizagem de conceitos matemáticos deve se desenrolar. Assim, uma situação didática foi caracterizada como o conjunto de relações estabelecidas entre estudantes e professores a partir de um *milieu* que permite ao estudante a aquisição de determinado saber. Argumentamos que parte essencial de situações didáticas são as situações a-didáticas (ou de dimensão a-didática) definidas como situações de aprendizagem que funcionam sem a intervenção do professor no nível do conhecimento (BROUSSEAU, 1997).

Para a organização de uma sequência didática envolvendo modelagem matemática, recorremos à engenharia didática de Artigue (1988), caracterizada como um esquema baseado em experimentações didáticas em classe envolvendo análise preliminar, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Na fase de análise preliminar, consideramos três dimensões: a dimensão epistemológica, a dimensão cognitiva e a dimensão didática. A fase de concepção e análise *a priori* teve como objetivo definir as variáveis de comando sobre as quais agimos. A fase de experimentação foi aquela onde pusemos em funcionamento a situação didática. Por fim, a fase de análise *a posteriori* e validação foi destinada à confrontação das evidências e dos elementos da análise *a priori*, permitindo a validação das hipóteses estabelecidas.

Dado que em uma atividade de modelagem matemática, além de organizar uma sequência didática, consideramos fundamental no capítulo cinco refletir sobre os processos ostensivo-inferenciais (pragmáticos-cognitivos) envolvidos, utilizando a teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995) e a teoria de conciliação de metas de Rauen (2014).

A teoria da relevância lida com processos pragmático-cognitivos de processamento da linguagem, admitindo que a compreensão otimamente relevante de enunciados consiste numa inequação na qual efeitos cognitivos positivos a serem maximizados superam os esforços de processamento necessários para obtê-los.

Rauen (2014), por sua vez, faz avançar esse modelo teórico desenvolvendo a teoria de conciliação de metas, que se propõe a descrever e explicar planos de ação intencional em quatro estágios: projeção de uma meta [1], e formulação [2], execução [3] e checagem [4] de pelo menos uma hipótese abdutiva antefactual. Caso o resultado obtido em [4] corresponda a meta projetada em [1], ocorre o que Rauen denomina de conciliação de metas e de fortalecimento da hipótese abdutiva antefactual.

Por fim, no capítulo seis, procedemos à análise das evidências. Para dar conta dessa demanda, realizamos inicialmente a análise preliminar, culminando com a organização da sequência didática *Transformações Gasosas*. Na sequência realizamos a análise *a priori*. Por fim, realizamos a experimentação e a análise *a posteriori* e validação.

A sequência didática foi organizada em três contextos, cada qual dividido em duas etapas. A etapa 1 consistiu em um contexto inicial procurando favorecer aos estudantes a identificação da transformação gasosa envolvida e a relação entre as variáveis, ou seja, a fase de inteiração. A etapa 2 apresentou um roteiro experimental seguido de questões norteadoras, para fornecer subsídios para a ação dos estudantes nas diferentes fases da modelagem matemática e níveis de *milieu*.

Os resultados apontam para a importância da mobilização de diferentes registros de representação semiótica no processo de ensino e de aprendizagem dos objetos matemáticos. Do ponto de vista do docente, a utilização desta teoria viabilizou a análise *a priori*, a devolução e a institucionalização; do ponto de vista dos estudantes, a utilização de diferentes registros favoreceu ações e retroações ao longo do processo de modelagem matemática.

A adoção da modelagem matemática viabilizou ponderar diferentes fases da atividade, desde a interação, passando pela matematização e pela resolução, até a interpretação de resultados e validação do modelo. No que tange à organização da sequência didática envolvendo modelagem matemática, constatamos que a teoria das situações didáticas favoreceu uma reflexão em torno da devolução e da institucionalização. Dito de outro modo, permitiu ao pesquisador confrontar os dados. Observa-se que as análises preliminar e *a priori* propostas pela engenharia didática foram fundamentais às atividades de modelagem matemática. Tais análises conduzem a um refinamento da ação docente em sala de aula, prevendo possíveis modelos, critérios de validação e equívocos que podem surgir ao longo do processo e, ainda, fornecendo subsídios para que o professor possa mediar a ação dos estudantes e refletir sobre o nível de adequação do modelo matemático.

Reconhecemos que a sequência didática poderia ser modelada em termos de modelagem matemática ou de situações didáticas isoladamente. Contudo, defendemos que a interface incrementou a qualidade da estruturação da atividade, assumindo a modelagem matemática como uma situação a-didática (ou de dimensão a-didática).

Referente à teoria de conciliação de metas, constatamos que ela proporcionou um enriquecimento do planejamento do professor, aqui definido como um plano de ação intencional em direção a consecução de uma meta Q de ensinar determinado saber. Considerando que neste plano torna-se fundamental, além da definição de uma meta, o estabelecimento de submetas e ações antecedentes requeridas, o aparato teórico metodológico desta teoria viabilizou um planejamento mais minucioso e, consequentemente, qualificou o processo de ensino e de aprendizagem. A partir das evidências observadas, o estabelecimento de um plano de ação intencional permitiu refletir sobre as ações antecedentes necessárias para a conciliação de metas e submetas previstas na elaboração de sequências didáticas envolvendo modelagem matemática. Essa contribuição ficou evidente nos planos de ação intencional do professor e do pesquisador apresentados na seção 5.4, que permitiram o planejamento e a organização da sequência didática *Transformações Gasosas* envolvendo modelagem matemática e mobilizando registros de representação semióticas.

A experimentação foi realizada em dois encontros. O primeiro encontro foi dedicado a atividade de modelagem matemática, com o uso do simulador *Propriedades dos Gases*. O segundo encontro foi destinado a socialização dos resultados pelos estudantes e à institucionalização do saber matemática função racional do tipo $f(x) = \frac{1}{x}, com\ x \neq 0$. Participaram do estudo de caso vinte e quatro estudantes matriculados no segundo ano do curso de química da referida instituição.

As evidências deste estudo corroboram nossa tese de que a arquitetura abdutiva-dedutivo proposta pela teoria de conciliação de metas permite não apenas planejar sequências didáticas envolvendo modelagem matemática, mas também descrever e explicar como os estudantes selecionam e articulam os diferentes inputs na elaboração de um modelo matemático, ou seja, na consecução de uma meta.

Os dados coletados sugerem que os estudantes estabeleceram um plano de ação intencional para cada um dos contextos organizados, projetando uma meta Q para a atividade e, a partir de hipóteses abdutivas antefactuais, projetando subplanos cada vez mais específicos a serviço do plano de ação intencional global, que foram sendo sucessivamente executados e checados. Esses planos de ação intencional menores permearam a ação dos estudantes nas diferentes fases da atividade.

Percebemos que os estudantes mobilizaram suposições da memória enciclopédica (repertório didático) e, nesse processo, diferentes registros de representação semiótica, acessando-os em ordem de acessibilidade, parando quando a expectativa de relevância era alcançada. As evidências sugerem que as hipóteses construídas no decorrer das atividades passaram a compor a memória enciclopédica (repertório didático) dos estudantes e foram mobilizadas de forma categórica nas atividades posteriores, como preveem as teorias da relevância e de conciliação de metas.

Sobre a mobilização de registros de representação semiótica, observamos a utilização de regras de formação específicas, e a realização de tratamentos e conversões em cada um dos contextos organizados. No entanto, não constatamos que os estudantes diferenciaram objetos matemáticos de sua representação. Em dado momento, por exemplo, estudantes do grupo A projetaram a meta “construir uma função”. Entretanto, para eles, construir uma função significava exclusivamente representá-la algebricamente. No que tange às regras de formação do registro gráfico, constatamos uma dificuldade com o uso de escalas, tanto no registro gráfico construído manualmente, como naquele construído com o auxílio do *software*. Desta maneira, cabe ao professor prever, durante a devolução, orientar os estudantes sobre as possibilidades de ajuste da escala empregada e, também, refletir sobre a sua correta utilização na institucionalização.

De um modo geral, não observamos a coordenação entre os diferentes registros, mas a importância dessa coordenação fica evidente se considerarmos a produção do grupo B no contexto 3, que utilizou uma função de várias sentenças para representar uma proporção com grandezas inversamente proporcionais. Esse equívoco de conversão possibilita ao professor perceber que os estudantes não possuem determinado conceito e, desta maneira, refletir sobre ele no decorrer da institucionalização.

Outro fator relevante, observado principalmente no contexto 3, foi a influência do fenômeno de congruência em atividades que envolvem modelagem matemática. Dado o aumento do custo de processamento envolvido em contextos que mobilizam conversões não congruentes, cabe ao docente refinar ainda mais a análise *a priori*, buscando prever o maior número possível de hipóteses e caminhos de resolução que poderão ser adotados pelos estudantes na resolução/modelação da atividade.

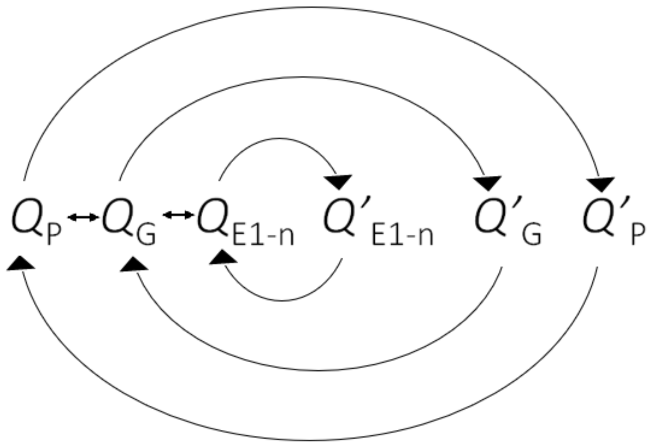
Durante a resolução das etapas um e dois de cada um dos contextos, observamos raciocínios abdutivo-dedutivos no processo de modelagem matemática das transformações gasosas envolvidas. No decorrer da atividade, percebemos a mobilização de suposições oriundas da memória enciclopédica (ou do repertório didático) dos estudantes, as quais possibilitaram a formulação de hipóteses. Foram justamente essas suposições que viabilizaram a ação dos estudantes nas diferentes situações/dialéticas e nas diferentes fases da modelagem matemática. Além disso, como prevê o mecanismo de interpretação proposto pela teoria da relevância e pela teoria de conciliação de metas, suposições e hipóteses construídas ao longo da atividade passaram a ser utilizadas em contextos posteriores, corroborando nossa primeira hipótese de que a ação dos estudantes seria moderada por relações relevantes de custo e benefício cognitivo em direção à conciliação colaborativa de submetas em favor da meta coletiva (grupos de estudantes entre si e grupos de estudantes e docente) de modelar matematicamente as transformações gasosas em pauta.

Diante das evidências, propusemos no quadro 36 uma relação entre a teoria das situações didáticas e as fases da modelagem matemática, destacando o movimento dos estudantes em cada uma das etapas propostas. Associamos situação/dialética de ação à fase de inteiração; situação/dialética de formulação à fase de matematização e resolução; e, finalmente, situação/dialética de validação à fase de interpretação de resultados e validação. Além disso, argumentamos que a ação dos estudantes no decorrer dessas situações/dialéticas/fases pode ser modelada por planos de ação intencional.

A teoria de conciliação de metas permitiu descrever e analisar os procedimentos adotados pelos estudantes ao longo das atividades. Isso sugere a potencialidade descritivo-explanatória da teoria de conciliação de metas para viabilizar que pesquisadores em educação matemática reflitam sobre a ação dos estudantes em atividades envolvendo as ações cognitivas de formação de uma representação identificável, tratamento e conversão, consideradas nesse estudo como essenciais para a conceitualização dos objetos matemáticos.

Em relação aos planos de ação intencional, observamos processos de auto e heteroconciliação de metas em três níveis: (a) os estudantes projetaram metas $QE_{1\text{-}n}$ e formularam hipóteses abdutivas antefactuais $H_{a1\text{-}n}$, que foram coletiva e colaborativamente (hetero)(in)conciliadas; (b) os planos de ação intencional heteroconciliados passaram a ser colaborativamente assumidos como planos do grupo; e, nos casos em que que se tornaram necessárias, (c) as intervenções do docente acresceram uma camada de heteroconciliação. Esses três níveis, que confirmam nossa segunda hipótese de que as consecuções dos grupos de estudantes estariam a serviço da consecução de uma sequência didática concebida como um plano de ação intencional em direção a conciliação colaborativa (grupos de estudantes e docente) de habilitar os estudantes a modelar as transformações gasosas isotérmicas, isobáricas e isovolumétricas nas situações-problema em pauta, foram sintetizados no esquema da figura 48, reapresentado na figura 51 a seguir:

Figura 51 – Auto e heteroconciliação em atividades de modelagem matemática



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Considerando que processos comunicacionais são inerentes ao processo de ensino e de aprendizagem, o esquema pode contribuir não só para a análise de auto e heteroconciliação em sequências didáticas envolvendo modelagem matemática, mas para a reflexão em torno de processos comunicacionais mais gerais.

Na análise *a priori*, consideramos pertinente apresentar contextos iniciais na sequência didática, possibilitando aos estudantes o reconhecimento do tipo de transformação gasosa e da relação entre as variáveis envolvidas, ou seja, possibilitando a ação dos estudantes na fase de interação; e a retomada de conceitos relativo ao estudo das funções (classificação das variáveis, domínio e imagem) e do objeto matemático *função polinomial de grau 1*, habilitando os estudantes a compreender as diferentes fases de uma atividade de modelagem matemática, desde a interação até a validação. Verificamos que os contextos propostos possibilitaram a identificação do tipo de transformação gasosa envolvida, a compreensão do comportamento entre as variáveis, bem como o engajamento nas demais etapas da atividade.

Ainda na análise *a priori* definimos as variáveis macrodidáticas e microdidáticas. Foram consideradas macrodidáticas os conceitos envolvidos na sequência didática envolvendo modelagem matemática e o uso de recursos tecnológicos. Foram consideradas variáveis microdidáticas a identificação do tipo de transformação gasosa envolvida, a identificação da relação entre as grandezas envolvidas, a escolha do registro de representação, e a seleção do modelo matemático para representar a situação. Constatamos que essas variáveis permitiram ao docente um refinamento da análise *a priori* e, por consequência, uma melhor mediação no decorrer da fase de execução. No que diz respeito ao uso de recursos tecnológicos, segunda variável macrodidática, percebemos a necessidade de considerar outros recursos tecnológicos na análise *a priori*. Sugerimos, portanto, que seja feito um levantamento prévio de *softwares* conhecidos pelos estudantes para que sejam considerados na análise *a priori*.

A sequência didática foi organizada em três atividades com o objetivo de introduzir o conceito de função racional do tipo $f(x) = \frac{1}{x}$ e de aplicar o conceito de função em atividades de modelagem matemática. Em linhas gerais, concluímos que esses objetivos foram atendidos. Embora alguns grupos tenham mobilizados outros conceitos ao longo da atividade, foi possível associá-los à definição de função. Além disso, o contexto 3 favoreceu a abordagem do saber de função racional do tipo $f(x) = \frac{1}{x}$ na fase de institucionalização.

De um modo geral, as evidências apresentadas ao longo desse estudo corroboram nossa terceira hipótese de que ambas as consecuções, aquela dos grupos de estudantes e aquela do docente, estariam a serviço da consecução do plano de ação intencional de avaliar a pertinência epistemológica e metodológica da arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas para descrever e explicar tanto a modelagem matemática das transformações gasosas como a implementação da sequência didática.

A arquitetura abdutiva-dedutivo da teoria de conciliação de metas permitiu o estabelecimento do plano de ação intencional do pesquisador, que foi executado e checado ao longo desse estudo. Além disso, essa arquitetura proporcionou um enriquecimento da descrição e explicação da sequência didática, justamente por evidenciar as metas, submetas e ações antecedentes que se fizeram pertinentes.

O uso do simulador *Propriedade dos Gases*, embora tenha possibilitado ações e retroações dos estudantes ao longo da atividade, apresentou limitações, tais como não informar a profundidade do recipiente ou apresentar oscilações nos valores da pressão. Essas limitações não impediram concluir a atividade, mas limitaram o aperfeiçoamento do modelo matemático.

Nesse estudo, elegemos como sujeitos os estudantes do segundo ano, no entanto, a atividade poderia ser também aplicada à estudantes do primeiro ano do curso de química ou de outros cursos. Nesse caso, acreditamos que em um primeiro momento os estudantes mobilizariam o conceito matemático 'proporção' e o professor, no decorrer da institucionalização poderia utilizar a produção dos estudantes para refletir o conceito 'função' e "função polinomial de grau 1'. Para tanto, o professor poderia proceder a devolução do contexto 1, e após a ação dos estudantes proceder a institucionalização e, posteriormente, fazer a devolução dos contextos 2 e 3, e refletir com os estudantes as limitações do conceito "função polinomial de grau 1'.

Na fase de execução, aplicamos a sequência didática em quatro aulas, desenvolvidas em um mesmo dia. Contudo, o tempo destinado à sua aplicação é aspecto relevante a ser considerado ao replicá-la. Julgamos que o cansaço físico e mental possa ter prejudicado o desempenho dos estudantes no final da atividade.

No que concerne à modelagem matemática, consideramos importante contar com a participação de um professor da área específica não apenas no planejamento (análise preliminar e *a priori*), mas também na execução da atividade, viabilizando aprofundar a interpretação e a validação do modelo matemático construído.

No que tange à mobilização dos registros de representação semiótica, a análise das evidências aponta para a necessidade de se incluir na análise *a priori* um estudo das regras de formação que possam vir a ser requeridas ao longo da atividade e de se considerar uma análise fina da congruência das conversões necessárias. Essas ponderações podem permitir ao docente um refinamento de sua ação ao longo da devolução.

Por fim, sugerimos verificar a pertinência do esquema $\{\mathrm{CM}(\mathrm{R})\{\mathrm{SD}[\mathrm{MM}(\mathrm{RRS})]\}\}$ em sequências didáticas envolvendo modelagem matemática em contextos diversificados, incluindo aqueles que demandam atividades em laboratório, em situações que integrem outras disciplinas, e, principalmente, em atividades que requeiram maior autonomia dos estudantes nos termos de Almeida, Silva e Vertuan (2016).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 28-42, jan. 2010. Disponível em: http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelagem/article/view/2014. Acesso em: 20 mar. 2019.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Registros de representação semiótica em atividades de Modelagem matemática: uma categorização das práticas dos alunos. **Unióm:** Revista Iberoamericana de Educación Matemática, San Cristonal de La Laguna, v. 25, n. 1, p. 109-125, mar. 2011. Disponível em: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2011/25/Union_025_013.pdf. Acesso em: 10 abr. 2019.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; PESSÔA, Karina Alessandra. **Modelagem matemática em foco**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014. Cap. 1. p. 1-19.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; VERTUAN, Rodolfo. Discussões sobre "como fazer" modelagem na sala de aula. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ARAÚJO, Jussara de Loiola; BISOGIN, Eleni. **Práticas de modelagem matemática [livro eletrônico]:** relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2015. Cap. 1. p. 19-44.

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessôa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2016. 157 p.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ufpr, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revemat** - Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 62-77, jan. 2008. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62/12137. Acesso em: 09 jan. 2019.

ANDRADE FILHO, Bazilicio Manoel de. **Processos de conversão de registros em língua natural para linguagem matemática:** análise com base na Teoria da Relevância, 2013. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem), Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2013. Disponível em: http://pergamum.unisul.br/pergamum/pdf/107703_Bazilicio.pdf. Acesso em: 5 set. 2017.

ANDRADE FILHO, Bazilicio Manoel de. RAUEN, Fábio José. Conversão de registros de representação semiótica: análise guiada pela teoria da relevância. **Zetetiké**, Campinas, v. 25, n. 2, jan./jun. 2017, p. 289-304. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8647171. Acesso em: 5 set. 2017.

ANDRADE FILHO, Bazilicio Manoel de; RAUEN, Fábio José. Congruência em conversões de registros de representação semiótica: análise orientada pela noção de relevância. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 1, p. 518-538, 2018. Disponível em: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p518-538. Acesso em: 03 out. 2019.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo:** volume I. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. Claus Ivo Doering.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática:** As discussões dos alunos. 2002. 173 f. Tese (Doutorado) - Curso de Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

ARTIGUE, Michèle. Ingenierie Didactique. **Recherches En Didactiques Des Mathématique**s, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, ago. 1988. Disponível em: http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/RDM9.3M.ArtigueIngenierieDidactique.pdf/at_download/file. Acesso em: 09 jan. 2019.

ARTIGUE, Michèle. Ingénierie didactique. In: BRUN, Jean. **Didactique des mathématiques.** Paris: Delachaux Et Niestlé, 1996. Cap. 4. p. 243-264.

BALACHEFF, Nicolas. **Processus de preuve et situations de validation**. 1987. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01619264/document. Acesso em: 12 dez. 2018.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem Matemática:** Concepções e Experiências de Futuros Professores. 2001. 1 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Mathematical modelling in classroom:** a critical and discursive perspective. Zdm - Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, Karlsruhe, v. 38, n. 3, p. 293-301, jun. 2006. Disponível em: https://www.emis.de/journals/ZDM/zdm063i.html. Acesso em: 05 ago. 2018.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem e modelos matemáticos na educação científica. **Revista Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 69-85, maio 2009. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37949. Acesso em: 24 abr. 2018.

BARROS, Michele Carvalho de. **Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de representação semiótica e da modelagem**. 2017. 258 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciência e Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017. Disponível em: http://nou-rau.uem.br/nou-rau/document/?code=vtls000226019. Acesso em: 20 mar. 2019.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2010. 389 p.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática:** teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BESSOT, Annie. L'ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations. In: MARGOLINAS, Claire et al. **En amont et en aval des ingénieries didactiques:** XV école d'été de didactique des mathématiques. Recherche en didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2009. p. 29-56. (2011).

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento (da Educação Matemática). In: FLORES, Cláudia Regina; CASSIANI, Suzani. **Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica:** sobre linguagens e práticas culturais. São Paulo: Mercado das Letras, 2013. Cap. 1. p. 17-40. Disponível em: http://www.mariabicudo.com.br/cap%C3%ADtulos-de-livros.php. Acesso em: 28 set. 2019.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem matemática & implicações no ensino e na aprendizagem de matemática.** 2. ed. Blumenau: Edfurb, 2004.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Revista Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p.7-32, jul. 2009. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37939. Acesso em: 20 mar. 2019.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino.** 5. ed. São Paulo: Contexto, 2010. 127 p.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem matemática no ensino fundamental.** Blumenau: Edfurb, 2014.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência.** São Paulo: Livraria da Física, 2016. 367 p. (Coleção contextos da ciência). Coordenadores Carlos Aldemir Farias, Iran Abreu Mendes.

BLOCH, Isabelle. **L’articulation du travail mathematique du professeu et d’élève das l’enseignement de l’analyse:** Détermination d'un milieu - Connaissances et savoirs. 1999. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/267864382_L'ARTICULATION_DU_TRAVAIL_MATHEMATIQUE_DU_PROFESS. Acesso em: 04 out. 2018.

BLOCH, Isabelle. **Differents niveaux de modeles de milieu dans la theorie des situations:** Recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence. 2001. Disponível em: www.researchgate.net/publication/303023809_DIFFERENTS_NIVEAUX_DE_MODELES_DE_MILIEU_DANS_LA_THEORIE_D. Acesso em: 04 nov. 2018.

BLOCH, Isabelle. **Quelques apports de la theorie des ituations a la didactique des mathematiques dans l’enseignements.** 2005. 122 f. Habilitation à diriger les recherches. Université Paris-diderot - Paris VII, Paris, 2005. Disponível em: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012153/document. Acesso em: 13 set. 2018.

BLOCH, Isabelle. Prefácio. In: ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ufpr, 2007. p. 13-16.

BLOCH, Isabelle; GIBEL, Patrick. Un modèle d’analyse des raisonnements dans les situations didactiques : Étude des niveaux de preuves dans une situation d’enseignement de la notion de limite. **RDM** - Recherches En Didactique Des Mathématiques. v. 31, n. 2, p. 191-228, jun. 2011. Disponível em: https://revue-rdm.com/2011/un-modele-d-analyse-des/. Acesso em: 02 dez. 2018.

BLOCH, Isabelle. Faire réussir les élèves : Outils pour la construction de situations d'enseignement/apprentissage en mathématiques dans l’enseignement secondaire. **INRE Educrecherche**, n. 16, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf. Acesso em. 07 jan. 2019

BRATMAN, Michael. **Intention, plans and practical reason.** Cambridge: Harvard. University Press, 1989.

BROUSSEAU, Guy. **La théorie des situations didactiques.** 1997. Disponível em: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf. Acesso em: 11 out. 2018.

BROUSSEAU, Guy. **Education et didactique des mathématiques.** 1999. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00466260/fr/. Acesso em: 10 out. 2018.

BROUSSEAU, Guy. **Glossaire :** de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. 1998. Versão 5 (2010). Disponível em: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf. Acesso em: 05 out. 2018.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008. Tradução de Camila Bogéa.

BROUSSEAU, Guy. **Introduction à l'Ingénierie Didactique.** 2013. Disponível em: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-ling%C3%A9nierie-didactique3. Acesso em: 10 jan. 2019.

BROUSSEAU, Guy; GIBEL, Patrick. **Didactical handling of students reasoning processes in problem solving situations.** 2005. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-005-2532-y. Acesso em: 11 dez. 2018.

BURAK, Dionisio. **Modelagem matemática:** Ações e interação no processo de ensino-aprendizagem. 1992. 460 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1992.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 10-27, jan. 2010. Disponível em: http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelagem/article/view/2012/1360. Acesso em: 12 fev. 2018.

BURAK, Dionísio; BRANDT, Célia Finck. Modelagem Matemática e Representações Semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Zetetiké**, São Paulo, v. 18, n. 33, p. 63-102, jan. 2010. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646694. Acesso em: 20 mar. 2019.

CARDOSO, M. C. **Conciliação de metas, relevância e registros de representação semiótica em matemática**. 2015. 173 f. Tese (Doutorado em Ciências da Linguagem) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015. Disponível em: http://pergamum.unisul.br/pergamum/pdf/110003_Marleide.pdf

CARSTON, Robyn. Glossary. In: CARSTON, Robyn. **Thoughts and Utterances**: The Pragmatics of Explicit Communication. Trad. de Fábio José Rauen. Londres: Blackwell, 2002. p. 376-381.

CATANEO, Vanessa Isabel; RAUEN, Fábio José. Registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas: uma análise do capítulo Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas do livro Matemática compreensão e prática de Ênio Silveira. **Revista**

Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 20, n. 2Y, p.140-170, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/36693. Acesso em: 03 out. 2019.

CATANEO, Vanessa Isabel. **Potencialização da compreensão conceptual de sistemas lineares com o software Geogebra em celulares**. 2019. 144 f. Versão de Qualificação de Tese (Doutorado em Ciências da Linguagem) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2019.

COMIN, Eugène. **Proportionnalité et fonction linéaire: caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoir**. 2000. 300 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ecole Doctorale de Mathématiques-informatique, Université Bordeaux 1, Bordeaux, 2000. Disponível em: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00827905. Acesso em: 04 dez. 2018.

CONNE, François. Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. **RDM** - Recherches En Didactique Des Mathématiques. v. 12, n. 2, p. 221-270, jun. 1992. Disponível em: https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01523900. Acesso em: 05 dez. 2018.

CORRÊA, Janaína da Silva. **Registros de representação semiótica mobilizados na obtenção do volume de um cilindro:** uma atividade orientada pelos princípios da modelagem matemática. 2017. 113 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/13481. Acesso em: 20 mar. 2019.

COSTA, Leandro Meneses da. **A compreensão em atividade de modelagem matemática: uma análise à luz dos registros de representação semiótica.** 2016. 145 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016. Disponível em: http://www.uel.br/pos/mecem/arquivos_pdf/Dissertacao%20Leandro%20Costa%202016.pdf. Acesso em: 20 mar. 2019.

DALVI, Silvana Côcco. **A modelagem matemática na perspectiva sociocrítica e os registros de representação semiótica na formação do conceito de número racional.** 2018. 116 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018. Disponível em: http://educimat.ifes.edu.br/images/stories/MPECM_Disserta%C3%A7%C3%A3o_de_Mestrado_-_Modalidade_Profissional__Silvana_Cocco_Dalvi__Turma_2015-DS__V_Final_em_19.04.2018.pdf. Acesso em: 20 mar. 2019.

DAMM, Regina Flemming. Registros de representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática:** Uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. p. 167-188. (Série Trilhas).

DIAS, Markus Benedito Santos; SANTO, Adilson Oliveira do Espírito. Uma análise da modelagem como uma situação a-didática. **Revista Ibero-americana de Estudos em Educação, Araraquara**, v. 9, n. 2, p. 355-364, jun. 2014. Disponível em: https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/7040/5053. Acesso em: 13 fev. 2019.

DUVAL, Raymond. Ecarts semantiques et coherence mathematique: introduction aux problèmes de congruence. In: Séminaire de Didactique des Mathématiques de Strasbourg, 1., 1988, Strasbourg. **Annales de didactique et de sciences cognitives**. Strasbourg: Irem de Strasbourg, 1988. v. 1, p. 7 - 25. Disponível em: http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IST88003.htm. Acesso em: 11 abr. 2019.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognifit de la pensée. In: **Annales de Didactique Et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 5, n. 1, p. 37-65, jan. 1993. Disponível em: http://numerisation.univ-irem.fr/ST/IST93004/IST93004.pdf. Acesso em: 10 abr. 2019.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotique et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008. Cap. 1. p. 11-34.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009. (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

FERREIRA, Carlos Roberto. **A modelagem matemática na educação matemática como eixo metodológico da prática do professor de matemática**. 2016. 159 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2016.

FLEMMING, Diva Marília. **Tópicos de matemática elementar I:** livro didático. 2. ed. Plahoça: UnisulVirtual, 2006. 246 p.

GIBEL, Patrick; ENNASSEF, Mhammed. **Analyse em théorie des situations didactiques d'une séquence visant à évaluer et à renforcer la compréhension du système décimal**. 2012. Disponível em: https://bit.ly/3beAFLO. Acesso em: 30 nov. 2018.

GIBEL, Patrick. **Mise en oeuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire**. 2015. Disponível em: https://bit.ly/2wrqx3z. Acesso em: 5 dez. 2018.

GIBEL, Patrick. **Elaboration et usages d’un modèle multidimensionnel d’analyse des raisonnements en classe de mathéma.** 2018. 155 f. Habilitation à diriger les recherches, Université de Pau et des Pays de L'audor, Pau, 2018.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciênc. Educ**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, abr. 2016. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/1516-731320160020012. Acesso em: 03 maio 2018.

HEWITT, Paul G. **Física conceitual.** 12. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015. 820 p. Trieste Freire Ricci.

INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA. **Projeto pedagógico de curso:** técnico de nível médio integrado em química. Criciúma: IFSC, 2015.

INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA. **Plano de desenvolvimento institucional 2015-2019.** Florianópolis: IFSC, 2017. Disponível em https://bit.ly/3dkBK6E. Acesso em: 5 out. 2019.

KAVIATKOVSKI, Marinês Ávila de Chaves. **As práticas de modelagem matemática no âmbito do ensino fundamental:** um olhar a partir de relatos de experiência. 2017. 164 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna.** São Paulo: IBRASA, 1976. Tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho.

LEVINE, Ira N. **Físico-Química**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC 2012. Vol. 1 recurso online.

LUCIANO, Suelen Francez Machado. **Vigilância epistêmica e prática:** uma abordagem orientada pelo conceito de conciliação de metas. 2019. 128 f. Tese (Doutorado em Ciências da Linguagem) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2019. Disponível em: https://riuni.unisul.br/bitstream/handle/12345/6979/Suelen_Luciano.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em 28 jun. 2020.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia didática. In: (ORG.), Silvia Dias Alcântara Machado. **Educação Matemática:** Uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. p. 233-248. (Série Trilhas).

MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Educação Matemática online: a elaboração de projetos de Modelagem.** 2008. 187 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/tese_malheiros_2008.pdf. Acesso em: 5 abr. 2019.

MARGOLINAS, Claire. **Jeux de l’élève et du professeur dans une situation complexe.** 1994. Disponível em: https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00418716/document. Acesso em: 18 nov. 2018.

MARGOLINAS, Claire. **Etude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu:** détermination d'une situation du professeur. In: BAILLEUL, M.; DORIER, Comiti, J.-L.; LAGRANDE, J.-B; SALIN, Parzysz & M.-H. Actes de la 9ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Paris: Ardm, 1997. p. 35-43. Disponível em: https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00418850. Acesso em: 12 dez. 2018.

MARGOLINAS, Claire. **Situations, milieux, connaissances:** analyse de l’activité du professeur. In: DORIER, Jean-luc et al. Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2002. p. 141-156. Disponível em: https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00421848/document. Acesso em: 12 out. 2018.

MARGOLINAS, Claire. **Points de vue de l’élève et du professeur:** Essai de développement de la théorie des situations didactiques. 2004. 160 f. Tese (Doutorado). Université de Provence, Provence, 2004. Disponível em: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580/file/HDR_Margolinas.pdf. Acesso em: 14 nov. 2018.

MARGOLINAS, Claire. **Connaissance et savoir:** Des distinctions frontalières?. 2012. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779070. Acesso em: 16 dez. 2018.

MARGOLINAS, Claire. **Situations, savoirs et connaissances...:** comme lieux de rencontre ?. 2015. Disponível em: http://www.revuedeshep.ch/site-fpeq-n/Site_FPEQ/19_files/2015-Margolinas-FPEQ-19.pdf. Acesso em: 08 out. 2018.

MEYER, João Frederico da Costa de Azevedo; CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

NETO, Antônio José de Barros. **A construção de instrumentos matemáticos didáticos com tecnologia digital:** uma proposta de empoderamento para licenciandos em Matemática. 2015, 155 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

PASCHOAL, Carlos Willians. **A modelagem matemática no ensino da distribuição exponencial para engenharias.** 2016. 112 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/19417. Acesso em: 11 fev. 2019.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica.** 5. ed. São Paulo: Perspectiva, 2010. Tradução de José Teixeira Coelho Neto.

RAUEN, F. J. Processos interacionais discente/docente em espaço virtual de aprendizagem: análise com base na teoria da relevância. **Scripta** (PUCMG), v. 22, p. 190-217, 2009.

RAUEN, Fábio José. Hipóteses abdutivas antefactuais e modelação proativa de metas. **Signo**, Santa Cruz do Sul, v. 38, n. 65, p. 188-204, jul./dez. 2013.

RAUEN, F. J. For a goal conciliation theory: ante-factual abductive hypotheses and proactive modelling. **Linguagem em Discurso**, Tubarão, v. 14, n. 13, p. 188-204, set./dez. 2014.

RAUEN, Fábio José. **Roteiros de iniciação científica:** os primeiros passos da pesquisa científica, desde a concepção, até a produção e a apresentação. Palhoça: Ed. da Unisul, 2015.

RAUEN, Fábio José. Hipóteses antedutivas e conciliação de metas. In: GODOY, E.; BRUNET, C. D.; ALMEIDA, A. L. de O; DIAS, L. S. (Orgs.). **Coletânea do II Workshop Internacional de Pragmática.** Curitiba: UFPR, 2016. p. 53-79.

RAUEN, Fábio José. Por uma modelação abdutivo-dedutiva de interações comunicativas. In: TENUTA, Adriana Maria. COELHO, Sueli Maria. (Orgs). **Uma abordagem cognitiva da linguagem:** perspectivas teóricas e descritivas. Belo Horizonte: FALE/UFMG, 2018. p. 13-30.

RONCHETTI, Wasley Antonio. **Os registros de representação semiótica na aprendizagem das grandezas massa e comprimento por meio de uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica.** 2018. 131 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

ROSA, Cláudia Carreira da. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de modelagem matemática.** 2009. 143 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009. Disponível em: https://bit.ly/2wrD4nC. Acesso em: 20 mar. 2019.

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. **Modelagem matemática e semiótica:** algumas relações. 2008. 227 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008. Disponível em: https://bit.ly/2wue7I5. Acesso em: 20 mar. 2019.

SILVEIRA, Jane Rita Caetano da; FELTES, Heloísa Pedroso de Moraes. **Pragmática e cognição:** a textualidade pela relevância. 2. ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1999.

SILVEIRA, Jane Rita Caetano da; FELTES, Heloísa Pedroso de Moraes. **Pragmática e cognição:** a textualidade pela relevância e outros projetos. 3. ed. Porto Alegre: Edipucrs, 2002.

SPERBER, Dan; WILSON, Deirdre. **Relevance:** communication & cognition. 2nd. ed. Oxford: Blackwell, 1995. [1st. ed. 1986].

SPERBER, Dan; WILSON, Deirdre. **Relevância:** comunicação e cognição. Lisboa: Fundação Galouste Gulbenkian, 2001.

SOARES, Maria Rosana. **Um estado da arte das pesquisas acadêmicas sobre modelagem em educação matemática (de 1979 a 2015)**: as dimensões fundamentadas e as direções históricas. 2017. 600 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Estudos Pós-graduados Stricto Sensu em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/20854. Acesso em: 4 abr. 2019.

SOUSA, Emílio Vieira de. **Fundamentos de Físico-Química Aplicados.** Recife: Ifpe, 2016. 98 p. Disponível em: https://bit.ly/2U9x8bW. Acesso em: 18 ago. 2019.

SOUZA, Elizabeth Gomes; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 41, p. 31-58, 2014. Semestral. Disponível em: https://doi.org/10.20396/zet.v22i41.8646577. Acesso em: 5 abr. 2019.

VECCHIA, Rodrigo Dalla. **A modelagem matemática e a realidade do mundo cibernético**. 2012. 275 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2012.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007. Disponível em: https://bit.ly/2xjmaHG. Acesso em: 20 mar. 2019.

WILSON, D. **Pragmatic theory**. London: UCL Linguistics Dept., 2004. Disponível em <http://www.phon.ucl.ac.uk/home/nick/pragtheory/>. Acesso em 15 mar. 2005.

APÊNDICE: SITUAÇÃO DIDÁTICA “TRANSFORMAÇÕES GASOSAS”

Assumindo que um gás é caracterizado por três propriedades, denominadas variáveis de estado: pressão (P), volume (V) e temperatura (T), analise os seguintes três contextos.

CONTEXTO 1 – Considere o vapor de água dentro de uma panela de pressão, que está em perfeito funcionamento. Uma panela de pressão não tem um êmbolo móvel, o que permitiria a variação de volume do gás. Dessa forma, à medida que o vapor dentro da panela aquece, a pressão interna aumenta e o volume atinge um valor máximo.

Considerando o contexto 1 acima:

a) O que se pode observar em relação a V, P e T?

b) Como se dá essa relação?

Usando o simulador de propriedade dos gases:

• Fixe V como constante e insira no sistema 300 partículas (espécie pesada).

• Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente (300K) e registre a pressão (a unidade do simulador é atm).

• Obs.: após cada alteração, aguarde em torno de 1min e pause o simulador.

• Faça alterações na temperatura (aqueça/resfrie) e observe como a pressão se comporta (registre os dados).

Considerando os dados obtidos:

a) Modele matematicamente essa transformação.
b) Usando o modelo obtido, calcule a pressão para diferentes temperaturas e, em seguida, valide seu resultado com o simulador.
c) É possível calcular o volume do recipiente a partir desse modelo? Como seria esse procedimento?
d) Em qual temperatura ocorre um rompimento do recipiente? O que isso significa matematicamente?

CONTEXTO 2 – Imagine um balão com baixa resistência em suas paredes contendo em seu interior oxigênio com ¼ da sua capacidade aproximadamente. Ao colocarmos o balão em um recipiente com água quente, sua temperatura aumentará e seu volume também (ele encherá); já ao colocarmos em um recipiente com água e gelo, sua temperatura baixará e seu volume também (ele murchará).

Considerando o contexto 2 acima:

a) O que se pode observar em relação ao V, à P e à T?
b) Como se dá essa relação?

Usando o simulador de propriedade dos gases:

• Fixe P e insira no sistema 300 partículas.
• Defina a temperatura inicial em um valor próximo da temperatura ambiente.
• Faça alterações na temperatura (aqueça/resfrie) e observe como o volume do recipiente se comporta (registre as medidas do recipiente).
• Obs.: considere a profundidade (x) do recipiente como constante.
• nm (nanómetro) = 1.10-9 m

Considerando os dados obtidos:

a) Modele matematicamente essa transformação, de maneira que seja possível obter o volume para cada temperatura?

CONTEXTO 3 – Considere uma seringa cheia de ar. Você fecha a ponta da seringa com o dedo e começa a pressionar o êmbolo.

Considerando o contexto 3 acima:

a) Nessas condições, o que se pode observar em relação ao V, à P e à T?
b) Como se dá essa relação?

Usando o simulador de propriedade dos gases:

• Fixe T e insira no sistema 300 partículas e registre P;
• Faça alterações no volume do recipiente e verifique como a P se comporta.

Considerando os dados obtidos:

a) Modele matematicamente essa transformação, de maneira que seja possível obter a pressão em função do volume?

ANEXO A: TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado a participar da pesquisa CONVERSÃO DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA MODELAGEM MATEMÁTICA DE SITUAÇÕES-PROBLEMA: ANÁLISE ORIENTADA PELA TEORIA DE CONCILIAÇÃO DE METAS, desenvolvida pelo pesquisador Bazilicio Manoel de Andrade Filho[204] e orientada pelo professor Dr. Fábio José Rauen[205].

A presente pesquisa é motivada pelo interesse do pesquisador em compreender como você modela situações-problema matematicamente, isto é, como você cria uma solução matemática para determinada questão da realidade. O objetivo desse projeto é analisar como estudantes do curso de nível técnico em química integrado ao Ensino Médio do IFSC – campus Criciúma utilizam diferentes formas de representação semiótica em atividades de modelagem matemática de situações-problema. Por exemplo, quando você usa o algarismo ‘3’ para dizer que você tem ‘três canetas’ num problema que envolve contar quantos materiais escolares você tem em sua mochila, você está representando as referidas canetas com esse símbolo semiótico.

A sua participação no estudo será desenvolvida durante o horário regular das disciplinas do curso em que você se encontra matriculado. Os encontros serão realizados nas dependências do Instituto Federal de Santa Catarina – campus Criciúma, podendo ser realizados em sala de aula, no laboratório de matemática, no laboratório de informática e/ou na biblioteca. Durante os encontros você irá participar de atividades de modelagem matemática de problemas proposto pelo pesquisador e por você mesmo. Em todos esses momentos você será acompanhado e orientado pelo pesquisador. Para coletar os dados, o pesquisador fará registros escritos, fotográficos e audiovisuais.

A participação na pesquisa oferece risco minímo, porém é possível que durante o processo da pesquisa ocorra frustração caso você não consiga desenvolver alguma das atividades propostas ou apresente cansaço durante a aplicação da pesquisa. Sendo assim, o pesquisador estará atento a estes possíveis casos e prestará toda a assistência necessária a você, como esclarecimentos e destinação de mais tempo para a resolução da atividade proposta.

Como benefício de sua participação na pesquisa, espera-se que você possa melhorar sua compreensão sobre o processo de modelagem matemática e, dessa maneira, você possa estar mais bem preparado para usar as ferramentas matemáticas em situações concretas do mercado de trabalho. Apesar disso, é importante esclarecer que não é possível garantir garantir que você, ao participar da pesquisa, irá aprender a modelar problemas matemáticos.

Você será esclarecido(a) sobre a pesquisa em qualquer tempo e aspecto que desejar. Você também poderá retirar seu consentimento em qualquer tempo. Você é livre para recusar-se a participar ou interromper a participação a qualquer momento. Uma vez que sua participação é voluntária, a recusa em participar não gera qualquer espécie de penalidade.

---

[204] Contato: telefone: (48) 98451 3057; e-mail: bazilicio.andrade@ifsc.edu.br.

[205] Contato: telefone: (48) 3621 3369; e-mail: fabio.rauen@unisul.br.

O pesquisador tem interesse apenas nos diálogos e nos apontamentos realizados durante a realização da atividade. Esses diálogos e apontamentos serão utilizados na elaboração da tese de doutorado do pesquisador e poderão também ser publicados em aulas, cursos, congressos, eventos científicos, palestras ou periódicos científicos.

O pesquisador irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo e todos os dados coletados servirão apenas para fins de pesquisa. Desta forma, o pesquisador se responsabilizará pela guarda e confidencialidade dos dados. Seu nome, sua imagem ou o material que indique a sua participação não será divulgado e nem liberado sem a sua permissão. Você não será identificado (identificada) em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo.

Finalmente, vale esclarecer que sua participação na pesquisa não gera a você nenhum tipo de benefício ou custo financeiro.

TERMO DE ASSENTIMENTO

Ciente e de acordo com o que foi anteriormente exposto e tendo recebido cópia do presente termo de assentimento livre e esclarecido, eu ____, estudante do curso de nível técnico em química integrado ao Ensino Médio do IFSC – campus Criciúma, aceito participar da pesquisa CONVERSÃO DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA MODELAGEM MATEMÁTICA DE SITUAÇÕES-PROBLEMA: ANÁLISE ORIENTADA PELA TEORIA DE CONCILIAÇÃO DE METAS, desenvolvida pelo pesquisador Bazilicio Manoel de Andrade Filho e orientada pelo professor Dr. Fábio José Rauen, podendo retirar meu assentimento a qualquer momento, e declaro que o pesquisador tirou minhas dúvidas e obteve consentimento de meu responsável legal.

____________, ___ de _________ de ______.

____	____
Assinatura do (da) Estudante	Assinatura do Pesquisador

ANEXO B: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Seu filho (sua filha) está sendo convidado (convidada) a participar da pesquisa CONVERSÃO DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA MODELAGEM MATEMÁTICA DE SITUAÇÕES-PROBLEMA: ANÁLISE ORIENTADA PELA TEORIA DE CONCILIAÇÃO DE METAS, desenvolvida pelo pesquisador Bazilicio Manoel de Andrade Filho[206] e orientada pelo professor Dr. Fábio José Rauen[207].

A presente pesquisa é motivada pelo interesse do pesquisador em compreender como seu filho (sua filha) modela situações-problema matematicamente, isto é, como ele (ela) cria uma solução matemática para determinada questão da realidade. O objetivo desse projeto é analisar como estudantes do curso de nível técnico em química integrado ao Ensino Médio do IFSC – campus Criciúma utilizam diferentes formas de representação semiótica em atividades de modelagem matemática de situações-problema. Por exemplo, quando seu filho (sua filha) usa o algarismo '3' para dizer que ele (ela) tem 'três canetas' num problema que envolve contar quantos materiais escolares ele (ela) tem em sua mochila, seu filho (sua filha) está representando as referidas canetas com esse símbolo semiótico.

A participação de seu filho (sua filha) no estudo será desenvolvida durante o horário regular das disciplinas do curso em que ele se encontra matriculado. Os encontros serão realizados nas dependências do Instituto Federal de Santa Catarina – campus Criciúma, podendo ser realizados em sala de aula, no laboratório de matemática, no laboratório de informática e/ou na biblioteca. Durante os encontros seu filho (sua filha) irá participar de atividades de modelagem matemática de problemas proposto pelo pesquisador e por ele mesmo (ela mesma). Em todos esses momentos seu filho (sua filha) será acompanhado e orientado pelo pesquisador. Para coletar os dados, o pesquisador fará registros escritos, fotográficos e audiovisuais.

A participação na pesquisa oferece risco minímo a seu filho (sua filha), porém é possível que durante o processo da pesquisa ocorra frustração caso ele (ela) não consiga desenvolver alguma das atividades propostas ou apresente cansaço durante a aplicação da pesquisa. Sendo assim, o pesquisador estará atento a estes possíveis casos e prestará toda a assistência necessária, como esclarecimentos e destinação de mais tempo para a resolução da atividade proposta.

Como benefício da participação de seu filho (sua filha) na pesquisa, espera-se que ele (ela) possa melhorar sua compreensão sobre o processo de modelagem matemática e, dessa maneira, seu filho (sua filha) possa estar mais bem preparado (preparada) para usar as ferramentas matemáticas em situações concretas do mercado de trabalho. Apesar disso, é importante esclarecer que não é possível garantir garantir que seu filho (sua filha), ao participar da pesquisa, irá aprender a modelar problemas matemáticos.

Você será esclarecido (esclarecida) sobre a pesquisa em qualquer tempo e aspecto que desejar. Você também poderá retirar seu consentimento em qualquer tempo. Você é livre para recusar-se a participar ou interromper a participação de seu filho (sua filha) a qualquer momento. Uma vez que a participação de seu

[206] Contato: Telefone: (48) 98451 3057; E-mail: bazilicio.andrade@ifsc.edu.br.

[207] Contato: Telefone: (48) 3621 3369; E-mail: fabio.rauen@unisul.br.

filho (sua filha) é voluntária, a recusa em participar não gera qualquer espécie de penalidade a você ou a ele (ela).

O pesquisador tem interesse apenas nos diálogos e nos apontamentos realizados durante a realização da atividade. Esses diálogos e apontamentos serão utilizados na elaboração da tese de doutorado do pesquisador e poderão também ser publicados em aulas, cursos, congressos, eventos científicos, palestras ou periódicos científicos.

O pesquisador irá tratar a sua identidade e a de seu filho (sua filha) com padrões profissionais de sigilo e todos os dados coletados servirão apenas para fins de pesquisa. Desta forma, o pesquisador se responsabilizará pela guarda e confidencialidade dos dados. O nome, a imagem ou o material que indique a sua participação e a de seu filho (sua filha) não será divulgado e nem liberado sem a sua permissão. Você e seu filho (sua filha) não serão identificados (identificadas) em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo.

Finalmente, vale esclarecer que sua participação e a participação de seu filho (sua filha) na pesquisa não gera a você ou a ele (ela) nenhum tipo de benefício ou custo financeiro.

TERMO DE CONSENTIMENTO

Ciente e de acordo com o que foi anteriormente exposto e tendo recebido cópia do presente termo de consentimento livre e esclarecido, eu ____, responsável legal pelo (pela) estudante ____, estou de acordo com sua participação na pesquisa intitulada CONVERSÃO DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA MODELAGEM MATEMÁTICA DE SITUAÇÕES-PROBLEMA: ANÁLISE ORIENTADA PELA TEORIA DE CONCILIAÇÃO DE METAS, desenvolvida pelo pesquisador Bazilicio Manoel de Andrade Filho e orientada pelo professor Dr. Fábio José Rauen, de forma livre e espontânea, podendo retirar meu consentimento a qualquer momento.

____________, ___ de _________ de _________.

____	____
Assinatura do (da) Responsável Legal	Assinatura do Pesquisador