FACULDADE UNA DE CATALÃO
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Análise De Esforços Em Lajes Maciças E Treliçadas Pelas Metodologias De Placas E Grelhas (CAD/TQS E GRELHA UFSCar)

Adriano Costa de Oliveira; Eliab Pulquério de Sousa; Sidney Pulquério de Deus, William Pereira Pires
Centro Universitário UNA de Catalão
Orientadora: Jéssica Borges, Curso de Engenharia Civil
adrianocosta0@outlook.com; eliab-pulquerio@hotmail.com; sid-mkt@hotmail.com; pireswilliam07@gmail.com.

Resumo

A construção civil contemporânea tem como fato motivador de suas interações a busca incessante por novas técnicas construtivas e materiais que otimizem o trabalho realizado nas edificações não renunciando à qualidade, segurança e menor custo. Doravante veremos algumas variáveis capazes de sintetizar essa tão importante questão, comparando lajes maciças e treliçadas. Com a referida comparação, objetiva-se estabelecer as diferenças nos deslocamentos imediatos para vãos distintos. As lajes foram dimensionadas usando os métodos de Bares, Grelha UFSCar e software CAD/TQS, tanto para lajes maciças quanto para treliçadas. No fim, os resultados disseram que a laje treliçada apresenta resultados semelhantes com os apresentados na Norma. Em não havendo um programa (software) que suporte o profissional nos cálculos, é factível que se use o método simplificado para que se obtenha os esforços e deslocamentos(flechas) no caso das lajes retangulares maciças de concreto armado.

Palavra-Chave: *Lajes maciças. Lajes treliçadas. Metodologia de grelha. Metodologia de Bares. Esforços.*

Abstract

Contemporary civil construction has as a motivating fact of its interactions the incessant search for new constructive and material techniques that optimize the work performed in buildings not renouncing quality, safety and lower cost. From now on we will see some variables capable of synthesizing this very important issue by comparing massive slabs and truss. With this comparison, the objective is to establish the differences in the immediate displacements for different spans. The slabs were sized using the methods of Bares, UFSCar Grids and CAD/TQS software for both massive slabs and truss. In the end, the results said that the truss slab presents similar results with those presented in the Standard. In the absence of a program (software) that supports the professional in the calculations, it is feasible to use the simplified method to obtain the efforts and displacements (arrows) in the case of massive rectangular slabs of reinforced concrete.

Keyword: *Massive slabs. Truss slabs. Grid methodology. Bar Methodology. Efforts.*

1. INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento e crescimento da humanidade se fez necessário a melhoria de condições habitacionais. Com o domínio da produção de alimentos, o ser humano pôde fixar seu domicílio, surgindo as primeiras civilizações. Dessa forma, houve a necessidade de desenvolvimentos de novas tecnologias para construção de moradias e habitats seguros. Os principais adventos foram os ambientes de convívio público, como templos e mansões, como exemplo têm-se a civilização mesopotâmica com avanços de construções que não foram ultrapassados durante séculos (ROSA, 2012).

Nesse período, em todas as civilizações muito do que se desenvolvia era na base do empirismo, as construções eram concebidas sem domínio e nem conhecimento das teorias envolvidas na previsão de carregamento e falha. Por este motivo, as construções eram robustas, realizadas por empilhamento de grandes rochas, algumas vezes nem eram argamassadas, sendo que o processo de encaixe era criado pela lapidação das rochas. Mas até hoje algumas arquiteturas dos séculos XII a IX a. c. nos impressionam, permanecendo parcialmente intactas, como as construções da Grécia antiga que já apresentavam os elementos de coluna (STOUHI, 2020). Metodologia utilizada nos dias atuais.

Com o desenvolvimento da matemática, física e geometrias, o empirismo funcional começou a ser justificado, auxiliando arquitetos e engenheiros a definirem as melhores alternativas para a estabilidade e segurança das edificações (ROSA, 2012). Entretanto, o conhecimento do comportamento dos materiais demorou mais tempo para ser enriquecido, também devido ao fato do uso de materiais *in natura*, que representavam elevada variabilidade. Já os comportamentos da morfologia estrutural foram definidos pelo progresso da física e da trigonometria.

Junto com o conhecimento físico, teve o desenvolvimento das tipologias estruturais. A mais comum utilizada são as de combinações de placas (lajes) e barras (vigas e pilares), o seu uso foi intensificado com o avanço do concreto armado, devido a possibilidade de dar formas as estruturas (BASTOS, 2011). O uso de elementos de placa se fez necessário com a demanda por construções de novos pisos ou pela necessidade de vencer vãos entre apoios.

A NBR 6118:2014 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014) define lajes como superfícies planas, sujeitas principalmente a ações normais a seu plano. Normalmente recebem carregamentos distribuídos por área, por metro e pontual. Com estes carregamentos a estrutura fica submetida a esforços de flexão, cortante e deslocamentos. Para que a sua geometria consiga resistir se faz necessário o levantamento dos valores destes esforços conforme as ações atuantes. Mas a compreensão da forma que estes carregamentos se distribuem e caminham para os apoios são até hoje estudadas.

Há diferentes teorias matemáticas que auxiliam os engenheiros na definição destes esforços, e elas ainda vêm sendo evoluídas. As mais usuais são a teoria de grelhas ou a teoria de placas. Na teoria de placas há um custo de aplicação matemática, pois se trata de formulações diferenciais extensas e complexas (CARVALHO, 2016). Sendo inviável sua aplicação em pequenos projetos, pois, demandaria elevado domínio em profundas regras matemáticas. Bares (1982 apud GIONGO, 2007) desenvolveu uma metodologia de coeficientes para auxiliar nas predições das reações e esforços nas lajes em função das condições de apoio e da proporcionalidade entre as dimensões da mesma. Sendo que até

hoje é utilizada devido a simplicidade do uso e a agilidade na determinação dos esforços de lajes maciças.

Com o avanço de novas tecnologias e controle dos materiais, observou-se que a maioria das lajes tinham sua capacidade de carga reduzida, pois, grande parte da ação que já suportava era o seu peso próprio. Como alternativa, avaliaram que seria possível aumentar a altura da laje colocando um enchimento, ocorrendo uma melhoria estrutural e reduzindo as ações. Transformando o comportamento estrutural para grelhas, também conhecido como sistema nervurado (BASTOS, 2011). Sabe-se que nesse sistema a nervura será responsável pela resistência à tração do elemento, ganhando um braço de alavanca com a linha neutra.

Com essas diferentes avaliações de comportamento estrutural surgiu diferentes metodologias executivas e de transferência de esforços para os pilares. Emergindo algumas classificações de tipologias de laje, sendo elas laje lisa (laje maciça + pilares), laje maciça (laje maciça + vigas + pilares), laje nervurada (cogumelo, pré-fabricada treliçada e alveolar). Também teve o desenvolvimento de estruturas mistas, como a laje *steel deck* com o seu comportamento estrutural aproximado ao de nervuras. Cada uma dessas metodologias modifica a consideração dos cálculos de esforços e os seus métodos executivos.

A metodologia de grelha unidirecional muitas vezes utilizada na predição dos esforços considera uma série de simplificações e aproximações para tornar os cálculos mais simples. Quando se considera a aproximação de grelha bidirecional já haverá uma aproximação mais real, pois nas bordas há uma contribuição de rigidez para as placas. Mas a influência pode ter baixa importância dependendo da proporcionalidade das dimensões da laje. Consequentemente o consumo de materiais também poderá ser modificado, refletindo em uma economia de recursos provindas de melhores técnicas e escolhas aplicadas (DORNELES, 2014). Não há como estabelecer qual seria a melhor metodologia entre os tipos de lajes, devido a infinidade de escolhas a se realizar.

Dessa forma, este trabalho buscará realizar o comparativo dos cálculos de esforços pelo método de Bares, de grelha e de vigas unidirecionais para diferentes proporcionalidades de dimensões de lajes apoiadas para verificar se há diferença de momento fletor e deslocamento entre eles.

Desta forma, este trabalho visa contribuir para a área técnica como um comparativo e ferramenta de auxílio na tomada de decisão, qual sistema de dimensionamento seria mais aplicado para a proporção de lajes.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As lajes, que também podem ser chamadas de placas, são classificadas como objetos de superfície, planas e bidimensionais, ou seja, duas direções (comprimento e largura) como principais, que são da mesma diretriz de tamanho e consideravelmente maiores que sua terceira dimensão, a espessura. As lajes recebem a maior parte das cargas aplicadas em uma edificação de pessoas, carros, paredes etc. De modo geral, essas cargas são transmitidas para as vigas de apoio nas bordas da laje, mas possivelmente também podem ser transmitidas de modo direto aos pilares, quando são chamadas lajes lisas, com ou sem capitel (BASTOS,2021). Devido ao peso que essas estruturas possuem e o custo significativo nas obras, se desenvolveu a tipologia de laje nervurada, em que se realiza seções T como pequenas vigas e uma capa de concreto, com a redução do peso

essa tipologia se mostra muito eficiente e a sua execução também é mais simples, por precisar de menos formas, além de ter bom rendimento quando a tração ocorre na parte inferior das lajes.

Em tese, os apoios modificam os diagramas de momentos fletores significativamente. Considera-se como aproximação física de restrição três tipos de apoio, que são aplicados nas lajes, vigas e pilares de concreto. Estes apoios são denominados de apoio articulável, engaste ou livre. As vigas são os apoios das lajes e dependendo da continuidade da laje sobre a viga será realizada a definição do tipo de vínculo. Entre eles, as vigas de borda compõem o tipo de apoio articulável para as lajes das edificações, quando há outro apoio na laje. Todos os elementos trabalham juntos. Os tipos comuns de vínculo das lajes são o apoio simples, o engaste elástico e o engaste perfeito. Mas para considerar os apoios elásticos, que é o mais próximo da realidade, os cálculos ficam extensos e se torna complexo o cálculo dos esforços. Com a utilização das tabelas usuais para o cálculo das lajes só admitem apoios simples, e engaste perfeito, a vinculação nas bordas deve ser considerada só nestes dois tipos. Com o avanço tecnológico a utilização de programas computacionais é possível aderir também o engaste elástico, em que se considera o engaste parcial (BASTOS, 2021).

Sendo o seu esforço preponderante o momento fletor e o elemento ter duas direções, em cada uma delas ocorre valores de momento diferentes, pois está relacionado com o vão. Desta forma um momento poderá ter maior valor e ser mais importante que outro. Segundo Bastos, 2021, as lajes armadas em uma direção têm relação entre o lado maior e o lado menor superior a dois, isto é:

$$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell x} > 2 \qquad 2.1$$

Em que l_y é o vão maior e l_x é o vão menor. Com isso, a parcela correspondente a reação de apoio no lado menor ser muito inferior e consequentemente o momento fletor na direção do maior vão também resultar muito inferior que o momento na menor direção. Os esforços solicitantes e as flechas são calculados colocando-se a laje como uma viga de largura 1 m, segundo a direção principal da laje (Figura 1).

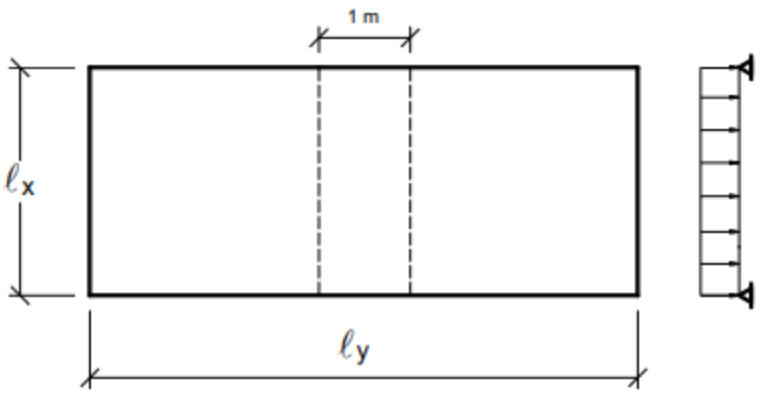


Figura 1 – Tipologia estrutural para lajes unidirecionais (BASTOS,2021).

Já as lajes bidirecionais são lajes em que os esforços solicitantes são importantes segundo as duas direções (Figura 2). Segundo Bastos, 2021, a relação entre os lados (λ) deve ser menor ou igual a dois, dessa forma a geometria apresenta mais próxima de um quadrado. O seu comportamento estrutural é bidirecional, sendo possível utilizar a grelhas bidirecionais ou a teoria de placas para avaliar seus esforços (Figura 3).

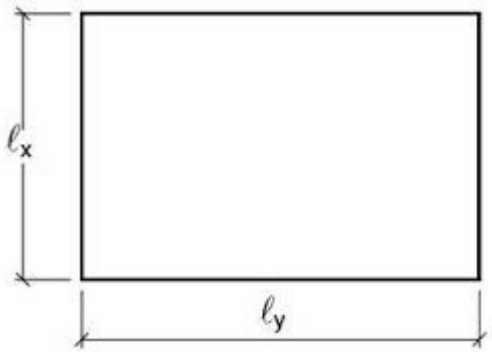
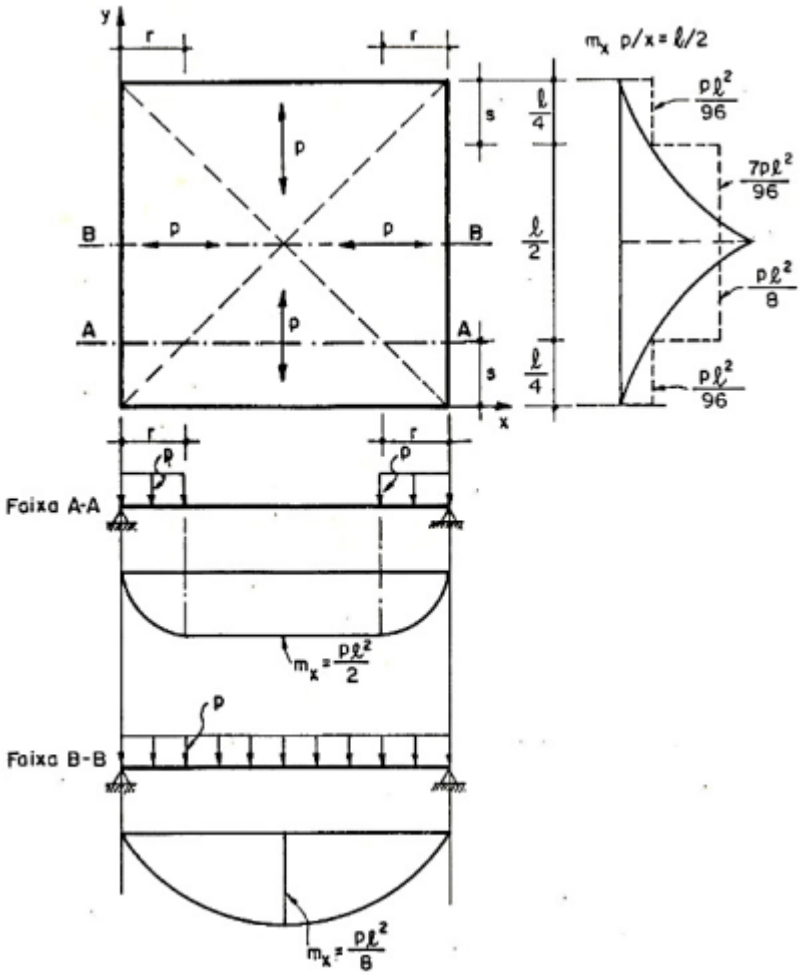


Figura 2: Vãos da laje retangular armada em duas direções. (BASTOS,2021).



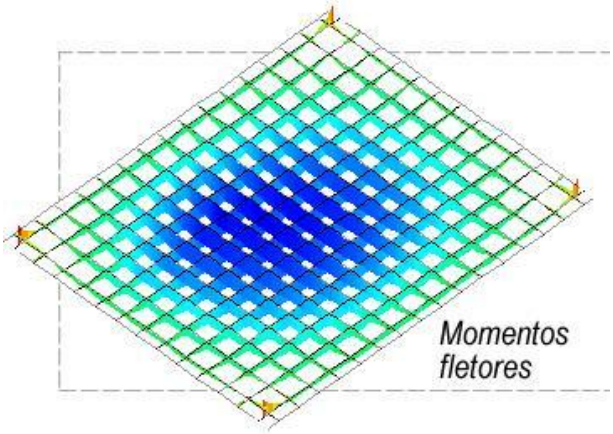


Figura 3: Sistema estrutural para laje bidirecional: a) Charneiras plásticas (HILLERBORG, 1975 apud XAVIER e MELO, 2016) b) analogia de grelha para laje bidirecional (CAD/TQS, 2015).

Na próxima seção será explicado um pouco mais do comportamento de lajes para diferentes processos executivos e tipologias estruturais.

2.1. LAJE MACIÇA

A laje maciça é o tipo de placa onde toda sua espessura constitui-se por concreto, compondo-se de armaduras longitudinais de flexão e ocasionalmente armaduras transversais, que são sustentadas em suas extremidades por paredes ou vigas. As lajes que têm uma ou mais bordas livres são casos excepcionais desse tipo de laje. Ela pode ser constituída por concreto armado ou protendido, e aqui abordaremos as lajes maciças feitas com concreto armado (BASTOS, 2021).

As lajes maciças de concreto armado, que geralmente são desenvolvidas com espessura que varia entre 7 e 16 cm, são planejadas para vários tipos de construções, temos como exemplo edifícios residenciais e comerciais de múltiplos pavimentos, reservatórios, muros de arrimo, edificação de grande porte, dentre outros. Um fato relevante é que não são muito utilizadas em pequenas obras, devido ao custo com formas de construção, que outros tipos são mais favoráveis, como por exemplo, as nervuradas pré-fabricadas (BASTOS, 2021). Normalmente sua tipologia estrutural é de lajes apoiadas em vigas (Figura 4).

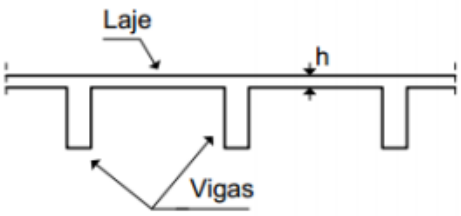


Figura 4 - Seção transversal de lajes maciças apoiadas em vigas (BASTOS,2021).

As vantagens principais da laje maciça estão no processo de execução que pode ser criada em qualquer formato e sua grande rigidez relacionada ao deslocamento horizontal. Por conta de ser o sistema estrutural mais tradicional, é bastante utilizada pelos projetistas, principalmente quando o vão a ser vencido é relativamente pequeno (BASTOS, 2021).

Em Bastos (2021), diz que para projetar uma laje, é necessário conhecer a sua altura *h* (Figura 5). Existem diferentes métodos para estimar a altura de uma laje, sendo que um deles depende da altura útil *d*, definida como a distância entre o centro de gravidade da armadura e a face superior da seção.

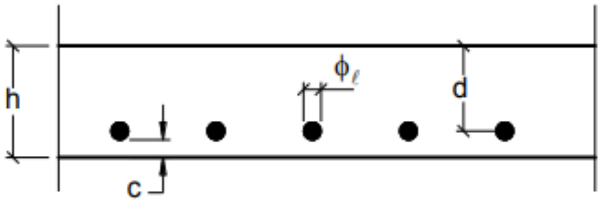


Figura 5 - Altura útil de laje maciça (BASTOS,2021).

O valor de d pode ser obtido pela equação:

$$d \cong (2{,}5 - 0{,}1\ n)\ \ell^* \qquad 2.2$$

Onde:

d = altura útil da laje (cm);
n = número de bordas engastadas da laje;
ℓ^*= dimensão da laje em metro, sendo: $\ell^* \leq \{\ \ell x$ ou $0{,}7\ \ell y$

2.1.1. Dimensionamento

Para realizar a construção de uma laje, é necessário levar em consideração alguns critérios de dimensionamento, que são encontrados na NBR 6118/2014, a seguir serão listados estes critérios.

Os momentos fletores negativos e positivos segundo Bares, são calculados pela seguinte expressão:

$$M = \mu \frac{P\ell x^2}{100} \qquad 2.3$$

$$M = \mu' \frac{P\ell x^2}{100} \qquad 2.4$$

Onde:

M = momento fletor (kN.m/m);

μ = coeficiente tabelado, de acordo com cada tipo de laje e em função de $\lambda = \ell_y / \ell_x$, sendo:

μ_x e μ_y = coeficientes para cálculo dos momentos fletores positivos atuantes nas direções paralelas a ℓ_x e ℓ_y, respectivamente;

μ'_x e μ'_y = coeficientes para cálculo dos momentos fletores negativos atuantes nas bordas perpendiculares às direções ℓx e ℓy, respectivamente;

p = valor da carga uniforme ou triangular atuante na laje (kN/m2);

ℓ_x = menor vão da laje (m).

As armaduras são indispensáveis para o combate a flexão das lajes, estas são compostas por armadura longitudinal e armadura transversal, resistentes às tensões de tração provenientes da flexão, e a resistir os esforços cortantes, respectivamente. Como simplificação há as tabelas auxiliares de dimensionamento como o K_c e K_s. Para tal, usa-se a fórmula:

$$Kc = \frac{bw.d^2}{Md} \qquad 2.5$$

Em que bw é a largura de 100 cm da laje. Com este valor encontra-se K_s e calcula a área de aço (2.5).

$$As = \frac{K_s M_d}{d} \qquad 2.6$$

Neste caso o aço deve ser posicionado na direção do momento utilizado para cálculo.

2.1.2. Laje Treliçada

As lajes treliçadas são consideradas estruturas monolíticas, Droppa Junior (1999), a uniformidade da peça formada pela junção da armadura com o concreto moldado no local impressiona. Elas funcionam da mesma forma que uma laje convencional, tendo como diferencial a simplificação do processo produtivo o que seguramente resulta em economia de tempo e custos.

Formada por sistema de eletrofusão, as treliças são unidas pelo vértice. De fácil manuseio e trabalhabilidade, as treliças possuem diagonais que garantem rigidez ao conjunto e excelentes condições de transporte.

Elas podem ter diferentes quantidades de aço, sendo que, no momento da fabricação elas atendem ao que foi especificado pelo projetista, levando em consideração a solicitação de esforços causados pelos diversos fatores já conhecidos por nós, como: comprimento dos vãos, cargas fixas, variáveis etc. Eventualmente requerida, a armadura adicional pode ser do mesmo aço da treliça, fios de aço CA-60, ou ainda de barras de aço CA-50.

As especificações do Catálogo Técnico Belgo (2012), sugere que os fios longitudinais superiores além de boa rigidez ao conjunto, pode também colaborar no combate ao momento fletor negativo quando da retirada dos escoramentos, e durante a montagem e concretagem da estrutura de treliça, como armadura de compressão.

Além de resistirem à força cortante, as armaduras diagonais também colaboram para a melhor coesão entre os concretos do capeamento e do elemento pré-moldado. Os

chamados fios longitudinais inferiores resistem ou colaboram no combate ao momento fletor positivo. Como demonstra a Figura 6.

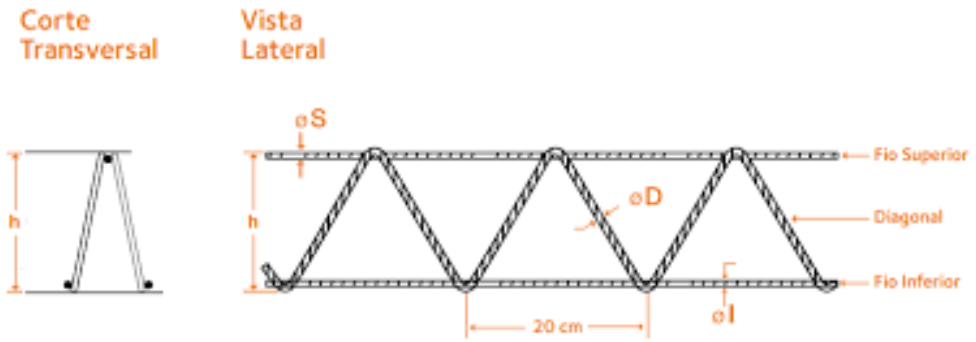


Figura 6 - Armação treliçada (Fonte: Catálogo Técnico Belgo, 2012).

Segundo o item 14.7.7 da ABNT NBR 6118 (2014), as lajes treliçadas são as lajes moldadas no local ou pré-moldadas, onde a zona de tração (região abaixo da linha neutra) para momentos positivos se localiza nas nervuras, região onde deve ser colocado o material inerte, como ilustra as Figuras 7 e 8.

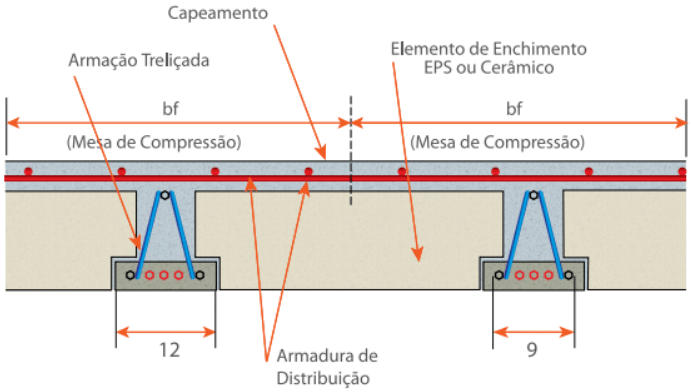


Figura 7 – Elementos Laje Treliçada (Fonte: Manual Técnico Lajes Treliçadas Belgo).

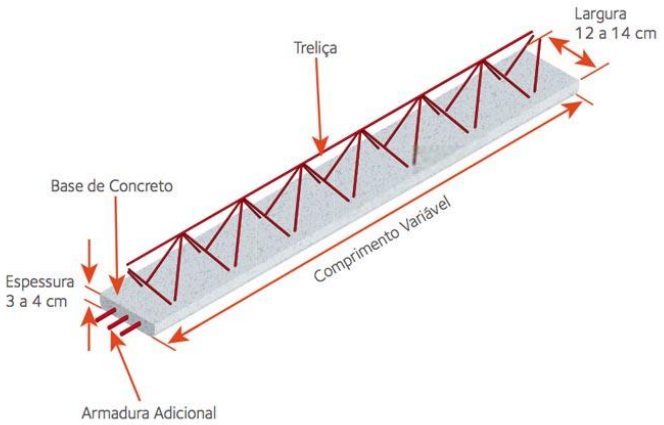


Figura 8 - Armação Treliçada (Catálogo Técnico Belgo, 2012).

Unidirecionais ou bidirecionais, estas são as classificações das lajes treliçadas. A ABNT NBR 14859-1 (2002), assim as define; as lajes unidirecionais pré-fabricadas constituem-se de nervuras principais longitudinais em uma única direção. Eventualmente, usa-se algumas nervuras transversais perpendiculares às principais, objetivando o travamento lateral, de acordo com a Figura 9.

Figura 9 - Laje pré-moldada treliçada unidirecional Fonte: Lajes Pillar (2012).

A ABNT NBR 14859-2 (2002), descreve que lajes pré-fabricadas bidirecionais, constituem-se por nervuras principais tanto longitudinais quanto transversais com espaços regulares formando vazios entre si, para o preenchimento destes usa-se materiais inertes, como demonstrado na Figura 10.

Figura 10 - Laje pré-moldada treliçada bidirecional (Plano Concreto, 2012).

Usadas para vencer grandes vãos, as lajes treliçadas são bastantes usuais em edificações com muitos pavimentos, são empregadas em vãos que variam de 2 a 12 metros, podendo atingir vãos ainda maiores, são constituídas por vigotas pré-fabricadas treliçadas e dispostas na direção do menor vão da laje, ainda colaboram na estabilidade global no caso dos edifícios.

As vantagens das lajes com armação treliçada segundo Muniz (1991), são:

- Diminuição do peso da laje e consequentemente alívio sobre as fundações;
- Redução significativa de formas acarretando economia de madeiramento e evitando desperdícios;
- Sensível redução do escoramento das lajes, já que se recomenda apenas a colocação de escoras com travessas entre 1.05 m e 1.90 m, dependendo do tipo de escoramento (metálico ou madeira), durante a fase de cura do concreto;
- Reduz a quantidade de estoque e movimentação de materiais no canteiro de obras;
- Diminuem custos de mão de obra de ferreiros e carpinteiros;
- Reduzem-se os prazos de execução de obras; a fôrma possui poucas vigas, ou seja, é pouco recortada, facilitando a execução;
- O fato de ter poucas vigas, faz com que a estrutura não interfira muito na arquitetura.

As desvantagens das lajes com armação treliçada, vejamos algumas:

- O transporte, se a obra for longe da fábrica;
- Os equipamentos necessários para o içamento das peças; normalmente aumentam a altura total da edificação;
- Aumentam as dificuldades de compatibilização com outros subsistemas (instalações, vedação, entre outros.);
- Dificuldade em projetar uma modulação única para o pavimento todo, de maneira que o espaçamento entre as nervuras seja sempre o mesmo;
- Dificuldade na fixação dos elementos de enchimento, com a possibilidade de movimentação dos mesmos durante a concretagem.

Através da decomposição dos carregamentos em permanentes e variáveis agindo na largura de influência de cada nervura, é possível obter os esforços de momentos fletores e flechas máximas das lajes. Com o carregamento atuante na nervura passasse a considerar como uma viga apoiada.

As barras devem ser dispostas dentro do componente ou elemento estrutural, de modo a permitir e facilitar a boa qualidade das operações de lançamento e adensamento do concreto. Para garantir um bom adensamento, é necessário prever no detalhamento da disposição das armaduras espaço suficiente para entrada da agulha do vibrador.

2.2. TEORIA PARA ANÁLISE ESTRUTURAL

2.2.1. Analogia da Grelhas

Inicialmente essa metodologia foi idealizada por Marcus em 1932, que não possuía computadores, nesta época, logo era preciso utilizar processos aproximados para resolver as lajes. Em 1959, com a confirmação de que a análise de grelhas era muito semelhante com a de pórticos planos pelos métodos de deslocamento, Lightfoot e Sawko, ajustaram um programa de cálculos de pórticos plano para o cálculo de grelhas (STRAMANDINOLI, 2003).

A teoria das grelhas foi criada com o intuito de simplificar os cálculos em lajes em duas direções, uma direção no sentido vertical e a outra em sentido horizontal (em cruz), onde elas não possuíam rigidez a torção, ou que não são satisfatoriamente ancoradas nos cantos para evitar o seu levantamento. Esse método também pode ser utilizado para lajes usuais, concretadas monoliticamente com as vigas, quando não se usam armaduras de

canto da fase superior das lajes (ARAUJO,2010). Esses casos serão ilustrados nas figuras a seguir.

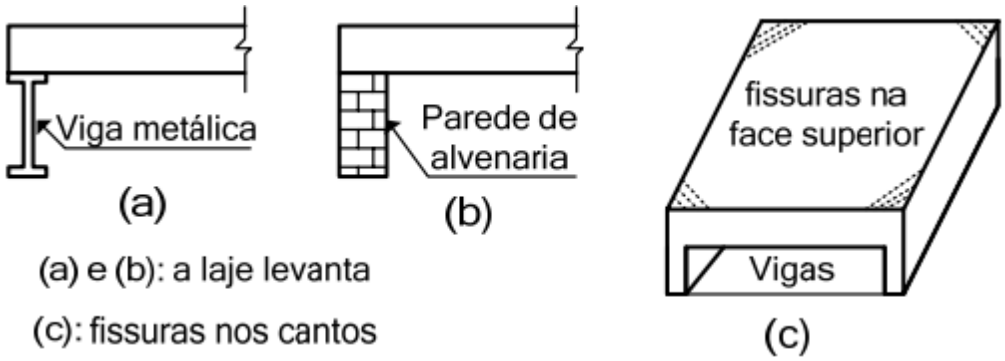


Figura 11 - Apoio articulado de lajes nas vigas (ARAÚJO, 2010).

O método visa substituir a placa (Laje) por uma malha proporcional de vigas, onde cada uma retrata uma determinada faixa das lajes, conforme a dimensões escolhidas para a abertura da malha (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

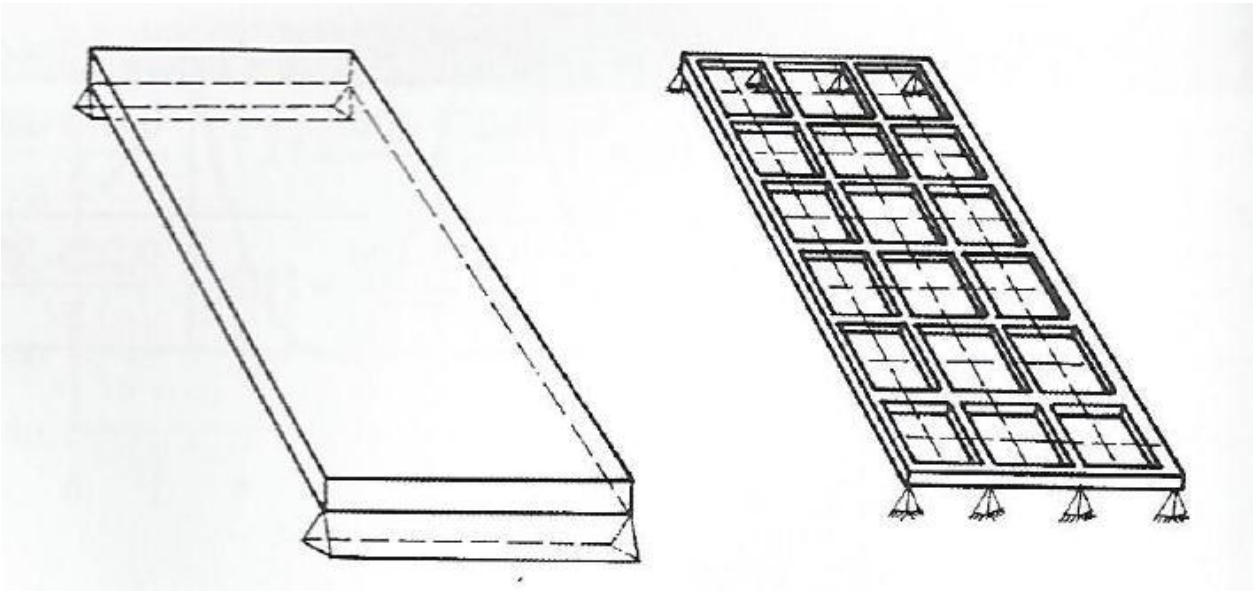


Figura 12- Laje simplificada por grelhas para avaliação estrutural (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

As cargas distribuídas atuantes no pavimento se dividem entre os elementos das grelhas, de acordo com a área de influência de cada uma, elas podem ser classificadas como uniformemente distribuídas ao longo dos elementos ou concentradas nos nós. Já as cargas concentradas devem ser consideradas diretamente nos nós, quando a posição dessas cargas não coincidir com um nó, pode-se adequar a malha ou considerar valores iguais da carga nos nós próximos (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

A rigidezes a torção e á flexão da placa, em ambas as direções, são analisadas como concentradas nos elementos da grelha. Quando as placas e os reticulados

equivalentes são forçados ao mesmo carregamento, as estruturas devem ser de forma idêntica e sofrer os mesmos esforços internos (momentos fletores, cortantes e torsores) em seções equivalentes nas estruturas. Em razão das diferenças das propriedades dos dois sistemas estruturais, mas se cuidados forem tomados nas definições de malha e se às barras forem averiguadas com propriedades adequadas, elas se comportaram de modo praticamente igual (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

As malhas de grelha podem ter uma variedade de formas, dimensões e condições de apoio da placa original, é difícil determinar regras rígidas para a definição de malha mais apropriadas, entretanto, algumas orientações auxiliam essas definições como Hambly (1976) e Takeya (1985). Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) as definições a serem adotadas:

a) Espaçamento entre os elementos da grelha equivalente não deve ser superior a ¼ do vão;
b) Para analisar os efeitos localizados, o espaçamento pode ser menor;
c) Em bordas livres os elementos devem ser considerados passando a 0,3h dessas bordas, sendo h a espessura do elemento;
d) Para placas pouco esconsas, os elementos da grelha podem ser admitidos ortogonais;
e) Quanto menores forem a largura e o comprimento das barras, e, portanto, mais densa a malha, melhores serão os resultados;
f) Orifícios na laje cuja maior dimensão não exceda a 3h não precisam ser considerados, a não ser que estejam muito próximos dos pilares.

Dessa forma a laje pode ser avaliada como mini vigas unidas e suas propriedades geométricas devem ser avaliadas para auxílio no dimensionamento. As propriedades geométricas a considerar para as grelhas são estabelecidas a partir de uma faixa de largura b, igual a soma da metade dos espaços entre os elementos vizinhos, e da espessura da altura h, da placa.

A analogia de grelhas é um método que vem sendo bastante utilizado nos últimos tempos, para análise de lajes, especialmente pela sua facilidade de compreensão e aplicação, e tem mostrado resultados convincentes para prédios com vários pavimentos. Graças aos avanços tecnológicos, o processo de analogia de grelhas está sendo aproveitadas nos softwares de análise de estruturas de concreto armado, que permite analises de uma mesma situação de diversos parâmetros, proporcionando ao projetista uma escolha mais satisfatória.

2.2.2. Teoria de Placas

A Teoria de Placas, elaborada de acordo com a teoria matemática da elasticidade, no qual o material é elástico linear (Lei de Hooke), homogêneo e isótropo, possibilita a equação geral das placas (equação diferencial de quarta ordem, não homogênea), desenvolvida por Lagrange em 1811, que associa a deformada elástica W da placa com a carga P unitária, igualmente distribuída na área da placa (Bastos, 2021). Segue a equação:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \qquad 2.7$$

Onde:

w= deslocamento vertical da placa;
p= carregamento na placa;
D= rigidez da placa à flexão, dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - v^2)} \qquad 2.8$$

A resolução da equação geral das placas, de fato acaba sendo muito complicada, motivando a criação de diversas tabelas, com vários autores e origens, tendo coeficientes que possibilitam o cálculo dos momentos fletores e das flechas em casos específicos de carregamentos e apoios. Existem tabelas de autores como: Bares, Szilard, Czerny, entre outros, que abrangem casos de lajes retangulares, essas apoiadas em articulações, engastes ou bordas livres. Com carregamento uniforme ou triangular. (Bastos,2021).

Bares ainda considera que haverá uma parcela de plastificação na laje, pois baseia na teoria de charneiras plásticas, por isso, utilizamos a tabela de Bares adaptada por Libânio, a sua classificação quanto a direção da armadura se dá por λ =ly/lx para saber se será armada em uma ou duas direções, em uma direção quando λ for maior que 2 e em duas direções quando λ for menor ou igual a 2.

Para o cálculo de momento, foi utilizado as tabelas disponibilizadas por Carvalho e Figueiredo Filho (2015) adaptando as tabelas de Bares para o coeficiente de Poisson ν = 0,20, conforme recomendação da NBR 6118:2014. Os coeficientes apresentados na Figura 13 são aplicados na equação 2.3. As tabelas de BARES se distinguem entre si de acordo com o vínculo nas bordas das lajes.

Quadro 7.2 Coeficientes α para cálculo de flechas elásticas em lajes retangulares submetidas a carregamento uniformemente distribuído.

λ	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	Caso 9
1,00	4,67	3,20	3,20	2,42	2,21	2,21	1,81	1,81	1,46
1,05	5,17	3,61	3,42	2,67	2,55	2,31	2,04	1,92	1,60
1,10	5,64	4,04	3,63	2,91	2,92	2,41	2,27	2,04	1,74
1,15	6,09	4,47	3,82	3,12	3,29	2,48	2,49	2,14	1,87
1,20	6,52	4,91	4,02	3,34	3,67	2,56	2,72	2,24	1,98
1,25	6,95	5,34	4,18	3,55	4,07	2,63	2,95	2,33	2,10
1,30	7,36	5,77	4,35	3,73	4,48	2,69	3,16	2,42	2,20
1,35	7,76	6,21	4,50	3,92	4,92	2,72	3,36	2,48	2,30
1,40	8,14	6,62	4,65	4,08	5,31	2,75	3,56	2,56	2,37
1,45	8,51	7,02	4,78	4,23	5,73	2,80	3,73	2,62	2,45
1,50	8,87	7,41	4,92	4,38	6,14	2,84	3,91	2,68	2,51
1,55	9,22	7,81	5,00	4,53	6,54	2,86	4,07	2,53	2,57
1,60	9,54	8,17	5,09	4,65	6,93	2,87	4,22	2,87	2,63
1,65	9,86	8,52	5,13	4,77	7,33	2,87	4,37	2,78	2,68
1,70	10,15	8,87	5,17	4,88	7,70	2,88	4,51	2,79	2,72
1,75	10,43	9,19	5,26	4,97	8,06	2,88	4,63	2,81	2,76
1,80	10,71	9,52	5,36	5,07	8,43	2,89	4,75	2,83	2,80
1,85	10,96	9,82	5,43	5,16	8,77	2,89	4,87	2,85	2,83
1,90	11,21	10,11	5,50	5,23	9,08	2,90	4,98	2,87	2,85
1,95	11,44	10,39	5,58	5,31	9,41	2,90	5,08	2,89	2,88
2,00	11,68	10,68	5,66	5,39	9,72	2,91	5,19	2,91	2,91
∞	15,35	15,35	6,38	6,38	15,35	3,07	6,38	3,07	3,07

Figura 13 – Coeficientes para estimativa de esforços. CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015.

Quadro 7.3 Coeficientes μ_x, μ_y, μ_x', μ_y' para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 1, 2 e 3).

λ	Caso 1		Caso 2			Caso 3		
	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y	μ_y'	μ_x	μ_x'	μ_y
1,00	4,41	4,41	3,07	3,94	8,52	3,94	8,52	3,07
1,05	4,80	4,45	3,42	3,78	8,79	4,19	8,91	2,84
1,10	5,18	4,49	3,77	3,90	9,18	4,43	9,30	2,76
1,15	5,56	4,49	4,14	3,97	9,53	4,64	9,63	2,68
1,20	5,90	4,48	4,51	4,05	9,88	4,85	9,95	2,59
1,25	6,27	4,45	4,88	4,10	10,16	5,03	10,22	2,51
1,30	6,60	4,42	5,25	4,15	10,41	5,20	10,48	2,42
1,35	6,93	4,37	5,60	4,18	10,64	5,36	10,71	2,34
1,40	7,25	4,33	5,95	4,21	10,86	5,51	10,92	2,25
1,45	7,55	4,30	6,27	4,19	11,05	5,64	11,10	2,19

Quadro 7.3 *Continuação...*

λ	Caso 1		Caso 2			Caso 3		
	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y	μ_y'	μ_x	μ_x'	μ_y
1,50	7,86	4,25	6,60	4,18	11,23	5,77	11,27	2,12
1,55	8,12	4,20	6,90	4,17	11,39	5,87	11,42	2,04
1,60	8,34	3,14	7,21	4,14	11,55	5,98	11,55	1,95
1,65	8,62	4,07	7,42	4,12	11,67	6,07	11,67	1,87
1,70	8,86	4,00	7,62	4,09	11,79	6,16	11,80	1,79
1,75	9,06	3,96	7,66	4,05	11,88	6,24	11,92	1,74
1,80	9,27	3,91	7,69	3,99	11,96	6,31	12,04	1,68
1,85	9,45	3,83	8,22	3,97	12,03	6,38	12,14	1,64
1,90	9,63	3,75	8,74	3,94	12,14	6,43	12,24	1,59
1,95	9,77	3,71	8,97	3,88	12,17	6,47	12,29	1,54
2,00	10,00	3,64	9,18	3,80	12,20	6,51	12,34	1,48
∞	12,57	3,77	9,18	3,80	12,20	7,61	12,76	1,48

Figura 14 - Coeficientes para estimativa de esforços. CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015.

3. METODOLOGIA

Desenvolveremos aqui uma análise comparativa entre os sistemas de lajes treliçadas de concreto armado e lajes maciças. Antes de tudo, definimos 5 lajes, com diferentes proporções (λ), para embasarmos a nossa pesquisa e consequentemente termos dados que nos dê condições de analisarmos os sistemas estruturais já mencionados, neste foram apresentados assuntos como elementos estruturais, métodos de análise estrutural, conceitos abordados seguindo as recomendações da NBR 6118:2014.

Através da pesquisa, foram calculados os esforços e flechas atuantes nas lajes, através das tabelas adaptadas de Bares, juntamente com a teoria de grelhas. A teoria de grelhas foi utilizada com o software TQS e o Grelha UFSCar, sendo um comercial e

institucional didático. Após, foi realizada a análise e comparação dos resultados obtidos entre as duas tipologias de lajes.

Além disso, foi realizada a modelagem das lajes utilizando o software Grelha desenvolvido pela UFSCar, usando a teoria da analogia de grelhas na análise de diferentes situações de reações, momento fletor e flecha.

Com isso compararemos os pesos das lajes, os momentos fletores máximos, as reações que vão para as vigas de contorno e as flechas imediatas. Todas as lajes foram consideradas com bordas simplesmente apoiadas e de forma isolada.

3.1. CARACTERÍSTICAS DAS LAJES

Para atingir os resultados e comparação dos tipos de lajes diferentes, foi usado um projeto de um pavimento com 5 lajes retangulares. Após serem calculados a relação λ entre o maior e o menor vão ($\lambda = ly/lx$), obtivemos a classificação das armaduras, se armadas em uma ou duas direções. Os resultados são apresentados na Tabela 1.

Laje	lx	ly	λ	Vínculo	Armação
1	2	3	1,5	1	2
2	4	4	1	1	2
3	4	8	2	1	2
4	3	7,5	2,5	1	1
5	3	6,6	2,2	1	1

Tabela 1 - Dimensões das lajes (Autores, 2021).

3.2. PARÂMETROS ADOTADOS

Utilizando a cidade de CATALÃO-GO como local, seguindo as recomendações da NBR 6118:2014, foi definido que a edificação é em ambiente urbano com pequeno risco de deterioração, adotada classe de agressividade ambiental II, conforme Tabela 6.1 da norma. O cobrimento de armadura será o de 2,5 cm. O concreto adotado foi o C25, e através da Tabela 8.1 da Norma, foi determinado módulo de elasticidade transversal do concreto para o C25, sendo E_{CS}=24 GPa.

3.3. AÇÕES

Os carregamentos que estão presentes em uma estrutura são definidos como permanentes e acidentais. Na definição das cargas permanentes das lajes, foi considerado o peso próprio, quando aplicável multiplicando o peso específico do concreto armado (γ= 25KN/m³), pela espessura da laje (h). Os revestimentos considerados, piso e forro, totalizaram um carregamento de 1,5 kN/m². O valor da carga acidental foi atribuído por 3 KN/m² seguindo as recomendações da NBR 6120:2019, na tabela 10, para área de escritório com o uso de acesso público. Os valores atribuídos para cada laje estão apresentados na Tabela 2.

Laje	H (cm)	d (cm)	PP(KN/M²)	Revestimentos (KN/m²)	Permanente (G) (KN/m²)	Acidental (q) (KN/m²)	Total característico (KN/m²)	Carregamento ELU (KN/m²)	ELS (KN/m²)
1	8	4,875	2	1,5	3,5	3	6,5	9,1	5,3
2	10	6,875	2,5	1,5	4	3	7	9,8	5,8
3	13	9,875	3,25	1,5	4,75	3	7,75	10,85	6,55
4	10,5	7,375	2,625	1,5	4,125	3	7,125	9,975	5,925
5	10,5	7,375	2,625	1,5	4,125	3	7,125	9,975	5,925

Tabela 2 -Valores de ações consideradas. (Autores, 2021).

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste tópico será apresentado os resultados dos esforços de momento fletor nas lajes e suas reações, assim como suas flechas obtidas pelas metodologias de cálculo da teoria de placas, teoria de grelhas bidirecionais e unidirecionais (apresentada pela laje treliçada unidirecional). Todas as avaliações procuraram relacionar com o fator de forma da laje ($\lambda = l_y/l_x$). Cada um dos valores a analisar estão nos subtópicos a seguir.

4.1. RESULTADOS MOMENTOS M_Y

Os valores dos momentos na maior direção (M_y) máximos das lajes do pavimento, determinados pelos diferentes métodos utilizados estão apresentados no gráfico 01.

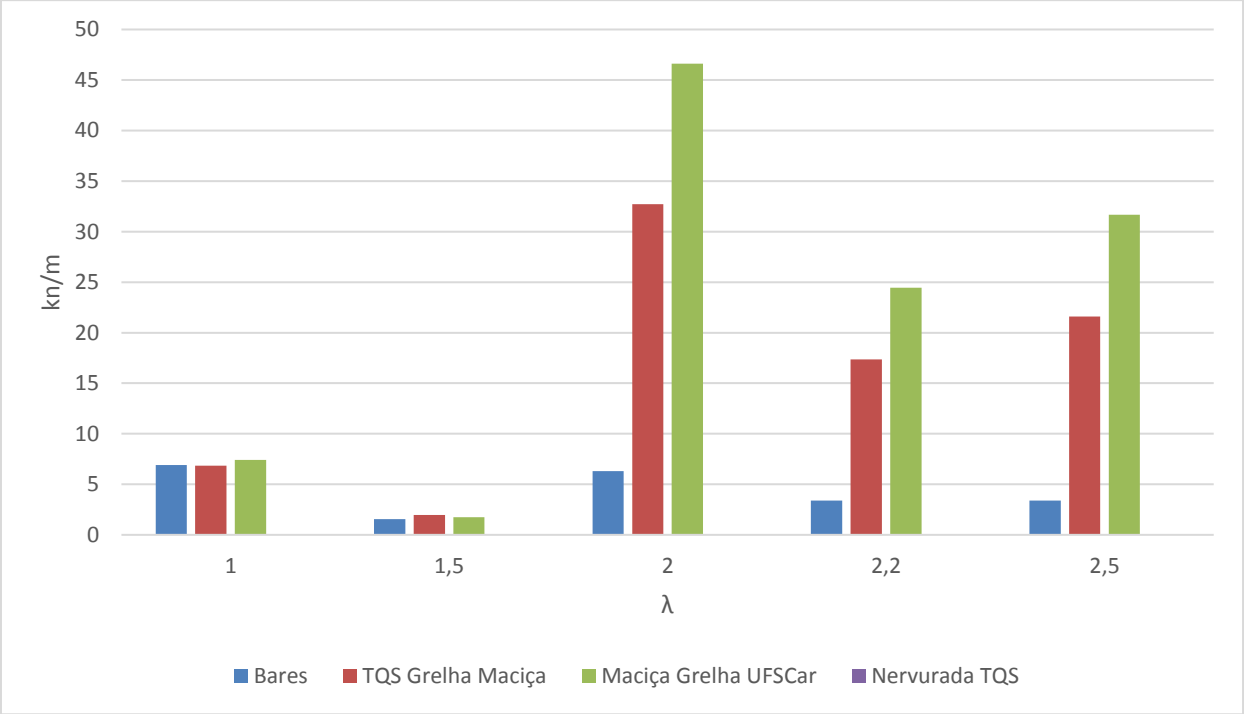


Gráfico 1 - Momento fletor na maior direção da laje (My) pelo fator de forma (λ). (Autores, 2021).

Os resultados da metodologia de Bares para λ inferiores a 2, os valores de momentos se aproximaram muito das metodologias de grelhas pelo TQS, quanto pelo Grelha UFSCar.

Para λ maior ou igual a 2, os valores dos momentos da metodologia de Bares já são inferiores as demais metodologias, isso devido ao fato de que a teoria de placas considera os deslocamentos nas duas direções e suas iterações (Eq. 2.5).

Os resultados de momentos na maior direção do TQS maciça foram, para λ maior do que 2, inferiores ao Grelha UFSCar. Isso justifica-se porque os espaçamentos entre as barras das grelhas no software educacional estão mais afastados uma das outras (*0,50 m*), tornando essa nervura mais carregada, além de mais flexível, assim dando mais momento nela. Uma das maneiras de aproximar os valores é o refinamento da grelha.

Para Grelhas Nervuradas TQS, os valores são 0, isso se dá devido a inexistência de nervuras na maior direção da laje. Não se deve considerar os momentos na maior direção, devido as lajes nervuradas treliçadas serem armadas só na menor direção, sendo constituídas apenas de armaduras principais.

4.2. RESULTADOS MOMENTOS M_X

Os valores para momentos na menor direção (M_x) máximos nas lajes do pavimento, determinadas pelos diferentes métodos utilizados estão presentes no gráfico 02.

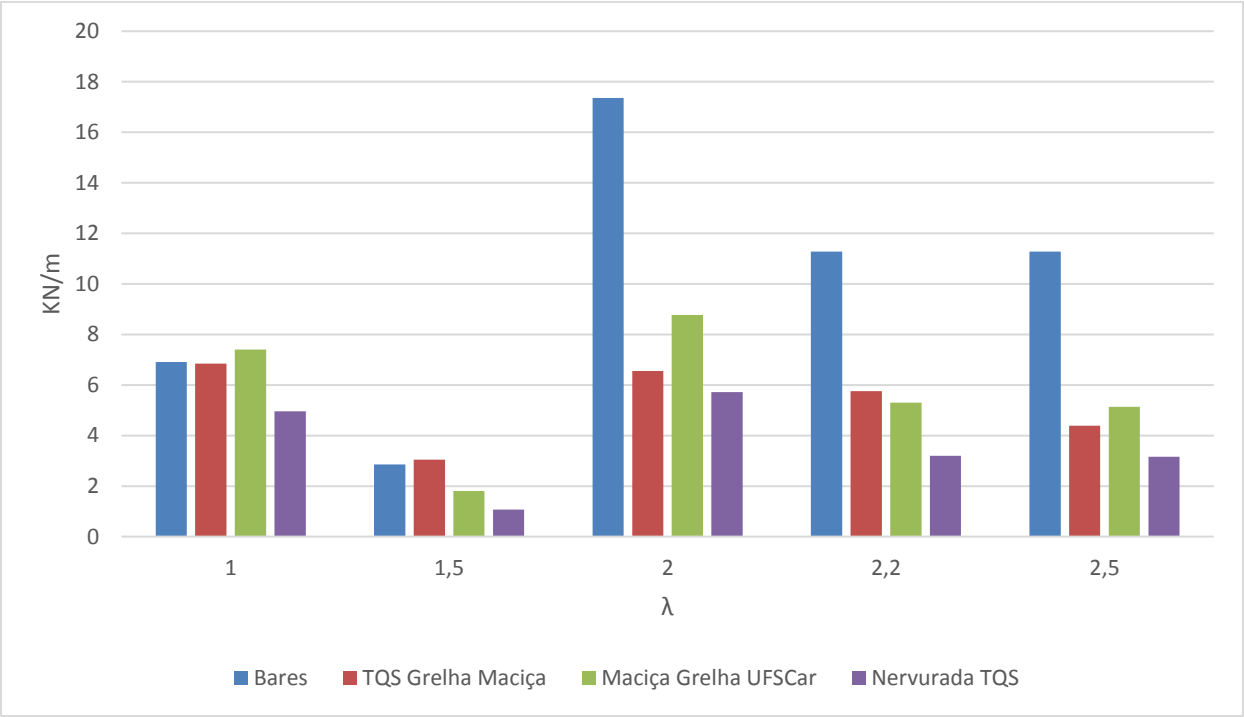


Gráfico 2 - Momento fletor na menor direção da laje (Mx) pelo fator de forma (λ). (Autores, 2021).

Assim como em My, os valores para λ inferiores a 2 pela tabela atualizada de Bares são próximos das outras metodologias. Quando λ é igual ou superior a 2, os valores já sofrem uma grande alteração podendo ser de 100% para Grelha UFSCar e até 203% em comparação a Nervurada TQS.

Para TQS Maciça (grelha bidirecional), na menor direção os valores de λ inferiores a 2 se aproximam muito da teoria de placas, quando λ= 2 se tem uma pequena diferença

de 33 % inferior a Grelha UFSCar, isso devido ao sistema adotado ter um espaçamento maior nas barras. Para λ maior que 2 os valores já se assemelham.

Para Nervura TQS os valores se apresentam sempre inferior as demais metodologias, isso devido as lajes treliçadas serem pequenas vigas armadas na menor direção, com isso, sofrendo pequenos momentos. Além do que o seu peso próprio é inferior ao das lajes maciças.

4.3. RESULTADOS DA REAÇÃO NA VIGA DE MAIOR VÃO

Os valores para resultados da reação na viga de maior vão (paralela a l_y) máximo, que as lajes do pavimento causam nas vigas, foram determinadas pelos diferentes métodos e estão apresentados no gráfico 03.

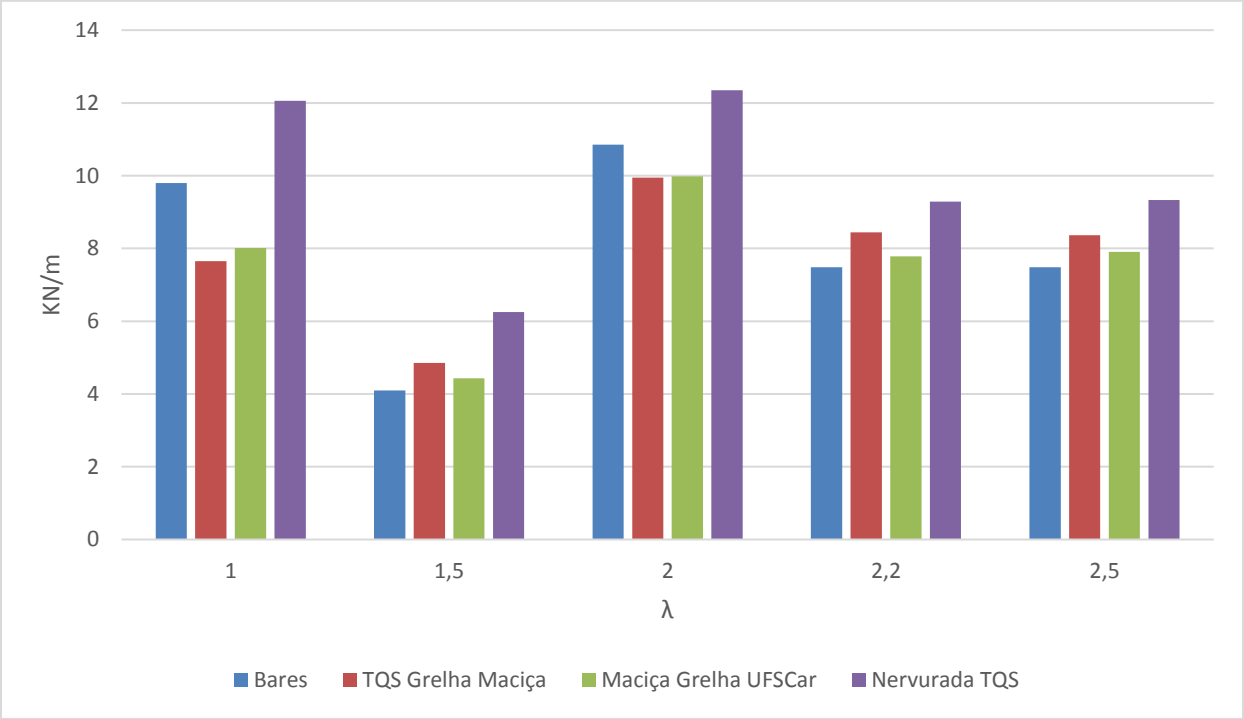


Gráfico 3 - Reação na viga de maior vão (R_{lx} da laje) pelo fator de forma (λ). (Autores, 2021).

Como representado no gráfico 03, os valores de reação tiveram uma pequena variação no método de Bares com TQS Maciça com λ=1, tendo uma diferença igual a 28% superior no método de Bares. A partir de λ>2, obtivemos valores menores para Bares, devido a teoria de Bares não ter uma boa eficiência para lajes com geometria mais retangulares, pois ela considera a teoria de placas.

Comparando os resultados dos métodos TQS Maciça e Grelha UFSCar, com λ=2, obtivemos um resultado inferior de 5% para o método TQS Maciça, um resultado bem próximo entre ambos os métodos.

Já nos métodos Grelha UFSCar e Nervurada TQS, tivemos resultados maiores no método Nervurada TQS em todos os λ adotados, resultado variando entre 15% para λ=2,5 a 34% para λ=1, estes resultados já eram esperados, devido a laje treliçada ser armada somente em uma direção e considerada apoiada na maior viga.

4.4. RESULTADOS DA REAÇÃO NA MENOR VIGA

Em valores de λ<2, os valores de TQS Maciça e Grelha UFSCar estão muito próximos. Pelo método de Bares, quando se trata de λ<2, ele se torna mais verossímil, pois utiliza a teoria de placas. Também na metodologia de Bares, com λ superior a 2, teve-se uma maior diferença nos valores obtidos, sendo que a teoria de placas não apresenta uma boa representatividade para formatos mais retangulares, sobrecarregando a viga (paralela a l_x).

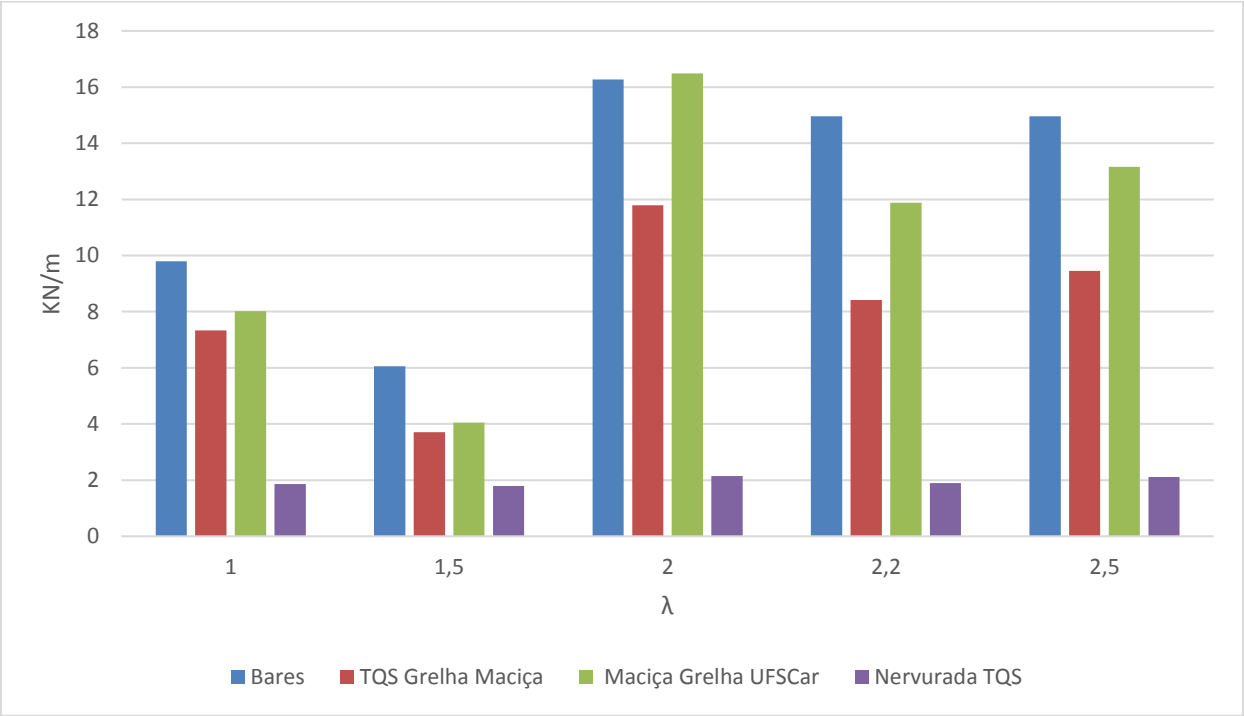


Gráfico 4 - Reação na viga de menor vão (R_{ly} da laje) pelo fator de forma (λ). (Autores, 2021).

Os valores obtidos das reações que estão direcionados a menor viga, é possível notar que a partir do valor de λ= 2, o método de Grelha UFSCar e TQS Maciça estão relativamente distantes, onde grelha é aproximadamente 30% maior que TQS Maciça, devido aos espaçamentos entre as vigas do sistema de grelhas.

Pelo método TQS nervurada, para lajes treliçadas, os valores são muito baixos em todos os valores de λ, devido a inexistência de nervuras que apoiem nessa viga. Assim os esforços nas menores vigas serão mínimos, contabilizado apenas a área de influência nas proximidades da viga.

4.5. RESULTADOS DOS DESLOCAMENTOS

Para a análise de deslocamentos imediatos (flechas iniciais), considerou os elementos em regime linear. Na utilização de softwares deve-se tomar cuidado com a redução dos valores correspondentes aos deslocamentos das vigas. Como o deslocamento é uma limitação de serviço, utilizou a combinação quase permanente de estado limite de serviço (NBR 6118:2014).

No gráfico 5, para λ igual a 1, foi encontrado o maior valor de flecha para os casos analisados, em Bares, o resultado foi de 70% do deslocamento encontrado usando o método de TQS maciça, por sua vez as flechas encontradas no TQS maciça foi de 94% para o mesmo caso quando usado o Grelha UFSCar, no entanto, do Grelha UFSCar para o nervurada TQS existe uma diferença considerável onde, o deslocamento é 260% maior, isso pode ser explicado pela espessura das lajes L2 e L3 que tem medidas de 11cm e 14cm, respectivamente. Com isso a inércia é diferente nos dois casos e consequentemente o deslocamento, pois são grandezas que se comportam de modo inversamente proporcionais em um mesmo elemento.

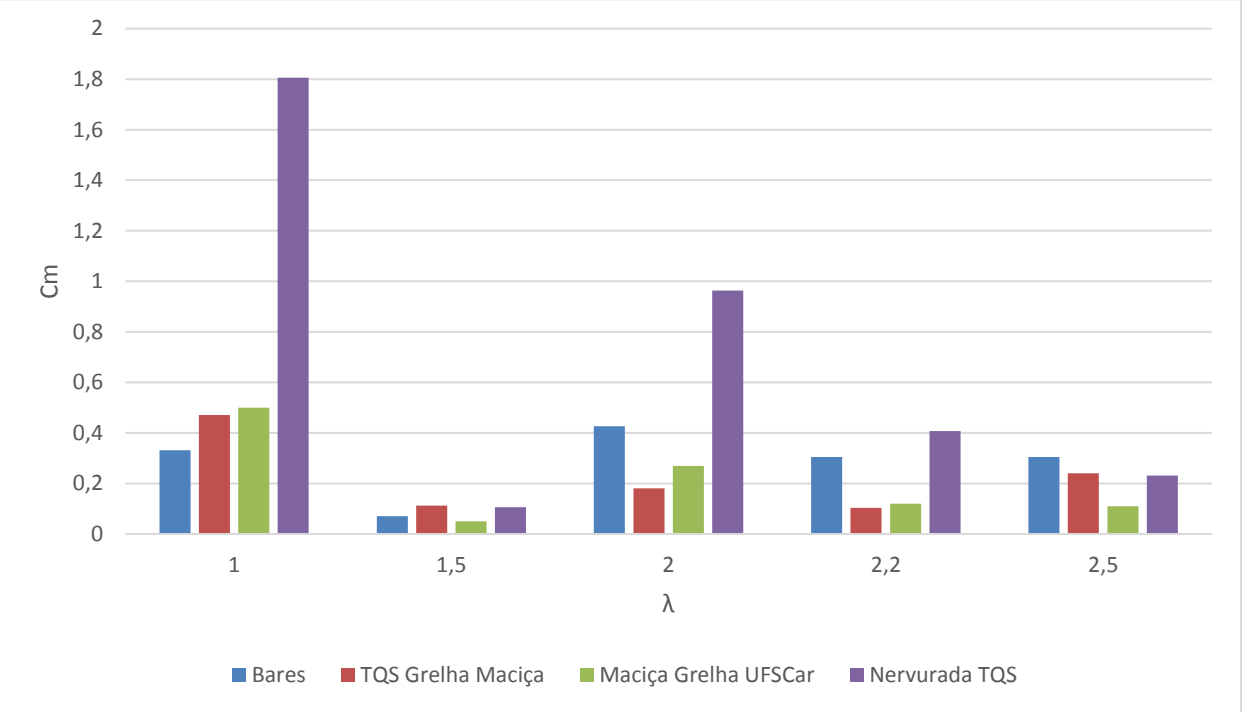


Gráfico 5 – Deslocamento máximo da laje pelo fator de forma (λ). (Autores, 2021).

5. CONCLUSÃO

A definição dos esforços em lajes é um passo importantíssimo para o dimensionamento adequado das mesmas, além de cumprirem o papel de cobertura dos cômodos em muitos casos são também o piso de pavimentos superiores, com isso a segurança torna-se um fator de relevância inconteste, uma edificação que despreza isto poderá incorrer em um alto índice de fatores inconvenientes e patológicos em curto, médio ou longo prazo, como super ou subdimensionamento, fissuras excessivas e deslocamentos indesejáveis.

A comparação entre as lajes maciças e treliçadas se deram usando a metodologia de placas e grelhas onde, o método de placas tem uma complexidade considerável, no entanto as tabelas de Bares auxiliam em muito na execução dos cálculos. O método de análise de grelhas também é bastante utilizado em vários moduladores e é capaz de chegar a valores bem similares aos de placas, com maior simplicidade nas análises dos esforços.

Nos métodos usados, o momento fletor não apresentou variações consideráveis para λ inferior a 1,5, tendo alterações consideráveis para λ superiores, apresentando maiores

diferenças para o λ igual a 2. O sistema de grelha nervurada TQS foi o que apresentou os melhores resultados para λ superiores a 2, por se aproximar mais do comportamento real das lajes.

As reações das lajes nas vigas da maior direção tiveram variações inferiores a 34%, sendo que com Bares para λ igual a 1,5 obteve-se a menor reação. Mas, a reação depende do comprimento do menor vão da laje, e este foi o caso de menor valor (L_x = 2m).

Os deslocamentos apresentados no gráfico 5 tiveram valores bem próximos, exceto para λ = 1 no método de nervurada TQS, tal fato ocorre devido as lajes treliçadas não serem as mais indicadas para casos de geometria quadrada. Mas devido a inércia da laje nervurada unidirecional foram maiores que os demais para λ até 2,20.

A comparação dos resultados de dimensionamento das lajes maciças e treliçadas pelos métodos utilizados neste trabalho deixou claro e evidente que todos eles são importantes e aplicáveis, muito embora possam ser mais recomendados para um caso em detrimento de outro, entender esta dinâmica faz toda diferença para um bom projeto. Assim, o objetivo deste trabalho de enfatizar a mudança de comportamento da laje em detrimento da sua forma comprova que a relação das dimensões das lajes influencia no seu comportamento perante os métodos de análise.

Referências

ROSA, C. A. de P. **História da ciência: da antiguidade ao renascimento científico.** Volume 1. Brasília, 2ª ed., Fundação Alexandre de Gusmão, 2012.

STOUHI, D**.** A história da arquitetura: Grécia antiga. **Archdaily**. Disponível em: https://www.archdaily.com.br/br/943316/a-historia-da-arquitetura-grecia-antiga. Acessado em: 10 abril 2021. Traduzido por: Vinicius Libardoni.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento.** Rio de Janeiro, 2014.

CARVALHO, P. G. S. Análise estrutural de placas: modelagem computacional para as teorias de Reissner-Mindlin e Kirchhoff. **XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, Brasília, 2016.

GIONGO, J. S. **Concreto armado: Projeto estrutural de edifícios**. Notas de aula. São Carlos, Escola de engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2007.

BASTOS, P. S. dos. Fundamentos de concreto armado. Notas de aula – Estruturas de concreto I, Bauru, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2011.

DORNELES, D. M. **Lajes na construção civil brasileira: Estudo de caso em edifício residencial em Santa Maria – RS.** 2011. Trabalho de conclusão de curso, Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2011.
CAD/TQS. Manual III – Análise Estrutural. TQS informática. 2015.

XAVIER, M. A. P. de MELO, W. I. Análise comparativa entre o método de Hillerborg e a teoria das charneiras plásticas na resolução de placas elásticas retangulares. **InsterScientia**. Vol. 4, nº 2, 2016.
STRAMANDINOLI, J.S.B. **Contribuições à Análise de Lajes Nervuradas por Analogia de Grelha: Dissertação** (Mestrado em Engenharia Civil). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), 2003.

ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. 3. ed. Rio Grande, 2010.v.2

BASTOS, P. S. dos. **Fundamentos de concreto armado**.2117- Estruturas de concreto I, Bauru, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2021.

MUNIZ. C. E. **Mais competitivas: lajes treliçadas,** Revista IBRACON, 1991.v.1.