



UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA
FERNANDO BOESSENKOOL

**APLICAÇÃO DE ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA CONCORDANTES NO
CÁLCULO APROXIMADO DO COMPRIMENTO DA ELIPSE:
UMA ABORDAGEM A PARTIR DOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS E DO
AJUSTE DE MÍNIMOS QUADRADOS**

Palhoça, 2021

FERNANDO BOESSENKOOL

**APLICAÇÃO DE ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA CONCORDANTES NO
CÁLCULO APROXIMADO DO COMPRIMENTO DA ELIPSE:
UMA ABORDAGEM A PARTIR DOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS E DO
AJUSTE DE MÍNIMOS QUADRADOS**

Projeto de Pesquisa para o Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Bacharelado da Universidade do Sul de Santa Catarina, campus UnisulVirtual, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel(a) em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Christian Wagner.

Palhoça, 2021

FERNANDO BOESSENKOOL

**APLICAÇÃO DE ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA CONCORDANTES NO
CÁLCULO APROXIMADO DO COMPRIMENTO DA ELIPSE:
UMA ABORDAGEM A PARTIR DOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS E DO
AJUSTE DE MÍNIMOS QUADRADOS**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado à obtenção do título de Bacharel em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática – Bacharelado, da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Palhoça, 16 de novembro de 2021.

Prof. e orientador Me. Christian Wagner
Universidade do Sul de Santa Catarina

Profa. Ma. Kelen Regina Salles Silva
Universidade do Sul de Santa Catarina

Prof. Me. Mário Selhorst
Universidade do Sul de Santa Catarina

RESUMO

A circunferência é uma forma geométrica bastante pesquisada academicamente e identificada no contorno de diversos elementos da natureza, bem como utilizada no desenvolvimento de ferramentas, utensílios e outros objetos. Dentre as aplicações encontradas para a circunferência, e estudada neste trabalho, está a concordância de arcos de circunferência. Neste contexto, este trabalho teve por objetivo apresentar uma equação para o cálculo aproximado do perímetro de uma elipse por meio de uma falsa elipse baseada em arcos de circunferência concordantes. A construção da falsa elipse é demonstrada detalhadamente a partir dos seus elementos construtivos até se obter a equação do seu comprimento, enquanto a elipse que serviu de parâmetro de medida foi desenhada sobre uma placa de isopor. Como a falsa elipse é uma simplificação da elipse, erros foram identificados ao se comparar o comprimento da falsa elipse obtido algebricamente e o comprimento da elipse desenhada sobre a placa de isopor e medida fisicamente. Para minimizar estes erros foi elaborada uma função para descrevê-los por meio de ajustes de mínimos quadrados. Por fim, alcançando o propósito da pesquisa, foi formulada uma equação incorporando a função de ajuste dos erros para obter satisfatoriamente o comprimento aproximado da elipse desenhada sobre o isopor que permitiu responder ao problema formulado para esta pesquisa: Como empregar arcos de circunferência concordantes no cálculo aproximado do perímetro de uma elipse a partir da descrição dos seus elementos geométricos construtivos e do ajuste de mínimos quadrados?

Palavras-chave: Concordância de arcos de circunferência. Elipse. Comprimento.

ABSTRACT

The circumference is a geometric shape that has been academically researched and identified in the outline of various elements of nature, as well as used in the development of tools, utensils and other objects. Among the applications found for the circumference, and studied in this work, is the concordancy of circumference arcs. In this context, this work aimed to present an equation for the approximate calculation of the perimeter of an ellipse through a false ellipse based on concordancy circumference arcs. The construction of the false ellipse is demonstrated in detail from its construction elements until obtaining the equation of its length, while the ellipse that served as a measurement parameter was drawn on a styrofoam plate. As the false ellipse is a simplification of the ellipse, errors were identified when comparing the false ellipse length obtained algebraically and the length of the ellipse drawn on the styrofoam plate and measured physically. To minimize these errors, a function was created to describe them through least squares adjustment. Finally, achieving the purpose of the research, an equation was formulated incorporating the error-fitting function to obtain the approximate length of the ellipse drawn on the styrofoam that allowed to answer satisfactorily the problem formulated for this research: How to use concordancy circumference arcs in the approximate calculation of the perimeter of an ellipse from the description of its geometric constructive elements and the least squares adjustment?

Keywords: Concordancy of circumference arcs. Ellipse. Length.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Plano oblíquo ao eixo de uma cônica dando origem a uma seção cônica (elipse)...	12
Figura 2 - Parlamento europeu.....	13
Figura 3 - Elipses superpostas na obra La Santissima Trinidad, Caravaggio.....	13
Figura 4 - Curvatura de uma fruta representada por arcos de circunferência concordantes....	13
Figura 5 - Imagem do Coliseu.....	14
Figura 6 - Elipse em duas dimensões e seus elementos.....	20
Figura 7 - Exemplo de concordância de arcos de circunferências.....	23
Figura 8 - Falsa elipse com 4 centros (K, H, M e L).....	26
Figura 9 - Falsa elipse pelo método de Slantz.....	26
Figura 10 - Falsa elipse com 4 centros (C, E, F e G).....	27
Figura 11 - Falsa elipse dado o eixo menor.....	27
Figura 12 - Falsa elipse dado o eixo maior.....	28
Figura 13 - Método de Stirling.....	29
Figura 14 - Método de Vignola.....	29
Figura 15 - Partição i de uma circunferência com variação $\Delta\theta_i$	31
Figura 16 - Variações nos eixos x e y decorrentes de uma variação infinitesimalmente pequena de θ ($\Delta\theta_i$).....	32
Figura 17 - Construção da reta.....	35
Figura 18 - Visualização da norma de um vetor.....	37
Figura 19 - Lei dos Cossenos Graficamente.....	38
Figura 20 - Técnica a ser utilizada para o desenho da elipse.....	50
Figura 21 - Arcos de elipses com excentricidades variadas.....	51
Figura 22 - Desenho de algumas elipses sobre uma placa de isopor.....	64
Figura 23 - Corte das elipses.....	65
Figura 24 - Medição do comprimento das elipses em relação ao primeiro quadrante.....	66
Figura 25 - Montagem das elipses que foram cortadas.....	67
Figura 26 - Visualização do arco de circunferência da equação exemplificada.....	76
Figura 27 - Detalhe da caneta escolhida para o desenho da elipse.....	78
Figura 28 - Ilustração de uma linha partindo do ponto A e contornando um objeto B.....	78
Figura 29 - Divergência no traço da elipse.....	79
Figura 30 - Caminho percorrido pela linha ao contornar um objeto no maior valor do semieixo b da elipse.....	79
Figura 31 - Caminho percorrido pela linha ao contornar um objeto no menor valor do semieixo b da elipse.....	79
Figura 32 - Fixação de uma argola na caneta para a passagem da linha.....	80
Figura 33 - Fio de tungstênio de 0,04 mm (esticado) passando pela argola.....	81
Figura 34 - Linha têxtil (esticada) passando pela argola.....	81
Figura 35 - Deformação sofrida por um fio de tungstênio de 0,04 mm esticado ao deslizar pelo interior de uma argola.....	81
Figura 36 - Cálculo do comprimento da elipse com o Geogebra.....	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros para amostragem de perímetros de elipses.....	49
Tabela 2 - Amostras de perímetros de elipses.....	52
Tabela 3 - Coleta do comprimento das elipses (valores medidos manualmente).....	67
Tabela 4 – Comparativo entre os comprimentos da elipse e da falsa elipse.....	68
Tabela 5 - Relações entre a e b para avaliação da função de ajuste dos erros.....	70
Tabela 6 - Resultado dos índices s^2 e AIC_c para os modelos polinomiais de grau 1 a 10.....	72
Tabela 7 - Comparativo entre o comprimento da elipse medida sobre o isopor e da elipse calculada pela Equação (3).....	83
Tabela 8 - Comparativo entre os valores obtidos pela função de ajuste dos erros, Equação (64), e os erros identificados na Tabela 4.....	84
Tabela 9 - Comparativo entre o comprimento da elipse medida no isopor e da falsa elipse $[f(a,b)]$	86
Tabela 10 - Comparativo dos erros identificados entre a elipse medida e as funções $g(a,b)$ e $f(a,b)$	87

SUMÁRIO

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	11
1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA.....	11
1.2 PROBLEMATIZAÇÃO.....	11
1.3 JUSTIFICATIVAS.....	16
1.4 OBJETIVOS.....	17
1.4.1 Objetivo Geral.....	17
1.4.2 Objetivos Específicos.....	17
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	18
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	19
2.1 ELIPSE.....	19
2.1.1 Aspectos teóricos da elipse.....	19
2.1.2 A elipse no contexto de outras pesquisas.....	22
2.2 CONCORDÂNCIA ENTRE ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA.....	22
2.2.1 Aspectos teóricos da concordância entre arcos de circunferência.....	23
2.2.2 A concordância entre arcos de circunferência no contexto de outras pesquisas.....	24
2.3 FALSA ELIPSE.....	25
2.3.1 Aspectos teóricos da falsa elipse.....	25
2.3.2 A falsa elipse no contexto de outras pesquisas.....	28
2.4 CÁLCULO DO COMPRIMENTO DO ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA.....	31
2.4.1 Aspectos teóricos do cálculo do comprimento do arco de circunferência.....	31
2.5 EQUAÇÃO DA RETA.....	34
2.5.1 Aspectos teóricos da equação da reta.....	34
2.6 PRODUTO INTERNO EUCLIDIANO.....	36
2.6.1 Aspectos teóricos do produto interno euclidiano.....	36
2.7 AJUSTE DE MÍNIMOS QUADRADOS.....	40
2.7.1 Aspectos teóricos do ajuste de mínimos quadrados.....	40
2.7.2 Os ajustes adotados no contexto de outras pesquisas.....	44
2.8 NOÇÃO DE FUNÇÕES E O COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO.....	45
2.8.1 Aspectos teóricos da noção de funções e do coeficiente de determinação.....	46
3 DELIMITAÇÃO METODOLÓGICA.....	48

3.1 TIPO DA PESQUISA.....	48
3.2 POPULAÇÃO E PROCESSO DE AMOSTRAGEM.....	49
3.3 COLETA DE DADOS.....	50
3.3.1 Instrumentos para a coleta de dados.....	50
3.3.2 Procedimentos para a coleta de dados.....	51
3.4 TRATAMENTO DOS DADOS.....	52
4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	53
4.1 APRESENTAÇÃO.....	53
4.1.1 Desenho do primeiro quadrante da falsa elipse por meio do software Geogebra....	54
4.1.2 Identificação dos elementos geométricos da falsa elipse.....	54
4.1.2.1 Segmento de reta CB (Passo 1).....	55
4.1.2.2 Ponto P (Passo 2).....	55
4.1.2.3 Ponto K (Passo 3).....	56
4.1.2.4 Vetores u e w (Passo 4).....	57
4.1.2.5 Ponto T (Passo 5).....	57
4.1.2.6 Reta r e os pontos U e W (Passo 6).....	58
4.1.2.7 Ângulos α e β (Passo 7).....	60
4.1.3 Cálculo do comprimento da falsa elipse.....	60
4.1.3.1 Comprimento do arco de circunferência com centro em W (Passo 8).....	61
4.1.3.2 Comprimento do arco de circunferência com centro em U (Passo 8).....	62
4.1.3.3 Equação do comprimento da falsa elipse: $g(a,b)$	62
4.1.4 Comparação entre o comprimento da elipse e da falsa elipse.....	63
4.1.4.1 O desenho da elipse sobre a placa de isopor.....	64
4.1.4.2 Coleta e comparação dos dados.....	65
4.1.5 A função de ajuste dos erros: $E(a,b)$.....	69
4.1.5.1 Identificando a relação entre a e b (variável x) para descrever os erros (variável y)....	70
4.1.5.2 Escolha da função.....	72
4.1.5.3 Identificação do grau da função polinomial.....	72
4.1.5.4 Identificação dos coeficientes da função polinomial.....	73
4.1.6 Formulação da equação do comprimento da elipse a partir da falsa elipse e da função de ajuste dos erros.....	74
4.2 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	75
4.2.1 Comparativo gráfico entre o traço da falsa elipse e o traço da elipse.....	75
4.2.2 Considerações sobre o desenho da elipse na placa de isopor.....	78

4.2.3 Comparativo entre o comprimento da elipse medida no isopor e da elipse calculada pela Equação (3).....	82
4.2.4 Avaliação da função de ajuste dos erros - Equação (64).....	84
4.2.5 Avaliação do comprimento da falsa elipse Equação (65) e a elipse medida no isopor	85
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	88
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.....	90
APÊNDICE A – DESENHO DA FALSA ELIPSE UTILIZANDO O MÉTODO TRADICIONAL DOS 4 CENTROS (OU 4 ARCOS).....	94
APÊNDICE B – CÓDIGO FONTE DE PROGRAMA NA LINGUAGEM PYTHON PARA O CÁLCULO DOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO $E(A,B)$ POR MEIO DO AJUSTE DE MÍNIMOS QUADRADOS.....	96
APÊNDICE C – FUNÇÕES AJUSTADAS PELO MÍNIMO QUADRADO PARA EXPLICAR A RELAÇÃO ENTRE B/A (VARIÁVEL X) E OS ERROS (VARIÁVEL Y)	97
APÊNDICE D – CÁLCULO DOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO $E(A,B)$ POR MEIO DA FUNÇÃO LINEST – CALC (LIBREOFFICE).....	98
APÊNDICE E – CÓDIGO FONTE DE PROGRAMA NA LINGUAGEM PYTHON PARA O CÁLCULO DA EQUAÇÃO (3) PARA DIFERENTES VALORES DE B.....	99

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Esta seção trata do tema a ser abordado neste projeto e sua delimitação, além de apresentar a problematização, justificativa e objetivo.

1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA

Arcos de circunferência concordantes podem ser empregados na representação de curvas suaves. Neste trabalho, demonstra-se interesse em aplicá-los em relação à elipse visando o cálculo aproximado do comprimento dessa seção cônica sob uma abordagem dos elementos geométricos construtivos dos arcos e com o uso do ajuste de mínimos quadrados.

Dado o escopo da pesquisa, a sua análise será delimitada ao exame de livros, artigos, teses e outros documentos bibliográficos relacionados ao assunto.

1.2 PROBLEMATIZAÇÃO

Uma das áreas da matemática mais explorada desde os seus primórdios é a geometria. A busca em conhecer as formas geométricas e suas medidas levou o homem a desenvolver diversos estudos que resultaram em importantes descobertas, algumas formalizadas em teoremas, outras detalhadas em livros, pergaminhos e até escritas em pedras e que até hoje contribuem no desenvolvimento de novas frentes de pesquisa.

A geometria ocupa o centro da atenção de um grande público, pois mesmos suas formas planas mais elementares, como quadrados, triângulos e círculos são úteis tanto em ofícios que requerem um conhecimento mais avançado quanto naquelas atividades mais simples, não obstante a importância de cada uma delas. Todavia, as formas geométricas não se resumem apenas àquelas citadas anteriormente, mas se expandem para outras formas não planas, fractais etc.

Além das formas geométricas conhecidas, como as citadas, pode-se encontrar no mundo real objetos que não possuem um formato definido e estudado. No entanto, em alguns casos é possível dizer que um objeto, ou parte dele, se assemelha a uma determinada forma geométrica, como no caso de uma laranja que se assemelha a um círculo, quando vista em duas dimensões.

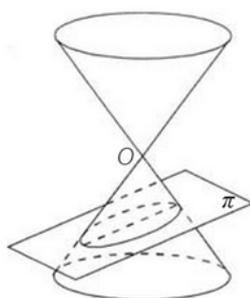
Todavia, há casos em que os objetos não se parecem com nenhuma forma pesquisada, mas verifica-se que os seus contornos podem ser vistos como parte de alguma forma geométrica conhecida.

Para estes objetos, em variedades incontáveis, pode-se desejar, por algum motivo, conhecer o seu perímetro (comprimento). Em relação a objetos menores, uma solução seria medi-los com o uso de uma fita métrica, ou outro instrumento, mas e nos casos onde esta solução não possa ser aplicada?

A dificuldade que se observa na mensuração do comprimento de uma figura sem uma forma conhecida e para a qual não se tem de antemão uma equação previamente definida também ocorreu no passado ao se tentar medir o perímetro de uma elipse.

A elipse é uma forma geométrica oriunda das seções cônicas, como as hipérbolas e parábolas, que surgem da interseção entre os pontos que formam um plano e uma cônica, como pode ser observado na figura abaixo.

Figura 1 - Plano oblíquo ao eixo de uma cônica dando origem a uma seção cônica (elipse).



Fonte: Borin Junior (2014, p. 78).

Embora as formas geométricas decorrentes das seções cônicas se originem da interseção de formas tridimensionais, elas também podem ser representadas em duas dimensões.

Ao contrário do que se pode pensar, a elipse não é uma forma que reside apenas no mundo abstrato da matemática, mas pode ser encontrada em diversos contextos, como na arte, arquitetura e astronomia.

Figura 2 - Parlamento europeu.



Fonte:

<https://www.e-architect.com/images/jpgs/france/europeanparliament a141011 3.jpg>.

Figura 3 - Elipses superpostas na obra La Santissima Trinidad, Caravaggio.

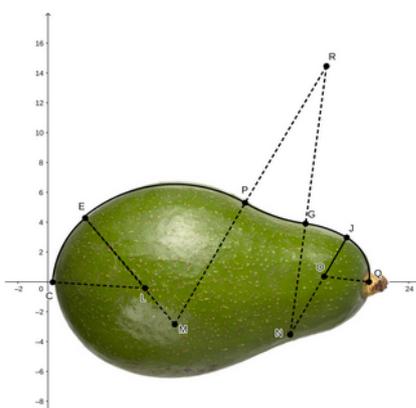


Fonte: Fraga, Lorenzo e Alonso (2020, p.118).

No campo matemático, registra-se, em especial, as dificuldades que se teve ao longo do tempo em calcular o comprimento da elipse, cuja expressão precisa só foi alcançada no século XVIII (GINOUX; GOLVIN, 2020). Até então, muitos estudos tinham sido conduzidos obtendo apenas uma aproximação para o seu comprimento.

Uma possível maneira para se obter um valor aproximado do perímetro de uma elipse é utilizando circunferências, pois, dentre as suas inúmeras aplicações, elas possibilitam representar curvas suaves por meio de arcos concordantes, como mostra a figura abaixo.

Figura 4 - Curvatura de uma fruta representada por arcos de circunferência concordantes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que se trata de uma aplicação de grande utilidade das circunferências, sendo possível empregá-la em curvas suaves conhecidas ou não, como no caso apresentado pela figura acima.

Na história há registros do uso de arcos de circunferência concordantes, como na construção do Coliseu, em Roma (GINOUX; GOLVIN, 2020, p. 22).

Figura 5 - Imagem do Coliseu.



Fonte: <https://www.enroma.com/wp-content/uploads/2018/04/Tour-Coliseo-con-Subterrneos-1.jpg>

De acordo com a literatura e, também, segundo Barnard, Pearce e Schovanec (2001, p. 296), o comprimento da elipse é dado pela seguinte equação integral:

$$I = \int \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \quad (1)$$

Contudo, Pedrosa (2018, p. 37) assevera que muitos matemáticos já tentaram resolver a Equação (1), mas acabaram concluindo que ela é de difícil solução por meio de funções elementares. Todavia, em sua tese, Pedrosa (2018, p. 39) apresenta uma equação para o comprimento aproximado da elipse tomando por base o Produto de Wallis.

$$L \approx 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 \right) \quad (2)$$

Onde, ε corresponde à excentricidade da elipse, ou seja $\varepsilon = \frac{c}{a}$, e c é a distância do centro da elipse até um dos focos, de modo que $a^2 = b^2 + c^2$, como mostra mais adiante a figura (6).

Em virtude da dificuldade para se calcular com exatidão o comprimento da elipse, Barnard, Pearce e Schovanec (2001, p. 298) apresentam diversas equações, formuladas ao longo do tempo, que são aproximações para o comprimento da elipse.

Para Lampret (2019, p. 52), a primeira fórmula exata para calcular o comprimento de elipse foi dada por Collin Maclaurin na forma de uma soma de uma série infinita.

$$P(a, b) = 2\pi a \sum \binom{\frac{1}{2}}{k} (1 - 2k) \varepsilon^{2k} \quad (3)$$

Onde, ε tem a mesma interpretação dada na Equação (2). Aliás, a Equação (2) é o desenvolvimento da Equação (3), contudo, obtida a partir do Produto de Wallis.

Ressalta-se, no entanto, que a exatidão comentada por Lampret é obtida ao se proceder à soma infinita da Equação (3).

Dentre os métodos que podem ser utilizados para alcançar uma aproximação do comprimento da elipse se encontra o uso de arcos de circunferência concordantes, que ao serem combinados dão origem à denominada falsa elipse, um tipo de oval regular (JARDIM; GIORA, 2018).

Embora não seja um método novo a ser aplicado para o cálculo aproximado do comprimento de uma elipse, encontra-se na literatura trabalhos recentes que abordaram este método, dentre eles, cita-se os estudos envolvendo uma falsa elipse de 4 arcos (QIAN, 2011) e (QIAN; QIAN, 2001), 5 centros (ROSIN; PITTEWAY, 2001) e oito centros (GINOUX; GOLVIN, 2020).

Diante do que foi apresentado, propõe-se responder a seguinte pergunta: Como empregar arcos de circunferência concordantes no cálculo aproximado do perímetro de uma elipse a partir da descrição dos seus elementos geométricos construtivos e do ajuste de mínimos quadrados?

1.3 JUSTIFICATIVAS

Tendo em vista as diversas equações construídas ao longo do tempo para encontrar o perímetro aproximado da elipse, o presente trabalho busca contribuir nesta questão ao apresentar uma abordagem baseada na descrição dos elementos geométricos construtivos dos arcos de circunferência concordantes a partir do desenho da falsa elipse e da maximização da aproximação do cálculo do perímetro da elipse por meio do ajuste de mínimos quadrados.

Para Rosin (2001, p. 13), a aproximação da elipse por meio de arcos de circunferência simplificam sua construção e manipulação, além de serem úteis em várias aplicações:

... , in fields such as mathematics (generating figures), astronomy (analysing orbits), art (marking out large oval frames for ceiling painting), architecture (building masonry arches, floor plans, etc), and, more recently, the conversion of fonts from a general conic specification to circular arcs [1, 2].

Rosin (1999, p. 270) destaca a importância da aproximação de uma elipse por meio de círculos em outras áreas:

- For instance, its curvature is continuously varying. Thus while circular sections can be detected in image curves relatively easily by testing for constant curvature such methods cannot be readily extended to work with ellipses.
- Some applications such as fitting ellipses to scattered data require some error estimate to be minimised. The most natural error estimate for a point is the Euclidean distance from the point along the normal to the ellipse. Unfortunately this requires solving a quartic equation, and choosing the minimum of the four solutions. In practice this is rarely carried out, and approximations to the Euclidean distance are used instead.
- The parallels of an ellipse are not ellipses themselves, but are eighth order polynomials (Gridgeman, 1970a). Determining such parallels is useful in applications such as architecture which requires parallel rows of columns, etc., and in CAD where the offset curves of paths made by NC milling machines need to be determined (Elber et al., 1997).

Além das aplicações vistas acima, destaca-se como maior contribuição deste trabalho a metodologia desenvolvida para o cálculo do perímetro da elipse a partir da sua representação por meio de arcos de circunferência concordantes que, *mutatis mutandis*, permitirá seu uso em relação a outras formas geométricas para as quais não se tenha de antemão uma equação definida/conhecida e, quiçá, ser aplicada na formulação de funções matemáticas para casos onde métodos como o de ajuste de mínimos quadrados não sejam suficientes.

Em outras palavras, espera-se com este trabalho aproximar aspectos abstratos da matemática do mundo real.

1.4 OBJETIVOS

Nesta seção será tratado do objetivo deste projeto e, também, dos objetivos específicos traçados visando alcançar o objetivo geral.

1.4.1 Objetivo Geral

O objetivo desta pesquisa é equacionar o comprimento aproximado da elipse em relação ao comprimento dos arcos de circunferência concordantes, construídos para representarem a elipse, e de uma função de ajuste dos erros, decorrentes da comparação entre essas duas estruturas geométricas, por meio do emprego do ajuste de mínimos quadrados.

1.4.2 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo proposto para esta pesquisa, pretende-se desenvolver as seguintes ações:

- (a) desenhar o primeiro quadrante de uma falsa elipse, com base em arcos de circunferência concordantes, tomando por referência os eixos maior e menor de uma elipse;
- (b) identificar os elementos geométricos (pontos, retas, segmentos de reta, arcos e raios das circunferências etc) da falsa elipse e traduzi-los em uma linguagem matemática;
- (c) calcular o perímetro da falsa elipse;
- (d) comparar o perímetro da falsa elipse em relação à elipse;

(e) fazer uso da linguagem de programação Python para encontrar uma função que represente o erro do perímetro entre a falsa elipse e a elipse com o uso do ajuste de mínimos quadrados;

(f) formular uma equação que permita calcular o perímetro de uma elipse a partir de uma falsa elipse.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O desenvolvimento deste projeto está estruturado em 4 partes.

A primeira parte que está sendo apresentada se refere aos aspectos introdutórios da pesquisa abarcando o tema e sua delimitação, a problematização, a justificativa e o objetivo.

Na segunda parte, correspondente ao segundo capítulo, será tratado o referencial teórico, onde serão abordados em subseções os conhecimentos orientados à solução do problema relacionado à elipse, arcos de circunferência concordante, falsa elipse, cálculo do comprimento do arco de circunferência, equação da reta, produto interno euclidiano e ajuste de mínimos quadrados.

A terceira parte abordará a delimitação metodológica, detalhando, em subseções, aspectos relacionados ao tipo de pesquisa, processo de amostragem, bem como a coleta e o tratamento dos dados.

Por fim, a quarta parte será utilizada para demonstrar as etapas metodológicas e o cronograma do projeto.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para o desenvolvimento deste projeto, alguns referenciais teóricos serão trazidos para a condução da análise. Propondo uma melhor organização do texto, para cada item a ser abordado será feita, em subseções, (i) uma apresentação teórica, com base na literatura clássica, e, quando aplicável, (ii) uma descrição da forma como o item foi tratado em trabalhos que foram encontrados e que estudaram tema semelhante ao apresentado neste projeto.

Portanto, neste capítulo, serão tratados os pontos que embasarão o desenvolvimento do projeto e darão suporte aos resultados encontrados.

Buscando uma aproximação em relação aos objetivos específicos que foram elencados para alcançar o objetivo geral desta pesquisa, os seguintes elementos serão estudados: (a) elipse, (b) concordância entre arcos de circunferência; (c) falsa elipse; (d) cálculo do comprimento de uma circunferência; (e) equação da reta; (f) produto interno euclidiano; e (g) ajuste de mínimos quadrados.

2.1 ELIPSE

Conforme visto inicialmente, a elipse é uma forma geométrica que se origina da interseção entre uma cônica e um plano oblíquo em relação ao seu eixo, como pode ser observado na figura (1). Embora se origine de formas geométricas tridimensionais, ela pode ser representada em duas dimensões (forma plana), como se fosse vista de cima.

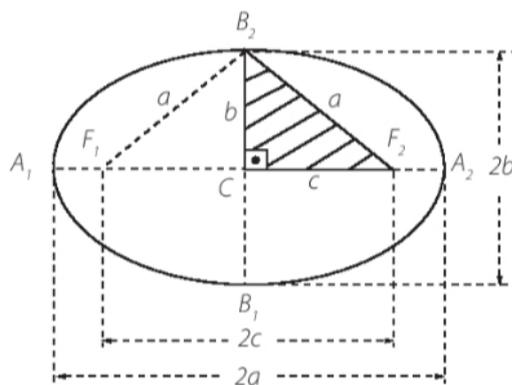
2.1.1 Aspectos teóricos da elipse

Uma definição da elipse pode ser encontrada em Caldeira *et al.* (2012, p. 159):

Definição: Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano, seja $2c$ a distância entre eles. *Elipse* é o conjunto dos pontos P , do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$.

A figura a seguir apresenta a elipse em duas dimensões, que será abordada neste trabalho, bem como seus elementos.

Figura 6 - Elipse em duas dimensões e seus elementos.



Fonte: Borin Junior (2014, p. 82).

Caldeira *et al.* (2012, p. 159) apresentam algumas relações entre os elementos da elipse que são mostradas a seguir com as devidas adaptações para os elementos da figura (6) acima:

$$\overline{F_1F_2} = 2c \text{ e } \overline{F_1B_2} + \overline{B_2F_2} = 2a$$

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1F_1} + \overline{F_1F_2} + \overline{F_2A_2} = \overline{A_1F_1} + \overline{F_1F_2} + \overline{A_1F_1} = \overline{F_1A_1} + \overline{A_1F_2} = 2a$$

Um elemento característico da elipse é a sua excentricidade, que representa o seu grau de achatamento. Segundo Caldeira *et al.* (2012, p. 159), a excentricidade é dada por $\frac{c}{a}$.

No tocante à descrição matemática de uma elipse, de acordo com Stewart (2016, Apêndice A17), a elipse de posição-padrão (centrada na origem) é uma curva com a seguinte equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

Sendo que a e b são números positivos e correspondem à metade do eixo maior e à metade do eixo menor, respectivamente, conforme mostra a figura (6).

A elipse também pode ser descrita em coordenadas polares com a seguinte parametrização em termos vetoriais (GONÇALVES; FLEMMING, 2007, p. 34):

$$\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (5)$$

Sendo que a Equação (5) ainda pode ser expressa parametricamente (SILVA, 2020, p. 161):

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (6)$$

Alencar *et al.* (2020, p. 24-25), ao tratarem da reparametrização de curvas e comprimento de arco, apresentam a seguinte definição para o comprimento de arco, aplicável à elipse:

Definição 1.40. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, de classe C^1 , dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. A função $\mathcal{L}_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\mathcal{L}_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2} d\xi,$$

$t_0 \in I$, é denominada função comprimento de arco.

A partir da definição acima, e tomando as coordenadas polares de uma elipse, onde $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$, o seu comprimento é dado pela Equação (1).

Embora o estudo no campo da geometria diferencial tenha conseguido formalizar o comprimento de uma elipse por meio de uma integral, esta é de difícil solução como visto anteriormente, sendo necessário o uso de outros meios para calculá-la que, em geral, alcançam valores aproximados, como os métodos numéricos, somatórios etc. Neste sentido, o que se constata na literatura é a existência de inúmeras equações que apontam para um valor aproximado, como a Equação (2). Nada obstante, a Equação (3), proposta por Collin Maclaurin, que oferece um valor exato para o comprimento da elipse, contudo, requerendo um somatório infinito.

2.1.2 A elipse no contexto de outras pesquisas

Constatou-se que a abordagem da elipse nos trabalhos pesquisados foi bastante sumária, possivelmente pelo fato de se tratar de artigos que, por este motivo, requerem um texto mais conciso.

No entanto, destaca-se os seguintes recortes:

a) Silva *et al.* (2020, p. 159-169) ao abordarem a elipse do ponto de vista do ângulo característico, apresentaram dentre outros, os elementos característicos desta seção cônica e a equação da elipse válida, inclusive, para aquelas não centradas na origem (uma generalização da Equação (4)):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, a > b. \quad (7)$$

b) Ginoux e Golvin (2020, p. 20-29) apresentaram uma retrospectiva histórica da elipse e da maneira como esta forma geométrica era construída em séculos passados com o uso de falsas elipses.

2.2 CONCORDÂNCIA ENTRE ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

Após a abordagem teórica da elipse, esta seção tratará de um ponto bastante interessante para este projeto, uma vez que se busca por meio da concordância entre arcos de circunferência construir a falsa elipse que representará a elipse.

Constatou-se na literatura que se trata de um tópico pouco explorado do ponto de vista teórico. Em geral, o assunto é retratado por meio de desenhos exemplificativos com poucas definições.

Embora este trabalho analise um cenário envolvendo a concordância entre arcos de circunferência, ela também se aplica no contexto de uma reta e um arco de circunferência.

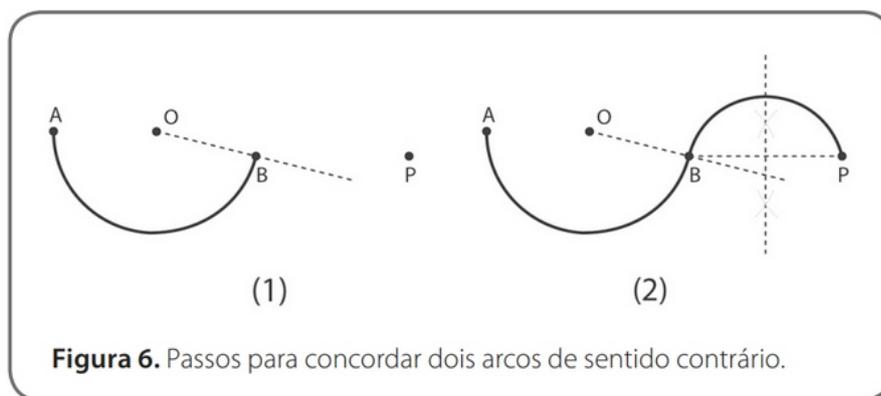
2.2.1 Aspectos teóricos da concordância entre arcos de circunferência

De acordo com Jardim e Giora (2018, p. 75), a concordância entre elementos geométricos, como retas e circunferências, ocorre quando no ponto de contato entre eles se verifica uma suavidade ao passar de um elemento para outro, sem a existência de ângulo ou reversão. Este ponto de contato é denominado de ponto de tangência, que, no caso da concordância, se chama ponto de concordância.

De forma semelhante, Costa (2016, p. 146) afirma que “Pode ser feita concordância entre dois arcos de circunferência ou um arco de circunferência e uma reta (reta, semirreta ou segmentos de reta). Porém essa ligação deve ser feita com suavidade, sem haver inflexão ou fraturas.”.

A figura abaixo ilustra um exemplo de concordância de arcos de circunferência em sentido contrário.

Figura 7 - Exemplo de concordância de arcos de circunferências.



Fonte: Jardim e Giora (2018, p. 81).

Com base na figura acima, constata-se que o ponto *B* é o ponto de concordância entre os dois arcos de circunferência.

Para os arcos de circunferência concordantes, segundo Jardim e Giora apud Costa (2018, p. 76), vale o seguinte princípio:

2. Dois arcos concordantes possuem centros e ponto de concordância colineares, ou seja, estão sobre uma mesma reta. Além disso, no ponto de concordância entre dois arcos é possível traçar uma tangente comum, conforme leciona Costa (2011).

Do princípio apresentado acima, depreende-se que a concordância entre dois arcos de circunferência ocorre quando:

- (i) Os centros dos arcos e o ponto de concordância são colineares;
- (ii) Entre os dois arcos existe uma tangente comum no ponto de concordância.

Da mesma forma, Costa (2016, p. 146) também aponta para a necessidade de que os arcos concordantes admitam um ponto com a mesma tangente e que o centro dos dois arcos esteja em uma mesma reta.

2.2.2 A concordância entre arcos de circunferência no contexto de outras pesquisas

Rosin (1999, p. 210), ao tratar do ponto de tangência (ou ponto de concordância) em seu trabalho, afirmou que a união dos arcos ocorreu com continuidade C^1 , referindo-se, em outras palavras, que a construção da falsa elipse estudada empregou a concordância entre os arcos.

Apontando para a existência de um ponto de concordância no método empregado em seu artigo, Qian (2011, p. 258) comentou sobre a importância de observar alguns aspectos da construção dos arcos de circunferência visando garantir a continuidade da tangente dos arcos: “Chandrupatla and Osler (2008) revealed certain geometric relationships in four-arc approximation, especially the joint [...] for ensuring tangent continuity of the arcs.”.

Rosin (2001, p. 61), ao comentar sobre a concordância, destacou a importância da continuidade tangencial entre os arcos de circunferência: “The important factor is that due to the underlying triangle all the constructions exhibit circular arcs with tangent continuity.”.

Qian e Qian (2001, p. 2), ao abordarem a aproximação de uma elipse por meio de arcos de circunferência, apresentaram uma demonstração de que a condição de continuidade tangencial estava assegurada no estudo.

Ginoux e Golvin apud Jones (2020, p. 22) comentaram o fato de que as falsas elipses (também denominadas de ovais, como será visto na próxima subseção) são formadas por arcos de circunferência de raios diferentes com um ponto de encontro que compartilham uma mesma tangente, analogamente ao encontrado em Jardim e Giora (2018, p. 75). Informaram, ainda, que quanto maior o número de arcos, melhor é a aproximação de uma elipse.

[...] approximating to the ellipse by means of segmental arcs of different radius which meet where they share the same tangent. The simplest oval has four arcs drawn from two pairs of focal points on the main axes. More arcs and focal points may be added on this principle; the greater their number the closer the oval resembles the ellipse.

Observou-se que os trabalhos pesquisados dedicaram um espaço para comentarem sobre a importância da concordância entre os arcos de circunferência na representação da elipse. Contudo, constatou-se que nenhum deles tratou o fato pela palavra concordância, mas discorreram na forma de um ponto pertencente aos dois arcos com uma mesma tangente, tal como Jardim e Giora (2018, p. 76) apresentaram por princípio.

2.3 FALSA ELIPSE

Após as considerações acerca da elipse e da concordância entre arcos de circunferência, o passo seguinte, por consequência, é tratar da falsa elipse, consignando alguns aspectos teóricos, bem como ilustrações de métodos para a sua construção.

2.3.1 Aspectos teóricos da falsa elipse

A falsa elipse também é encontrada na literatura com o nome de oval (JARDIM; GIORA, 2018), sendo que no desenho técnico ela, frequentemente, aparece como uma perspectiva isométrica da circunferência, como visto em Cruz (2014).

De acordo com Jardim e Giora (2018, p. 81), um oval é um caso de elemento geométrico formado pelo processo de concordância. Segundo os autores, trata-se o oval de uma curva fechada, com dois eixos, um menor e outro maior, formado pela concordância de arcos de circunferência.

No caso das falsas elipses, essas seriam um tipo de oval, mais precisamente, ovais regulares que, de acordo com Jardim e Giora (2018, p. 81), são ovais compostos por arcos de circunferência simétricos em relação aos dois eixos.

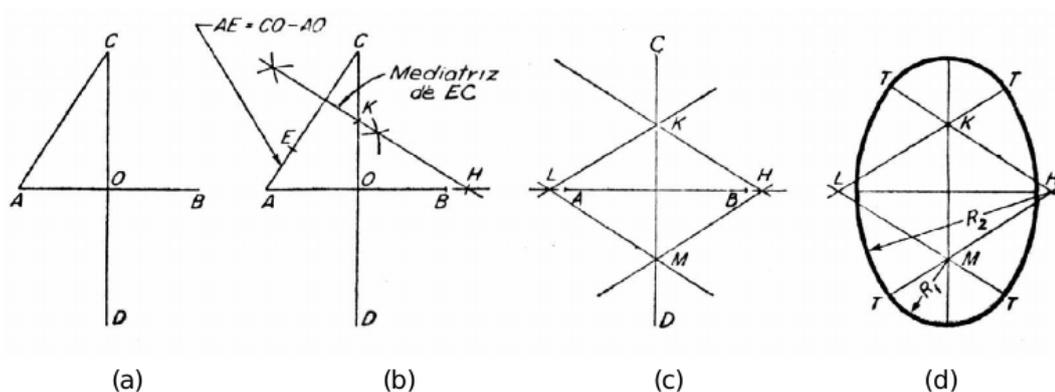
Além dos ovais regulares, acham-se os ovais irregulares formados por elementos geométricos que não são simétricos em relação aos dois eixos, por exemplo, os ovais com o formato de um ovo.

Como visto, as falsas elipses são formadas pela concordância de arcos de circunferência. Desta forma, o desenho de uma falsa elipse baseia-se na quantidade de arcos de circunferência que se deseja utilizar (ou concordar), sempre em números pares, e construídos a partir dos seus eixos (JARDIM; GIORA, 2018, p. 81).

Encontrou-se na literatura alguns modelos de desenho da falsa elipse que serão mostrados em seguida.

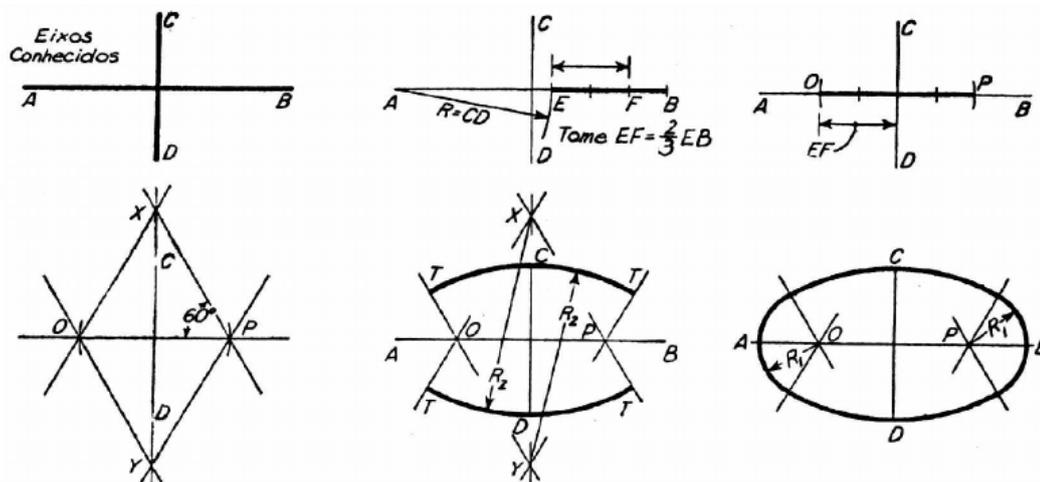
Pastana (2006, p. 44) apresenta a construção de uma falsa elipse a partir de dois métodos: método dos 4 centros e o método de Slantz, conforme figuras abaixo:

Figura 8 - Falsa elipse com 4 centros (K, H, M e L).



Fonte: Pastana (2006, p. 45).

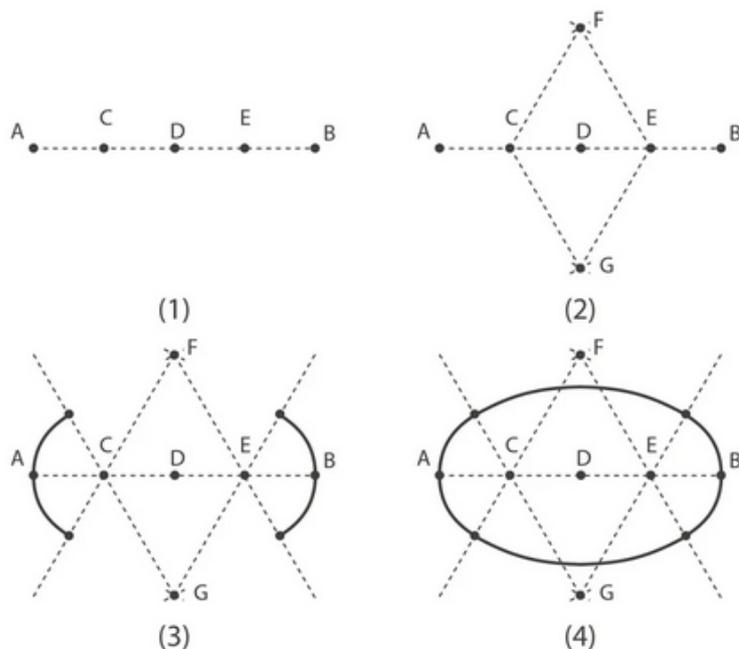
Figura 9 - Falsa elipse pelo método de Slantz.



Fonte: Pastana (2006, p. 45).

Jardim e Giora (2018, p. 82) ensinam como desenhar uma elipse com 4 centros dado o eixo maior, como mostra a ilustração a seguir:

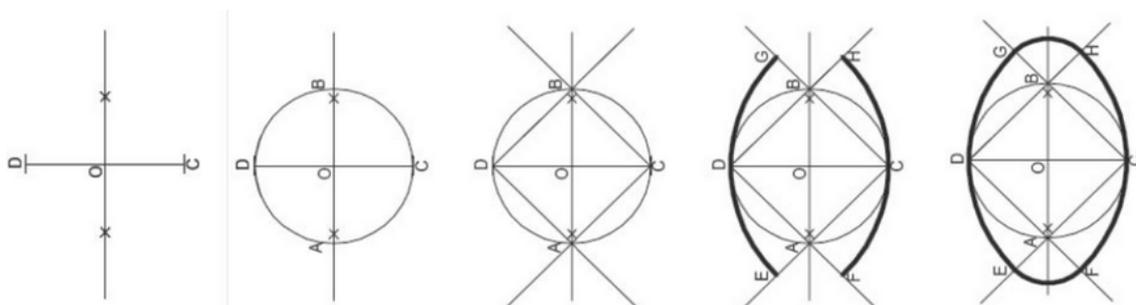
Figura 10 - Falsa elipse com 4 centros (C, E, F e G).



Fonte: Jardim e Giora (2018, p. 82).

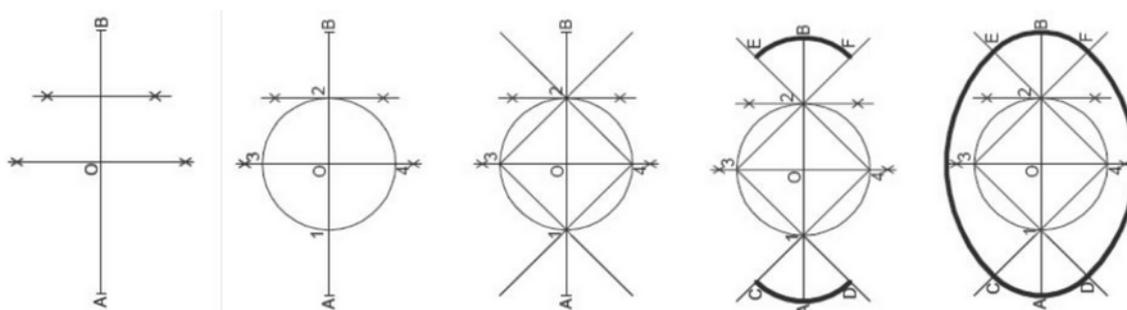
Ferreira (2013, p. 56), ao tratar de concordância no desenho geométrico, apresenta a possibilidade de construção de ovais dados o eixo maior ou o eixo menor:

Figura 11 - Falsa elipse dado o eixo menor.



Fonte: Ferreira (2013, p. 56).

Figura 12 - Falsa elipse dado o eixo maior.



Fonte: Ferreira (2013, p. 56).

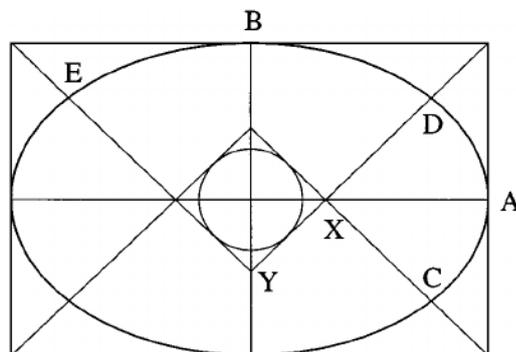
2.3.2 A falsa elipse no contexto de outras pesquisas

Quanto aos métodos construtivos da falsa elipse, em um comparativo com uma elipse, Rosin (1998) utiliza uma falsa elipse construída pelo método de Stirling, sendo que no ano seguinte, no artigo *A survey and comparison of traditional piecewise circular approximations to the ellipse*, Rosin (1999) realizou uma análise comparativa entre 10 construções de falsa elipse, incluindo a falsa elipse construída pelo método de Stirling. Em conclusão deste artigo de 1999, Rosin destacou como melhores aproximações os métodos de Stirling, Hewitt 5 e Knowlton .707:

Stirling's method has the advantage of possessing tangent continuity and has a low maximum deviation at all eccentricities. However, the simpler Knowlton .707 and Hewitt 5 methods are also good candidates. In particular the Hewitt 5 method has lower L1 and L2 errors than Stirling's method, and also has continuous tangents.

Em vários artigos apresentados por Rosin ele trata da falsa elipse construída pelo método de Stirling. Este método é semelhante ao método dos 4 centros, mostrado na figura (8). Contudo, o método de Stirling se diferencia na forma de como encontrar os 4 centros, como mostra a figura a seguir:

Figura 13 - Método de Stirling.

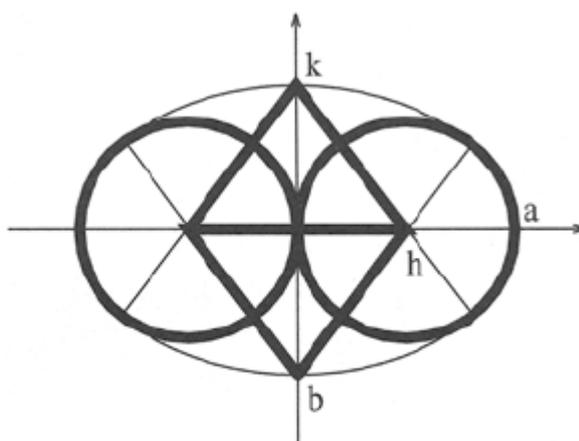
**FIG. 2.** Stirling's circular arc approximation of an ellipse.

Fonte: Rosin (1998, p. 210).

No artigo *On Serlio's Constructions of Ovals*, Rosin (2001, p. 58-69) apresentou diversas construções de falsas elipses históricas baseadas na obra de Serlio e outras construções derivadas das falsas elipses de Serlio, sendo que ao final do estudo o autor resumiu como elas se performaram em relação ao perímetro de uma elipse. Em síntese, Rosin destacou os métodos de Stirling e de Vignola como boas aproximações da elipse.

A figura abaixo apresenta a construção da falsa elipse pelo método de Vignola.

Figura 14 - Método de Vignola.

**(c) Vignola**

Fonte: Rosin (2001, p. 63).

Ao visitar os trabalhos de Rosin sobre a representação da elipse por meio da falsa elipse (ou oval), constatou-se que o autor, seguidamente, referenciou a precisão do método de

Stirling na aproximação de uma elipse. Contudo, no artigo em que tratou dos ovais de Serlio, ele expôs sobre a dificuldade da construção geométrica da falsa elipse por meio do método de Stirling, comentando, ainda, que Simpson teria proposto que o desenho da elipse fosse feita previamente à construção do oval (ROSIN, 2001, p. 65):

Stirling's approximation was recently shown to be extremely accurate [27]. Unfortunately, however, due to the shallow intersection of the circle and ellipse in stage 2 it is difficult to determine point *I*, making its geometric construction rather impractical. In addition, Simpson asks the true ellipse to be drawn prior to the oval!

Em um estudo voltado para a aproximação do perímetro de uma elipse, Qian e Qian (2001, p. 3) valeram-se de uma falsa elipse construída pelo método tradicional dos quatro arcos que, segundo os autores, trata-se de um método referenciado em diversas obras por diferentes autores.

Rosin e Pitteway (2001, p. 12-24) realizaram um estudo da aproximação do perímetro de uma elipse por meio de uma falsa elipse de 5 centros, aplicável apenas ao primeiro quadrante.

Em um novo artigo, tratando do mesmo assunto pesquisado em Qian e Qian (2001, p. 3), Qian (2011, p. 257-269) abordou novamente a falsa elipse construída pelo método tradicional dos quatro arcos em um trabalho objetivando encontrar uma melhor aproximação do perímetro de uma elipse por meio de uma falsa elipse.

Por fim, Ginoux e Golvin (2020, p. 24 e 25) realizaram, recentemente, um estudo da aproximação do perímetro de uma elipse por meio de uma falsa elipse de 8 centros, baseado-se nos passos construtivos de Frederick Honey publicados em artigos de 1906 e 1908.

Nota-se que o assunto referente à metodologia empregada na construção da falsa elipse é central nos trabalhos pesquisados, assim como para este projeto, e não é por menos, pois trata-se da forma geométrica escolhida para representar a elipse e a partir da qual serão obtidas as equações para mensurar o comprimento da elipse.

2.4 CÁLCULO DO COMPRIMENTO DO ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

Considerando que a falsa elipse é formada por arcos de circunferência concordantes, impende tratar como é calculado o comprimento de uma circunferência, visto que tal conhecimento será essencial no decorrer do trabalho.

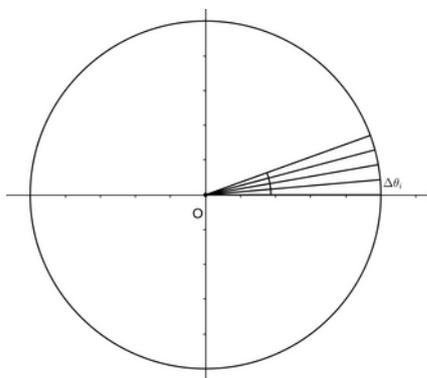
2.4.1 Aspectos teóricos do cálculo do comprimento do arco de circunferência

Uma circunferência na qual está contido o arco que se quer medir pode ser descrita como uma curva (\vec{s}) em termos vetoriais (GONÇALVES; FLEMMING, 2007, p. 33):

$$\vec{s} = (r \operatorname{sen} \theta, r \cos \theta) \quad (8)$$

Tomando-se o ângulo θ desta circunferência, verifica-se que é possível dividi-lo em infinitas partições i , sendo que para cada partição i se constata uma variação infinitesimalmente pequena a que se pode sujeitar o ângulo θ ($\Delta\theta_i$), como mostra a figura abaixo.

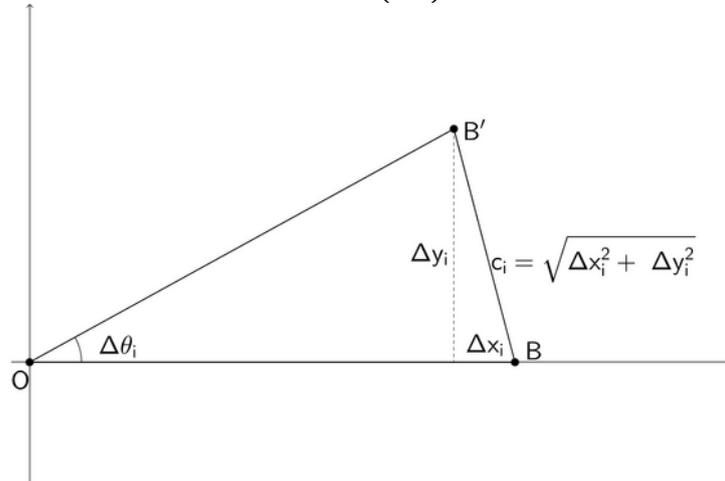
Figura 15 - Partição i de uma circunferência com variação $\Delta\theta_i$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conseqüentemente, em razão de $\Delta\theta_i$, observa-se na figura a seguir variações igualmente muito pequenas nos eixos x e y .

Figura 16 - Variações nos eixos x e y decorrentes de uma variação infinitesimalmente pequena de θ ($\Delta\theta_i$).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelo fato do traço da circunferência (BB') se assemelhar a uma reta (fig. 16), em razão da partição muito pequena do ângulo θ , é possível calcular, por Pitágoras, a medida do comprimento da curva (c_i) para cada partição i do ângulo θ .

$$c_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad (9)$$

Desta forma, depende-se que o comprimento total da curva (\vec{s}) corresponde ao somatório dos infinitos c_i mostrados na Equação (9), ou seja:

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \rightarrow c = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad (10)$$

Sob um outro ponto de vista, estas diminutas variações percebidas nos eixos em razão da variação verificada no ângulo θ_i correspondem à derivada da curva (\vec{s}) em cada coordenada, ou seja:

$$\vec{s} = (r \operatorname{sen} \theta_i, r \operatorname{cos} \theta_i) \rightarrow \frac{\vec{s}'}{\Delta \theta_i} = (r \operatorname{cos} \theta_i, -r \operatorname{sen} \theta_i) \rightarrow \vec{s}' = (r \operatorname{cos} \theta_i, -r \operatorname{sen} \theta_i) \Delta \theta_i$$

$$\vec{s}' = \left(\underbrace{\Delta\theta_i r \cos\theta_i}_{\Delta x_i}, \underbrace{-\Delta\theta_i r \sin\theta_i}_{\Delta y_i} \right) \quad (11)$$

Tomando por base a Equação (11) é possível reescrever a Equação (10) com as devidas substituições:

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{(\Delta\theta_i r \cos\theta_i)^2 + (-\Delta\theta_i r \sin\theta_i)^2} \rightarrow c = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\sqrt{\cos^2\theta_i + \sin^2\theta_i}}_1 \cdot r \Delta\theta_i$$

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} r \Delta\theta_i \quad (12)$$

No limite, quando a variação do ângulo θ ($\Delta\theta_i$) tende a zero, pois é infinitesimalmente pequena, e, lembrando que i tende ao infinito, pois são infinitas partições que se pode sujeitar o ângulo θ , a Equação (12) pode ser reescrita como uma integral (GONÇALVES; FLEMMING, 2000, p. 77), com $\theta \in [0, 2\pi]$, no caso de uma circunferência.

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} r \Delta\theta_i \rightarrow c = \lim_{\Delta\theta_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} r \Delta\theta_i \rightarrow c = \int_0^{2\pi} r d\theta \rightarrow c = r \int_0^{2\pi} d\theta \quad (13)$$

Para fins deste trabalho, onde será aplicado o comprimento de uma circunferência para um determinado arco de circunferência, entre θ_0 e θ_1 , segue que:

$$c_{\text{arco}} = r \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \quad (14)$$

Em análise dos trabalhos que foram encontrados e que versaram sobre objeto próximo ao deste estudo, não foi constatado uma abordagem específica no cálculo do comprimento da circunferência. Constatou-se que, após os raios das circunferências concordantes terem sido encontrados para a construção dos arcos, os autores passaram a comentar sobre os resultados obtidos e compará-los com o perímetro da elipse.

2.5 EQUAÇÃO DA RETA

Para o desenvolvimento deste projeto, percebe-se que alguns elementos geométricos que participam da construção da falsa elipse demandam uma reta para serem identificados. Desta forma, esta subseção abordará a descrição da equação da reta a partir de vetores.

Da mesma forma como esclarecido na seção anterior que abordou o comprimento do arco de circunferência, os trabalhos que tiveram por objeto de estudo semelhante ao tratado neste projeto não se valeram do uso da equação da reta. Em geral, utilizaram outras formas para encontrar os raios dos arcos de circunferência, como: Pitágoras, Lei dos Cossenos, Lei dos Senos etc.

2.5.1 Aspectos teóricos da equação da reta

Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor no plano com origem no ponto $O = (x_0, y_0)$ e o ponto $A = (x_1, y_1)$, então $A = O + \lambda \vec{u}$ é a equação vetorial da reta em \vec{u} , de acordo com Fernandes (2016, p. 88). Logo,

$$A = O + \lambda \vec{u} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b)$$

Por combinação linear, segue que:
$$\begin{cases} x_0 + \lambda a = x_1 \\ y_0 + \lambda b = y_1 \end{cases}$$

De onde se alcança a equação da reta na forma simétrica (FERNANDES, 2016, p. 89):

$$\lambda = \frac{x_1 - x_0}{a} = \frac{y_1 - y_0}{b} \tag{15}$$

A partir da Equação (15) obtém-se a equação angular da reta, que pode ser encontrada em Leite e Castanheira (2017, p. 35).

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0), \text{ onde } m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (16)$$

Abordando o assunto de uma maneira que se espera aplicar neste projeto, Santos e Ferreira (2009, p. 38) comentam que dois pontos distintos definem uma única reta que pode ser determinada pela geometria analítica. Os autores possibilitam encontrar a Equação (16), por meio da seguinte construção:

Figura 17 - Construção da reta.

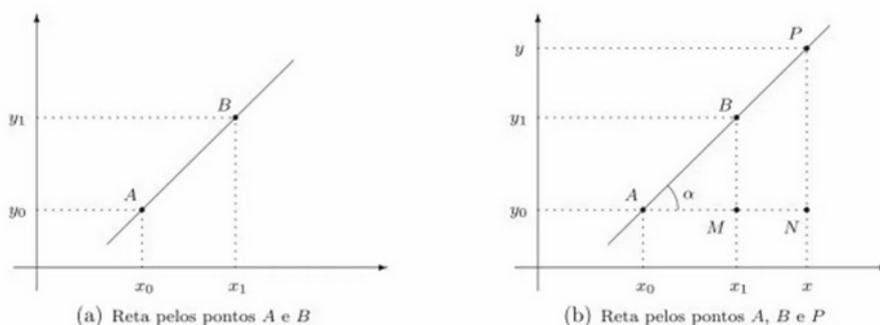


Figura 2.1 Construção geométrica para obter a equação de uma reta.

Fonte: Santos e Ferreira (2009, p. 38).

Por semelhança de triângulos, os autores concluíram que:

$$\frac{\overline{PN}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} \quad \therefore \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (17)$$

Como a razão $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ é constante, diga-se m , então, a partir da Equação (17)

chega-se à Equação (16).

2.6 PRODUTO INTERNO EUCLIDIANO

Além da noção de reta que foi apresentada para auxiliar na construção da falsa elipse, considera-se oportuno explicar sobre vetores ortogonais e ângulos entre vetores, que serão úteis para a identificação de outros elementos geométricos de interesse deste projeto. Sendo assim, não obstante a existência de outros meios para a realização desta atividade, este estudo se servirá das noções do produto interno euclidiano entre vetores.

2.6.1 Aspectos teóricos do produto interno euclidiano

Visando contribuir para o entendimento do assunto, é interessante trazer para este tópico o conhecimento de norma de um vetor.

De acordo com Anton e Rorres (2012, p. 130), a norma de um vetor se refere ao seu comprimento ou magnitude. Para tanto, considerando um vetor $\vec{u} = (u_x, u_y)$, a norma deste vetor é representado pelo símbolo $\|\vec{u}\|$. Algebricamente, supondo que $\vec{u} \in \mathfrak{R}^2$, a norma é dada por:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

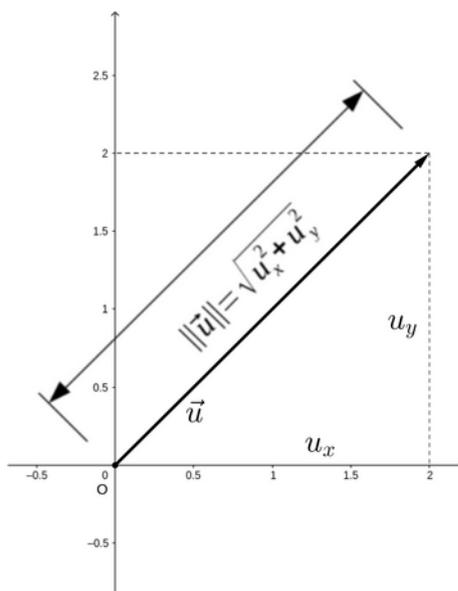
Uma definição mais formal é oferecida por Anton e Rorres (2012, p. 131):

Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ for um vetor em \mathfrak{R}^n , então a **norma** de \mathbf{v} (também denominada **comprimento** ou **magnitude** de \mathbf{v}) é denotada por $\|\mathbf{v}\|$ e definida pela fórmula [Grifos no original]

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}$$

A figura a seguir permite uma visualização do conceito de norma de um determinado vetor $\vec{u} = (u_x, u_y)$.

Figura 18 - Visualização da norma de um vetor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Quanto ao assunto desta seção, Zahn (2021, p. 211-212) define o produto interno entre dois vetores da seguinte maneira:

Seja V um espaço vetorial. Dizemos que uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$ é um produto interno em V se satisfazer as seguintes propriedades para $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ e para todo $\lambda \in \mathfrak{R}$ tivermos:

- (a) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ e $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$. (positividade)
- (b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$. (simetria)
- (c) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. (bilinearidade)
- (d) $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. (bilinearidade)

Como este trabalho está sendo desenvolvido no plano é importante ressaltar que \mathfrak{R}^2 é um espaço vetorial euclidiano com produto interno, conforme Lipschutz e Lipson (2011, p. 235). Portanto, o produto interno pode ser denominado de produto interno euclidiano.

Uma aplicação do produto interno euclidiano para esta pesquisa está no cálculo de ângulos entre vetores e na identificação de vetores ortogonais. Para Anton e Rorres (2012, p. 133):

Se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores não nulos em \mathfrak{R}^2 e \mathfrak{R}^3 e se θ for o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} , então o **produto escalar** (também denominado **produto interno euclidiano** de \mathbf{u} e \mathbf{v} é denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definido por

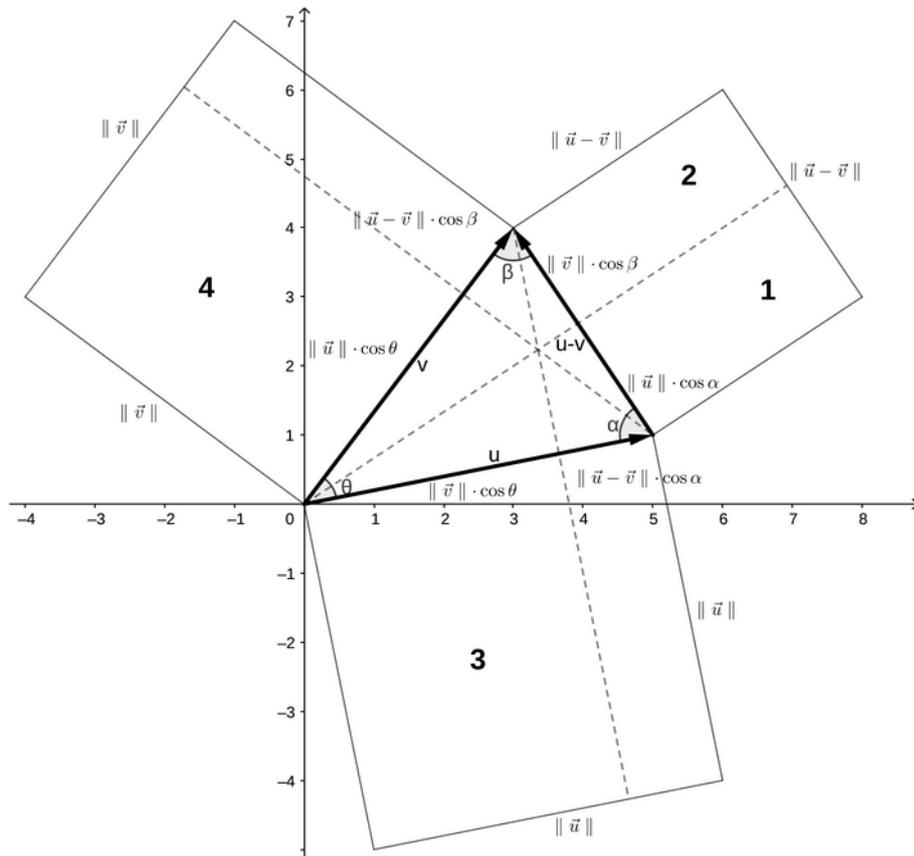
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \quad (18)$$

Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, definimos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ como sendo 0. [Grifos no original]

Uma demonstração para a definição acima pode ser obtida pela Lei dos Cossenos.

Inicialmente, tomando os vetores $\vec{u} = (u_x, u_y)$, $\vec{v} = (v_x, v_y)$ e considerando a ilustração abaixo, para melhor compreensão, a Lei dos Cossenos pode ser obtida como se segue (MANETTA, 2011, com adaptações).

Figura 19 - Lei dos Cossenos Graficamente.



Fonte: Manetta (<http://www.dinamica.com.br/2011/03/uma-deducao-grafica-da-lei-dos-cossenos.html>, com adaptações pelo autor).

A partir da figura (19), nota-se que as áreas [1] e [2] correspondem à área do quadrado de lados $\|\vec{u} - \vec{v}\|$. Disto, segue que:

$$\text{Área}[1+2] = \text{Área}[1] + \text{Área}[2]$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cos \alpha + \|\vec{u} - \vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \beta$$

Como a $\text{Área}[1] = \|\vec{u}\|^2 - \text{Área}[3]$ e a $\text{Área}[2] = \|\vec{v}\|^2 - \text{Área}[4]$, então, fazendo as devidas substituições na equação anterior tem-se que:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \underbrace{\|\vec{u} - \vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cos \alpha}_{\text{Área}[1]} + \underbrace{\|\vec{u} - \vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \beta}_{\text{Área}[2]}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta) + (\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos\theta)$$

Portanto, a Lei dos Cossenos é dada por:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta + \|\vec{v}\|^2 \quad (19)$$

Apresentada a Lei dos Cossenos, a Equação (18) pode ser demonstrada como encontrada em Cabral (2008), com adaptações.

Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{R}^n$ e θ o ângulo formado pelos dois vetores. Então, pela Lei dos Cossenos, onde $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta + \|\vec{v}\|^2$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \sum (u_i - v_i)^2 \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \sum u_i^2 - 2\sum u_i v_i + \sum v_i^2 \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\sum u_i v_i + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Igualando o segundo termo da Equação (19) e da Equação (20) obtém-se:

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 - 2\sum u_i v_i + \|\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta + \|\vec{v}\|^2. \text{ Logo,} \\ \cos\theta &= \frac{\sum u_i v_i}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}. \end{aligned}$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum u_i v_i$, então:

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \text{ ou } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta. \quad \blacksquare \quad (21)$$

2.7 AJUSTE DE MÍNIMOS QUADRADOS

Considerando que a elipse e a falsa elipse são estruturas geométricas diferentes, é esperado que existam diferenças entre os seus comprimentos quando traçadas para determinados valores de a e b (semieixos).

Desta forma, uma vez que o comprimento aproximado da elipse será obtido a partir do comprimento da falsa elipse, é aguardado o desenvolvimento de uma função $E(a,b)$ que minimize a diferença entre os comprimentos, ou seja, uma função que descreva o erro de aproximação entre o comprimento da falsa elipse em relação ao comprimento da elipse a partir das variáveis a e b . Para este fim, será trazido para o estudo o ajuste de mínimos quadrados.

2.7.1 Aspectos teóricos do ajuste de mínimos quadrados

Para Anton e Rorres (2012, p. 376), ajustar os pontos de uma relação matemática entre duas variáveis x e y é um problema comum em trabalhos experimentais, tal como ocorre neste projeto que se pretende comparar os perímetros de uma falsa elipse em relação a uma elipse. Em outras palavras, espera-se encontrar uma diferença entre os perímetros, variável dependente (y), em relação à variação verificada entre os eixos menor e maior, variável independente x .

A função $E(a,b)$ decorrente do ajustes de mínimos quadrados permitirá a seguinte aproximação:

$$f(a,b) = g(a,b) + E(a,b) \quad (22)$$

Onde, $f(a,b)$ corresponde ao perímetro aproximado da elipse e $g(a,b)$ ao perímetro da falsa elipse.

A unicidade da solução de mínimos quadrados é garantida pelo teorema a seguir (ANTON; RORRES, 2012, p. 378), adaptado para uma equação cúbica.

Teorema. (Unicidade da solução de mínimos quadrados)

Seja $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ um conjunto de dois ou mais pontos de dados, não todos numa reta vertical, e sejam

$$M = \begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^3 & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \text{ e } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Então existe um único ajuste linear de mínimos quadrados

$$y = a^* x^3 + b^* x^2 + c^* x + d^*$$

aos pontos de dados. Além disso,

$$v^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \\ d^* \end{bmatrix}$$

é dado pela fórmula

$$v^* = (M^T M)^{-1} M^T y$$

que expressa a unicidade da solução $v = v^*$ da equação normal

$$M^T M v = M^T y \quad (23)$$

Do teorema, constata-se a necessidade de que os dados a serem utilizados na solução formem um conjunto de pontos não todos numa reta vertical (ANTON; RORRES, 2012, p. 191). Depreende-se que esta reta vertical seriam os eixos (x,y) , que se justifica pelo fato de ser impossível identificar uma única solução se todos os pontos se encontrarem em situação de ortogonalidade. No caso de todos estarem em uma mesma reta, a solução é trivial, $\tilde{v} = \vec{0}$.

Para Campos Filho (2018, p. 239-240), o assunto é tratado como uma regressão polinomial, um caso particular da regressão múltipla, pois a variável resposta y (variável dependente) se relaciona apenas com uma variável explicativa x (variável independente). A regressão polinomial apresentada por Campos é expressa pelo seguinte modelo de grau g :

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_g x^g + \epsilon \quad (24)$$

Sendo que ϵ se refere ao erro e os coeficientes β_i são encontrados pela seguinte operação entre matrizes:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^g \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{g+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{g+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^g & \sum x_i^{g+1} & \sum x_i^{g+2} & \cdots & \sum x_i^{2g} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^g y_i \end{bmatrix} \quad (25)$$

Ressalta-se que a Equação (25) e a Equação (23) são iguais, apenas escritas (ou obtidas) de uma forma diferente. Veja-se:

A Equação (23) foi desenvolvida considerando que a constante d está ao final da equação polinomial, enquanto que na Equação (25) a constante β_0 , que corresponde à constante d , localiza-se no início da equação. Desta forma, considerando um polinômio de grau g , a matriz M será reescrita como:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^g \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^g \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^g \end{bmatrix}, \text{ cuja transposta é } M^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^g & x_2^g & \cdots & x_n^g \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \\ \cdots \end{bmatrix}.$$

Tomando o termo após a igualdade da Equação (25), tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^g y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^g & x_2^g & \cdots & x_n^g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = M^T y$$

Portanto, por $M^T y$ as Equações (23) e (25) podem ser igualadas.

$$M^T M v = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^g \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{g+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{g+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^g & \sum x_i^{g+1} & \sum x_i^{g+2} & \cdots & \sum x_i^{2g} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_g \end{bmatrix}$$

$$\text{Como } v = \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_g \end{bmatrix}, \text{ então } M^T M = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^g \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{g+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{g+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^g & \sum x_i^{g+1} & \sum x_i^{g+2} & \cdots & \sum x_i^{2g} \end{bmatrix}.$$

De fato, pois:

$$M^T M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^g & x_2^g & \cdots & x_n^g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^g \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^g \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^g \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{g+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{g+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^g & \sum x_i^{g+1} & \sum x_i^{g+2} & \cdots & \sum x_i^{2g} \end{bmatrix}$$

Disto se demonstra que as Equações (23) e (25) são iguais, embora escritas de forma diferente.

Um ponto interessante abordado por Campos Filho (2018, p. 247-248) se refere à escolha do modelo a ser utilizado para a regressão polinomial. Para tanto, o autor propõe dois critérios: "... o quadrado médio residual s^2 (oriundo da ANOVA) e o critério de informação de Akaike de segunda ordem AIC_c ".

O quadrado médio residual é dado pela seguinte equação:

$$s^2 = \frac{S(b_0, b_1, b_2, \dots, b_{p-1})}{n - p} \quad (26)$$

Onde, n é o número de pontos, p a quantidade de parâmetros do modelo e S é a soma dos quadrados residuais, dado por:

$$S(b_0, b_1, b_2, \dots, b_{p-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (y_i - b_0 - b_1 x_{i,1} - \dots - b_{p-1} x_{i,p-1})^2 \quad (27)$$

Considerando a aplicação do critério em um modelo com apenas uma variável dependente (x), $p = g+1$, onde g é o grau do polinômio e 1 representa a constante do modelo.

Para o critério de informação de Akaike, aplicável nos casos onde $n/p < 40$, segue a equação abaixo:

$$AIC_c = n \log_e \left(\frac{S(b_0, b_1, b_2, \dots, b_{p-1})}{n} \right) + 2p \left(\frac{n}{n-p-1} \right) \quad (28)$$

Caso $n/p \geq 40$, então o fator da Equação (28) $\left(\frac{n}{n-p-1} \right) = 1$.

Ao se submeter diversos modelos aos critérios, o melhor modelo será identificado por apresentar os menores valores de s^2 e AIC_c .

No tocante a este projeto, observa-se que os dois critérios apresentados serão úteis para a escolha do melhor modelo que descreverá a função de erro $E(a,b)$, Equação (22).

2.7.2 Os ajustes adotados no contexto de outras pesquisas

Dos trabalhos encontrados, observou-se que os autores adotaram metodologias diferentes para o ajuste da falsa elipse em relação à elipse, sendo que em alguns casos constatou-se que não houve ajuste.

No trabalho publicado por Qian (2011, p. 260-262) e por Qian e Qian (2001, p. 255-269) constatou-se que os autores calcularam o erro entre a elipse e a falsa elipse analiticamente por meio de arcos auxiliares (e_1 e e_2) relacionados a cada arco de circunferência. Com base nos arcos auxiliares foram encontrados ε_1 e ε_2 que representam os erros identificados entre a elipse e o arco de circunferência menor e o arco de circunferência maior, respectivamente. Neste processo de ajuste, Qian (2011, p. 262) destaca que enquanto e_1 se parece como um morro, e_2 se assemelha a um vale.

Proposition 1. In the first quadrant, the e_1 distribution looks like a hill, while e_2 distribution looks like a valley. e_1 increases from 0 to ε_1 when t varies from 0 to t_1 , and decreases when t varies from t_1 to $\pi/2$. e_2 decreases to $\varepsilon_2 < 0$ when t varies from 0 to t_2 , and increases to 0 when t varies from t_2 to $\pi/2$.

Entendendo a proposição de Qian, ela se refere ao fato de que o arco auxiliar relacionado ao arco de circunferência maior “passa” por baixo do traço da elipse (vale) enquanto o arco auxiliar referente ao arco de circunferência menor situa-se acima do traço da elipse (morro).

No trabalho publicado por Rosin (1999, p. 277), o autor comenta sobre a dificuldade de se minimizar o erro entre a falsa elipse e a elipse de forma analítica. Desta forma, propõe uma solução numérica complexa a partir de dados obtidos da aproximação de

pontos da falsa elipse e a elipse. Um detalhe bastante importante é apresentado pelo autor neste processo de minimização do erro (ROSIN, 1999, p. 278): “In fact, on performing the minimisation we found the optimum error occurs when the two arcs have tangent continuity.”. Portanto, uma falsa elipse construída com arcos unidos por um ponto de concordância apresentam uma melhor aproximação da elipse.

Rosin (2001, p. 20) ao estudar uma falsa elipse de 5 centros (3 arcos de circunferência) encontrou uma melhor aproximação do perímetro da elipse por meio de uma estimativa numérica para a variável r_2 (raio de um dos arcos) expressa por meio dos outros dois raios r_1 e r_3 (encontrados analiticamente): “So far we have considered several possibilities from the literature for selecting the radius for A_2 . Alternatively, in an attempt to improve the approximation, we can numerically estimate the optimal value for r_2 .”. Aparentemente, a solução de Rosin não abordou explicitamente nenhum ajuste, exceto pelo fato de r_2 ter sido encontrado por meio de uma estimativa numérica a partir de r_1 e r_3 .

2.8 NOÇÃO DE FUNÇÕES E O COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO

Considerando o emprego do ajuste de mínimos quadrados neste trabalho, aborda-se neste tópico alguns aspectos relacionados às funções, bem como se apresenta o coeficiente de determinação a ser utilizado como instrumento para avaliar o quanto uma função, ajustada pelos mínimos quadrados, consegue explicar a relação entre as variáveis x e y .

Como visto na subseção anterior, que tratou do ajuste de mínimos quadrados, observou-se a utilização da função polinomial como exemplo de aplicação. Todavia, a função a ser utilizada, cujos coeficientes serão determinados pelo ajuste de mínimos quadrados, pode ser uma função logarítmica, exponencial ou outra.

Portanto, nesta subseção, pretende-se apresentar algumas funções que podem ser analisadas para fins de ajuste dos mínimos quadrados, bem como o coeficiente de determinação como ferramenta de avaliação, como explicado no parágrafo inicial.

2.8.1 Aspectos teóricos da noção de funções e do coeficiente de determinação

De acordo com Demana *et al.* (2008, p. 61) “Uma função de um conjunto A em um conjunto B é uma lei que associa para todo elemento em A um único elemento em B ”.

De uma forma mais sucinta, Petrolí (2020, p. 61) diz que “O conceito de função refere-se essencialmente à correspondência entre conjuntos”.

Demana *et al.* (2008, p. 85, 95, 127, 143 e 163) apresentam alguns tipos de funções: polinomial, potência, exponencial, logarítmica e composta, sendo que Molter *et al.* (2020, p. 109-191) se preocupam com as funções trigonométricas.

Abaixo são apresentadas algumas funções, genéricas, passíveis de serem analisadas neste trabalho, sendo que A e B são os coeficientes a serem encontrados por meio do ajuste de mínimos quadrados.

(i) Função Polinomial:

$$F(x) = Ax + B \quad (29)$$

(iii) Função Exponencial:

$$F(x) = A e^x + B \quad (30)$$

(iv) Função Logarítmica:

$$F(x) = A \ln(x) + B \quad (31)$$

(v) Função Trigonométrica (Seno):

$$F(x) = A \sin(x) + B \quad (32)$$

As funções relacionadas anteriormente ainda podem ser apresentadas com variações. Por exemplo, uma função polinomial pode ser dada como de primeiro grau, segundo grau ou de uma ordem mais elevada.

(i) Função polinomial de primeiro grau:

$$F(x) = Ax + B \quad (33)$$

(ii) Função polinomial de segundo grau:

$$F(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (34)$$

(iii) Função polinomial de grau/ordem mais elevado (5ª ordem, por exemplo):

$$F(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F \quad (35)$$

Para o presente estudo, o que se busca é uma função que apresente o melhor ajustamento entre as variáveis x e y . Isto posto, espera-se que a função procurada relacione valores da variável x ao maior número de valores da variável y ou a valores muito próximos da variável y . Com base nisto, presume-se, portanto, que não existe uma única função capaz de ajustar a relação entre as variáveis x e y , contudo, algumas funções conseguem fazê-la de forma mais eficiente do que outras.

Diante das inúmeras funções que podem ser examinadas, bem como suas variações e combinações, estas podem ser avaliadas em relação ao melhor ajustamento entre as variáveis x e y , dentre outras maneiras, por meio do coeficiente de determinação – R^2 .

O R^2 , segundo Costa Neto (2018, p. 199), é um “indicativo de quanto a reta de regressão fica bem determinada em função da correlação entre os pontos experimentais, dizendo respeito, portanto, à qualidade da regressão.”. De acordo com Campos Filho (2018, p. 233), o R^2 para uma determinada relação x e y é encontrado pela seguinte equação:

$$R^2 = \frac{SQReg}{SQTot} \quad (36)$$

Onde:

$SQReg$ = Soma de quadrados devido à regressão = $\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$. Sendo \hat{y} o valor predito de y_i e \bar{y} a média dos valores de y_i , dado por $\bar{y} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$.

$SQTot$ = Soma de quadrados total = $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$.

Campos Filho (2018, p. 233) esclarece que $0 \leq R^2 \leq 1$ e quanto mais próximo R^2 for da unidade, melhor será o ajuste.

3 DELIMITAÇÃO METODOLÓGICA

Nesta terceira parte do projeto serão discutidos os aspectos relacionados ao tipo de pesquisa, amostragem e coleta de dados.

3.1 TIPO DA PESQUISA

Marconi e Lakatos (2021, p. 120), ao discutirem o método de abordagem da pesquisa, afirmam que no método de abordagem indutiva os fenômenos caminham “[...] geralmente para planos cada vez mais abrangentes, indo das constatações mais particulares às leis e teorias (conexão ascendente)”. Desta forma, verifica-se que este projeto tem uma abordagem indutiva, pois inicia-se pela identificação dos elementos geométricos do desenho da falsa elipse até alcançar o cálculo do seu perímetro e, posteriormente, após encontrar uma função de ajuste para o perímetro da elipse, chegar ao objetivo geral que é formular uma equação para o perímetro da elipse baseada no perímetro da falsa elipse e na função de ajuste. Ou seja, constata-se que o estudo evolui do específico para o geral.

Para Gil (2020, p. 25) a pesquisa ainda pode ser classificada quanto à sua finalidade. Neste aspecto, o autor afirma que uma pesquisa básica pura tem por objetivo a produção de novos conhecimentos, mas “[...] sem qualquer preocupação com seus possíveis benefícios.”, como se observa neste trabalho, visto que a metodologia a ser desenvolvida é de ampla aplicação sem um destinatário específico.

Este estudo também se encontra inserido como uma pesquisa de propósito exploratório, uma vez que tem por finalidade “[...] proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses.” (GIL, 2020, p. 26)

Por fim, esta pesquisa pode ser classificada quanto ao seu delineamento (GIL, 2020, p. 27). Sob esta categorização, este estudo se enquadra como sendo uma pesquisa do tipo bibliográfica, pois será desenvolvida com base em uma literatura já publicada, tanto para identificar os elementos geométricos da falsa elipse quanto para encontrar a equação objetivando calcular o perímetro da elipse.

3.2 POPULAÇÃO E PROCESSO DE AMOSTRAGEM

Para o estudo, ao se analisar o perímetro da elipse percebe-se a impossibilidade de coletar os dados de todas as elipses passíveis de serem construídas, pois são infinitas. Desta forma, pretende-se coletar os dados de algumas elipses, por amostragem, a partir dos seguintes parâmetros (medidas em metros):

Tabela 1 - Parâmetros para amostragem de perímetros de elipses.

Eixo maior [a] (m)	Distância do foco da elipse a partir da origem [c] (m)
0,45	0,10
0,45	0,20
0,45	0,25
0,45	0,30
0,45	0,33
0,45	0,36
0,45	0,39
0,45	0,42

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além das medidas apresentadas na tabela acima, é possível que outras sejam coletadas durante a etapa de análise.

Pretende-se com este processo de amostragem obter dados de elipses de diferentes excentricidades. Na medida em que a distância do foco em relação à origem (c) se aproxima do valor do semieixo maior (a), considerou-se prudente coletar mais amostras do perímetro da elipse, pois espera-se encontrar nestas regiões as maiores diferenças entre a elipse e a falsa elipse.

3.3 COLETA DE DADOS

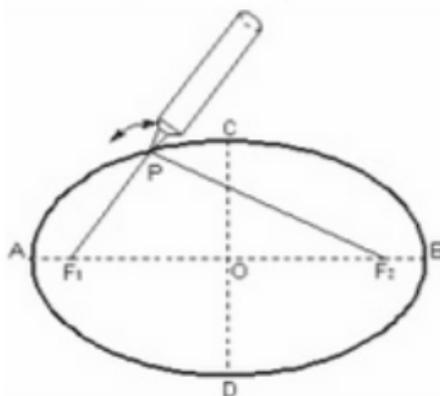
Para o desenvolvimento deste projeto, diferentemente da forma observada em outros trabalhos que foram consultados, a medição do perímetro da elipse será feita por meio de curvas traçadas em placa de isopor e não com o uso de equações matemáticas de forma analítica ou por métodos numéricos, pois uma das justificativas deste trabalho reside na aproximação da matemática com o mundo real.

Em sentido semelhante, esta conduta se aproxima da justificativa maior deste trabalho que é demonstrar uma metodologia para medir o perímetro de objetos reais.

3.3.1 Instrumentos para a coleta de dados

Para a coleta dos dados serão utilizados alguns materiais para traçar elipses de várias excentricidades sobre uma placa de isopor a partir da qual serão tomadas as medidas de perímetro. A metodologia a ser aplicada pode ser encontrada no trabalho de Moreira (2017, p. 37), sendo que a figura abaixo ilustra a técnica a ser empregada para o desenho das elipses.

Figura 20 - Técnica a ser utilizada para o desenho da elipse.



Fonte: Moreira (2017, p. 37).

Para produzir o desenho, entende-se que os seguintes materiais serão suficientes:

a) placa de isopor medindo 1,00 m X 0,50 m; b) fio não elástico, flexível e ultrafino; c)

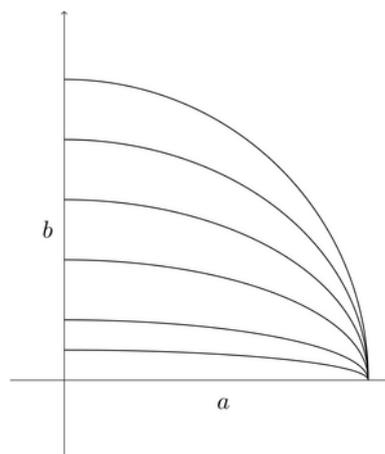
tesoura; d) percevejos; e) fita adesiva; f) caneta hidrográfica ou similar; g) estilete; h) fita métrica; i) cortador de isopor; e j) régua e esquadro.

3.3.2 Procedimentos para a coleta de dados

Considerando que uma elipse é formada por arcos simétricos nos quatro quadrantes, conforme visto na revisão bibliográfica, será desenhada a elipse apenas em relação a um dos quadrantes, mantendo-se constante o eixo maior (a) e variando a distância focal da elipse (c). Disto serão obtidos arcos de elipses de excentricidades variadas e , conseqüentemente, diferentes perímetros para cada valor atribuído ao foco.

A figura abaixo mostra como os arcos das elipses estarão disposto após serem traçados sobre uma placa de isopor.

Figura 21 - Arcos de elipses com excentricidades variadas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Concluído o desenho no isopor, os arcos das elipses serão cortados para que possam ser medidos.

3.4 TRATAMENTO DOS DADOS

As medidas a serem coletadas serão registradas na tabela a seguir, considerando os parâmetros de amostragem apresentados anteriormente.

Tabela 2 - Amostras de perímetros de elipses.

a (m)	c (m)	Perímetro no quadrante (m)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a coleta dos dados, os perímetros medidos a partir do desenho serão comparados com o perímetro da falsa elipse a partir da equação a ser encontrada no contexto da análise deste trabalho.

Do resultado da comparação, espera-se identificar diferenças entre os comprimentos das elipses medidas fisicamente no isopor e das falsas elipses, encontradas algebricamente. Estas diferenças servirão de base para a formulação de uma função de ajuste dos erros a ser obtida por meio do ajuste de mínimos quadrados.

A escolha do ajuste de mínimos quadrados se justifica pelo interesse em explorar conceitos da álgebra linear na solução do problema a ser pesquisado.

Por derradeiro, a equação do perímetro da falsa elipse somada à função de ajuste dos erros darão origem à equação do perímetro aproximado da elipse.

4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Esta seção será subdividida em duas partes, sendo a primeira responsável pela apresentação propriamente dita, que, em suma, tratará da solução do problema proposto para esta pesquisa, e a segunda que discutirá os resultados encontrados na primeira parte. Isto permitirá uma melhor organização do conteúdo facilitando sua compreensão.

Nos tópicos em que forem abordados valores, adotou-se o arredondamento de 4 casas decimais, com exceção dos coeficientes da função de ajuste dos erros que utilizou 5 casas decimais para um melhor desempenho.

Antes de prosseguir, para evitar equívocos, esclarece-se que esta seção tratará de dois tipos de desenhos, sendo um referente ao desenho da “falsa elipse”, feito com o uso do software Geogebra, detalhado no Apêndice A, e o outro relacionado ao desenho da “elipse”, realizado manualmente sobre uma placa de isopor.

4.1 APRESENTAÇÃO

Para dar início à apresentação dos resultados, procedeu-se ao desenho da falsa elipse em relação ao primeiro quadrante, visto que esta forma geométrica é simétrica nos quatro quadrantes, conforme apresentado na revisão bibliográfica.

Das construções das falsas elipses encontradas na literatura, mostradas na revisão bibliográfica, adotou-se para este trabalho o método da falsa elipse com 4 centros apresentada por Pastana (2006, p. 44), que é tradicionalmente conhecida e utilizada em estudos relacionados ao tema. Além do mais, esta concepção da falsa elipse parte do pressuposto que os eixos maior e menor são conhecidos e, portanto, determinam a construção da figura que é de interesse deste projeto. Não obstante, nota-se que o desenho das falsas elipses de 4 centros que foram vistas são bastantes parecidas, de modo que, salvo melhor juízo, a escolha de um método ou outro não trará prejuízo para o alcance do objetivo proposto para este trabalho.

Para a construção da falsa elipse escolhida, serviu de contribuição o conteúdo do tipo multimídia disponibilizado por Reis (2020).

4.1.1 Desenho do primeiro quadrante da falsa elipse por meio do software Geogebra

Conforme comentado anteriormente, adotou-se para o desenvolvimento deste trabalho a falsa elipse tradicional de 4 centros (ou arcos) como visto em Qian e Qian (2001, p. 3), Qian (2011, p. 257-269) e Pastana (2006, p. 44).

O desenho foi realizado com o auxílio do software Geogebra e está apresentado, detalhadamente, no Apêndice A.

Para facilitar as demais etapas deste tópico, o desenho foi separado por “passos” que indicam, sequencialmente, como cada elemento geométrico foi desenhado. Esta separação em “passos” visa auxiliar a identificação de cada elemento e, por conseguinte, sua tradução para uma linguagem matemática que será realizada em tópicos subsequentes.

4.1.2 Identificação dos elementos geométricos da falsa elipse

No decorrer da apresentação e da discussão dos resultados, será utilizada a equação $c^2 = a^2 - b^2$, que se deduz por Pitágoras da figura(6), e a seguinte função simplificadora que auxiliará na elaboração dos cálculos e contribuirá para uma melhor disposição visual das equações:

$$\lambda(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (37)$$

Salienta-se que o desenvolvimento matemático desta seção está baseada no conteúdo da seção que tratou da revisão bibliográfica. Portanto, os conceitos e definições iniciais não serão abordados novamente.

A falsa elipse foi construída tomando-se como eixo maior o segmento de reta \overline{AB} e o eixo menor o segmento de reta \overline{CD} , sendo que o eixo maior e o eixo menor têm por comprimento, respectivamente, $2a$ e $2b$, $\forall a, b \in \mathfrak{R} \mid a \geq b > 0$. Portanto, considerando o ponto O como o centro da falsa elipse, os semieixos maior e menor correspondem aos comprimentos a e b , respectivamente.

Frisa-se para o fato de que $b > 0$, pois se b for igual a zero, duas situações ocorrem: (1) caso $a > b$, então deixa-se de existir uma elipse e obtém-se uma reta (ou segmento de reta, se a for uma constante); e (2) caso $a = b$, então surge um ponto.

4.1.2.1 Segmento de reta \overline{CB} (Passo 1)

Observando o Passo 1 do Apêndice A, além da identificação dos eixos, foi traçado o segmento de reta \overline{CB} , representado pela equação a seguir:

Sejam os pontos $B = (a, 0)$ e $C = (0, b)$ e $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ a inclinação do segmento de reta \overline{CB} , então:

$$(y - y_0) = m(x - x_0) \Rightarrow y = -\frac{bx}{a} + b, \quad \forall x \in \mathfrak{R} \mid 0 \leq x \leq a.$$

$$\overline{CB} = \left(x, -\frac{bx}{a} + b \right), \quad \forall x \in \mathfrak{R} \mid 0 \leq x \leq a. \quad (38)$$

4.1.2.2 Ponto P (Passo 2)

O passo seguinte se refere à identificação do ponto P , originado da intersecção do segmento de reta \overline{CB} e a circunferência com centro em $C = (0, b)$ e raio $(a - b)$.

Tomando-se a equação geral da circunferência, tem-se que:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{(a - b)^2 - x^2} + b$$

$$P = \left(x, \sqrt{(a - b)^2 - x^2} + b \right), \quad \forall x \in \mathfrak{R} \mid 0 \leq x \leq a. \quad (39)$$

O ponto P , Equação (39), foi dado em função de a , b e x . Contudo, desejou-se encontrar este ponto apenas em função de a e b . Desta forma, os próximos cálculos têm por objetivo descrever este ponto por meio destas duas variáveis.

A intersecção entre o segmento de reta \overline{CB} , Equação (38), e o ponto P , Equação (39), pode ser encontrada para um mesmo valor de y , então:

$$-\frac{bx}{a} + b = \sqrt{(a-b)^2 - x^2} + b \Rightarrow x = a\lambda(a-b) \quad (40)$$

Para encontrar o valor de y , a variável x da Equação (38) foi substituída pela variável x da Equação (40):

$$y = -\frac{bx}{a} + b \Rightarrow y = b[1 - \lambda(a-b)] \quad (41)$$

Assim sendo, encontrou-se o ponto P em função de a e b , que é dado por:

$$P = (a\lambda(a-b), b[1 - \lambda(a-b)]) \quad (42)$$

4.1.2.3 Ponto K (Passo 3)

Na sequência, tem-se o ponto K , caracterizado por ser o ponto médio entre os pontos P e B e identificado, portanto, pela média aritmética entre as coordenadas dos pontos conhecidos, P e B . Desta forma:

$$K = \left(\frac{P_x + B_x}{2}, \frac{P_y + B_y}{2} \right) = \left(\frac{a\lambda(a-b) + a}{2}, \frac{b[1 - \lambda(a-b)] + 0}{2} \right)$$

$$K = \left(\frac{a[1 + \lambda(a-b)]}{2}, \frac{b[1 - \lambda(a-b)]}{2} \right) \quad (43)$$

4.1.2.4 Vetores u e w (Passo 4)

O ponto T , que será identificado no próximo passo, situa-se perpendicularmente ao segmento de reta \overline{CB} e para encontrá-lo foram utilizados os conhecimentos da álgebra linear no que se refere ao produto interno euclidiano entre vetores, conforme apresentado na revisão bibliográfica.

Assim sendo, considerou-se que $\vec{w} = (x, y)$ e $\vec{u} = (a, -b)$, sendo \vec{u} o vetor paralelo ao segmento de reta \overline{CB} , convenientemente direcionado para baixo, e \vec{w} o vetor perpendicular ao vetor \vec{u} , a partir do qual será encontrado o ponto T .

Como os vetores são ortogonais, então, θ , o ângulo formado entre os vetores, será de 90° .

A partir da Equação (18), segue que:

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta \Rightarrow \langle (x, y), (a, -b) \rangle = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos 90^\circ$$

$$ax - by = 0 \Rightarrow y = \frac{ax}{b} \quad (44)$$

Logo, \vec{w} é dado por:

$$\vec{w} = \left(x, \frac{ax}{b} \right) = x \left(1, \frac{a}{b} \right), \forall x \in \mathfrak{R} \mid x > 0 \quad (45)$$

4.1.2.5 Ponto T (Passo 5)

O ponto T é encontrado a partir do vetor \vec{w} , com origem no ponto K . Para tanto, foi atribuído o valor do semieixo b à variável x do vetor \vec{w} de modo que o ponto T foi achado nas seguintes coordenadas:

$$T = K + \vec{w} \Rightarrow T = \left(\frac{a[1 + \lambda(a - b)]}{2} + b, \frac{b[1 - \lambda(a - b)]}{2} + a \right) \quad (46)$$

4.1.2.6 Reta r e os pontos U e W (Passo 6)

Identificados os pontos T e K , o passo seguinte foi identificar a reta r que passa pelos referidos pontos visando identificar nos próximos passos os pontos U e W .

Neste momento, considerou-se oportuno relembrar o fato de que dois arcos de circunferência são concordantes quando o ponto de concordância (ou seja, o ponto de ligação entre os dois arcos) apresenta a mesma tangente. Para tanto, como visto na revisão bibliográfica, impende que os centros dos raios dos arcos de circunferência estejam em uma mesma reta (portanto, que sejam colineares). Isto posto, explica-se, sumariamente, a construção da reta r e a identificação dos pontos U e W (centros dos arcos das circunferências) que pertencem a esta reta.

Como visto, a equação geral da reta é dada por $(y - y_0) = m(x - x_0)$, sendo m a sua inclinação.

Tomando-se os pontos K e T , então m é dado por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{T_y - K_y}{T_x - K_x} = \frac{\left(\frac{b[1 - \lambda(a - b)]}{2} + a \right) - \left(\frac{b[1 - \lambda(a - b)]}{2} \right)}{\left(\frac{a[1 + \lambda(a - b)]}{2} + b \right) - \left(\frac{a[1 + \lambda(a - b)]}{2} \right)} = \frac{a}{b} \quad (47)$$

Então, considerando as coordenadas de K , T e o valor de m , tem-se que:

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$\left[y - \frac{b[1 - \lambda(a - b)]}{2} \right] = \frac{a}{b} \left[x - \frac{a[1 + \lambda(a - b)]}{2} \right]$$

$$y = -\frac{1}{2b} \left[\frac{a - b}{\lambda} + c^2 - 2ax \right] \quad (48)$$

Por conseguinte, a reta r pode ser descrita da seguinte forma:

$$r = \left(x, -\frac{1}{2b} \left(\frac{a-b}{\lambda} + c^2 - 2ax \right) \right), \forall x \in \mathfrak{R} \quad (49)$$

O ponto U corresponde à intersecção da reta r e o eixo x , ou seja, $U \in r \mid U_y = 0$.

Por consequência, tomando a Equação (49) e fazendo $y = 0$:

$$0 = -\frac{1}{2b} \left[\frac{a-b}{\lambda} + c^2 - 2ax \right] \Rightarrow x = \frac{1}{2a} \left(\frac{a-b}{\lambda} + c^2 \right) \quad (50)$$

Tem-se, portanto, as coordenadas do ponto U , centro do arco de circunferência com raio medido no eixo x (vide Passo 8, do Apêndice A):

$$U = \left(\frac{1}{2a} \left(\frac{a-b}{\lambda} + c^2 \right), 0 \right) \quad (51)$$

O ponto W , por sua vez, se encontra no eixo y , ou seja, $W \in r \mid W_x = 0$. Desta forma, tomando-se a Equação (48) e fazendo $x = 0$:

$$y = -\frac{1}{2b} \left[\frac{a-b}{\lambda} + c^2 - 2ax \right]$$

$$y = -\frac{1}{2b} \left[\frac{a-b}{\lambda} + c^2 \right] \quad (52)$$

Tem-se, portanto, as coordenadas do ponto W , centro do arco de circunferência com raio medido no eixo y (vide Passo 8, do Apêndice A):

$$W = \left(0, -\frac{1}{2b} \left[\frac{a-b}{\lambda} + c^2 \right] \right) \quad (53)$$

4.1.2.7 Ângulos α e β (Passo 7)

Para mensurar o ângulo α , formado pelo eixo x e a reta r , valeu-se, novamente, do conceito de produto interno euclidiano entre vetores, da álgebra linear. Para tanto, foi definido o vetor \vec{v} , situado no eixo x a partir da origem e com comprimento a , ou seja, $\vec{v} = (a, 0)$.

Como o ângulo α é o mesmo encontrado entre os vetores \vec{w} e \vec{v} , pois \vec{w} é paralelo à reta r , tem-se que:

$$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \left\langle \left(x, \frac{ax}{b} \right), (a, 0) \right\rangle = \sqrt{x^2 + \left(\frac{ax}{b} \right)^2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \cos \alpha$$

$$\alpha = \arccos(\lambda b) \quad (54)$$

Como o ângulo β é complementar ao ângulo α , então:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (55)$$

Uma vez que os elementos geométricos foram devidamente identificados e traduzidos para uma linguagem matemática, o tópico seguinte tratará de como foi encontrado o comprimento da falsa elipse.

4.1.3 Cálculo do comprimento da falsa elipse

Nesta parte, mostra-se como foi calculado o comprimento da falsa elipse considerando os arcos de circunferência que foram identificados anteriormente, quais sejam: (1) o arco de circunferência com ângulo β , centro em W e raio $(b + |W_{[y]}|)$; e (2) o arco de circunferência de ângulo α , centro em U e raio $(a - U_{[x]})$.

Ao final, será apresentado a equação para toda a falsa elipse, pois os arcos foram encontrados levando-se em consideração apenas o primeiro quadrante que representa $\frac{1}{4}$ do comprimento total da figura.

4.1.3.1 Comprimento do arco de circunferência com centro em W (Passo 8)

Observando o Passo 8, no Apêndice A, nota-se que se formaram dois arcos de circunferência concordantes, sendo um com centro em W e outro com centro em U . Neste tópico será tratado o comprimento do arco com centro em W , denominado, doravante, de c_1 .

Aplicando a Equação (14) ao arco de circunferência de interesse, onde $r = b + |W_{[y]}|$ é o raio da circunferência e β o ângulo do arco, tem-se que c_1 é dado por:

$$c_1 = (b + |W_{[y]}|) \cdot \int_0^{\beta} d\theta \quad (56)$$

Desenvolvendo a Equação (56), obtém-se o comprimento do arco de circunferência em função de a e b :

$$\begin{aligned} c_1 &= (b + |W_{[y]}|) \cdot \int_0^{\beta} d\theta \Rightarrow c_1 = (b + |W_{[y]}|) \cdot \theta \Big|_0^{\beta} \Rightarrow c_1 = (b + |W_{[y]}|) \cdot \beta \\ c_1 &= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cdot (b + |W_{[y]}|) \\ c_1 &= \left[\frac{\pi}{2} - \arccos(\lambda b) \right] \cdot \left[b + \left| -\frac{1}{2b} \left[\frac{a-b}{\lambda} + c^2 \right] \right| \right] \end{aligned} \quad (57)$$

Por definição deste trabalho $a \geq b > 0$, portanto, a Equação (57) pode ser reescrita da seguinte forma, extraído-se o valor absoluto presente no segundo fator da expressão e aplicando algumas simplificações:

$$c_1 = \left[\frac{\pi}{2} - \arccos(\lambda b) \right] \cdot \left[\frac{1}{2b\lambda^2} [1 + \lambda(a - b)] \right] \quad (58)$$

4.1.3.2 Comprimento do arco de circunferência com centro em U (Passo 8)

A metodologia para o cálculo do comprimento do arco de circunferência com centro em U , denominado de c_2 , é a mesma aplicada no cálculo do arco de circunferência com centro em W . Deste modo, resta apenas o cálculo propriamente dito a partir da Equação (14), considerando o ângulo $\theta \in [0, \alpha]$ e o raio $r = (a - U_{[x]})$:

$$c_2 = (a - U_{[x]}) \cdot \int_0^\alpha d\theta \quad (59)$$

Desenvolvendo a Equação (59), obtém-se o comprimento do arco de circunferência pretendido em função de a e b :

$$c_2 = (a - U_{[x]}) \cdot \int_0^\alpha d\theta \Rightarrow c_2 = (a - U_{[x]}) \cdot \theta \Big|_0^\alpha \Rightarrow c_2 = (a - U_{[x]}) \alpha$$

$$c_2 = \alpha(a - U_{[x]}) \rightarrow c_2 = \arccos(\lambda b) \cdot \left[a - \frac{1}{2a} \left(\frac{a-b}{\lambda} + c^2 \right) \right]$$

$$c_2 = \arccos(\lambda b) \cdot \left[\frac{1}{2a\lambda^2} [1 - \lambda(a - b)] \right] \quad (60)$$

4.1.3.3 Equação do comprimento da falsa elipse: $g(a,b)$

A equação do comprimento da falsa elipse para o primeiro quadrante (c_{1Q}) foi obtido por meio da simples soma dos comprimentos dos arcos c_1 e c_2 apresentados na Equação (58) e na Equação (60), respectivamente.

$$c_{1Q} = c_1 + c_2$$

$$c_{1Q} = \left[\frac{\pi}{2} - \arccos(\lambda b) \right] \cdot \left\{ \frac{1}{2b\lambda^2} [1 + \lambda(a - b)] \right\} + \arccos(\lambda b) \cdot \left\{ \frac{1}{2a\lambda^2} [1 - \lambda(a - b)] \right\}$$

$$c_{1Q} = \frac{1}{4ab\lambda^2} \{ \pi a [1 + \lambda(a - b)] + 2 \arccos(\lambda b) [-a + b - \lambda c^2] \} \quad (61)$$

Como a Equação (61) resulta no comprimento da falsa elipse apenas referente ao primeiro quadrante, faz-se necessário a multiplicação da referida equação por 4 para obter a equação para o comprimento total da falsa elipse que será dada pela função $g(a,b)$, conforme definido na Equação (22):

$$g(a,b) = 4 \cdot c_{1Q}$$

$$g(a,b) = \frac{1}{ab\lambda^2} \{ \pi a [1 + \lambda(a - b)] + 2 \arccos(\lambda b) [-a + b - \lambda c^2] \} \quad (62)$$

Uma vez encontrada a equação do comprimento da falsa elipse, na subseção a seguir será feita a comparação entre a Equação (62) e o comprimento de uma elipse desenhada sobre uma placa de isopor.

Esta comparação, contudo, não decorre do acaso, pois se justifica na medida em que os erros a serem identificados servirão de base para encontrar a função que os descreva e favoreça o aperfeiçoamento da Equação (62), aproximando-a do comprimento da elipse desenhada sobre o isopor.

4.1.4 Comparação entre o comprimento da elipse e da falsa elipse

Para realizar a comparação entre os comprimentos da elipse e da falsa elipse, procedeu-se ao desenho da elipse sobre uma placa de isopor para a tomada das suas medidas, conforme definido na delimitação metodológica deste trabalho.

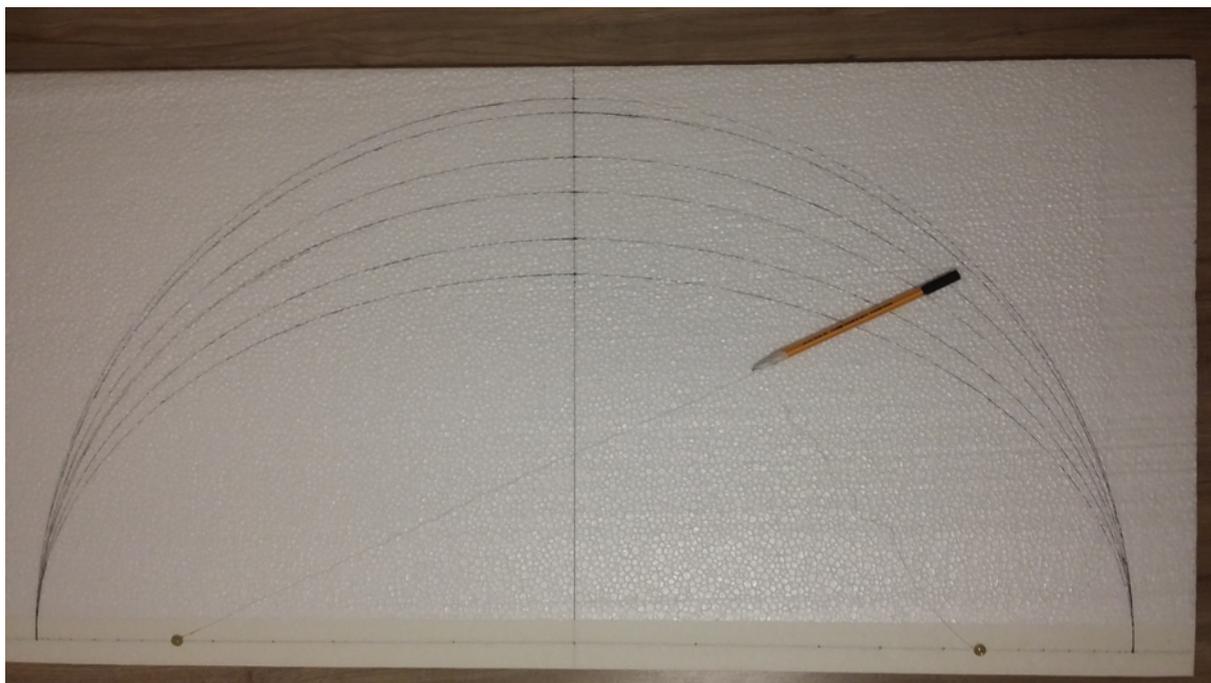
4.1.4.1 O desenho da elipse sobre a placa de isopor

O desenho da elipse foi realizado sobre uma placa de isopor medindo 1,000X0,500X0,015m para que fosse possível tomar a medida do seu comprimento, sendo que a técnica utilizada para o desenho refere-se àquela mostrada na figura (20), com pequenas adaptações para se conseguir um traço mais refinado.

Para uma melhor organização e apresentação do trabalho, optou-se por discutir alguns detalhes do desenho da elipse na subseção que foi reservada para esta finalidade (Discussão dos resultados).

Continuando, a imagem a seguir mostra o momento em que algumas elipses foram traçadas.

Figura 22 - Desenho de algumas elipses sobre uma placa de isopor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

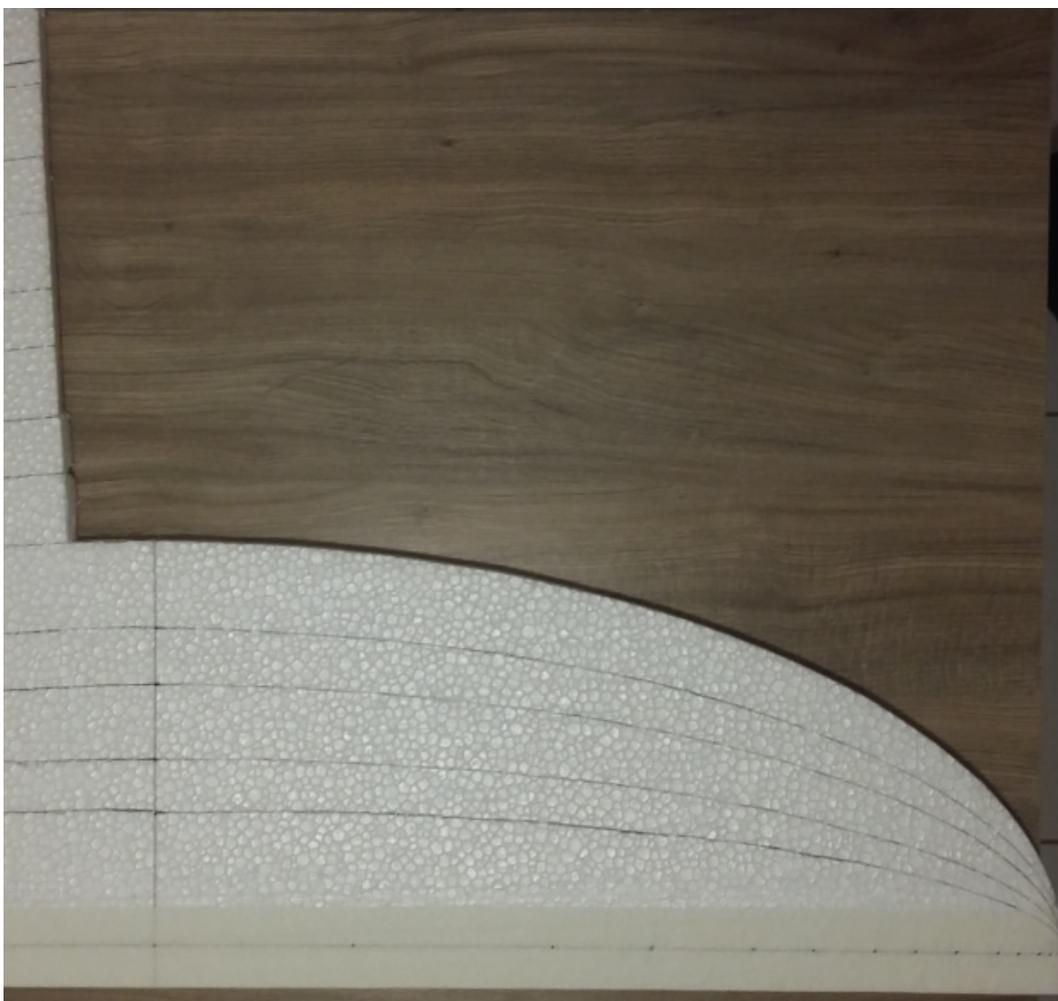
Após a conclusão dos desenhos das elipses, passou-se para a etapa de corte do isopor e medição do comprimento das elipses no primeiro quadrante (coleta dos dados), cujos resultados serão apresentados na próxima subseção.

4.1.4.2 Coleta e comparação dos dados

Para realizar o corte das elipses no isopor utilizou-se um estilete que se mostrou bastante eficiente e preciso, não sendo necessário o uso de um cortador de isopor de fio de aço aquecido, que poderia deformar o material ao cortá-lo.

As imagens abaixo mostram momentos do corte e da medição.

Figura 23 - Corte das elipses.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 24 - Medição do comprimento das elipses em relação ao primeiro quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A tarefa de medição poderia ter sido feita tomando-se os dois quadrantes, visto que já tinham sido desenhados. Contudo, em razão da extensão a ser medida e sem o auxílio de uma outra pessoa, optou-se por medir apenas o primeiro quadrante para não incorrer em erros que se propagariam em todos os cálculos porvir.

Para a medição do comprimento da elipse foi utilizada uma fita métrica na escala de centímetros, como se pode observar na figura (24), que, após ser estendida sobre o isopor, foi esticada (sem exageros) minimizando pequenas imperfeições do corte ao promover uma suave uniformidade na superfície medida.

Embora a fita métrica permitisse a medição com exatidão até a terceira casa decimal, na unidade de metro, algumas medidas coletadas alcançaram até 4 casas decimais. Estes casos se referem às situações onde o ponto medido se situou entre um milímetro e o milímetro seguinte. Desta forma, adicionou-se, visando uma melhor aproximação, o valor de 0,5 mm à medida inferior mais próxima. Exemplificando, se a medição apontou para um valor entre 0,706 m e 0,707 m, adotou-se o valor de 0,7065 m.

A imagem a seguir mostra o resultado do corte das primeiras 12 elipses.

Figura 25 - Montagem das elipses que foram cortadas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na medida em que o isopor foi cortado, ou seja, para cada elipse, foram feitas as medições: (i) do comprimento da elipse; (ii) da distância efetiva do foco (c); e (iii) do semieixo menor (b).

Não obstante o fato dos valores de c e b terem sido definidos previamente (no momento do desenho), notou-se, pelo fato da atividade ser realizada manualmente, que estas medidas sofreram pequenas variações (em milímetros) ensejando a coleta dos seus efetivos valores com a mesma metodologia empregada na medição com a fita métrica.

Tabela 3 - Coleta do comprimento das elipses (valores medidos manualmente).

(Continua)

a (m)	b (m)	c (m)	Comprimento 1° Quadrante (m)
0,4500	0,4500	0,0000	0,7070
0,4500	0,4390	0,0990	0,6980
0,4500	0,4025	0,2010	0,6695
0,4500	0,3735	0,2510	0,6475
0,4500	0,3350	0,3005	0,6195
0,4500	0,3060	0,3300	0,5980

(Continuação)

a (m)	b (m)	c (m)	Comprimento 1° Quadrante (m)
0,4500	0,2700	0,3600	0,5740
0,4500	0,2405	0,3805	0,5550
0,4500	0,2060	0,4000	0,5335
0,4500	0,1615	0,4200	0,5080
0,4500	0,1325	0,4300	0,4925
0,4500	0,0940	0,4400	0,4760
0,4500	0,0675	0,4450	0,4660

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os valores da Tabela 3 diferem um pouco daqueles definidos na Tabela 1, pois ao desenhar as elipses, notou-se que as maiores variações na excentricidade (achatamento da elipse) ocorriam para valores de c mais próximos de a . Desta forma, decidiu-se por aumentar o número de amostras nesta região. Também apresenta alterações em relação à Tabela 2, pois viu-se a necessidade de coletar os dados da variável b .

A comparação entre o comprimento da elipse desenhada sobre o isopor e o comprimento da falsa elipse obtido por meio da Equação (62) encontra-se formalizada na tabela a seguir, sendo que os valores das variáveis a , b e c originam-se da Tabela 3.

Tabela 4 – Comparativo entre os comprimentos da elipse e da falsa elipse.

(Continua)

Tabela 3				Comprimento da falsa elipse (m) Equação (62) [2]	Erro (m) [1]-[2]	Valor absoluto do Erro
a (m)	b (m)	c (m)	Comprimento da elipse (isopor) (m) ----- 4 x Comprimento do 1° Quadrante [1]			
0,4500	0,4500	0,0000	2,8280	2,8274	0,0006	0,0006
0,4500	0,4390	0,0990	2,7920	2,7930	-0,0010	0,0010
0,4500	0,4025	0,2010	2,6780	2,6811	-0,0031	0,0031
0,4500	0,3735	0,2510	2,5900	2,5947	-0,0047	0,0047
0,4500	0,3350	0,3005	2,4780	2,4841	-0,0061	0,0061
0,4500	0,3060	0,3300	2,3920	2,4040	-0,0120	0,0120
0,4500	0,2700	0,3600	2,2960	2,3092	-0,0132	0,0132
0,4500	0,2405	0,3805	2,2200	2,2355	-0,0155	0,0155
0,4500	0,2060	0,4000	2,1340	2,1542	-0,0202	0,0202

(Continuação)

Tabela 3				Comprimento da falsa elipse (m) Equação (62) [2]	Erro (m) [1]-[2]	Valor absoluto do Erro
<i>a</i> (m)	<i>b</i> (m)	<i>c</i> (m)	Comprimento da elipse (isopor) (m) ----- 4 x Comprimento do 1º Quadrante [1]			
0,4500	0,1615	0,4200	2,0320	2,0580	-0,0260	0,0260
0,4500	0,1325	0,4300	1,9700	2,0008	-0,0308	0,0308
0,4500	0,0940	0,4400	1,9040	1,9322	-0,0282	0,0282
0,4500	0,0675	0,4450	1,8640	1,8898	-0,0258	0,0258

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como se pode observar na tabela acima, constatou-se a existência de erros entre as medidas de comprimento da elipse e da falsa elipse, que já eram esperados, pois a falsa elipse é uma representação (ou simplificação) da elipse.

Tomando-se os valores absolutos, constata-se que o maior erro encontrado foi de 0,0308 m, como se observa na coluna Valor absoluto do Erro.

Para melhorar a aproximação do comprimento da falsa elipse em relação à elipse, estes erros foram minimizados, conforme descrição no item a seguir.

4.1.5 A função de ajuste dos erros: $E(a,b)$

De acordo com o que foi proposto para este trabalho e considerando os erros verificados entre os comprimentos da elipse e da falsa elipse, este item se preocupará em mostrar como foi encontrada a função objetivando minimizá-los. Salienta-se que foram tomados os erros em seus valores positivos e negativos, pois o resultado da função procurada ajustará o comprimento da falsa elipse em relação ao comprimento da elipse por meio de acréscimos ou decréscimos de valores.

Para esta atividade, conforme pré estabelecido, foi empregado o ajuste de mínimos quadrados, descrito por meio da Equação (23).

4.1.5.1 Identificando a relação entre a e b (variável x) para descrever os erros (variável y)

Não obstante os cálculos a serem realizados por meio da equação, procedeu-se, primeiramente, à identificação da relação entre a e b que permitiria a melhor acomodação dos erros encontrados.

Nesta tarefa, prospectou-se algumas relações, abrangendo algumas possibilidades de funções entre as variáveis a e b (semieixo maior e semieixo menor, respectivamente) e os erros que foram identificados na Tabela 4. Como resultado, foi elaborada a tabela abaixo que resume os dados apurados.

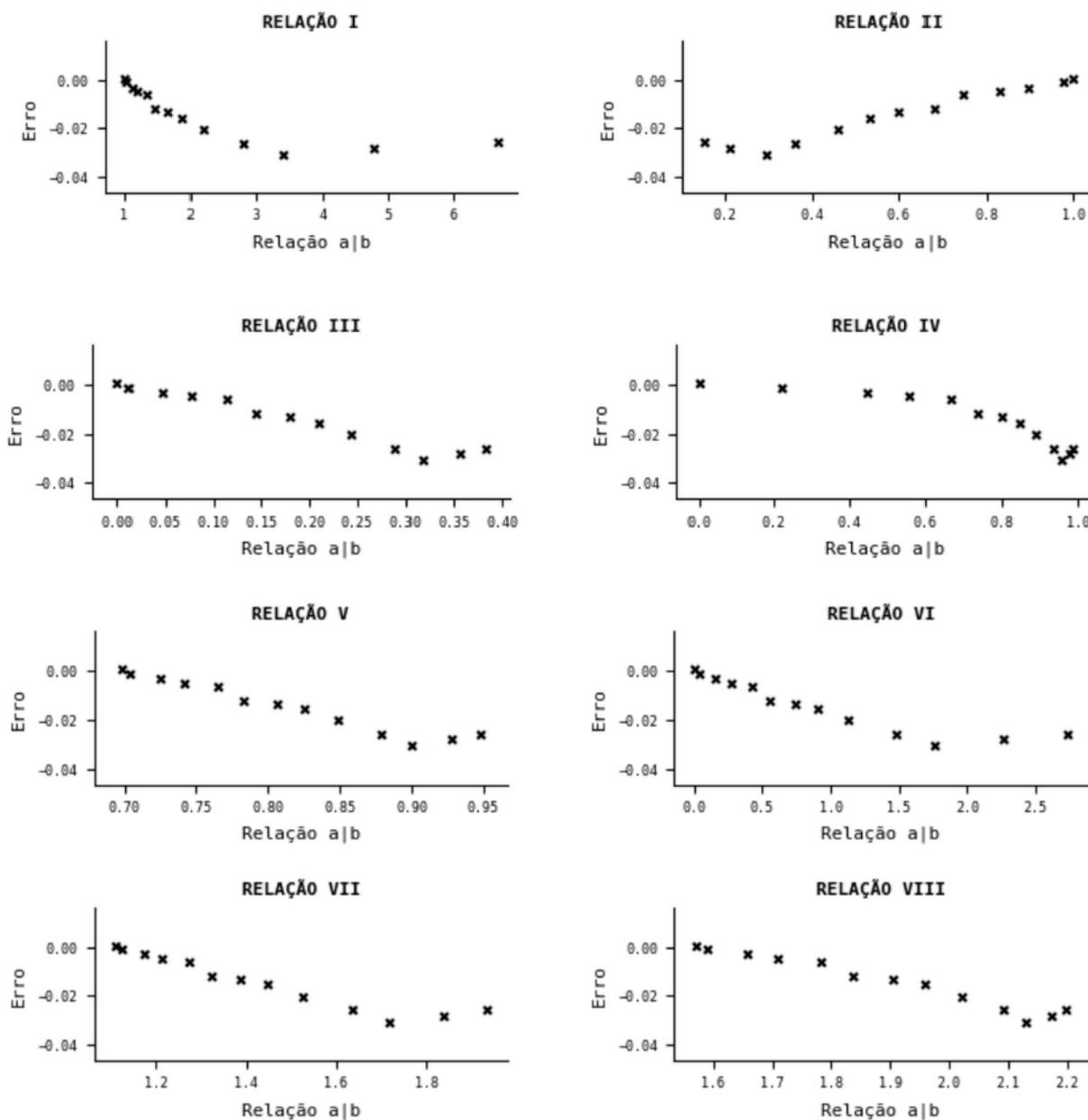
Tabela 5 - Relações entre a e b para avaliação da função de ajuste dos erros.

Tabela 4		Relações								Tabela 4
a (m)	b (m)	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Erro (m)
		$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$	$a - b$	$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$	a^b	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)$	$\frac{1}{a+b}$	λ	
0,4500	0,4500	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,6981	0,0000	1,1111	1,5713	0,0006
0,4500	0,4390	1,0251	0,9756	0,0110	0,2198	0,7043	0,0247	1,1249	1,5907	-0,0010
0,4500	0,4025	1,1180	0,8944	0,0475	0,4472	0,7251	0,1116	1,1730	1,6563	-0,0031
0,4500	0,3735	1,2048	0,8300	0,0765	0,5578	0,7421	0,1863	1,2143	1,7100	-0,0047
0,4500	0,3350	1,3433	0,7444	0,1150	0,6677	0,7653	0,2951	1,2739	1,7825	-0,0061
0,4500	0,3060	1,4706	0,6800	0,1440	0,7332	0,7832	0,3857	1,3228	1,8376	-0,0120
0,4500	0,2700	1,6667	0,6000	0,1800	0,8000	0,8061	0,5108	1,3889	1,9055	-0,0132
0,4500	0,2405	1,8711	0,5344	0,2095	0,8452	0,8253	0,6265	1,4482	1,9599	-0,0155
0,4500	0,2060	2,1845	0,4578	0,2440	0,8891	0,8483	0,7814	1,5244	2,0206	-0,0202
0,4500	0,1615	2,7864	0,3589	0,2885	0,9334	0,8790	1,0247	1,6353	2,0916	-0,0260
0,4500	0,1325	3,3962	0,2944	0,3175	0,9557	0,8996	1,2227	1,7167	2,1317	-0,0308
0,4500	0,0940	4,7872	0,2089	0,3560	0,9779	0,9277	1,5660	1,8382	2,1753	-0,0282
0,4500	0,0675	6,6667	0,1500	0,3825	0,9887	0,9475	1,8971	1,9324	2,1976	-0,0258

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com base nos dados dispostos na tabela acima, foram elaborados gráficos de dispersão para auxiliarem na identificação da relação mais adequada.

Gráfico 1. Representações gráficas dos dados da Tabela 5.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dos gráficos apresentados acima, constatou-se, com exceção do gráfico que tratou da relação IV, que as demais relações apresentaram pontos que estão dispostos no formato de uma curva suave, sem pontas. Desta forma, sem preferência por qualquer das relações, exceto a IV, utilizou-se aquela representada pela relação II: $[b/a]$.

Uma vez definida a relação entre a e b e os erros, resta identificar a função que melhor descreve os erros.

4.1.5.2 Escolha da função

Salvo melhor juízo, diante da infinidade de funções que podem ser concebidas, conforme apresentado na seção que tratou da fundamentação teórica, uma forma para se identificar a função mais eficiente é explorando empiricamente as diversas possibilidades e calculando o seu coeficiente de determinação, R^2 .

Neste sentido, o Apêndice C foi construído demonstrando algumas possíveis funções e o seu respectivo R^2 .

Tomando-se o resultado apresentado no Apêndice C, depreendeu-se que as funções polinomiais conseguiram explicar satisfatoriamente a relação entre a e b (variável x) e os erros (variável y), não obstante os resultados produzidos pelas funções trigonométricas (seno) que foram levemente superiores às funções polinomiais. Contudo, considerando que a Equação (62) difere de uma função trigonométrica, optou-se por prosseguir o desenvolvimento do trabalho com base em função polinomial, objetivando melhor uniformidade da equação final a ser obtida para o atendimento do objetivo geral deste trabalho.

4.1.5.3 Identificação do grau da função polinomial

Não obstante os resultados encontrados no Apêndice C, as Equações (26) e (28) apresentadas na fundamentação teórica são instrumentos que podem indicar/confirmar a melhor ordem do polinômio a ser empregada na função de ajuste dos erros. Desta forma, foram submetidas às referidas equações os modelos de polinômios de grau 1 a 10, considerando os valores de b/a (variável independente) e dos erros (variável dependente) constantes na Tabela 5.

Tabela 6 - Resultado dos índices s^2 e AIC_c para os modelos polinomiais de grau 1 a 10.

(Continua)		
Grau do polinômio	s^2	AIC_c
1	6,20E-06	-221,2000

(Continuação)

Grau do polinômio	s^2	AIC_c
2	6,54E-06	-218,3424
3	3,36E-06	-228,3242
4	1,62E-06	-238,3321
5	1,60E-06	-233,4155
6	1,83E-06	-223,0198
7	1,18E-06	-218,4330
8	1,17E-06	-196,1344
9	1,45E-06	-144,2138
10	1,93E-06	11,6731

Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme visto na revisão bibliográfica, o melhor modelo é aquele que apresenta os menores índices para s^2 e AIC_c .

Desta forma, com base nos resultados da Tabela 6, constatou-se que o modelo polinomial de grau 4 é o que apresentou melhor performance, considerando que obteve o menor índice AIC_c e um dos menores valores para s^2 . Portanto, foi selecionado para a descrição da função procurada.

Um polinômio de grau 4 é dado pela seguinte equação genérica:

$$P_4(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \quad (63)$$

4.1.5.4 Identificação dos coeficientes da função polinomial

Os coeficientes da Equação (63), ou seja A , B , C , D e E , foram encontrados por meio da Equação (23), com base nos dados da coluna “Erro” e da “Relação II” da Tabela 5.

Observou-se, no entanto, que a Equação (23) trazia consigo a operação de multiplicação e a inversa de matrizes, cujo cálculo manual, em se tratando de matrizes com poucas linhas e colunas, não oferece maiores complexidades. Porém, considerando os dados a serem utilizados, apresentados na Tabela 5, constatou-se que o cálculo de algumas operações, como encontrar a inversa de uma matriz, exigiria o uso de ferramentas mais apropriadas.

Desta forma, conforme definido nos objetivos específicos deste trabalho, foi utilizada a linguagem de programação Python, com o auxílio da IDE¹ (*Integrated Development Environment*) Spyder, para realizar estes cálculos por meio de um programa, cujo código fonte encontra-se disponível no Apêndice B.

Após o processamento dos dados, os coeficientes A , B , C , D e E da Equação (63) foram substituídos pelos valores calculados pela Equação (23), resultando na equação abaixo, que descreve a função de ajuste dos erros:

$$E(a, b) = 0,39327 \left(\frac{b}{a}\right)^4 - 1,02837 \left(\frac{b}{a}\right)^3 + 0,93184 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0,29730 \left(\frac{b}{a}\right) - 0,00113 \quad (64)$$

Embora os cálculos tenham sido processados por meio de uma linguagem de programação, os valores dos coeficientes da Equação (64) podem ser obtidos por meio de planilhas eletrônicas, como o Excel do pacote Office da Microsoft e o Calc do pacote LibreOffice.

A despeito de existirem outras funcionalidades, no Apêndice D deste trabalho consta a apuração dos referidos coeficientes por meio da função LINEST, integrante da planilha eletrônica Calc, que possui similaridade com a função de mesmo nome da planilha eletrônica Excel.

4.1.6 Formulação da equação do comprimento da elipse a partir da falsa elipse e da função de ajuste dos erros

Uma vez que foram encontradas as equações do comprimento da falsa elipse, Equação (62), e a função de ajuste dos erros, Equação (64), verifica-se que o objetivo geral da pesquisa foi alcançado por meio da seguinte equação do comprimento da elipse:

$$f(a, b) = g(a, b) + E(a, b)$$

¹ Uma IDE, de maneira bastante simples, é um software que possui as funcionalidades necessárias para se criar um programa/software em uma linguagem computacional.

$$f(a, b) = \frac{1}{ab\lambda^2} \left[\pi a [1 + \lambda(a - b)] + 2 \arccos(\lambda b) [-a + b - \lambda c^2] \right] + 0,39327 \left(\frac{b}{a} \right)^4 - 1,02837 \left(\frac{b}{a} \right)^3 + 0,93184 \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 0,29730 \left(\frac{b}{a} \right) - 0,00113 \quad (65)$$

4.2 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Concluído o processo de apresentação, esta subseção promoverá uma discussão sobre os resultados encontrados, bem como permitirá o detalhamento de alguns procedimentos que foram adotados. Para tanto, serão abordados os seguintes itens:

- a) comparativo entre o traço da falsa elipse e o traço da elipse;
- b) considerações sobre o desenho da elipse na placa de isopor;
- c) comparativo entre o comprimento da elipse medida no isopor e a elipse calculada pela Equação (3);
- d) avaliação da função de ajuste dos erros Equação (64);
- e) avaliação do comprimento da falsa elipse Equação (65) e a elipse medida.

4.2.1 Comparativo gráfico entre o traço da falsa elipse e o traço da elipse

Na subseção anterior, que tratou da apresentação, foi demonstrado em detalhes como a falsa elipse de 4 centros foi construída, propiciando para este momento uma comparação entre o traço da falsa elipse e o traço da elipse.

Para isto, foi providenciada a construção da elipse e da falsa elipse utilizando as seguintes medidas: semieixo menor $b \in \{0,45; 0,33; 0,24; 0,07\}$ e semieixo maior $a=0,45$.

Considerando: (i) a Equação (8); (ii) a coordenada x do ponto U , Equação (51); e (iii) a coordenada y do ponto W , Equação (53), as equações a seguir descrevem a falsa elipse de 4 centros tratada nesta pesquisa, sendo α e β os ângulos definidos nas Equações (54) e (55), respectivamente.

$$h = \begin{cases} [(|W_{[y]}| + b) \operatorname{sen} \theta , -W_{[y]} - (|W_{[y]}| + b) \operatorname{cos} \theta], & -\beta < \theta < \beta \\ [(|W_{[y]}| + b) \operatorname{sen} \theta , W_{[y]} + (|W_{[y]}| + b) \operatorname{cos} \theta], & -\beta < \theta < \beta \\ [U_{[x]} + (a - U_{[x]}) \operatorname{cos} \theta , (a - U_{[x]}) \operatorname{sen} \theta], & -\alpha \leq \theta \leq \alpha \\ [-U_{[x]} - (a - U_{[x]}) \operatorname{cos} \theta , (a - U_{[x]}) \operatorname{sen} \theta], & -\alpha \leq \theta \leq \alpha \end{cases} \quad (66)$$

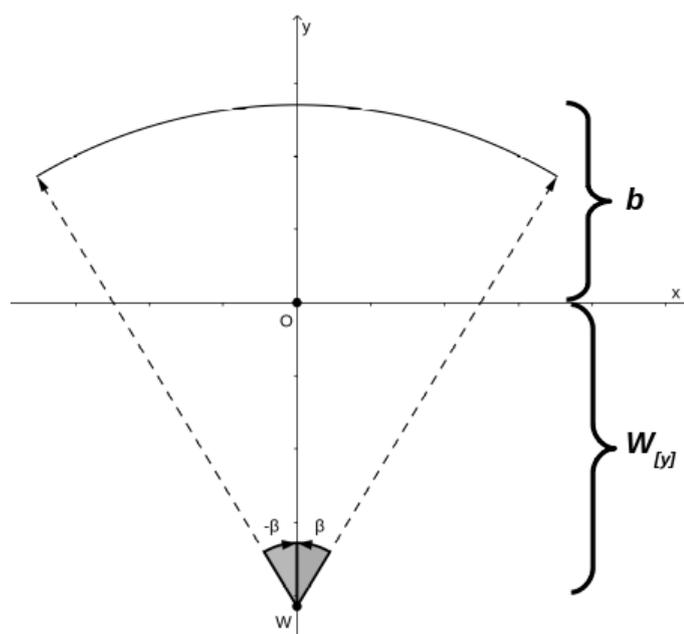
Para exemplificação de como as equações acima foram encontradas, seleciona-se a equação $[(|W_{[y]}| + b) \operatorname{sen} \theta , W_{[y]} + (|W_{[y]}| + b) \operatorname{cos} \theta], -\beta < \theta < \beta$.

Primeiramente, a equação descreve um arco de circunferência, ou seja, um segmento de uma circunferência. Desta forma, tomando por modelo a Equação (8), o arco da equação que se quer exemplificar se refere ao ângulo θ compreendido entre $-\beta$ e β , cujo raio está centrado no ponto W . Portanto, $|W_{[y]}| + b$ é o raio do arco.

$$\left[\underbrace{(|W_{[y]}| + b) \operatorname{sen} \theta}_{\substack{\text{Raio} \\ \text{Eixo x}}}, \underbrace{W_{[y]} + (|W_{[y]}| + b) \operatorname{cos} \theta}_{\substack{\text{Centro da circunferência no eixo y} \\ \text{Eixo y}}} \right], -\beta < \theta < \beta$$

A figura abaixo permite uma visualização da equação:

Figura 26 - Visualização do arco de circunferência da equação exemplificada.

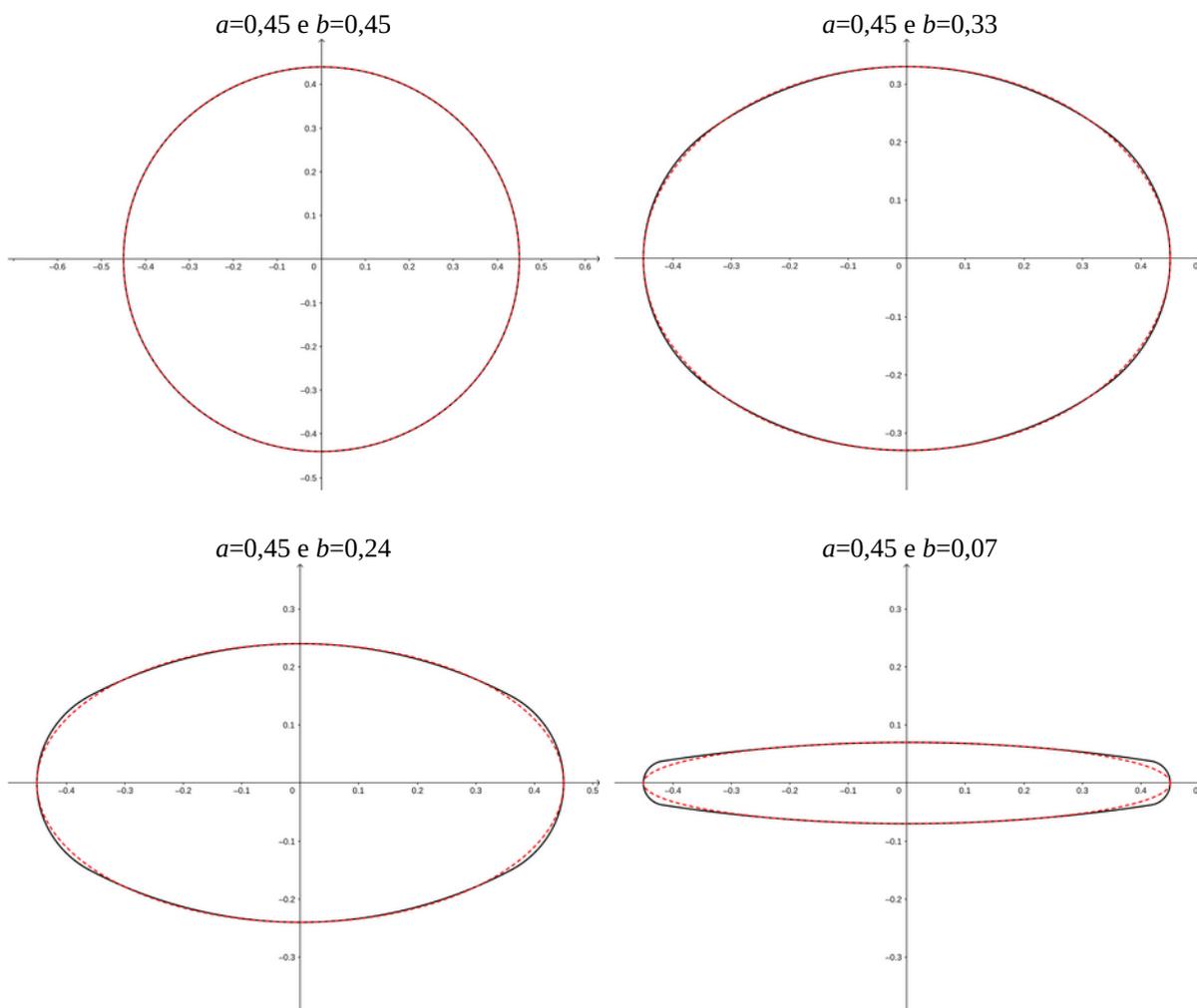


Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do software Geogebra.

A elipse, por sua vez, foi traçada por meio da Equação (4).

Gráfico 2. Comparações entre o traço da falsa elipse e o traço da elipse.

(Continua)



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do software Geogebra.

Nota: A falsa elipse é representada pelo traço contínuo na cor preta e a elipse é representada pelo traço pontilhado na cor vermelha.

Constata-se que o gráfico acima confirma a proposição de Qian (2011, p. 262), apresentada na revisão bibliográfica. Enquanto um dos arcos da falsa elipse se parece com um 'morro', pois o seu traço se mostra acima do traço da elipse (vide o gráfico acima para $b = 0,07$), o outro arco da falsa elipse se parece como um vale, pois o traço aparece abaixo do traço da elipse.

Outro detalhe que se observa por meio das representações acima, se refere ao fato de que a falsa elipse se aproxima da elipse na medida em que o valor de b se aproxima de a . Por consequência, o erro entre o comprimento da falsa elipse e a elipse tende a ser maior quando o valor de b se afasta do valor de a .

4.2.2 Considerações sobre o desenho da elipse na placa de isopor

Para a realização do desenho da elipse sobre a placa de isopor foi escolhida, inicialmente, uma caneta com o menor diâmetro próximo à ponta, conforme mostra a figura a seguir, e cuja tinta aderisse ao isopor com maior facilidade (hidrográfica).

Figura 27 - Detalhe da caneta escolhida para o desenho da elipse.

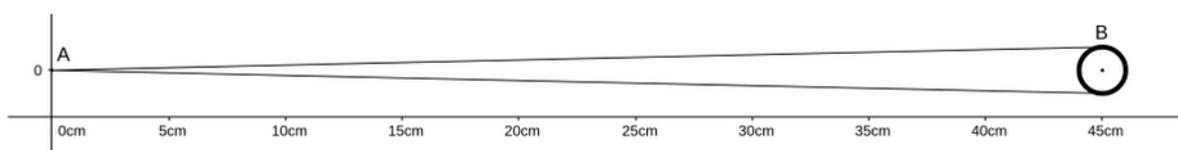


Fonte: Elaborado pelo autor.

Esta medida foi tomada visando reduzir o acréscimo no comprimento da linha para contornar a caneta, pois, ao desenhar elipses de menores excentricidades (mais achatadas), este acréscimo no comprimento produz um traçado indesejado. Senão, veja-se.

A figura abaixo ilustra uma linha partindo e retornando ao ponto A após contornar o objeto B (que pode ser a caneta). Nota-se que a distância entre A e B é de 45 cm.

Figura 28 - Ilustração de uma linha partindo do ponto A e contornando um objeto B.

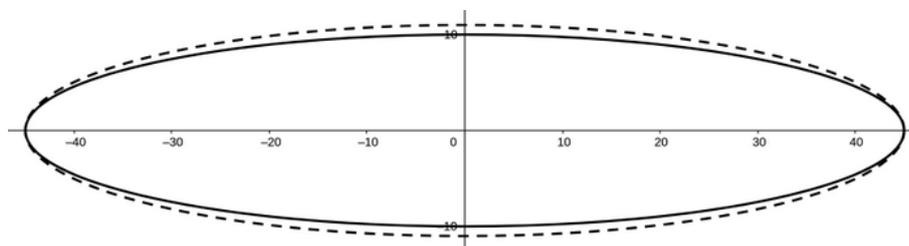


Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do software Geogebra.

Contudo, ao esticar a linha, observa-se que o seu comprimento não é de 90 cm, mas, sim, de 90,3 cm. Este acréscimo de 0,3 cm no comprimento se refere à distância percorrida pela linha para contornar o objeto B.

Aplicando este fato ao desenho da elipse, verifica-se que este acréscimo indesejado produz um comprimento maior da elipse, algo semelhante ao demonstrado na figura abaixo.

Figura 29 - Divergência no traço da elipse.

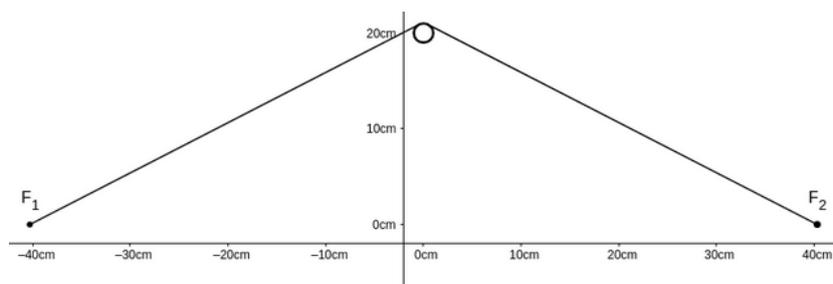


Legenda: Traço contínuo = elipse correta e traço pontilhado = elipse incorreta.
 Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do software Geogebra.

Para melhor entendimento, as ilustrações a seguir mostram o caminho percorrido pela linha ao contornar um objeto em situações distintas ao se desenhar uma elipse, sendo que F_1 e F_2 correspondem aos focos da elipse.

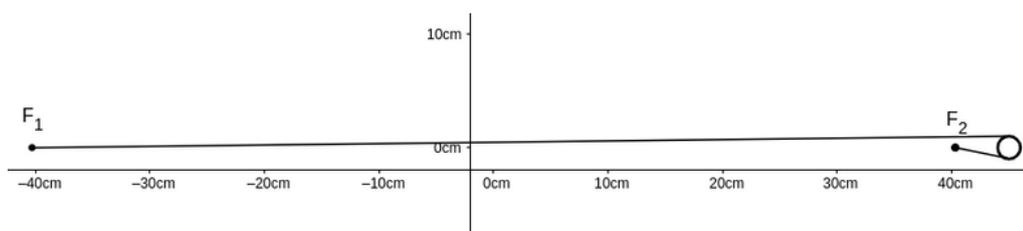
Na figura (30), observa-se a linha contornando um objeto quando este está localizado no maior valor do semieixo b da elipse e a figura (31) mostra a linha contornando o objeto quando este se encontra no menor valor do semieixo b da elipse.

Figura 30 - Caminho percorrido pela linha ao contornar um objeto no maior valor do semieixo b da elipse.



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do software Geogebra.

Figura 31 - Caminho percorrido pela linha ao contornar um objeto no menor valor do semieixo b da elipse.



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do software Geogebra.

Nota-se que o caminho percorrido pela linha ao contornar o objeto na figura (31) é maior quando comparado com a figura (30), ocasionando o erro apresentado na figura (29).

Não obstante a opção pela caneta com o menor diâmetro próximo à ponta, ao final, buscando minimizar o efeito do acréscimo da linha para contornar a caneta, decidiu-se aperfeiçoar por um modelo onde a linha passasse por uma argola feita de fio de cobre bastante fino fixada na ponta da caneta, como mostra a figura a seguir.

Figura 32 - Fixação de uma argola na caneta para a passagem da linha.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o caso mostrado na figura (32), o comprimento da linha utilizada para desenhar a elipse levou em consideração a distância da ponta argola até a ponta da caneta. Em termos práticos, a medição do comprimento da linha e os devidos ajustes se deu empiricamente em instante que antecedeu ao desenho propriamente dito.

Nota-se que o método empregado difere do apresentado na figura (20), pois a busca por um traço mais refinado, impossibilitou o uso de uma linha com maior calibre (barbante). Ademais, ao se utilizar uma linha mais fina, esta se desprendia com facilidade da ponta da caneta inviabilizando o desenho.

Além do efeito observado quando a linha contorna a caneta, constatou-se que situação similar também ocorria em relação ao tipo de linha/fio utilizado.

Linhas/fios com maior rigidez demandam um maior comprimento para contornar um objeto, por serem mais densos. Este fato é melhor demonstrado nas imagens abaixo ao se comparar um fio de tungstênio e uma linha têxtil, esticados, contornando uma argola.

Figura 33 - Fio de tungstênio de 0,04 mm (esticado) passando pela argola.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 34 - Linha têxtil (esticada) passando pela argola.

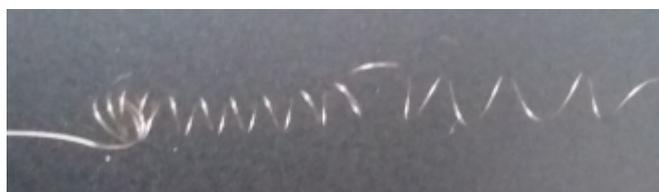


Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se nas figuras (33) e (34) que a linha têxtil consegue contornar a argola de forma mais eficiente de modo que o seu uso reduz o efeito mostrado na figura (29).

Todavia, o fio de tungstênio pode ter a mesma performance observada em relação à linha têxtil, contudo, é necessário exercer uma força bastante grande para esticá-lo o que acaba causando a sua deformação ao deslizar pelo interior da argola, como mostra a figura abaixo.

Figura 35 - Deformação sofrida por um fio de tungstênio de 0,04 mm esticado ao deslizar pelo interior de uma argola.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ademais, manusear um fio mais rígido, como o fio de tungstênio mostrado acima, é mais difícil do que uma linha têxtil.

Por outro lado, a desvantagem de se usar linhas muito flexíveis está no fato de que elas apresentam maior elasticidade, podendo levar a traços incorretos a depender da força exercida sobre ela (mais ou menos esticada). Contudo, esta desvantagem pode ser mitigada com um pouco de prática e ao se estabelecer pontos que devem ser alcançados ao se desenhar. No caso da elipse, por exemplo, a força exercida pela caneta sobre a linha deve ser suficiente para alcançar os pontos extremos do semieixo maior e menor.

Para este trabalho, pelos motivos apresentados, optou-se por utilizar a linha têxtil apresentada na figura (34).

4.2.3 Comparativo entre o comprimento da elipse medida no isopor e da elipse calculada pela Equação (3)

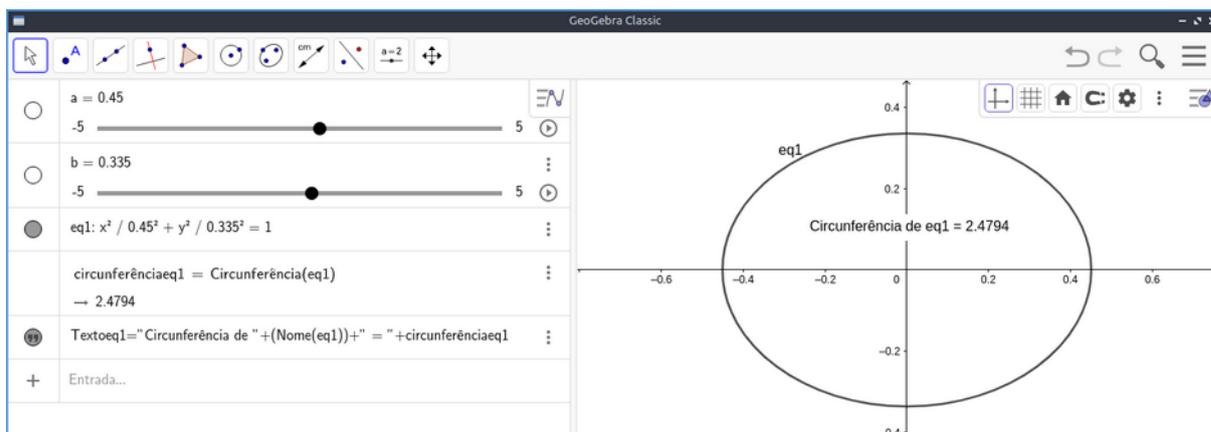
Uma dúvida que poderia pairar quanto as medidas coletadas das elipses desenhadas sobre o isopor é se elas guardam uma relação próxima com as medidas teóricas de uma elipse. Em outras palavras, as medições dos comprimentos das elipses sobre o isopor merecem credibilidade?

No intuito de responder a esta questão, decidiu-se discutir o caso por meio de um comparativo entre os valores da elipse medida, constantes na Tabela 4, e o valor da elipse obtida numericamente por meio da Equação (3).

Como a Equação (3) trata de uma soma infinita, que não pode ser resolvida totalmente, pois é infinita, computou-se o somatório dos 100 primeiros termos. Para esta atividade, novamente, recorreu-se ao uso da linguagem de programação Python, cujo código fonte do programa encontra-se apresentado no Apêndice E.

Não obstante, o software Geogebra possui funcionalidade para efetuar o cálculo do comprimento da elipse, como mostra a figura a seguir.

Figura 36 - Cálculo do comprimento da elipse com o Geogebra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os valores encontrados estão apresentados na tabela abaixo.

Tabela 7 - Comparativo entre o comprimento da elipse medida sobre o isopor e da elipse calculada pela Equação (3).

a (m)	b (m)	Comprimento da elipse (Tabela 4) (m)	Comprimento da elipse obtida em 100 iterações do somatório da Equação (3) (m)
0,4500	0,4500	2,8280	2,8274
0,4500	0,4390	2,7920	2,7930
0,4500	0,4025	2,6780	2,6803
0,4500	0,3735	2,5900	2,5927
0,4500	0,3350	2,4780	2,4794
0,4500	0,3060	2,3920	2,3966
0,4500	0,2700	2,2960	2,2974
0,4500	0,2410	2,2200	2,2208
0,4500	0,2060	2,1340	2,1328
0,4500	0,1615	2,0320	2,0296
0,4500	0,1325	1,9700	1,9686
0,4500	0,0940	1,9040	1,8975
0,4500	0,0675	1,8640	1,8569

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os dados apresentados na tabela acima mostram que os comprimentos das elipses medidas na placa de isopor são bastante satisfatórios, considerando que foram obtidas manualmente, pois estão bastante próximos dos comprimentos das elipses obtidas numericamente por meio da Equação (3).

4.2.4 Avaliação da função de ajuste dos erros - Equação (64)

Na apresentação foi demonstrado pormenorizadamente como a função de ajuste dos erros foi encontrada. Neste ponto, pretende-se avaliar os valores obtidos por esta função, Equação (64), e compará-los com os erros apresentados na Tabela 4.

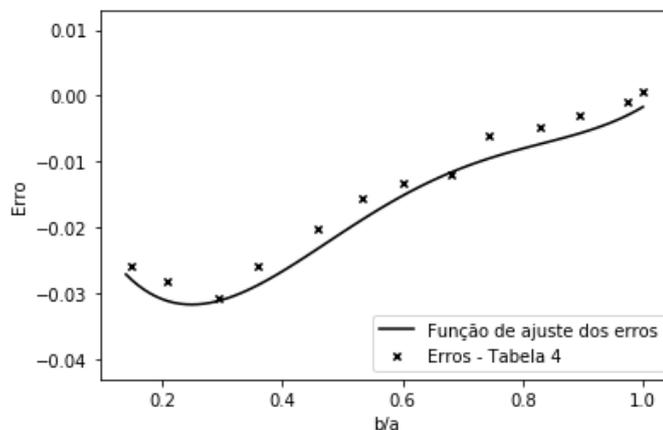
Tabela 8 - Comparativo entre os valores obtidos pela função de ajuste dos erros, Equação (64), e os erros identificados na Tabela 4.

<i>b/a</i>	Erros (m) Tabela 4	Função de ajuste dos erros (m) Equação (64)
1,0000	0,0006	-0,0017
0,9756	-0,0010	-0,0029
0,8944	-0,0031	-0,0057
0,8300	-0,0047	-0,0073
0,7444	-0,0061	-0,0095
0,6800	-0,0120	-0,0117
0,6000	-0,0132	-0,0152
0,5344	-0,0155	-0,0188
0,4578	-0,0202	-0,0233
0,3589	-0,0260	-0,0288
0,2944	-0,0308	-0,0312
0,2089	-0,0282	-0,0312
0,1500	-0,0258	-0,0280

Fonte: Elaborado pelo autor.

A representação gráfica a seguir permite uma melhor visualização dos dados da Tabela 8.

Gráfico 3. Comparação entre os erros apresentados na Tabela 4 e a função de ajuste dos erros – Equação (64).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com base no gráfico e nos dados apresentados, constata-se que a função de ajuste apresenta uma boa aproximação em relação aos erros identificados na Tabela 4, possibilitando que os mesmos sejam minimizados.

No próximo tópico a função de ajuste dos erros será novamente explorada em uma nova comparação por meio da Equação (65).

4.2.5 Avaliação do comprimento da falsa elipse Equação (65) e a elipse medida no isopor

Tendo sido encontrada a equação que fornece o comprimento de uma elipse a partir de uma falsa elipse e cujos erros foram minimizados por meio de uma função de ajuste, cabe neste momento discutir o resultado final encontrado.

A tabela abaixo mostra um comparativo entre o comprimento da elipse medida no isopor e a falsa elipse descrita pela Equação (65).

Tabela 9 - Comparativo entre o comprimento da elipse medida no isopor e da falsa elipse $[f(a,b)]$.

a (m)	b (m)	Elipse medida (m)	Comprimento da Falsa Elipse sem a função de ajuste dos erros (m) $g(a,b)$ Eq. (62)	Função de ajuste dos erros (m) $E(a,b)$ Eq. (64)	Comprimento da Falsa Elipse com a função de ajuste dos erros (m) $f(a,b) = g(a,b) + E(a,b)$ Eq. (65)	Erro final (m)	Valor absoluto do erro final
		[1]			[2]		
0,4500	0,4500	2,8280	2,8274	-0,0017	2,8257	0,0023	0,0023
0,4500	0,4390	2,7920	2,7930	-0,0029	2,7901	0,0019	0,0019
0,4500	0,4025	2,6780	2,6811	-0,0057	2,6754	0,0026	0,0026
0,4500	0,3735	2,5900	2,5947	-0,0073	2,5874	0,0026	0,0026
0,4500	0,3350	2,4780	2,4841	-0,0095	2,4746	0,0034	0,0034
0,4500	0,3060	2,3920	2,4040	-0,0117	2,3923	-0,0003	0,0003
0,4500	0,2700	2,2960	2,3092	-0,0152	2,2940	0,0020	0,0020
0,4500	0,2405	2,2200	2,2355	-0,0188	2,2167	0,0033	0,0033
0,4500	0,2060	2,1340	2,1542	-0,0233	2,1309	0,0031	0,0031
0,4500	0,1615	2,0320	2,0580	-0,0288	2,0292	0,0028	0,0028
0,4500	0,1325	1,9700	2,0008	-0,0312	1,9696	0,0004	0,0004
0,4500	0,0940	1,9040	1,9322	-0,0312	1,9010	0,0030	0,0030
0,4500	0,0675	1,8640	1,8898	-0,0280	1,8618	0,0022	0,0022

Fonte: Elaborado pelo autor.

Da tabela acima, nota-se a partir da coluna “Valor absoluto do erro final” que os erros entre os comprimentos da elipse e da falsa elipse, identificados após a inclusão da função de ajuste dos erros, foram minimizados para valores inferiores a 3,5 mm, enquanto os erros (em valores absolutos) antes da função de ajuste dos erros alcançaram 30,8 mm (Tabela 4).

Destaca-se para os valores de erro encontrados na coluna “Valor absoluto do erro final” que se aproximam de zero quando $b = 0,1325$ e $b = 0,3060$. Estes casos se referem àqueles em que a função de ajuste dos erros tem uma melhor aproximação em relação ao erro observado. Para tanto, vide o Gráfico (3) onde se observa dois pontos bastante próximos da curva da função.

Uma segunda demonstração de que a função de ajuste dos erros $E(a,b)$ minimizou o erro identificado quando se comparou a função $g(a,b)$ e o comprimento da elipse é apresentado na tabela comparativa a seguir, por meio da soma do quadrado das diferenças

(dos erros), do inglês *Sum Squared Errors – SSE*, que é utilizada pela estatística no cálculo da variância (MARTINS, p. 52-53).

Tabela 10 - Comparativo dos erros identificados entre a elipse medida e as funções $g(a,b)$ e $f(a,b)$.

a (m)	b (m)	Tabela 4	Quadrado dos erros ¹ de [A] (m ²)	Tabela 9	Quadrado dos erros ¹ de [B] (m ²)
		Erro $g(a,b)$ vs. Elipse isopor (m) [A]		Erro $f(a,b)$ vs. Elipse isopor (m) [B]	
0,4500	0,4500	0,0006	0,000222	0,0023	0,000000
0,4500	0,4390	-0,0010	0,000177	0,0019	0,000000
0,4500	0,4025	-0,0031	0,000126	0,0026	0,000000
0,4500	0,3735	-0,0047	0,000092	0,0026	0,000000
0,4500	0,3350	-0,0061	0,000067	0,0034	0,000001
0,4500	0,3060	-0,0120	0,000005	-0,0003	0,000007
0,4500	0,2700	-0,0132	0,000001	0,0020	0,000000
0,4500	0,2405	-0,0155	0,000001	0,0033	0,000001
0,4500	0,2060	-0,0202	0,000035	0,0031	0,000001
0,4500	0,1615	-0,0260	0,000137	0,0028	0,000000
0,4500	0,1325	-0,0308	0,000272	0,0004	0,000003
0,4500	0,0940	-0,0282	0,000193	0,0030	0,000001
0,4500	0,0675	-0,0258	0,000132	0,0022	0,000000
Σ			0,001460		0,000014

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: [1] O quadrado dos erros é dado pela seguinte equação: $\text{Quadrado dos erros}_i = (\bar{x} - x_i)^2$, onde \bar{x} é a média dos erros e x_i um erro.

Com base na soma da tabela acima (Soma do Quadrado dos Erros), constata-se que a minimização dos erros se deu em todos os valores de b , pois, se algum erro não tivesse sido reduzido, este fato teria refletido no somatório.

Do exposto, constata-se que a equação encontrada para o comprimento da falsa elipse adicionada da função de ajuste de erro mostra-se satisfatória ao ser comparada com os valores coletados da elipse desenhada sobre um isopor. Ademais, estes resultados mostram a eficiência do uso de arcos de circunferência concordantes na descrição de curvas suaves, como a elipse.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho abordou uma das diversas aplicações da circunferência, notadamente, representar, por meio de arcos concordantes, uma forma geométrica conhecida, no caso, a elipse.

Em particular, destaca-se o resultado que foi obtido ao se comparar o comprimento da elipse desenhada fisicamente sobre um isopor (mundo real) e o comprimento da falsa elipse calculado por meio de uma equação matemática (mundo abstrato), mostrando a viabilidade da aplicação para o caso estudado.

Embora este trabalho tenha se restringido ao estudo da representação da elipse por meio de uma falsa elipse, entende-se que um dos maiores benefícios que se pode extrair dele encontra-se na metodologia que foi desenvolvida e detalhada para se chegar ao resultado apresentado, pois ela permite orientar a aplicação de arcos de circunferência concordantes em relação a outros casos envolvendo formas geométricas variadas e que apresentem curvas suaves.

Ressalta-se que o estudo encontrou a equação de uma falsa elipse capaz de descrever infinitas elipses a depender dos valores de a e b , desde que $a \geq b > 0$. Contudo, *mutatis mutandis*, nada impede a aplicação de arcos de circunferência concordantes em formas geométricas que não estejam sujeitas a variações, como mostrado na figura (4).

Ademais, a pesquisa realçou a importância de se conhecer conceitos matemáticos, mesmo os mais elementares, para a solução de problemas reais. Outrossim, reafirmando aspectos que foram tratados no tópico da metodologia da pesquisa, este estudo mostrou que o resultado alcançado emanou de um processo indutivo, onde conhecimentos mais específicos foram combinados na construção de um conhecimento mais amplo.

O estudo foi concluído no momento em que atingiu o objetivo para o qual foi idealizado, respondendo, simultaneamente, ao problema que fora proposto. Não obstante, durante o trabalho, notou-se a possibilidade de investigação de outros aspectos e aplicações, como:

a) aplicação de arcos concordantes na representação de outras formas geométricas ou objetos mais complexos caracterizados por curvas suaves;

b) aplicação de arcos de circunferência concordantes como função interpoladora na análise de dados;

- c) desenvolvimento de uma equação para a falsa elipse cuja função de ajuste dos erros origina-se da comparação entre as Equações (65) e (3);
- d) estudo abrangendo o volume e a área da falsa elipse;
- e) identificação de novas funções objetivando a minimização dos erros; e
- f) avaliação quanto ao uso de outras construções de falsas elipses para a solução do problema proposto.

Do exposto neste trabalho, conclui-se que o uso de arcos de circunferência concordância se mostra como uma alternativa interessante para representar formas geométricas para as quais não há uma equação que as descreva e que o ajuste de mínimos quadrados se apresenta como um instrumento bastante adequado para o aperfeiçoamento da solução encontrada por meio de arcos de circunferência concordantes.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- ALENCAR, H.; SANTOS, W.; SILVA NETO, G. **Geometria diferencial de curvas no \mathbb{R}^2** . 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020, 415 p. ISBN 978-65-990395-4-6. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/SBM/000001>. Acesso em: 22 ago. 2021.
- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 768 p.
- BarD Software s.r.o. **GanttProject**. Versão 3.1.3102. Disponível em: <https://www.ganttproject.biz/>. Acesso em: 12 ago. 2021.
- BARNARD, R. W.; PEARCE, K.; SCHOVANEC, L. Inequalities for the perimeter of an ellipse. **Journal of mathematical analysis and applications**, Academic Press, v. 260, n. 2, p. 295–306, 2001. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/81983358.pdf>. Acesso em: 19 jun. 2021.
- BORIN JUNIOR, A. M. S. **Geometria analítica**. São Paulo: Pearson, 2014. 116 p. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/22107/pdf/0>. Acesso em: 5 ago. 2021.
- CABRAL, M. **Produto interno**. UFRJ, 2008. Disponível em: <https://www.labma.ufrj.br/~mcabral/livros/livro-alglin/alglin-material/PI-apresentacao.pdf>. Acesso em: 3 ago. 2021.
- CALDEIRA, A. M. *et al.* **Pré-cálculo**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 538 p.
- CAMPOS FILHO, F. **Algoritmos Numéricos: uma abordagem moderna de cálculo numérico**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. 480 p. ISBN 978-85-216- 3564-2. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788521635659/epubcfi/6/10%5B%3Bvnd.vst.idref%3Dcopyright%5D!/4/32/20/1:55%5B/64%2C39%5D>. Acesso em: 31 ago. 2021.
- COSTA, J. L. **Prática de Ensino: Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: Visão Editora, 2016. 216 p. ISBN 978-85-67270-28-9. Disponível em: <https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/9127/1/LIVRO\ Pr%3%A1ticaEnsinoConstru%3%A7%3%B5es.pdf>. Acesso em: 23 ago. 2021.
- COSTA NETO, P.L.D.O. **Estatística**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2018. 266 p. ISBN 9788521215226. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521215226/>. Acesso em: 22 nov. 2021.
- CRUZ, M. D. **Desenho Técnico**. 1. ed. São Paulo: Érica, 2014. 160 p. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788536518343/pageid/0>. Acesso em: 5 ago. 2021.
- DEMANA, F. D. *et al.* **Pré-Cálculo**. 1. ed. São Paulo: Pearson, 2008. 380 p. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/21/pdf/0>. Acesso em: 20 nov. 2021.
- FERNANDES, L. F. D. **Geometria analítica**. 1. ed. Curitiba: Intersaberes, 2016. 162 p. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/37362/pdf/0>. Acesso em: 12 ago. 2021.

- FERREIRA, E. N. **Desenho geométrico**. UFPR, 2013. Disponível em: <http://www.exatas.ufpr.br/portal/degraf/rossano/wp-content/uploads/sites/16/2014/10/gd\04\ dg\ apostila.pdf>. Acesso em: 2 ago. 2021.
- FRAGA, F.; LORENZO, A. A.; ALONSO, M. El trazado de la elipse en la pintura hasta Caravaggio. **EGA Revista de Expresión Gráfica Arquitectónica**, v. 25, p. 112, mar. 2020. Disponível em: <https://polipapers.upv.es/index.php/EGA/article/view/11420/12367>. Acesso em: 1 ago. 2021.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2018. 173 p. ISBN 978-85-970129-2-7. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788597012934/epubcfi/6/10/%5B%3Bvnd.vst.idref%3Dhtml4%5D!/4/38/1:20%5B292%2C-7%5D>. Acesso em: 14 set. 2021.
- GINOUX, J.-M.; GOLVIN, J.-C. Perimeter Determination of the Eight-Centered Oval. **The Mathematical Intelligencer**, v. 42, jun. 2020. Disponível em: <https://link-springer-com.ez222.periodicos.capes.gov.br/article/10.1007/s00283-019-09946-z>. Acesso em: 4 ago. 2021.
- GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. **Cálculo C: funções vetoriais, integrais curvilíneas, integrais de superfície**. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 2000. 425 p.
- GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. **Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2007. 435 p.
- JARDIM, M. C.; GIORA, T. **Desenho geométrico**. Porto Alegre: Sagah, 2018. 164 p. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788595026315/pageid/80>. Acesso em: 10 ago. 2021.
- LAMPRET, V. The perimeter of a flattened ellipse can be estimated accurately even from Maclaurin's series. **Cubo (Temuco)**, v. 21, n. 2, p. 51 – 64, ago. 2019. ISSN 0719-0646. Disponível em: <http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci\arttext&pid= S0719-06462019000200051&nrm=iso>. Acesso em: 1 ago. 2021.
- LEITE, I. E.; CASTANHEIRA, N. P. **Geometria analítica em espaços de duas e três dimensões**. 1. ed. Curitiba: Intersaberes, 2017. 219 p. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/129462/pdf/0>. Acesso em: 5 ago. 2021.
- LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. **Álgebra linear**. 4. ed. São Paulo: Bookman, 2011. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788540700413/pageid/0>. Acesso em: 21 ago. 2021.
- MANETTA, M. A. **Uma dedução gráfica da lei dos cossenos**. Disponível em: <http://www.dinamica.com.br/2011/03/uma-deducao-grafica-da-lei-dos-cossenos.html>. Acesso em: 17 ago. 2021, com adaptações.
- MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia do Trabalho Científico: projetos de pesquisa, pesquisa bibliográfica, teses de doutorado, dissertações de mestrado, trabalhos de conclusão de curso**. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2021. 247 p. ISBN 978-85-970265-4-2. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788597026559/epubcfi/6/10/%5B%3Bvnd.vst.idref%3Dhtml4%5D!/4/26/3:17%5Brd%2Cso%5D>. Acesso em: 14 set. 2021.
- Microsoft. **Office: Excel**. Disponível em: <https://www.office.com/>. Acesso em: 18 nov. 2021.

- MOLTER, A.; NACHTIGALL, C.; ZAHN, M. **Trigonometria e números complexos: com aplicações**. São Paulo: Blucher, 2020. 312 p. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/181781/pdf/0>. Acesso em: 21 nov. 2021.
- MOREIRA, J. S. **Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e instrumentos concretos**. Tese (Dissertação) — PUC-RJ, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: <http://www.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/1512252\ 2017\ completo. pdf>. Acesso em: 31 jul. 2021.
- MARTINS, G. A. **Estatística Geral de Aplicada**. São Paulo: Atlas, 2001. 417 p. ISBN 85-224-2794-1.
- PASTANA, C. E. T. **Anotações de aula: desenho técnico**. UNIMAR - Universidade de Marília, 2006. Disponível em: <https://labtopope.webnode.com/\ files/ 200000162-553ff563b8/APOSTILA\ DESENHOR\ TECNICO\ UNIMAR\ 2006.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2021.
- PEDROSA, A. D. F. **Potências do seno: do produto de Wallis ao comprimento da elipse**. Tese (Dissertação) — UFCE, Fortaleza, 2018. Disponível em: <http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/34418/1/2018\ dis\ adfpedrosa.pdf>. Acesso em: 17 jun. 2021.
- PETROLI, T. **Pré-Cálculo**. Curitiba: Contentus, 2020. 153 p. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/184030/pdf/0>. Acesso em: 19 nov. 2021.
- QIAN, W.-H. Four-arc approximation to ellipses: The best in general. **Computer Aided Geometric Design**, v. 28, n. 4, p. 257–269, 2011. ISSN 0167-8396. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839611000288>. Acesso em: 4 ago. 2021.
- QIAN, W.-H.; QIAN, K. Optimising the four-arc approximation to ellipses. **Computer Aided Geometric Design**, v. 18, n. 1, p. 1–19, 2001. ISSN 0167-8396. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839600000339>. Acesso em: 4 ago. 2021.
- REIS, S. M. C. **Como desenhar oval dados os eixos maior e menor**. 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Ia9MsAokMak>. Acesso em: 15 jul. 2021.
- ROSIN, P. L. Ellipse Fitting Using Orthogonal Hyperbolae and Stirling's Oval. **Graphical Models and Image Processing**, v. 60, n. 3, p. 209–213, 1998. ISSN 1077-3169. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1077316998904713>. Acesso em: 27 ago. 2021.
- ROSIN, P. L. A survey and comparison of traditional piecewise circular approximations to the ellipse. **Computer Aided Geometric Design**, v. 16, n. 4, p. 269–286, 1999. ISSN 0167-8396. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839698000491>. Acesso em: 22 ago. 2021.
- ROSIN, P. On Serlio's constructions of ovals. **The Mathematical Intelligencer**, v. 23, p. 58–69, dez. 2001. Disponível em: <https://link-springer-com.ez222.periodicos.capes.gov.br/content/pdf/10.1007/BF03024523.pdf>. Acesso em: 23 ago. 2021.
- ROSIN, P. L.; PITTEWAY, M. L. V. The Ellipse and the Five-Centred Arch. **The Mathematical Gazette**, v. 85, n. 502, p. 13–24, 2001. ISSN 00255572. Mathematical Association. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/3620465>. Acesso em: 4 ago. 2021.

SANTOS, F. J.; FERREIRA, S. F. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009. 210 p. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788577805037/pageid/0>. Acesso em: 30 ago. 2021.

SILVA, H. B. *et al.* Novas abordagens no estudo das elipses. **A Educação enquanto Fenômeno Social: Política, Economia, Ciência e Cultura**, Atena, n. 3, p. 159–169, 2020. ISSN 978-65-5706-533-4. Disponível em: <https://www.finersistemas.com/atenaeditora/index.php/admin/api/artigoPDF/41350>. Acesso em: 19 jul. 2021.

STEWART, J. **Cálculo, volume 1**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 524 p.

The Document Foundation. **LibreOffice: Calc**. Versão 6.4.7.2. Disponível em: <https://pt-br.libreoffice.org/>. Acesso em: 17 nov. 2021.

The International Geogebra Institute. **Geogebra**. Versão 6.0.665.0-offline. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 15 set. 2021.

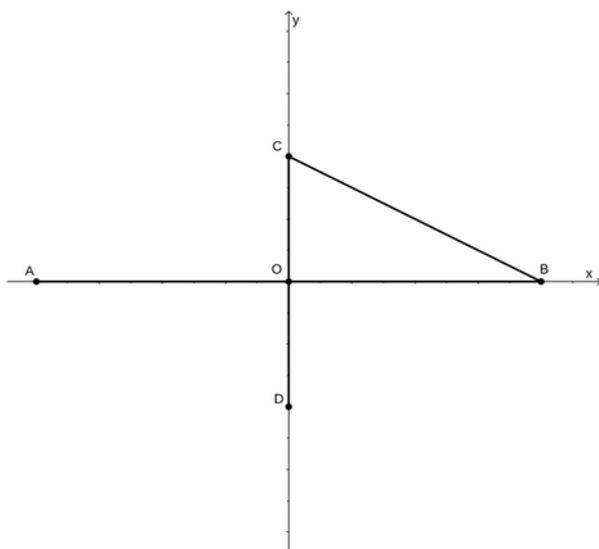
The Scientific Python Development Environment – Spyder-IDE.org. **Spyder**. Versão 4.0.1. Disponível em: <https://www.spyder-ide.org/>. Acesso em: 21 set. 2021.

ZAHN, M. **Álgebra linear**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2021. 290 p. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9786555062595/pageid/0>. Acesso em: 15 ago. 2021.

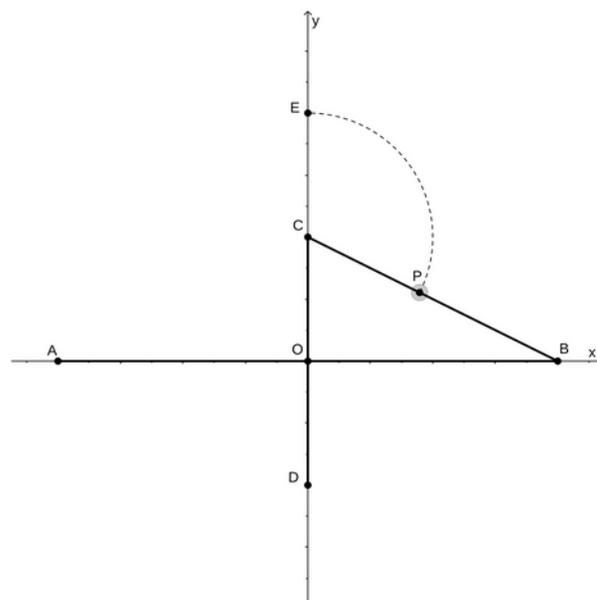
APÊNDICE A – DESENHO DA FALSA ELIPSE UTILIZANDO O MÉTODO TRADICIONAL DOS 4 CENTROS (OU 4 ARCOS).

(Continua)

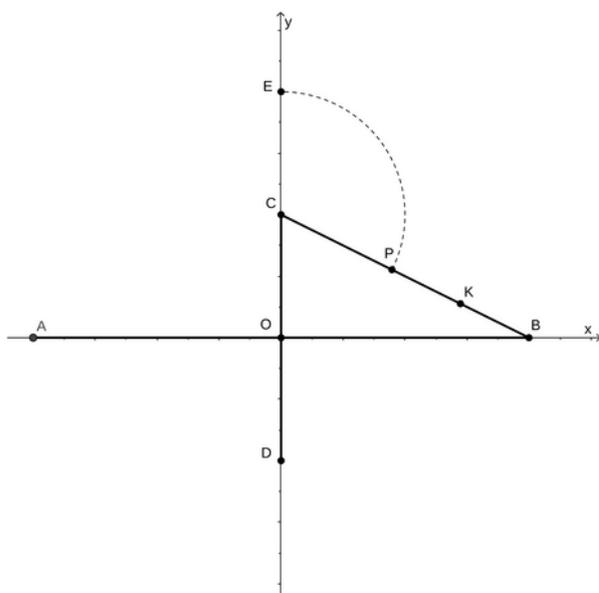
Passo 1. Eixos \overline{AB} e \overline{CD} e o segmento de reta \overline{CB} .



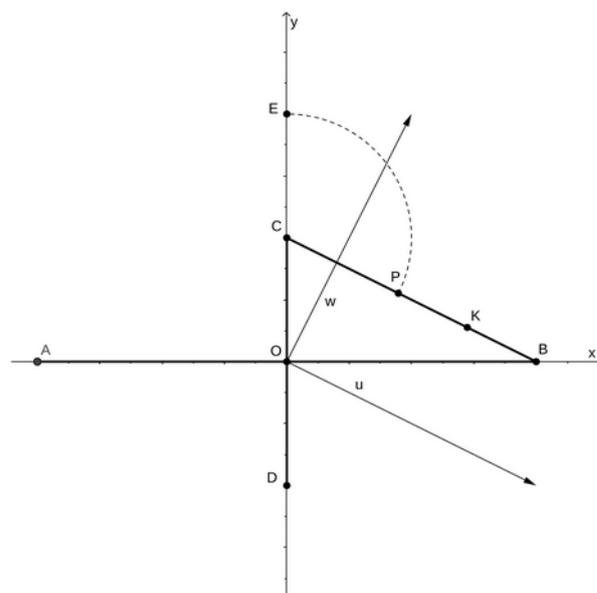
Passo 2. Arco de circunferência com centro em C e raio $(a - b)$.

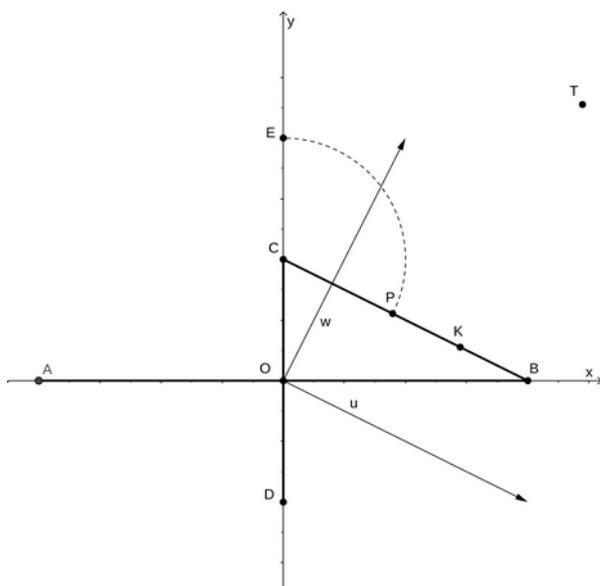
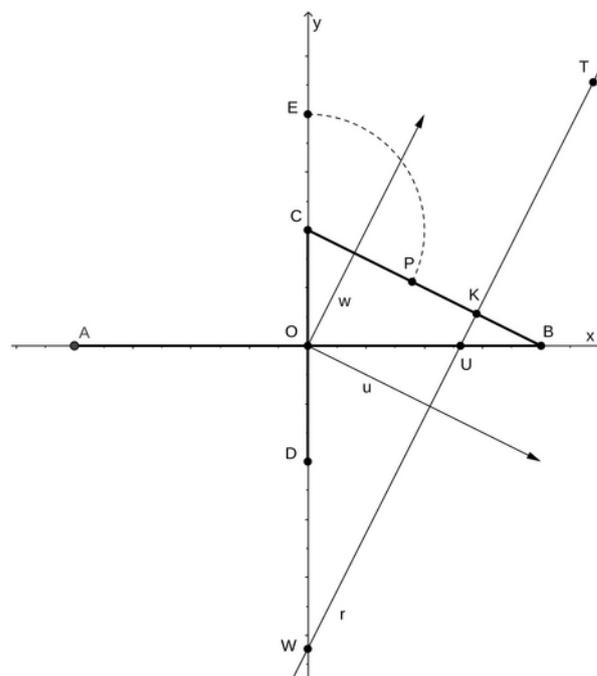
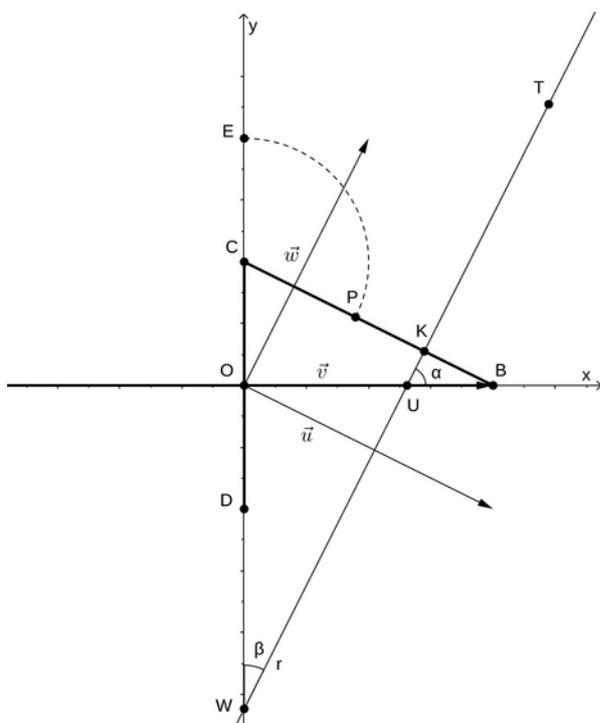
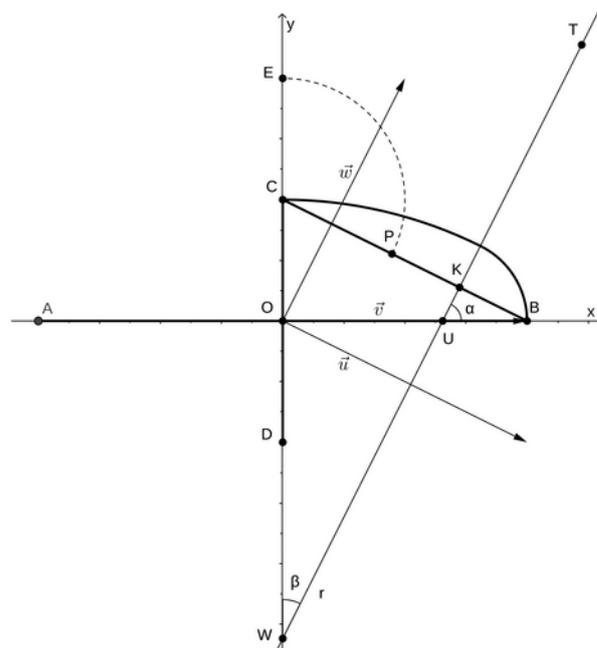


Passo 3. Ponto K, ponto médio do segmento \overline{PB} .



Passo 4. Vetores u e w .



(Continuação)Passo 5. Ponto T .Passo 6. Reta r que passa pelos pontos T e K .Passo 7. Ângulos α e β .Passo 8. Arcos de circunferência com centro em U e W .

Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do software Geogebra.

**APÊNDICE B – CÓDIGO FONTE DE PROGRAMA NA LINGUAGEM PYTHON
PARA O CÁLCULO DOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO E(a,b) POR MEIO DO
AJUSTE DE MÍNIMOS QUADRADOS**

```

"""
Autor: Fernando Boessenkool
Data: 27 set. 2021
Objetivo: encontrar os coeficientes da equação polinomial de grau 4, por
meio da Equação (23) ou  $v^* = (M^T M)^{-1} M^T y$ .
Apêndice B do trabalho de conclusão de curso.
Universidade do Sul de Santa Catarina - UNISUL.
"""

"""Importação das bibliotecas."""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

"""Dados iniciais, sendo y = erro e x = b/a."""
y = np.matrix([0.0006, -0.0010, -0.0031, -0.0047, -0.0061, -0.0120, -
0.0132, -0.0155, -0.0202, -0.0260, -0.0308, -0.0282, -0.0258]).T
x = [1.0000, 0.9756, 0.8944, 0.8300, 0.7444, 0.6800, 0.6000, 0.5344,
0.4578, 0.3589, 0.2944, 0.2089, 0.1500]

"""Considerando a equação polinomial:  $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ .
Computar os valores de  $x^4$ ,  $x^3$ ,  $x^2$  e  $x$  de cada coluna para linha da
matriz M."""
M = np.zeros(shape=(13,5))
for linha in range(0, len(x)):
    M[linha][0] = x[linha]**4
    M[linha][1] = x[linha]**3
    M[linha][2] = x[linha]**2
    M[linha][3] = x[linha]
    M[linha][4] = 1

"""Computar a transposta da matriz M."""
Mt = M.transpose()

"""Computar a multiplicação entre as matrizes Mt e M."""
MtM= Mt.dot(M)

"""Computar a inversa da matriz MtM."""
MtMinv = np.linalg.inv(MtM)

"""Computar a multiplicação entre as matrizes MtMinv e Mt."""
MtMinvMt = MtMinv.dot(Mt)

"""Computar a multiplicação das matrizes [MtMinvMt e y] = v."""
MtMinvMty = MtMinvMt.dot(y)

"""Apresentar os valores dos coeficientes: A, B, C, D e E."""
print(MtMinvMty)

```

**APÊNDICE C – FUNÇÕES AJUSTADAS PELO MÍNIMO QUADRADO PARA
EXPLICAR A RELAÇÃO ENTRE B/A (VARIÁVEL X) E OS ERROS (VARIÁVEL Y)**

Tipo	Função	R²
Polinomial	$0,03726 x - 0,03646$	0,94911
	$0,00653 x^2 + 0,02964 x - 0,03474$	0,95073
	$-0,12132 x^3 + 0,21798 x^2 - 0,07716 x - 0,02032$	0,97703
	$0,39327 x^4 - 1,02837 x^3 + 0,93184 x^2 - 0,29730 x + 0,00113$	0,98999
	$-0,6043 x^5 + 2,13097 x^4 - 2,8902 x^3 + 1,84502 x^2 - 0,49783 x + 0,01651$	0,99125
Exponencial	$0,02013 e^x - 0,0522$	0,94283
	$-0,00502 e^{2x} + 0,0396 e^x - 0,06972$	0,95366
	$-0,0135 e^{3x} + 0,07343 e^{2x} - 0,10637 e^x + 0,01687$	0,96566
	$0,04281 e^{4x} - 0,34472 e^{3x} + 1,00855 e^{2x} - 1,24612 e^x + 0,52222$	0,98381
	$-0,06226 e^{5x} + 0,64237 e^{4x} - 2,60722 e^{3x} + 5,18631 e^{2x} - 5,01785 e^x + 1,85352$	0,98925
Logarítmica	$0,01673 \ln(x) - 0,0032$	0,84516
	$0,00676 \ln(2x) - 0,00229 \ln(x) - 0,01482$	0,07307
Trigonométrica	$0,04529 \text{sen}(x) - 0,03872$	0,94004
	$0,03352 \text{sen}^2(x) + 0,01123 \text{sen}(x) - 0,03183$	0,95844
	$-0,21668 \text{sen}^3(x) + 0,36098 \text{sen}^2(x) - 0,1346 \text{sen}(x) - 0,01394$	0,98297
	$0,71336 \text{sen}^4(x) - 1,64089 \text{sen}^3(x) + 1,34144 \text{sen}^2(x) - 0,40334 \text{sen}(x) + 0,00996$	0,99114
	$-0,53479 \text{sen}^5(x) + 2,04939 \text{sen}^4(x) - 2,8952 \text{sen}^3(x) + 1,88687 \text{sen}^2(x) - 0,51127 \text{sen}(x) + 0,01759$	0,99127

APÊNDICE D – CÁLCULO DOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO $E(a,b)$ POR MEIO DA FUNÇÃO LINEST – CALC (LIBREOFFICE)

	A	B	C	D	E	F	G	H
7		a	b	x = b/a				Erro
8		(m)	(m)	x	x ²	x ³	x ⁴	(m)
9		0,4500	0,4500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0006
10		0,4500	0,4390	0,9756	0,9518	0,9286	0,9059	-0,0010
11		0,4500	0,4025	0,8944	0,8000	0,7155	0,6399	-0,0031
12		0,4500	0,3735	0,8300	0,6889	0,5718	0,4746	-0,0047
13		0,4500	0,3350	0,7444	0,5541	0,4125	0,3071	-0,0061
14		0,4500	0,3060	0,6800	0,4624	0,3144	0,2138	-0,0120
15		0,4500	0,2700	0,6000	0,3600	0,2160	0,1296	-0,0132
16		0,4500	0,2405	0,5344	0,2856	0,1526	0,0816	-0,0155
17		0,4500	0,2060	0,4578	0,2096	0,0959	0,0439	-0,0202
18		0,4500	0,1615	0,3589	0,1288	0,0462	0,0166	-0,0260
19		0,4500	0,1325	0,2944	0,0867	0,0255	0,0075	-0,0308
20		0,4500	0,0940	0,2089	0,0436	0,0091	0,0019	-0,0282
21		0,4500	0,0675	0,1500	0,0225	0,0034	0,0005	-0,0258
22								
23			Resultado da função LINEST					
24			0,39327	-1,02837	0,93184	-0,29730	0,00113	
25			0,12219	0,28306	0,22661	0,07258	0,00757	
26			0,98999	0,00135	#N/A	#N/A	#N/A	
27			197,82963	8,00000	#N/A	#N/A	#N/A	
28			0,00145	0,00001	#N/A	#N/A	#N/A	

Legenda das ações 1 (Azul), 2 (Vermelho) e 3 (Verde) (Figura acima):

1 (Azul) – Inserir na planilha os dados das variáveis a , b , $x=b/a$ e $Erro$ (oriundos da Tabela 5 deste trabalho), como mostrado nas colunas B, C, D e H.

2 (Vermelho) – Calcular os valores de x^2 , x^3 e x^4 , sem arredondamentos como apresentado nas colunas E, F e G.

3 (Verde) – Inserir a função LINEST com o uso da funcionalidade f_x , pois a função gera uma matriz de dados estatísticos, como se observa nas células C24:G28.

Legenda do resultado da função LINEST (Células C24:G28 da figura acima):

C24:F24 – Coeficientes A, B, C, D (Inclinações) da função polinomial procurada e célula G24 – E (Intercepto).

C25:G25 – Erro padrão dos coeficientes e intercepto.

C26 – R^2 .

D26 – O erro padrão da estimativa de y .

C27 – A estatística F ou valor F observado.

D27 – Graus de liberdade.

C28 – Soma do desvio quadrado da estimativa de y em relação à média.

D28 – Soma do desvio quadrado da estimativa de y em relação ao y observado.

Fonte:

LibreOffice: https://wiki.documentfoundation.org/Documentation/Calc_Functions/LINEST

Excel: https://support.microsoft.com/en-us/office/linest-function-84d7d0d9-6e50-4101-977a-fa7abf772b6d?ranMID=46131&ranEAID=a1LgFw09t88&ranSiteID=a1LgFw09t88-N7YENLC_0oOC_dZpzgeByg&epi=a1LgFw09t88-N7YENLC_0oOC_dZpzgeByg&irgwc=1&OCID=AID2200057_aff_7806_1243925&tuid=%28ir__1ezto92yrckf6x2hs1nd6jscjn2xo3qfuu6dshyr00%29%287806%29%281243925%29%28a1LgFw09t88-N7YENLC_0oOC_dZpzgeByg%29%28%29&irclickid=_1ezto92yrckf6x2hs1nd6jscjn2xo3qfuu6dshyr00

**APÊNDICE E – CÓDIGO FONTE DE PROGRAMA NA LINGUAGEM PYTHON
PARA O CÁLCULO DA EQUAÇÃO (3) PARA DIFERENTES VALORES DE b .**

```

"""
Autor: Fernando Boessenkool
Data: 02 out. 2021
Objetivo: calcular o comprimento da elipse por meio da Equação (3).
Universidade do Sul de Santa Catarina - UNISUL.
"""

"""Importação das bibliotecas."""
import numpy as np
import scipy.special as ss

"""
Descrição das variáveis:
a = semieixo maior da elipse.
b = array contendo valores do semieixo menor da elipse.
comprimentos = uma lista que conterà os comprimentos das elipses.
e = excentricidade da elipse.
"""
a = 0.45
b= [0.4500, 0.4390, 0.4025, 0.3735, 0.3350, 0.3060, 0.2700, 0.2410, 0.2060,
0.1615, 0.1325, 0.0940, 0.0675]
comprimentos = list()

"""Computar o comprimento da elipse para cada valor de b, representado pela
variável i em cada iteração, sendo que a operação ** representa a
potência."""
for i in b:
    soma = 0.0
    e = np.sqrt(a**2-i**2)/a

    """Computar o somatório da Equação(3) em 100 iterações."""
    for k in range(0,100):
        soma = soma + (ss.binom(0.5,k)**2)*(1-2*k)*(e**(2*k))

    """Adiciona o comprimento da elipse para um determinado valor de b na
lista."""
    comprimentos.append(soma*2*np.pi*a)

"""Apresentar os comprimentos das elipses com arredondamento de 4 casas
decimais."""
print(str(np.round(comprimentos,4)))

```