Universidade do Sul de Santa Catarina

Pesquisa Operacional

UnisulVirtual

Universidade do Sul de Santa Catarina

Pesquisa Operacional

UnisulVirtual
Palhoça, 2015

Créditos

Universidade do Sul de Santa Catarina – Unisul

Reitor
Sebastião Salésio Herdt

Vice-Reitor
Mauri Luiz Heerdt

Pró-Reitor de Ensino, de Pesquisa e de Extensão
Mauri Luiz Heerdt

Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional
Luciano Rodrigues Marcelino

Pró-Reitor de Operações e Serviços Acadêmicos
Valter Alves Schmitz Neto

Diretor do Campus Universitário de Tubarão
Heitor Wensing Júnior

Diretor do Campus Universitário da Grande Florianópolis
Hércules Nunes de Araújo

Diretor do Campus Universitário UnisulVirtual
Fabiano Ceretta

Campus Universitário UnisulVirtual

Diretor
Fabiano Ceretta

Unidade de Articulação Acadêmica (UnA) – Ciências Sociais, Direito, Negócios e Serviços
Amanda Pizzolo *(coordenadora)*

Unidade de Articulação Acadêmica (UnA) – Educação, Humanidades e Artes
Felipe Felisbino *(coordenador)*

Unidade de Articulação Acadêmica (UnA) – Produção, Construção e Agroindústria
Anelise Leal Vieira Cubas *(coordenadora)*

Unidade de Articulação Acadêmica (UnA) – Saúde e Bem-estar Social
Aureo dos Santos *(coordenador)*

Gerente de Operações e Serviços Acadêmicos
Moacir Heerdt

Gerente de Ensino, Pesquisa e Extensão
Roberto Iunskovski

Gerente de Desenho, Desenvolvimento e Produção de Recursos Didáticos
Márcia Loch

Gerente de Prospecção Mercadológica
Eliza Bianchini Dallanhol

Ana Lúcia Miranda Lopes
Ana Lúcia Meira da Veiga Galvão
Moacir Fogaça

Pesquisa Operacional

Livro didático

Designer instrucional
Eliete de Oliveira Costa

UnisulVirtual
Palhoça, 2015

Livro Didático

Professor conteudista
Ana Lúcia Miranda Lopes
Ana Lúcia Meira da Veiga Galvão
Moacir Fogaça

Designer instrucional
Eliete de Oliveira Costa

Projeto gráfico e capa
Equipe UnisulVirtual

Diagramador(a)
Noemia Mesquita

Revisor(a)
Diane Dal Mago

658.4034
L85 Lopes, Ana Lúcia Miranda
Pesquisa operacional: livro didático/Ana Lúcia Miranda Lopes, Ana Lúcia Meira da Veiga Galvão, Moacir Fogaça; design instrucional Eliete de Oliveira Costa. – Palhoça: UnisulVirtual, 2015.
204 p. : il. ; 28 cm.

Inclui bibliografia.

1. Pesquisa operacional. I. Galvão, Ana Lúcia Meira da Veiga. II. Fogaça, Moacir. III. Costa, Eliete de Oliveira. IV. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária da Unisul

Sumário

Introdução

Prezado(a) aluno(a), nesta unidade de aprendizagem você entrará em contato com o melhor dos mundos da matemática, o mundo da aplicação.

Aqui você aprenderá e entenderá o porquê de estudarmos tanta matemática quando fazemos o primeiro e segundo graus.

Muitas vezes você se perguntava para que servia aquele monte de equações, onde você iria utilizar na sua vida?

Pois é, nesta unidade de aprendizagem você, estudante, estará aplicando os conteúdos adquiridos até hoje com o objetivo de resolver problemas empresariais. Muitas vezes você, como administrador, terá que tomar decisões bastante complexas que envolvem alocação de recursos escassos, identificação da quantidade de produto a manter em estoque, quanto de produto encaminhar de cada origem para cada destino, quanto investir em cada ativo, entre outros.

É, meu caro estudante, é aqui que você verá o quanto a matemática ajuda a resolver problemas. Com certeza a unidade de aprendizagem que você estudará a partir deste momento lhe dará as ferramentas necessárias para resolver uma série de problemas na área de administração.

Neste livro você estudará as técnicas de pesquisa operacional mais aplicadas no mundo todo. Nenhuma delas é fácil, pois envolve conhecimentos e habilidades em métodos quantitativos assim como na utilização de uma planilha eletrônica.

A partir de agora você, caro aluno, entrará neste mundo que, por vezes, não lhe parecerá fácil, mas é muito desafiante. Você gosta de desafios?

Então, vamos lá!

Capítulo 1

Pesquisa operacional: o que é, história e aplicações

Habilidades

A partir do estudo deste capítulo espera-se que o estudante possa compreender os sistemas de organização da empresa industrial ou de serviços, estruturada numa visão top- down do sistema produtivo. Entender a pesquisa operacional como ciência bem como seu desenvolvimento, compreendendo as diversas divisões da pesquisa operacional e suas aplicações nos diferentes campos do conhecimento humano.

Seções de estudo

Seção 1: Como surgiu a pesquisa operacional?

Seção 2: O que é pesquisa operacional?

Seção 1
Como surgiu a pesquisa operacional?

A pesquisa operacional (*Operations Research* ou *Management Science*) teve seu surgimento durante a Segunda Guerra Mundial. Guerras, na maior parte das vezes, trazem junto consigo a necessidade de conviver-se com toda sorte de carência de recursos.

Foi por essa razão que os militares ingleses (*British Air Force*) formaram o primeiro grupo para o estudo das melhores condições de aproveitamento dos recursos disponíveis. Esse grupo estudou a aplicação de métodos quantitativos, com o objetivo de melhorar a eficiência das forças de guerra da armada inglesa.

! Foi então denominado de grupo de *Operations Research* (pesquisa operacional), e vem daí o nome da ciência tão amplamente utilizada hoje em dia.

Naquele momento, o grupo de PO começou a trabalhar com problemas relacionados ao abastecimento das tropas, táticas de defesa e ataque aéreo e marítimo. A principal aplicação daquela época que se tem notícia foi na área de detecção de aviões inimigos por meio de radar. Dizem, hoje, que esta foi a grande arma dos britânicos que os levou a vencer a batalha aérea na Grã-Bretanha.

Logo após a criação do grupo de PO inglês, e como não poderia deixar de ser, os americanos formaram um grupo semelhante.

Depois da Segunda Guerra Mundial, os cientistas e administradores de empresas vislumbraram a possibilidade de aplicação das técnicas de PO utilizadas na guerra para a resolução de problemas dentro das empresas. Modelos foram pesquisados e desenvolvidos para a resolução de problemas nas áreas de planejamento da produção, planejamento agrícola, transporte de mercadorias, programação e refinarias de petróleo, entre outros.

Agora vamos às definições.

Seção 2
O que é pesquisa operacional?

A pesquisa operacional é uma ciência aplicada voltada para a resolução de problemas reais e complexos. Tendo como foco a tomada de decisões, aplica conceitos e métodos de outras áreas científicas para concepção, planejamento ou operação de sistemas para atingir seus objetivos.

Por meio de desenvolvimentos de base quantitativa, a pesquisa operacional visa também a introduzir elementos de objetividade e racionalidade nos processos de tomada de decisão, sem descuidar, no entanto, dos elementos subjetivos e de enquadramento organizacional que caracterizam os problemas.

É, portanto, uma ciência aplicada, formada por um conjunto de técnicas quantitativas que tem como objetivo a determinação da melhor maneira de aproveitamento de recursos, por vezes, escassos. É particularmente pertinente em problemas complexos cujo alcance dos objetivos enfrenta restrições, tais como: técnica, econômica, temporal, de mão de obra, de demanda etc.

! Visite o site SOBRAPO (Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional) e conheça um pouco mais as pesquisas sobre PO no Brasil

Aliado ao uso dos métodos quantitativos, há *softwares* eficientes para a resolução dos problemas decisórios.

Softwares tais como LINDO, *What´s Best*, *Solver* do Excel, entre outros, poderão ser utilizados na busca da solução dos problemas.

Com a disseminação dos computadores, observada nas últimas décadas, tornou-se possível trabalhar com grandes volumes de dados sobre as atividades das empresas, tornando a representação do problema decisório cada vez mais próxima da realidade e fazendo com que se observe o uso da PO em um grande número de empresas.

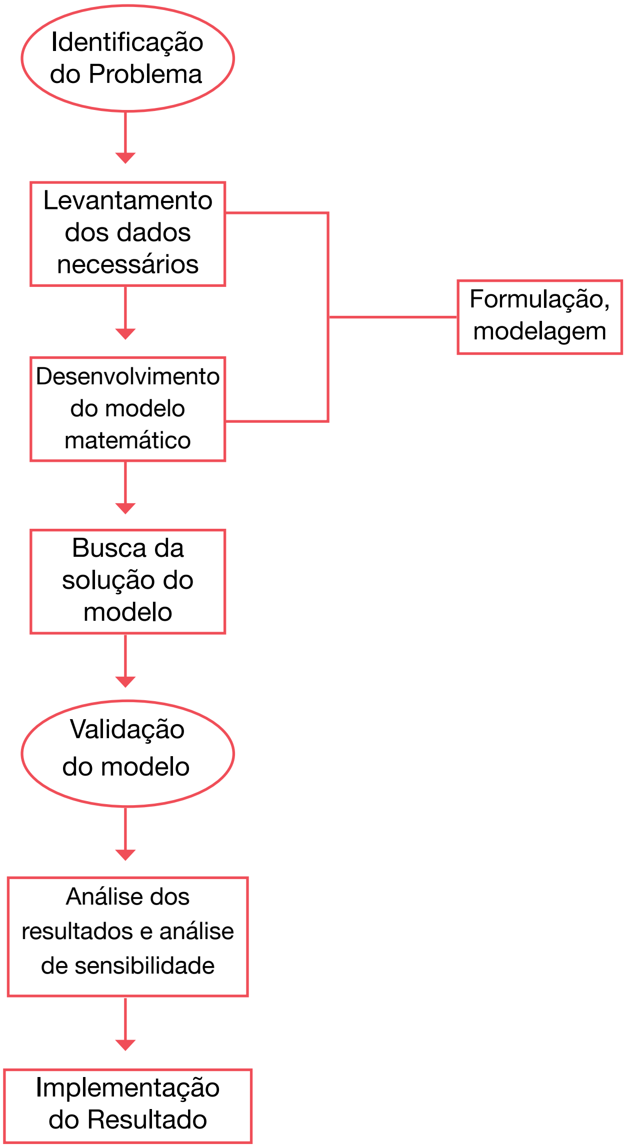
! Com a globalização, a utilização eficiente dos recursos disponíveis é vital para as empresas.

Utilizar tudo o que se tem disponível, por meio da ciência, experiência etc., para a melhoria da eficiência das empresas, é de extrema relevância para a sobrevivência delas. Em um mercado cada vez mais competitivo, isso pode significar ou não a sua manutenção no mercado.

A utilização de métodos quantitativos para resolução de problemas decisórios envolve, normalmente, muitas pessoas dentro da organização. Todos os aspectos relevantes do problema precisam ser identificados e mapeados.

O processo da aplicação das técnicas de pesquisa operacional envolve uma sequência de passos, que pode ser ilustrada na figura que segue:

Figura 1.1 – Sequência de desenvolvimento de um modelo de PO



Fonte: MATHUR, K.; SOLOW, D, 2004.

A Figura 1.1 mostra que o desenvolvimento de um modelo de pesquisa operacional parte da **identificação correta e precisa do problema**. O responsável pela modelagem deve extrair do decisor o problema que ele deseja resolver para que possa estabelecer os objetivos do modelo.

Após a declaração dos objetivos, o modelador deve realizar um **levantamento dos dados** para posteriormente passar ao desenvolvimento do modelo. Os dados podem ser determinísticos (conhecidos com certeza) ou probabilísticos (se conhece a distribuição de probabilidade deles).

Após a modelagem **resolve-se** o problema, que deve ser **validado** tanto pelo responsável pela modelagem quanto pelo decisor.

A fase da **validação** passa por uma observação dos resultados apresentados pelo modelo para verificar se eles são factíveis de implementação. Muitas vezes, modelos construídos de forma errada ou utilizando dados errados, conduzem a resultados absurdos.

Nesse momento, o responsável pela modelagem deverá retornar a qualquer uma das fases anteriores para verificar onde está o erro. Se os resultados estão corretos, passa-se para a penúltima fase, **análise dos resultados e análise de sensibilidade**. Nessa fase, realiza-se uma análise de sensibilidade, com o objetivo de verificar até que ponto pequenas alterações nos dados do problema modificam o resultado. Modelos muito sensíveis tornam muito arriscada sua implementação.

A última fase é a de **implementação do resultado**. Neste ponto, é importante lembrar que o decisor tomará sua decisão utilizando os resultados do modelo, além de outras informações e variáveis, muitas vezes subjetivas.

> O responsável pela modelagem não deve esperar que o decisor aceite e implemente cegamente o que indica o modelo, mas sim que ele utilize seus resultados para auxiliá-lo no processo de tomada de decisão.

As técnicas de PO são aplicadas a uma ampla variedade de problemas decisórios, que vão desde a determinação de tempo em filas de um banco até filas de aviões em aeroportos. Problemas de estoques, planejamento da produção, mistura de componentes, formulação de ração a custo mínimo, redes de transporte, alocação de pessoas, problemas de redes de comunicação, alocação de investimentos e programação de tarefas são também exemplos de aplicações de PO.

Organizações como IBM, HP, Microsoft, Gessy Lever, Nestlé etc. São exemplos de multinacionais que vêm utilizando técnicas de PO em seus gerenciamentos.

Em nível nacional tem-se informação da aplicação de técnicas de pesquisa operacional em empresas tais como:

Petrobrás, Sadia, AçoMinas, Unibanco, Bradesco, Brahma, Cosipa, Eletrobrás, entre outras.

A pesquisa operacional compreende um conjunto relativamente grande de técnicas que podem ser utilizadas para resolução de problemas decisórios. As principais são:

- algoritmos genéticos;
- análise multicritério de apoio à decisão;
- cadeias de Markov;
- *Data Envelopment Analysis* – DEA;
- grafos;
- modelos de estoques;
- modelos de previsão;
- programação dinâmica;
- programação linear;
- programação não linear;
- redes neurais;
- simulação;
- teoria da decisão;
- teoria das filas;
- teoria dos jogos.

Na área de negócios, os casos de utilização da pesquisa operacional têm se concentrado nas técnicas de programação linear e simulação. Pelo menos 70% das aplicações envolvem essas duas áreas.

Você finalizou este capítulo. Ao estudá-lo caracterizou a pesquisa operacional como ciência. Conheceu a história da pesquisa operacional. Como também estudou as diversas divisões da pesquisa operacional.

Aprendeu que pesquisa operacional é uma ciência aplicada, voltada para a solução de problemas decisórios. Viu também que ela envolve a matemática no processo de modelagem e a utilização de *softwares* para a solução dos modelos.

Acompanhou o surgimento da pesquisa operacional na Segunda Guerra Mundial, bem como as fases de construção dos modelos.

O capítulo foi finalizado com uma relação extensa das técnicas mais utilizadas.

Atividades de autoavaliação

1. Para praticar os conhecimentos apropriados nesta unidade, realize as atividades propostas a seguir:

O que é pesquisa operacional? Pesquise na internet e busque outras definições além do que foi apresentado a você.

Capítulo 2

Simulação de Monte Carlo

Habilidades

A partir do estudo deste capítulo, o estudante conhecerá os conceitos básicos e o funcionamento de simulação. Compreenderá como a simulação pode auxiliar na tomada de decisão e identificará quais as variáveis importantes na resolução de problemas, reconhecendo a distribuição de probabilidades das variáveis probabilísticas.

Seções de estudo

Seção 1: Introdução à simulação

Seção 2: Fases e funcionamento da simulação

Seção 3: Simulação de Monte Carlo

Seção 1
Introdução à simulação

> Simulação é o processo de construção de um modelo matemático ou lógico de um sistema ou problema decisório e de experimentação desse modelo (usualmente utilizando-se um computador), com o objetivo de observá-lo/analisá-lo e solucioná-lo.

A simulação procura construir sistemas, modelos de uma situação real, para que, com base nos resultados das modificações neste modelo, o administrador possa tomar decisões.

A simulação é bastante utilizada para observar o impacto de mudanças desejadas pelos decisores. É também, particularmente adequada quando os problemas exibem alguma incerteza, dificultando a utilização de modelos analíticos.

A principal vantagem da simulação é sua habilidade de modelar hipóteses sobre um problema ou sistema, fazendo com que ela seja, a ferramenta mais flexível da pesquisa operacional (EVANS, OLSON, 2002).

A simulação tem estado presente na nossa vida de várias maneiras. Por exemplo:

Quem não vê em telejornais aquele mapa de previsão de tempo, onde é simulada a passagem das nuvens sobre os vários estados?

E os simuladores de voo? É por meio do uso de simuladores que os futuros pilotos e astronautas aprendem a voar, podendo observar como o avião ou nave reagiria sob determinadas condições ou ações do piloto.

Até dentro de nossa casa temos programas de computador que procuram imitar cenas da vida real, tais como: SIMS, jogos de videogames etc.

A simulação é encontrada nas grandes empresas, e com ela pode-se construir modelos que imitam os processos atuais, de maneira a observar o impacto de mudança nesses processos.

Você pode construir um modelo que simula, por exemplo:

- o funcionamento diário de um banco ou hospital, para entender o impacto de adicionar um ou mais bancários ou enfermeiras;
- a operação de um porto ou aeroporto, para entender o fluxo de tráfico e os congestionamentos associados;
- o processo de produção em uma fábrica, para identificar gargalos na linha de produção;
- o fluxo de tráfico em uma *freeway* ou em um sistema de comunicação complicado, para determinar se a expansão é necessária.

Mas, onde mais a simulação pode ser utilizada? Vamos conhecer?

1.1 Simulação em sistemas de produção:

- manufatura e montagem;
- movimentação de peças e matéria-prima;
- alocação de mão de obra;
- áreas de armazenagem;
- *layout* etc.

1.2 Sistemas de transporte e estocagem:

- redes de distribuição;
- armazéns e entrepostos;
- frotas etc.

1.3 Sistemas administrativos:

- seguradoras;
- operadores de crédito;
- financeiras.

1.4 Sistemas de prestação de serviços direto ao público:

- hospitais;
- bancos;
- restaurantes industriais e tipo *fast food*;
- serviços de emergência (polícia, bombeiros, socorro médico);
- serviços de assistência jurídica etc.

1.5 Sistemas computacionais:

- redes de computadores;
- redes de comunicação;
- servidores de rede;
- arquitetura de computadores;
- sistemas operacionais;
- gerenciadores de base de dados etc.

Conheça mais sobre o histórico da simulação por meio da leitura do texto de Corrar e Theófilo (2003) que segue:

Breve histórico

A história da simulação remonta aos jogos de guerra chineses, há 5000 anos. Os povos prússios utilizaram esses jogos no final do século XVIII, como auxílio ao treinamento militar de suas tropas.

A partir de então, as principais forças militares do mundo vêm usando jogos de guerra para testar estratégias militares frente a cenários simulados de combate.

Durante a Segunda Guerra Mundial, o matemático húngaro-americano John Von Neumann, em seu trabalho no Projeto Manhattan (bomba atômica), criou um novo conceito, denominado **Simulação de Monte Carlo**.

O trabalho consistia na simulação direta de problemas probabilísticos relacionados com a difusão aleatória das partículas de nêutrons, quando submetidas a um processo de fissão nuclear. O nome Monte Carlo foi cunhado pelo cientista Metrópolis, inspirado no interesse por pôquer de seu colega Ulam. Baseou-se na similaridade que a simulação estatística desenvolvida por eles tinha com os jogos de azar, simbolizados nas roletas do cassino de Monte Carlo, na capital do principado de Mônaco.

Atualmente, graças ao desenvolvimento dos recursos computacionais, esse método é usado rotineiramente em diversas áreas, desde a simulação de fenômenos físicos complexos, como o transporte de radiação na atmosfera terrestre, até em causas menos nobres, como na simulação do resultado de loterias.

No Brasil, empresas tais como a Belge Simulação e a Paragon realizam consultoria nesta área e estão preparadas para trabalhar com problemas bastante complexos. Verifique:

A Belge, por exemplo, já construiu:

- modelo para a Michelin, com o objetivo de buscar o melhor *layout* produtivo para a planta de Resende/RJ;
- modelo para a Petrobras, que apontou o correto dimensionamento da frota de sondas de manutenção de poços. Com esse modelo, a Petrobras teve uma economia de mais de US$ 1.000.000;
- modelo para a Brahma, que a levou a uma economia de US$ 350.000, por meio da melhora nos procedimentos logísticos, da reorganização dos estoques e da racionalização de empilhadeiras;
- modelo para a Volkswagen de São Bernardo do Campo/ SP, que trabalhou com dimensionamento de uma nova linha de teste de motores, bem como na ampliação nas linhas de pintura e na obtenção de melhorias na logística operacional;
- modelo para o Banco Itaú, que utilizou um simulador para o desenvolvimento de um sistema para redução de filas, nas suas quase 2000 agências espalhadas pelo Brasil.

A Belge utiliza o *software* Pro-Model, líder mundial em sistemas para modelagem, simulação e otimização de processos, e é a representante no Brasil desse *software.*

Outro exemplo é a Paragon que utiliza o ARENA. Essa empresa realizou grandes trabalhos para Petrobras, CAIO, Ford, Scania, entre outras.

1.6 Os principais *softwares* existentes na área de simulação são:

- ARENA;
- PROMODEL;
- Crystal Ball;
- @Risk;
- DecisionPro;
- Xcell;
- SLAM;
- Witness;
- MAP/1.

A planilha eletrônica Excel também contém recursos para que simulações não muito complexas possam ser realizadas.

Os principais tipos de simulação existentes são:

- simulação de Monte Carlo e
- simulação de sistemas.

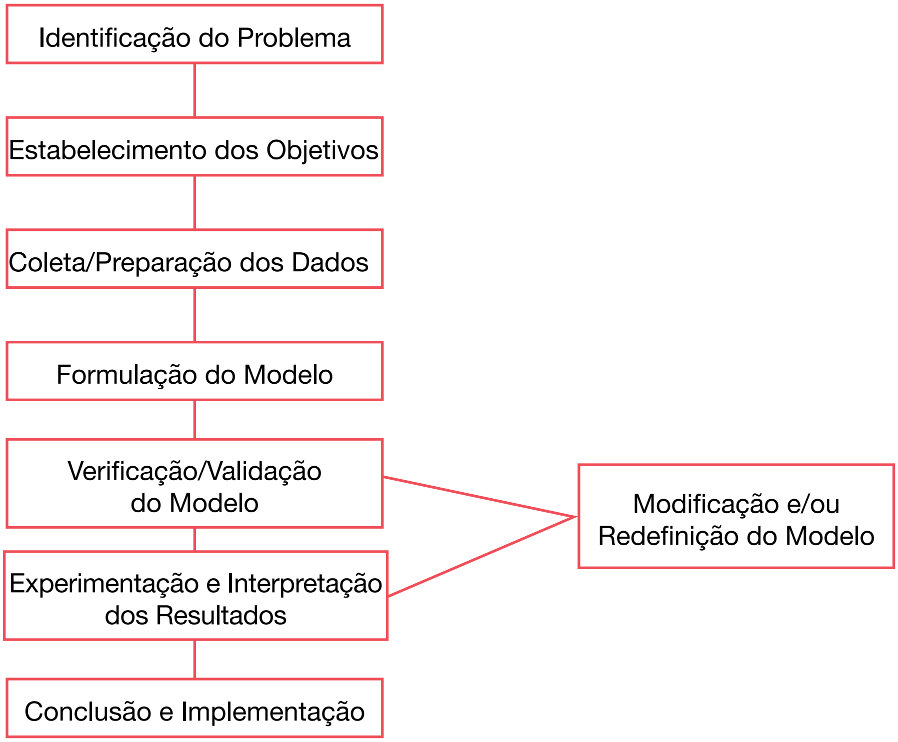
Enquanto a simulação de Monte Carlo é um experimento de amostragem cujo principal propósito é estimar a distribuição de um resultado que depende de algumas variáveis probabilísticas, a simulação de sistemas modela sequências de eventos que acontecem ao longo do tempo, como estoques, filas e produção.

Seção 2
Fases e funcionamento da simulação

2.1 Fases da simulação

Para que um modelo de simulação seja construído, é importante que as fases descritas pela Figura 2.1 sejam seguidas.

Figura 2.1 - Fases da simulação



Fonte: Lopes e Galvão (2010).

Observe que um modelo de simulação deve iniciar com a correta identificação do problema que precisa ser resolvido.

Em seguida, estabelecem-se os objetivos e inicia-se a fase de coleta e preparação dos dados.

Nesta fase, normalmente coletam-se muitos dados estatísticos a respeito das variáveis do sistema que se deseja simular. O modelo é, então, formulado e posteriormente validado por meio da observação do seu comportamento com dados reais.

Se o modelo não está adequado, segue-se uma fase de modificação dele. Se é considerado adequado, isto é, se ele reflete perfeitamente a situação real que se pretende analisar, realizam-se as análises, experimentação e interpretação dos resultados para posterior implementação.

2.2 Exemplo de simulação

Um bom exemplo de simulação no mundo dos negócios foi publicado por Evans e Olson (2002) e está traduzido, adaptado e reproduzido a seguir:

Doce Sabor é uma empresa familiar, de pequeno porte, que vende sorvetes de vários sabores. Porém, em datas comemorativas vende também chocolate caseiro. Para o dia dos namorados, a empresa sempre adquire de seu fornecedor um chocolate especial em forma de coração para revender.

O pedido desse tipo de chocolate deve ser feito com várias semanas de antecedência. Esse produto é comprado do fornecedor por R$ 7,50 à caixa e revendido por R$ 12. Todas as caixas que não são vendidas até o dia 13 de junho são oferecidas com desconto de 50% e, dessa maneira, podem ser vendidas facilmente.

Historicamente, a **Doce Sabor** tem vendido entre 40 e 90 caixas nesta época sem tendência de crescimento ou decréscimo das vendas. O problema do gerente da loja é decidir quantas caixas de chocolate comprar para o dia dos namorados, pois se a demanda exceder a quantidade comprada, a empresa perde oportunidade de lucro.

De outro lado, se muitas caixas são compradas, isto é, se a quantidade comprada excede a quantidade demandada até o dia 13 de junho, a loja estará perdendo dinheiro, pois estará vendendo as caixas que sobrarem a um preço abaixo do seu custo de compra.

Se a demanda é conhecida, poder-se-ia computar o lucro de comprar 40, 50, 60, 70, 80 ou 90 caixas facilmente.

Porém a demanda é probabilística e, para efeitos de simplificação, deve-se assumir que será de 40, 50, 60, 70, 80 ou 90 caixas, com igual probabilidade (1/6).

Ajude o gerente a decidir quantas caixas comprar. Obviamente seu objetivo é o de maximizar o lucro da empresa.

Solução

Para que o modelo de simulação seja construído, faz-se necessário, primeiramente, desenvolver duas expressões matemáticas que representem o Lucro1 e o Lucro 2 da Doce Sabor.

Esses lucros deverão ser calculados utilizando-se as expressões (1) se a demanda (D) exceder ou for igual à quantidade comprada (Q), e a expressão (2), se a demanda (D) ficar abaixo da quantidade (Q).

Lucro1 = 12Q – 7,5Q = 4,5Q **Expressão (1)** **se D ≥ Q**

Lucro2 = 12D + 6(Q-D) – 7,5Q = 6D – 1,5Q **Expressão (2)** **se D < Q**

(Traduzido e adaptado de OSLON, D.L.; EVANS, J.R., 2002)

Observe que por meio da expressão (1) obtém-se o lucro da empresa, quando a demanda excede a quantidade comprada (lembre que lucro = receita – custo). Nesse caso, a receita é encontrada multiplicando- se o preço de venda ($12) pela quantidade comprada (Q), menos o custo, que é obtido multiplicando-se o valor de custo de cada caixa ($7,5) pela quantidade comprada (Q).

Na expressão (2) vamos calcular a receita até o dia 13 de junho e depois calculamos a receita produzida pela sobra, somando as duas parcelas da receita. Veja a representação abaixo.

13/jun

$$\text{LUCRO2} = \underbrace{(12D - 7{,}5Q)}_{\text{ANTES DE 13 DE JUNHO}} + \underbrace{6\,(Q - D)}_{\text{APÓS 13 DE JUNHO}}$$

Observe que o valor R$6,00, após 13 de junho, foi encontrado considerando 50% de R$12 conforme descrito no problema.

Com base nas expressões apresentadas acima, pode-se realizar a simulação do movimento do dia dos namorados para auxiliar o administrador da loja a decidir quantas caixas comprar.

Os dados utilizados na simulação são os descritos abaixo:

1. A quantidade do pedido, Q (aquilo que se quer decidir);
2. As várias receitas e custo (constantes e conhecidas);
3. A demanda, D (incontrolável e probabilística).

O resultado procurado pelo modelo é o lucro líquido, pois a empresa irá decidir pela quantidade a ser comprada (40, 50, 60, 70, 80 ou 90), que maximizará este lucro.

Se sabemos a demanda, facilmente calculamos o lucro utilizando a expressão 1 ou 2. Porém, se a demanda tem uma distribuição probabilística, nós precisaremos simular essa demanda. Foi assumido que a demanda pode ser 40, 50,60,70,80 ou 90 com igual probabilidade (1/6). Sendo as probabilidades iguais e de 1/6, é possível gerar amostras utilizando um dado. Pode-se estabelecer a demanda conforme a tabela que segue.

Tabela 2.1 – Simulação de demanda da Doce Sabor

VALOR ESTABELECIDO NO DADO	DEMANDA ESTABELECIDA
⚀	**40**
⚁	**50**
⚂	**60**
⚃	**70**
⚄	**80**
⚅	**90**

Fonte: Fogaça (2014).

A tabela acima estabelece que: se rolarmos um dado e o valor alcançado for 1, então, a demanda é tida como sendo de 40 caixas e pode-se calcular o lucro obtido.

Para realizar a simulação desse exemplo, vamos estabelecer que o administrador da loja tenha encomendado 60 caixas de chocolates especiais para o dia dos namorados. Os passos abaixo devem ser observados para a simulação de Monte Carlo:

1. rolar o dado;
2. determinar a demanda D, utilizando a Tabela 2.1;
3. usando Q = 60, calcular o lucro com as expressões1 ou 2;
4. anotar o lucro obtido.

Por exemplo, suponha que rolamos o dado e o número obtido foi 4. Esse corresponde a uma demanda de 70 caixas de chocolates. Como, neste caso, D>Q, usaremos a expressão 1 para computar o lucro obtido (simulado).

Lucro 1 = 12*60 –7,5*60= R$ 270,00

Entretanto, uma única simulação não nos fornece uma boa estimativa do que poderia acontecer se o administrador encomendasse 60 caixas. Repetindo a simulação 10 vezes, como exemplo, nós podemos chegar aos resultados descritos na tabela que segue:

Tabela 2.2- Simulação de demanda e lucro obtido por caixas de chocolates usando Q = 60.

TENTATIVA	VALOR DO DADO	DEMANDA	CONDIÇÃO	EXPRESSÕES		LUCRO
1	⚄	80	D>Q	12 * Q - (7,5 * Q)	EXP.1	270
2	⚂	60	D=Q			270
3	⚁	**50**	D<Q	**6 * D - 1,5 * Q**	**EXP.2**	**210**
4	⚃	70	D>Q	12 * Q - (7,5 * Q)	EXP.1	270
5	⚀	**40**	D<Q	**6 * D - 1,5 * Q**	**EXP.2**	**150**
6	⚂	60	D=Q	12 * Q - (7,5 * Q	EXP.1	270
7	⚄	80	D>Q			270
8	⚅	90	D>Q			270
9	⚁	**50**	D<Q	**6 * D - 1,5 * Q**	**EXP.2**	**210**
10	⚂	60	D=Q	12 * Q - (7,5 * Q)	EXP.1	270
Quantidade comprada = 60 caixas				Média →		**246**

Fonte: Fogaça (2014)

* Veja exercício 2.2 disponível na midiateca.

Conforme a tabela acima, pode-se observar que o lucro médio obtido pela empresa com a encomenda de 60 caixas seria de R$ 246. Com base nesses dados, construiu-se a tabela abaixo, que mostra a distribuição de probabilidade do lucro. Ela nos diz que, se o administrador da Doce Sabor encomendasse 60 caixas de chocolates para o próximo dia dos namorados, ele teria 70% de probabilidade de obter um lucro de R$ 270, 20% de probabilidade de obter um lucro de R$ 210 e somente 10% de chance de obter um lucro de R$ 150.

Tabela 2.3- Distribuição de frequência dos lucros

LUCRO	FREQUÊNCIA OBSERVADA*	PROBABILIDADE**
150	1	0,10 = 10%
210	2	0,20 = 20%
270	7	0,70 = 70%
SOMAT.	10	100%

Fonte: Fogaça (2014).

*Frequência observada é igual ao número de vezes que aquele evento ocorreu dentro da amostra analisada. Exemplo: nas 10 tentativas da Tabela 2.2, um lucro de R$210,00 ocorreu duas vezes.

**Probabilidade obtida dividindo-se a frequência observada pelo total de observações (10).

Os resultados dessa simulação nos mostram que a Doce Sabor tem 30% de chance de obter um lucro menor ou igual a R$ 210. Os 30% de chance são encontrados somando-se as probabilidades 10% e 20% na tabela 2.3.

Se a loja tem despesas fixas maiores do que este valor, talvez fosse melhor seu administrador escolher uma outra quantidade de encomenda (Q) na tentativa de obter um lucro maior. Faça o teste construindo tabelas de simulação para Q = 40,50,60,70,80, 90 e 100 unidades.

Deve-se salientar que o acima exposto foi somente um exemplo de aplicação da simulação. Para que a simulação forneça bons resultados, ela deve ser realizada muitas vezes (cem no mínimo). Para que se possa realizar uma simulação de cem tentativas, por exemplo, uma planilha eletrônica será de grande valia. Uma simulação com dez tentativas nos produz resultados muito limitados e foi aqui realizada para que você entenda mais facilmente o processo de simulação.

Na próxima seção, você continuará este exemplo trabalhando com a simulação de Monte Carlo. Esse tipo de simulação foi escolhido por ser considerado mais adequado a simulações realizadas no mundo dos negócios.

Seção 3
Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é basicamente um experimento de amostragem, cujo principal propósito é estimar a distribuição de um resultado que depende de algumas variáveis probabilísticas.

Ela é um tipo de simulação que gera números aleatórios dentro de certas características, e utiliza estes valores para as variáveis incertas de um modelo. O modelo é simulado repetidas vezes, utilizando esses números aleatórios e os resultados são anotados e classificados.

Lembre-se:
Método de Monte Carlo: tipo de simulação que utiliza distribuições de probabilidades para determinar a ocorrência de eventos aleatórios.

A simulação de Monte Carlo é frequentemente utilizada para avaliar o impacto esperado de mudanças de políticas e o risco envolvido na tomada de decisão.

De acordo com Corrar e Theófilo (2003), a técnica de simulação de Monte Carlo compreende as seguintes etapas:

a. identificação das distribuições de probabilidades das variáveis aleatórias relevantes para o estudo;
b. construção das distribuições de probabilidades acumuladas para cada uma das variáveis definidas no item anterior (a), quando cabível;
c. definição dos intervalos de números randômicos (números aleatórios) para cada variável;
d. geração de números aleatórios;
e. simulação dos experimentos.

Para exemplificar as etapas acima, vamos definir primeiramente as variáveis aleatórias do exemplo 2.1.

Variável é o objeto de estudo do problema que estamos resolvendo e aleatório é aquilo que não sabemos com exatidão, que simulamos o resultado.

Portanto, no exemplo da Doce Sabor temos três variáveis:

- a **demanda** (D)
- a **quantidade do pedido** (Q) e o
- **lucro** (L).

A quantidade comprada Q, após determinada, será sempre a mesma, sendo assim, ela é não aleatória.

A demanda D, é uma variável aleatória, pois é uma quantidade incerta, muitos fatores podem interferir no seu valor.

O lucro L depende de Q e D, como percebemos nas equações presentes no exemplo da 'Doce Sabor'. Sendo assim, também é aleatória.

Para a construção das distribuições de probabilidades e a realização da simulação de Monte Carlo, deve-se primeiramente entender o que é um número aleatório ou randômico.

A simulação de Monte Carlo trabalha basicamente com número aleatório ou randômico, que é assim definido:

- **Número aleatório ou randômico é aquele número que é uniformemente distribuído entre 0 ou 1.**

O que queremos dizer com uniformemente distribuído para um número aleatório? Queremos dizer que todos os valores situados entre 0 e 1 têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Para que possamos utilizar os números aleatórios na simulação de Monte Carlo, precisamos primeiro construir as distribuições de frequência relativa (probabilidade) e acumulada (probabilidade acumulada) do problema que estamos analisando.

Voltando ao exemplo anterior!
Lembre que no exemplo da Doce Sabor tínhamos que as demandas de 40, 50, 60, 70, 80 e 90 caixas de chocolate apresentavam a mesma probabilidade (1/6). Agora, **suponha** que as demandas têm as probabilidades dadas pela tabela que segue:

Tabela 2.4 – Distribuição de probabilidade da demanda da Doce Sabor

DEMANDA	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA
40	0,05	0,05*
50	0,10	0,15**
60	0,15	0,30
70	0,40	0,70
80	0,20	0,90
90	0,10	1,00
Total	1,00	

Fonte: Lopes e Galvão (2010).

* A probabilidade acumulada da 1a linha será sempre igual à probabilidade da mesma linha.

** A probabilidade acumulada da 2a e demais linhas será sempre igual à probabilidade da linha de cima, somada à probabilidade da própria linha. Exemplo: na 2a linha temos 0,05 (linha de cima) somado a 0,10 (valor à esquerda) resultando em 0,15.

Com base nos dados acima podemos associar a cada intervalo de números aleatórios uma demanda, de acordo com a tabela que segue.

Tabela 2.5 – Distribuição dos números aleatórios

LINHA*	DEMANDA	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO DE NÚMEROS ALEATÓRIOS**
1	40	0,05	0,05	[0-0,05]
2	50	0,10	0,15	(0,05-0,15]
3	60	0,15	0,30	(0,15- 0,30]
4	70	0,40	0,70	(0,30-0,70]
5	80	0,20	0,90	(0,70-0,90]
6	90	0,10	1,00	(0,90-1,0]
7	Total	1,00		

Fonte: Lopes e Galvão (2010).

*esta coluna foi aqui incluída somente para auxiliar o entendimento do exemplo;

**o parêntese significa que aquele número não esta incluindo no intervalo, enquanto que o colchete significa que o número faz parte daquele intervalo.

A simulação de Monte Carlo trabalha com números aleatórios, sorteados entre zero e um. Existem tabelas prontas com esses números sorteados (Anexo 1), mas eles podem também ser obtidos por meio da função aleatório, quando realizamos a simulação com o Excel (Anexo 2).

A Tabela 2.5 nos diz que, se sortearmos um número e este for menor do que 0,05, a demanda pode ser considerada como sendo de 40 caixas e o lucro obtido com esta venda pode ser quantificado, ou seja, R$ 150 da Tabela 2.2. Se o número 0,56 for sorteado, por exemplo, a demanda pode ser considerada como sendo de 70 caixas.

? Mas como esse intervalo é definido?

O intervalo dos números aleatórios deve ser definido refletindo a probabilidade de cada variável. Esses intervalos são assim definidos:

Limite inferior do intervalo;

Limite superior do intervalo.

Observe as setas da Tabela 2.5 que você compreenderá como os intervalos são construídos. Por exemplo:

na linha 1, teremos o limite inferior do intervalo igual a zero. Não estranhe, o primeiro intervalo sempre começa com zero. Já o limite superior será igual à probabilidade daquela linha (linha 1).

Na linha 2, o limite inferior será igual ao limite superior da linha 1, enquanto que o limite superior será igual à probabilidade desta linha (linha 2).

Você entendeu?

A tabela que segue mostra uma simulação de vinte linhas dos chocolates especiais da Doce Sabor, para uma compra de 80 unidades (Q = 80).

Tabela 2.6 – Resultados da simulação para uma quantidade comprada de 80 unidades

QUANTIDADE COMPRADA			(Q) = 80			ALEATÓRIOS DO ANEXO 1
EVENTO	N0. ALEATÓRIO *	DEMANDA	LUCRO ($)	EXPRESSÕES LUCRO 1 LUCRO 2	CONDIÇÃO	
1	0,796616	80	360	4,5Q	D=Q	LINHA 1 ANEXO 1
2	0,09071	50 **	180	6D-1,5Q	D<Q	
3	0,0866	50	180	6D-1,5Q	D<Q	
4	0,3795	70	300	6D-1,5Q	D<Q	
5	0,5467	70	300	6D-1,5Q	D<Q	
6	0,5771	70	300	6D-1,5Q	D<Q	
7	0,4673	70	300	6D-1,5Q	D<Q	
8	0,9292	90	360	4,5Q	D>Q	
9	0,7404	80	360	4,5Q	D=Q	
10	0,5539	70	300	6D-1,5Q	D<Q	
11	**0,210096**	60	240	6D-1,5Q	D<Q	LINHA 2 ANEXO 1
12	**0,56622**	70	300	6D-1,5Q	D<Q	
13	**0,0711**	50	180	6D-1,5Q	D<Q	
14	**0,5213**	70	300	6D-1,5Q	D<Q	
15	**0,9204**	90	360	4,5Q	D>Q	
16	**0,6073**	70	300	6D-1,5Q	D<Q	
17	**0,3871**	70	300	6D-1,5Q	D<Q	
18	**0,5316**	70	300	6D-1,5Q	D<Q	
19	**0,6437**	70	300	6D-1,5Q	D<Q	
20	**0,1376**	50	180	6D-1,5Q	D<Q	
MÉDIA			**285**			

Fonte: Fogaça (2014).

* Foram utilizadas as linhas 1 e 2 da tabela de números aleatórios que se encontra no Anexo 1 deste livro.

**O valor D = 50 da segunda linha foi gerado pelo número aleatório 0,09071, que pertence ao intervalo (0,05 – 0,15] na segunda linha da tabela 2.5.

Segundo Downing (2005), uma relação de números, como os dados na coluna Lucro, é um conjunto de dados brutos. Seria interessante calcular a média de todos esses números. Para tanto, basta somarmos todos os números e dividirmos a soma pela quantidade de números:

$$L = \frac{5700}{20} = 285$$

Portanto, em média, ao adquirir 80 unidades, a Doce Sabor terá um lucro de R$285,00.

Podemos definir uma fórmula geral para a média. Sejam n números x_1, x_2, x_3,... x_n. Utilizaremos o símbolo de (x barra) para indicar a média. Podemos então escrever:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Caso seja necessário calcular o desvio padrão dos lucros apresentados, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (L - LM)^2}{N - 1}}$$

Onde:

σ = Desvio Padrão da série de valores (LUCROS)

L = Lucro

LM = Lucro Médio

N = Número de parcelas

No anexo 4, ao final do livro didático, está demonstrada uma tabela com o cálculo.

A FUNÇÃO DESVIO PADRÃO NO EXCEL É EXECUTADA POR DESVPAD

A Tabela 2.6 apresenta o resultado de 20 linhas de simulação do lucro da Doce Sabor, caso a empresa encomende 80 caixas de chocolate. Para que a empresa possa decidir se irá comprar 40, 50, 60, 70, 80 ou 90 caixas, uma tabela muito parecida com essa deve ser construída, variando-se o valor de Q e refazendo os cálculos do valor do lucro, conforme abaixo.

Tabela 2. 7 – Resultados da simulação para encomendas de 40 e 50 unidades

Q = 40 unidades

EVENTO	Nº ALEATÓRIO*	DEMANDA	LUCRO
1	0,860438	80	180,00
2	0,57595	70	180,00
3	0,5743	70	180,00
4	0,8976	80	180,00
5	0,581	70	180,00
6	0,6202	70	180,00
7	0,6819	70	180,00
8	0,3114	70	180,00
9	0,0143	40	180,00
10	0,1064	50	180,00
11	0,620942	70	180,00
12	0,47836	70	180,00
13	0,1793	60	180,00
14	0,2349	60	180,00
15	0,0441	40	180,00
16	0,2918	60	180,00
17	0,5552	70	180,00
18	0,4174	70	180,00
19	0,4314	70	180,00
20	0,9456	90	180,00
Média			180,00

Q = 50 unidades

EVENTO	Nº ALEATÓRIO**	DEMANDA	LUCRO
1	0,889193	80	225,00
2	0,97623	90	225,00
3	0,7441	80	225,00
4	0,6789	70	225,00
5	0,166	60	225,00
6	0,0345	40	165,00
7	0,0066	40	165,00
8	0,5449	70	225,00
9	0,085	50	225,00
10	0,6382	70	225,00
11	0,633823	70	225,00
12	0,98545	90	225,00
13	0,284	60	225,00
14	0,9382	90	225,00
15	0,7199	80	225,00
16	0,3808	70	225,00
17	0,0439	40	165,00
18	0,4093	70	225,00
19	0,2048	60	225,00
20	0,1385	50	225,00
Média			216,00

Fonte: Lopes e Galvão (2010).

* Foram utilizadas as linhas 3 e 4 da tabela de números aleatórios que se encontram no Anexo 1 deste livro.

** Foram utilizadas as linhas 5 e 6 do Anexo 1.

Tabela 2. 8 – Resultados da simulação para encomendas de 60 e 70 unidades

Q = 60 unidades

EVENTO	Nº ALEATÓRIO*	DEMANDA	LUCRO
1	0,831563	80	270,00
2	0,99475	90	270,00
3	0,6982	70	270,00
4	0,0287	40	150,00
5	0,3462	70	270,00
6	0,7649	80	270,00
7	0,9844	90	270,00
8	0,1964	60	270,00
9	0,2811	60	270,00
10	0,3724	70	270,00
11	0,946132	90	270,00
12	0,17451	60	270,00
13	0,1003	50	210,00
14	0,5033	70	270,00
15	0,7422	80	270,00
16	0,2454	60	270,00
17	0,0746	50	210,00
18	0,5752	70	270,00
19	0,8522	80	270,00
20	0,7538	80	270,00
Média			258,00

Q = 70 unidades

EVENTO	Nº ALEATÓRIO**	DEMANDA	LUCRO
1	0,339908	70	315,00
2	0,44785	70	315,00
3	0,5463	70	315,00
4	0,2696	60	255,00
5	0,1088	50	195,00
6	0,6333	70	315,00
7	0,414	70	315,00
8	0,6526	70	315,00
9	0,3057	70	315,00
10	0,5227	70	315,00
11	0,736661	80	315,00
12	0,95819	90	315,00
13	0,5568	70	315,00
14	0,1205	50	195,00
15	0,6973	70	315,00
16	0,3881	70	315,00
17	0,2172	60	255,00
18	0,0316	40	135,00
19	0,8494	80	315,00
20	0,8428	80	315,00
Média			288,00

Fonte: Lopes e Galvão (2010).

* Foram utilizadas as linhas 7 e 8 da tabela de números aleatórios que se encontra no Anexo 1 deste livro.

** Foram utilizadas as linhas 9 e 10 do Anexo 1.

Tabela 2. 9 – Resultados da simulação para encomendas de 90 unidades

Q = 90 UNIDADES				
Evento	**Nº Aleatório***	**Demanda**	**Lucro**	
1	0,567891	70	285,00	Linha 11 do Anexo 1
2	0,46648	70	285,00	
3	0,5487	70	285,00	
4	0,8976	80	345,00	
5	0,4637	70	285,00	
6	0,1761	60	225,00	
7	0,6178	70	285,00	
8	0,769	80	345,00	
9	0,4673	70	285,00	
10	0,7072	80	345,00	
11	0,541017	70	285,00	Linha 12 do Anexo 1
12	0,53469	70	285,00	
13	0,383	70	285,00	
14	0,5969	70	285,00	
15	0,3706	70	285,00	
16	0,9677	90	405,00	
17	0,901	90	405,00	
18	0,3517	70	285,00	
19	0,3705	70	285,00	
20	0,925	90	405,00	
MÉDIA			**309,00**	

Fonte: Fogaça 2014

* obs: Os números aleatórios correspondem às linhas 11 e 12 do anexo I

Com base nos valores médios dos lucros obtidos nas diferentes simulações acima, pode-se afirmar que a melhor decisão para o empresário da Doce Sabor é a de realizar uma encomenda de 90 caixas, pois essa é a que oferece um maior lucro (R$ 309,00).

Infelizmente, os resultados acima obtidos servem somente como caráter didático, pois segundo especialistas da área, uma simulação somente torna-se confiável, fornecendo resultados muito próximos da realidade, quando é realizada com 100 linhas de simulação. A decisão sobre quantas caixas comprar no caso da Doce Sabor deve somente ser tomada levando em conta o lucro médio previsto, por meio de 100 linhas de simulação desse lucro (100 eventos).

Para que isso seja realizado você dispõe de vários *softwares,* mas pode também utilizar a planilha eletrônica Excel. A construção de um modelo de simulação utilizando o Excel você encontrará no Anexo 2 do presente livro. Aprenda a simular no Excel!

Exemplo

O meteorologista da Epagri/SC deseja fazer uma simulação com a previsão do número de dias em que as temperaturas ficarão em média acima dos 22°C, no mês de maio, em Florianópolis. Para tanto, fez um levantamento das temperaturas médias observadas neste mês, nos últimos 50 anos, e construiu a distribuição de freqüência dada pela tabela abaixo. Estime o número de dias com temperaturas acima de 22º do próximo mês de maio. Utilize a média de 20 linhas de simulação.

Tabela 2.10 - Número de Ocorrências de dias com temperaturas acima de 22º no mês de maio dos últimos 50 anos

Nº DE DIAS COM TEMPERATURA ACIMA DE 22º	**Nº DE VEZES QUE O EVENTO FOI OBSERVADO**	**PROBABILIDADE**	**PROBABILIDADE ACUMULADA**	**INTERVALO DE NºS ALEATÓRIOS**
2	5			
4	20			
6	18			
8	6			
9	1			
Total	50			

Fonte: adptado Fogaça 2014

Solução:

Conforme foi mostrado no exemplo anterior, para a realização da simulação deve-se, inicialmente, construir a tabela 2.10, onde se calcula a probabilidade, a probabilidade acumulada e encontram-se os intervalos dos números aleatórios.

Para o cálculo da probabilidade de um determinado evento, deve-se utilizar a seguinte fórmula:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{Nº de vezes que o evento foi observado}}{\text{Nº total de observações}}$$

Exemplo:

a. para se obter a probabilidade do exemplo acima, probabilidade de ocorrerem 2 dias com temperatura acima de 22º, calcula-se:

   Probabilidade (2 dias) = 5/50 = 0,10 ou 10%;

b. para se obter a probabilidade de ocorrerem 4 dias com temperatura acima de 22º, calcula-se:

   Probabilidade (4 dias) =20/50= 0,40, ou seja, 40%

c. para se obter a probabilidade de ocorrerem 6, 8, 9 dias com temperatura acima de 22º, calcula-se:

   Probabilidade (6 dias) = 18/50= 0,36, ou seja, 36%

   Probabilidade (8 dias) = 6/50= 0,12, ou seja, 12%

   Probabilidade (9 dias) = 1/50= 0,02, ou seja, 2%

   Mas como se calcula a probabilidade acumulada?

   A probabilidade acumulada será sempre calculada da seguinte forma:

   Linha 1 -> Probabilidade acumulada = probabilidade dessa linha;

   Linha 2 -> Probabilidade acumulada = probabilidade acumulada da linha 1 + probabilidade da linha 2;

   Linha 3 – Probabilidade acumulada = probabilidade acumulada da linha 2 + probabilidade da linha 3;

   Linha 4 – Probabilidade acumulada = probabilidade acumulada da linha 3 + probabilidade da linha 4;

   Linha 5 – Probabilidade acumulada = probabilidade acumulada da linha 4 + probabilidade da linha 5;

   Ou seja:

   A partir da linha 2, a probabilidade acumulada é calculada somando-se a probabilidade acumulada da linha anterior com a probabilidade da linha.

Calculando o intervalo de números aleatórios

Para que você entenda como construir um intervalo, primeiro deve lembrar o que aprendeu no segundo grau: um intervalo será definido por seu limite inferior e superior.

Tem-se então:

Intervalo aberto= (limite inferior – limite superior)

Intervalo fechado= [limite inferior – limite superior]

Intervalo semiaberto à direita = [limite inferior – limite superior
[Intervalo semiaberto à esquerda =] limite inferior – limite superior]

Os parênteses ( ) ou os colchetes abertos] [indicam que o número (limite inferior ou superior) está fora do intervalo. Já quando usamos em um intervalo os colchetes fechados [ ] nos indicam que o número está incluído no intervalo.

Exemplo 1:

(0,04 – 1]

Esse intervalo compreende todos os valores dentro do intervalo de 0,04 (excluindo este), até 1,0 (incluindo este).

Exemplo 2:

[1-1,5)

Esse intervalo compreende todos os valores dentro do intervalo que vai de 1,0 (incluindo este valor) até 1,5 (excluindo este valor).

Agora sim, podemos falar da construção do intervalo de números aleatórios para esse exemplo.

Sempre que construímos esse intervalos, teremos na linha 1 o limite inferior do inà a probabilidade acumulada daquela linha.

Observe na tabela:

Intervalos de números aleatórios da linha 1 = [0-0,1]

Da linha 2 em diante o limite inferior é igual à probabilidade acumulada da linha anterior, enquanto que o limite superior é igual à probabilidade acumulada da linha.

Exemplo:

Intervalos de números aleatórios da linha 2 da tabela 2.11= (0,1- 0,5]

Limite inferior = Probabilidade Acumulada da Linha 1

Limite superior = Probabilidade Acumulada da Linha 2

Tabela - 2.11 Distribuição de probabilidade do exemplo

LINHA	NÚMERO DE DIAS COM TEMPERATURAS ACIMA DE 22º	NÚMERO DE VEZES QUE O EVENTO FOI OBSERVADO	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO DE Nº ALEATÓRIOS
1	2	5	0,1 ou 10%	10%	[0 - 0,10]
2	4	20	0,4 ou 40%	50%	(0,10 - 0,50]
3	6	18	0,36 ou 36%	86%	(0,50 - 0,86]
4	8	6	0,12 ou 12%	98%	(0,86 - 0,98]
5	9	1	0,02 ou 2%	100%	(0,98 - 1,0]
	TOTAL	**50**			

Fonte: Fogaça (2014).

Tabela - 2.12 Simulação e Resultado

EVENTO	**No. ALEATÓRIO**	**No. DIAS COM TEMPER. ACIMA DE 22º**
1	0,860438	8
2	0,57595	6
3	0,5743	6
4	0,8976	8
5	0,581	6
6	0,6202	6
7	0,6819	6
8	0,3114	4
9	0,0143	2
10	0,1064	4
MÉDIA		**5,6**

Fonte: Fogaça (2014).

Obs.: Os números aleatórios da Tabela 2.12 foram obtidos da linha 3 do anexo 1.

Como foi explicado no exemplo anterior, para que se realize a simulação deve-se escolher uma linha da tabela de números aleatórios (Anexo 1). Para esse exemplo, escolhemos a linha 3 deste anexo.

Depois de colocados os números aleatórios na tabela de simulação, temos que buscar os valores simulados, nesse caso, o número de dias com temperaturas acima de 22º.

Cada linha é considerada um evento e temos que, para o evento 1, o número aleatório encontrado foi de 0,860438. Com este número em mãos, procuramos na Tabela 2.11 o intervalo em que ele está localizado, intervalo da linha 4 (acompanhe as setas indicativas).

Tabela - 2.13 (Foram unidas as tabelas 2.11 e 2.12 para melhor entendimento)

LINHA	NÚMERO DE DIAS COM TEMPERATURAS ACIMA DE 22º	NÚMERO DE VEZES QUE O EVENTO FOI OBSERVADO	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO DE Nº ALEATÓRIOS
1	2	5	0,1 ou 10%	10%	[0-0,1]
2	4	20	0,4 ou 40%	50%	(0,1-0,5]
3	6	18	0,36 ou 36%	86%	(0,5-0,86]
4	8	6	0,12 ou 12%	98%	(0,86-0,98]
5	9	1	0,02 ou 2%	100%	(0,98-1]
	TOTAL	**50**			

EVENTO	No. ALEATÓRIO	No. DIAS COM TEMPER. ACIMA DE 22º
1	0,860438	8
2	0,57595	6
3	0,5743	6
4	0,8976	8
5	0,581	6
6	0,6202	6
7	0,6819	6
8	0,3114	4
9	0,0143	2
10	0,1064	4
MÉDIA		**5,6**

0,860438 > 0,86 DAI A ESCOLHA DO INTERVALO (0,86 - 0,98] QUE IMPLICA EM 8 DIAS COM TEMPERATURA ACIMA DE 22º.

Fonte: Fogaça (2014).

Observando o resultado acima e lembrando que construir uma simulação com 10 eventos tem caráter somente didático (o correto são 100 linhas, no mínimo), você pode concluir que existe uma probabilidade muito grande de que no próximo mês de maio, 5 dias terão temperaturas acima de 22ºC.

Atividades de autoavaliação

1. Para praticar os conhecimentos apropriados nesta unidade, realize as seguintes atividades propostas.

   Uma lanchonete encomenda uma determinada quantidade de empadas por dia. A demanda varia a cada dia, mas o gerente da lanchonete tem observado esta demanda e construiu a seguinte tabela:

   Distribuição de probabilidade da demanda por empadas

NOS. DE UNIDADES VENDIDAS POR DIA	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO N^{OS}. ALEATÓRIOS
30	0,10		
40	0,27		
50	0,33		
60	0,3		

   Cada empada custa à lanchonete R$ 1,00 e é vendida a R$ 2,00. As empadas que sobram em um dia são doadas a um asilo de idosos. A lanchonete compra 50 empadas por dia. Com base nestas informações desenvolva um modelo de simulação que calcule o lucro diário provável da empresa. Utilize a tabela abaixo para simular dez dias de movimento da lanchonete.

   Simulação (obs.: faça a sua simulação utilizando a 14ª linha da tabela de números aleatórios):

EVENTO	Nº ALEATÓRIO	DEMANDA	RECEITA (R$)	CUSTO (R$)	LUCRO (R$)
1	0,795429				
2	0,1228				
3	0,2229				
4	0,4468				
5	0,3055				
6	0,8294				
7	0,3787				
8	0,7943				
9	0,865				
10	0,9314				
Média					

2. O número de lâmpadas halógenas vendidas por semana em uma loja de materiais elétricos tem a seguinte distribuição de probabilidade:

Número de lâmpadas vendidas	Probabilidade	Probabilidade acumulada	Intervalo números aleatórios
0	0,15		
1	0,20		
2	0,35		
3	0,15		
4	0,10		
5	0,05		

Mostre como usar números aleatórios para simular resultados para esta distribuição (obs.: faça a sua simulação utilizando a 3ª linha da tabela de números aleatórios).

NÚMERO DE LÂMPADAS	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO Nos. ALEATÓRIOS
0	0,15		
1	0,20		
2	0,35		
3	0,15		
4	0,10		
5	0,05		

Mostre como usar números aleatórios para simular resultados para esta distribuição (obs.: faça a sua simulação utilizando a 3ª linha da tabela de números aleatórios).

EVENTO	No. ALEATÓRIO	No. DE LÂMPADAS VENDIDAS
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Média		

3. (CORRAR; THEÓFILO, 2003). Uma empresa de varejo, do ramo farmacêutico, deseja simular sua demanda diária de determinado item do estoque: vitamina C. Para isto procedeu ao levantamento de dados históricos sobre esta demanda. O relatório de vendas dos últimos cem dias apontou o seguinte comportamento para a demanda diária de frascos de vitamina C.

Distribuição de freqüência da demanda diária de frascos de vitamina C

DEMANDA DIÁRIA (NÚMERO DE FRASCOS)	FREQÜÊNCIA (Nº. DE DIAS)	PROBABILIDADE*	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO Nºs. ALEATÓRIOS
10	30	0,3		
15	30	0,3		
20	40	0,4		
Total	100	-		

*A probabilidade é obtida dividindo-se a frenqüência (nº de dias que o evento foi observado) pelo número total de observações.

Com base nestes dados efetue a simulação da demanda por frascos de vitamina C (obs.: faça a sua simulação utilizando a 5ª linha da tabela de números aleatórios).

EVENTO	NÚMEROS ALEATÓRIOS	DEMANDA
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Média		

4. A tabela abaixo mostra as probabilidades da distribuição de dividendos pela Usiminas (em US$ milhões) para os próximos anos. Construa uma simulação que indique quanto a Usiminas irá distribuir na forma de dividendos no próximo ano. Calcule a média dos resultados.

Probabilidade de distribuição de dividendos

DIVIDENDOS US$ (MILHÕES)	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO N^{OS}. ALEATÓRIOS
50	0,4		
100	0,10		
150	0,30		
200	0,20		

EVENTO	NÚMERO ALEATÓRIO*	DIVIDENDO
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Média		

*Utilize a linha 2 da tabela de números aleatórios (Anexo 1)

5. O gestor de uma empresa que produz cadeiras de dentista pretende controlar melhor o atendimento da demanda diária de seus produtos empregando um modelo de simulação. O relatório de vendas de um dos tipos de cadeiras comercializadas pela empresa apresentou nos últimos dois anos uma demanda mensal que varia entre 20 e 28 unidades (Tabela 1). Considerando as informações desta tabela, construa uma simulação e compute o número médio mensal de cadeiras vendidas.

Tabela 1 – Demanda mensal por cadeiras do tipo A

QUANTIDADE DEMANDADA DE CADEIRAS	NÚMERO DE MESES NO ANO (FREQÜÊNCIA)	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO N^{os}. ALEATÓRIOS
20	3	0,13		
22	6	0,25		
24	8	0,33		
26	4	0,17		
28	3	0,13		
Total	24	-		

Tabela 2 – Simulação (obs.: inicie a simulação na 10ª linha da tabela de números aleatórios)

EVENTO	N^{o}. ALEATÓRIO	DEMANDA
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Média		

6. Uma microempresa especializada na confecção de calças jeans tem seus custos variáveis variando de acordo com alguns fatores, tais como: custo do jeans no distribuidor, custos de mão de obra, frete, entre outros. O preço de venda e a demanda são também variáveis aleatórias que variam de acordo com o preço dos competidores. As distribuições de probabilidade destas variáveis são descritas abaixo. Sabe-se que o custo fixo (CF) da microempresa é de R$ 900 por mês. Construa uma simulação de 10 linhas de produção e vendas e calcule o lucro médio mensal da empresa.

Tabela 1 – Demanda mensal observada

VOLUME DE VENDAS (DEMANDA)	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO N^{os}. ALEATÓRIOS
300	0,12		
400	0,18		
500	0,20		
600	0,23		
700	0,17		
800	0,10		
	1,00		

Tabela 2 – Preço de venda

PREÇO DE VENDA (R$)	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO N^{os}. ALEATÓRIOS
22	0,07		
23	0,16		
24	0,24		
25	0,25		
26	0,18		
27	0,10		
	1,00		

Tabela 3 – Custos variáveis

CUSTO VARIÁVEL (R$)	PROBABILIDADE		
8	0,17		
9	0,32		
10	0,29		
11	0,14		
12	0,08		
	1,00		

Tabela 4 – Simulação (obs.: inicie na 2ª linha da tabela de números aleatórios)

EVENTO	Nº. ALEATÓRIO	PREÇO DE VENDA (PV)	Nº. ALEATÓRIO	CUSTO VARIÁVEL (CV)	Nº. ALEATÓRIO	DEMANDA (Q)	LUCRO = (PV-CV)*Q - CF
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
Média							

7. (Traduzido e adaptado de RENDER, STAIR e BALAKRISCHNAN, 2003) Jucélio, um estudante de graduação em Administração, tem tido problemas para prever sua renda mensal bem como a quantia que sobrará a cada mês. Jucélio recebe um salário fixo advindo de uma bolsa de pesquisa mais algum dinheiro extra que ele ganha lecionando aulas particulares de pesquisa operacional. Suas chances de vários níveis de renda são mostradas na tabela abaixo:

RENDA MENSAL (R$)	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO N^{OS}. ALEATÓRIOS
350	0,40		
400	0,20		
450	0,30		
500	0,10		

Seus gastos mensais também variam mês a mês e ele estima que seguem a distribuição da tabela a seguir:

GASTOS MENSAIS (R$)	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO N^{OS}. ALEATÓRIOS
300	0,10		
400	0,45		
500	0,30		
600	0,15		

Jucélio iniciou este ano com R$ 600 de saldo em sua conta. Simule um ano inteiro (doze meses) e diga:

a. quanto sobrou para Jucélio no final do ano;

b. quantas vezes ele ficou com saldo negativo no mês.

Tabela para a simulação (Inicie na 5ª linha da tabela, anexo 1).

MÊS	NÚMERO ALEATÓRIO	RENDA	NÚMERO ALEATÓRIO	GASTOS	SALDO NA CONTA (R$)
0	-	-	-	-	600,00
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					

8. (Traduzido e adaptado de TAYLOR, 2004) O gerente da *Computer World*, uma loja que vende *notebooks* e equipamentos relacionados, está tentando determinar quantos computadores a loja deveria solicitar cada semana. Uma primeira consideração nesta decisão é o número médio de *notebooks* que a loja venderá por semana e a receita média gerada pela venda dos mesmos. Cada *notebook* é vendido por R$ 4.300. O número de *notebooks* vendidos por semana é uma variável randômica (aleatória) que varia de 0 a 4 unidades. Com base nos arquivos da empresa, o gerente pôde determinar a freqüência da demanda por *notebooks* das últimas cem semanas descrita na tabela abaixo. Com base nestes dados monte uma simulação de dez semanas e responda ao gerente:

a. o número médio de computadores vendidos por semana;

b. a receita média obtida por semana.

DEMANDA DE *NOTEBOOKS* POR SEMANA	FREQUÊNCIA	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO N^{os}. ALEATÓRIOS
0	20	0,20		
1	40	0,40		
2	20	0,20		
3	10	0,10		
4	10	0,10		
Total	100	-		

Tabela 2 – Simulação (obs.: inicie na 5a linha da tabela de números aleatórios)

SEMANA	N^{o}. ALEATÓRIO	DEMANDA (Q)	RECEITA = PV*Q
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Média			

9. (ANDRADE, 2004) Uma empresa deseja lançar um produto no mercado e para isso realizou uma pesquisa da preferência dos consumidores. Foi constatado que há uma probabilidade de 40% do produto ser bem aceito e, portanto, uma probabilidade de 60% de que a aceitação fique abaixo das expectativas. No caso de ser o produto bem aceito, poderão ocorrer lucros segundo os dados da Tabela 1. Em caso contrário, os lucros poderão ocorrer conforme a distribuição de probabilidades da Tabela 2. Qual lucro médio a empresa pode esperar?

Tabela 1 – Lucro com boa aceitação do produto

LUCRO	PROBABILIDADE (%)	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO N^{os}. ALEATÓRIOS
10	10		
12	15		
14	20		
16	30		
18	15		
20	10		

Tabela 2 – Lucro com má aceitação do produto

LUCRO ($)	PROBABILIDADE (%)	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO N^{os}. ALEATÓRIOS
4	10		
6	20		
8	30		
10	20		
12	15		
14	5		

Tabela 3 – Aceitação do produto

ACEITAÇÃO DO PRODUTO	PROBABILIDADE	PROBABILIDADE ACUMULADA	INTERVALO DE N^{os} ALEATÓRIOS
Boa	0,4		
Má	0,6		

Tabela 4 – Simulação (observação: inicie na 2a linha da tabela de números aleatórios)

EVENTO	N^{o}. ALEATÓRIO	ACEITAÇÃO	N^{o}. ALEATÓRIO	LUCRO (R$)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Média				

Capítulo 3

Programação Linear, formulação

Adaptado de Ana Lucia Miranda Lopes

Habilidades

Ao final deste estudo o estudante entenderá o que é programação linear e como ela pode auxiliar o administrador na tomada de decisão, além de saber elaborar modelos simples de programação linear.

Seções de estudo

Seção 1: Programação linear

Seção 2: Construção de um modelo de programação linear: formulação

Seção 1
Programação Linear

Programação linear é uma técnica de otimização utilizada para resolução de problemas decisórios que podem ser representados por meio de equações lineares.

A otimização ajuda a encontrar a resposta que produz o melhor resultado para a empresa, ou seja, aquela que conduz ao maior lucro ou menor custo, por exemplo.

Para que a otimização aconteça é necessário que se construa o modelo matemático que representa o problema a ser resolvido. Um modelo é uma representação simplificada de uma realidade e, na programação matemática, eles são definidos por meio de uma função objetivo e uma ou mais restrições, como segue:

Modelo geral:

Função objetivo

$$\text{Otimizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n <, =, \text{ou} > b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n <, =, \text{ou} > b_2$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n <, =, \text{ou} > b_m$$

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n >= 0$$

restrições

Onde:

Z = Função Objetivo

c_j = coeficientes da função objetivo

x_j = variáveis de decisão

a_j = coeficientes técnicos

bi = constantes do lado direito da equação (RHS)

No modelo acima tem-se:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ valores como variáveis de decisão do problema (aquilo que se deseja conhecer);
- a_{m1} , a_{m2} , a_{m3} , ... , a_{mn}; b_m; $c_1, c_2, \ldots, c_n$ como constantes, isto é , valores conhecidos do problema;
- Z como aquilo que se deseja otimizar (maximizar ou minimizar).

As equações acima procuram mostrar matematicamente um problema (modelagem). Pode-se ler assim: otimize (maximize ou minimize) uma determinada função Z, que se convenciona chamar de função-objetivo. Porém, ao otimizar esta equação o resultado deverá obedecer às equações abaixo, que se convenciona chamar de restrições. O **sujeito a** irá aparecer em todos os modelos e pode ser representado por **s.a.**

Seção 2
Construção de um modelo de programação linear: formulação

A construção de um modelo de programação linear pode ser dividida em quatro fases:

fase 1: definição das variáveis de decisão;

fase 2: identificação dos dados do problema;

fase 3: identificação e modelagem da função-objetivo;

fase 4: identificação e modelagem das restrições.

2.1 Fase 1: Definição das variáveis de decisão

Para melhor mostrar como devem ser realizadas esta e as demais fases, vamos trabalhar por meio de um exemplo de planejamento da produção.

Exemplo 3.1

Só Bicicletas (SB) é uma empresa nacional que atua no ramo de produção de bicicletas. A empresa acaba de lançar dois novos modelos de bicicletas infantis (uma para menino e uma para menina) que está fazendo o maior sucesso entre a garotada.

O sucesso dos novos modelos é tanto que tudo que for produzido será vendido, e o departamento de marketing recomenda que ao menos 250 bicicletas de cada modelo sejam produzidas.

O lucro unitário na produção e venda da bicicleta feminina é de R$ 50,00 e da bicicleta masculina é de R$ 30,00. A empresa conta para a produção desses dois novos modelos com 200 trabalhadores; por turno, no departamento de fabricação e 100 trabalhadores, por turno, no departamento de montagem. A empresa trabalha em três turnos e cada funcionário trabalha oito horas por dia. O modelo feminino necessita de quatro horas de mão de obra no departamento de fabricação e de duas horas no departamento de montagem.

O modelo masculino necessita de quatro horas de mão de obra no departamento de fabricação e de uma hora no departamento de montagem.

Formule um modelo que informe à SB o plano de produção diário que maximiza seu lucro.

Para que as variáveis de decisão possam ser determinadas, pode-se iniciar perguntando:

- Quais itens afetam o custo ou lucro do problema?
- Quais itens estão livres para escolher e/ou têm algum controle sobre?
- Quais decisões você tem que tomar?
- Quais valores, uma vez determinados, constituem a solução do problema?

Respondidas essas perguntas, ter-se-ão definidas as variáveis de decisão do problema. Essas devem ser representadas por um nome simbólico, que pode ser uma letra ou um conjunto de letras (nunca um número), e que auxilia no entendimento do significado da variável.

! Dê um nome simbólico para a variável.

No Exemplo 3.1 o que se quer determinar? Sobre o que se tem algum controle?

Se é desejável determinar o número de bicicletas femininas e masculinas a serem produzidas por dia pela empresa, então:

Qf = número de bicicletas femininas a serem produzidas diariamente

Qm = número de bicicletas masculinas a serem produzidas diariamente

Variável de decisão:
Representação por um símbolo ou letra daquilo que se quer determinar e sobre o que se tem algum controle.

2.2 Fase 2: Identificação dos dados do problema

Uma vez identificadas as variáveis que representam aquilo que se deseja conhecer em um modelo decisório, pode-se passar para a fase de identificação dos dados do problema. Esses dados são aqueles necessários para a modelagem completa do problema.

Todos os dados devem ser levantados e, quando esses podem ser obtidos, com certeza, estamos diante de um problema chamado de determinístico, enquanto que problemas estocásticos envolvem dados incertos.

No problema de planejamento de produção do Exemplo 3.1 tem-se que cada bicicleta no modelo feminino necessita de quatro horas de mão de obra para sua fabricação e de duas horas de mão de obra para sua montagem.

Esses dados, assim como os dados relativos ao modelo masculino, devem estar representados no modelo. A disponibilidade de mão de obra em cada departamento de fabricação e montagem também fará parte do modelo.

Em um problema de planejamento da produção sabe-se que o ponto crítico é não poder gastar mais recurso do que a empresa dispõe. Tem-se então que chegar aos valores de disponibilidade de cada recurso.

Para chegar-se ao número de horas de mão de obra disponíveis em cada departamento deve-se calcular:

Mão de obra disponível no departamento de fabricação:

MOF= 200 trabalhadores x 3 três turnos x 8 horas diárias de trabalho = 200 x 3 x 8 = 4800 horas

Mão de obra disponível no departamento de montagem:

MOM= 100 trabalhadores x 3 três turnos x 8 horas diárias de trabalho = 100 x 3 x 8 = 2400 horas

Para auxiliar no processo de modelagem do problema pode-se construir uma tabela que resuma todos os dados disponíveis no problema, como segue:

Tabela 3.1 – Dados do Exemplo 3.1

Variáveis	Unidade	Bicicleta Feminina	Bicicleta Msculina	Dados solicitados pelo problema	
Número de bicicletas à produzir	Quantidade (Q)	Qf	Qm	quantidade de bicicleta feminina Qf>=250 (ao menos significa: igual ou maior)	quantidade de bicicleta masculina Qm>=250 (ao menos significa: igual ou maior)
Lucro Unitário	$ / unid.	50	30		
Mão de Obra Fabricação	Horas / Unid	4	4	200 func. X 3 turnos X 8 horas ≤ 4800 h	
Mão de Obra Montagem		2	1	100 func. X 3 turnos X 8 horas ≤ 2400 h	
LUCRO TOTAL	**$**			**MAXIMIZAR**	

Fonte: Adaptado de Lopes e Galvão (2007).

2.3 Fase 3: Identificação e modelagem da função-objetivo

Depois de determinadas as variáveis de decisão e os dados do problema, pode-se passar à fase de construção do modelo. Esse modelo matemático representa a situação da empresa que tem um objetivo e que para alcançá-lo terá de enfrentar algumas restrições. Será formado, então, por uma função-objetivo e algumas restrições.

A função-objetivo pode ser entendida como a representação formal do objetivo da organização expresso na forma matemática em termos de dados e variáveis de decisão.

2.3.1 Função-objetivo:

É o objetivo do problema descrito em termos de variáveis de decisão e dados.

Mas qual é o objetivo da empresa (Exemplo 3.1)?

Pode-se concluir que o objetivo da empresa SB é obter o maior lucro possível. Para obtê-lo ela deve encontrar os valores de Qf e Qm que a conduzam a esse lucro. Esses valores, além de levarem ao melhor lucro possível, devem respeitar as restrições que a empresa enfrenta quanto à mão de obra disponível e demanda por bicicletas, o que será posteriormente representado pelas restrições.

Para a construção da função-objetivo tem-se, pela Tabela 3.1, que o lucro unitário obtido na produção e venda dos modelos femininos é de R$ 50,00 e dos modelos masculinos é de R$ 30,00 e que a empresa deseja maximizar o lucro total. Isso pode ser representado da seguinte forma:

LT = 50Qf + 30Qm

onde:

LT é o lucro total obtido na produção dos dois modelos;

Qf e Qm são as variáveis de decisão e, portanto, incógnitas do problema.

Utilizando a função de lucro total acima, tem-se como função-objetivo:

Max LT) 50Qf + 30Qm

Temos, então, o objetivo da Só Bicicletas representado matematicamente (modelado).

2.4 Fase 4: Identificação e modelagem das restrições

A última fase do processo de modelagem de um processo decisório é a identificação das restrições.

Normalmente, o alcance do objetivo de uma organização está sujeito a algumas limitações. Essas limitações podem ser:

- **limitações físicas:** capacidade máxima de produção das máquinas ou fábrica, quantidade de matéria-prima existente ou possível de se obter, mão de obra disponível etc.;
- **limitações externas:** demanda dos produtos produzidos, imposições do mercado;
- **imposições do administrador, do governo, das associações envolvidas:** o administrador pode ter se comprometido a fornecer uma certa quantia de determinado produto para um cliente antigo; a sociedade de proteção ao ambiente impõe que somente uma determinada quantia de um produto seja produzida devido aos danos que sua produção causa ao ambiente etc.;
- **relações entre as variáveis:** um determinado produto deve ser produzido duas vezes mais do que outro, por exemplo;
- **restrições lógicas nas variáveis:** limites nas variáveis.

A declaração no modelo de todas as limitações ou imposições necessárias para o alcance do objetivo é de vital importância para a obtenção de um resultado que realmente represente o problema da empresa.

Restrição:
É a representação matemática de restrições e/ou limitações da empresa ou limitações nos valores das variáveis.

No Exemplo 3.1, lembremos que a empresa deseja saber quanto produzir de cada modelo para maximizar seu lucro. Quais são suas limitações? A principal é a mão de obra existente nos departamentos de fabricação e montagem, que não é ilimitada.

Lembremos que a mão de obra consumida em cada departamento deve ser menor ou igual à mão de obra disponível.

Mas como representar?

CONSUMO <= DISPONÍVEL

Consumo de M.O. no departamento de fabricação <= M.O. disponível no departamento de fabricação

Consumo de M.O. no departamento de montagem <= M.O. disponível no departamento de montagem

Para representar as relações acima, primeiramente temos que construir a equação que representa o consumo de cada departamento, como segue:

Consumo de mão de obra no departamento de fabricação:

- Consumo de M.O. (bic. fem.) = mão de obra necessária para a produção de uma bicicleta fem. * quantidade de bicicletas femininas produzidas (Qf)
- Consumo de M.O. (bic. masc.) = mão de obra necessária para a produção de uma bicicleta masc. * quantidade de bicicletas masculinas produzidas (Qm)

E o consumo total de mão de obra no departamento de fabricação será:

Consumo total de M.O. no departamento de fabricação = Consumo na produção de bicicletas femininas + consumo na produção de bicicletas masculinas.

Agora se temos:

Disponibilidade no depto. de fabricação = 4800 horas

e se o consumo tem que ser menor ou igual à disponibilidade (consumo <=disponibilidade), tem-se a primeira restrição:

Restrição 1) 4Qf + 4Qm <=4800

O mesmo pode ser feito para a restrição que irá representar o consumo e disponibilidade de horas de mão de obra no departamento de montagem, como segue:

Consumo < = disponibilidade

De onde tem-se:

Restrição 2) 2Qf + Qm <=2400

Prontas as restrições físicas, pergunta-se: existe alguma outra limitação ou imposição?

Sim, o departamento de marketing aconselha que ao menos 250 bicicletas de cada modelo sejam produzidas. Agora, então, temos que forçar para que as variáveis de decisão assumam valores iguais ou maiores que 250.

Como representar?

Restrição 3) Qf >= 250

Restrição 4) Qm > = 250

O resultado será:

Max LT = 50Qf + 30Qm

Sujeito a

Restrição 1) 4Qf + 4Qm <=4800

Restrição 2) 2Qf + Qm <=2400

Restrição 3) Qf >= 250

Restrição 4) Qm > = 250

O modelo acima busca os valores para as variáveis Qf e Qm que satisfaçam todas as restrições ao mesmo tempo. Você pode estar se perguntando que se vários valores de Qf e Qm satisfazem as equações, qual seria a resposta? Sua dúvida está correta e a resposta é que, entre os vários valores de Qf e Qm que satisfazem as equações, o modelo irá escolher aquele que irá proporcionar o maior valor para a função objetivo (maior porque estamos trabalhando com um modelo de maximização). Algumas vezes é possível que existam duas ou mais respostas corretas, mas esse não é o caso mais comum.

Com o modelo pronto, precisamos ainda resolvê-lo para chegar às quantidades de bicicletas femininas e masculinas que conduzem a empresa ao lucro máximo.

Nas próximas unidades, você aprenderá a resolver um modelo de programação linear.

Exemplo 3.2

Uma escola pública procura uma dieta especial que forneça as quantidades mínimas diárias das vitaminas A, B e C (45 miligramas de vitamina A, 64 miligramas de vitamina B e 45 miligramas de vitamina C) a seus alunos ao menor custo possível. Conclui que poderia alcançar seu objetivo incluindo, no lanche das crianças, laranjas e maçãs. Em uma pesquisa nos atacadistas, a escola consegue comprar 1 kg de laranja por R$ 0,45. Esse quilo de laranja fornece 3 miligramas de vitamina A, 8 miligramas de vitamina B e 15 miligramas de vitamina C, segundo a nutricionista da escola. Cada quilo de maçã custa R$ 0,55 e fornece 15 miligramas de vitamina A, 8 miligramas de vitamina B e 9 miligramas de vitamina C. A meta da escola é determinar quantos quilos de cada fruta devem ser utilizados diariamente de modo a minimizar o custo total. Formule o problema.

2.5 Construindo o modelo de programação linear

Para a definição das variáveis de decisão devemos nos perguntar o que a empresa, neste caso uma escola pública, deseja obter como resposta. O que ela precisa saber?

A resposta a essas perguntas está bem clara: a escola deseja saber quantos quilos de laranjas e quantos quilos de maçãs devem ser utilizados diariamente no lanche das crianças.

Como representar estas variáveis?

Ql = quantidade (kg) de laranjas a utilizar diariamente no lanche da escola

Qm = quantidade (kg) de maçãs a utilizar diariamente no lanche da escola

Lendo o problema, entende-se que essa dieta deve ser tal que forneça uma quantidade mínima de vitaminas A, B e C às crianças. Essas são as imposições que irão mais tarde ser transformadas em restrições do problema de programação linear.

Com base nos dados informados, pode-se montar a tabela abaixo, que irá auxiliar na construção do modelo. A tabela resume todas as informações necessárias.

Tabela 3.2 – Dados do Exemplo 3.2

VARIÁVEIS	UNIDADE	DADOS INICIAIS		DADOS SOLICITADOS
		Laranjas	Maçãs	
Quantidades de fruta no lanche	kg	Ql	Qm	Ql>=0 Qm>=0
Custo	$/kg	0,45	0,55	Minimizar
Quantidade de vitamina A	Miligramas	3	15	>= 45mg
Quantidade de vitamina B	Miligramas	8	8	>= 64 mg
Quantidade de vitamina C	Miligramas	15	9	>= 45 mg

Fonte: Fogaça (2014).

Com base nos dados da tabela, constrói-se a função-objetivo que buscará os valores para Ql e Qm que minimizam o custo total. As restrições irão impor alguns limites nos valores dessas variáveis, limites esses que devem ser a representação matemática de:

1. a dieta deve fornecer pelo menos 45 miligramas de vitamina A;
2. a dieta deve fornecer pelo menos 64 miligramas de vitamina B;
3. a dieta deve fornecer pelo menos 45 miligramas de vitamina C.

O modelo então será:

Minimizar custo total) 0,45Ql + 0,55Qm

Sujeito a.

Vitamina A) 3Ql + 15Qm > = 45

Vitamina B) 8Ql + 8Qm > = 64

Vitamina C) 15Ql + 9Qm > = 45

Restrição lógica 1) Ql > = 0

Restrição lógica 2) Qm > = 0

Os modelos acima são conhecidos em programação linear como **modelos de planejamento da produção e problema da dieta**.

Em um modelo de planejamento da produção típico deseja-se identificar as quantidades que deverão ser produzidas de cada tipo de produto de maneira a maximizar algo, normalmente o lucro. Esses problemas não diferem muito um do outro e você precisará, portanto, identificar se é ou não um modelo de produção e, se for, quais são suas restrições.

Normalmente, teremos restrições de recursos que são limitantes e de demanda, no mínimo. Nos problemas de dieta, normalmente deseja-se saber quanto consumir de cada alimento, de maneira a minimizar o consumo de calorias, por exemplo.

Atenção!

Com os exemplos acima você está apto a construir pequenos modelos, e não esqueça que todos os modelos têm pelo menos uma função-objetivo (os nossos serão sempre uma só) e restrições.

As restrições serão equações que limitam ou impõem algo e terão sempre igualdades (=) ou desigualdades (<= , menor ou igual, ou >=, maior ou igual).

Exemplo 3.3

A Petrobras pode comprar dois tipos de óleo cru: óleo leve a um custo de R$ 25,00 por barril e um óleo pesado a um custo de R$ 22,00 por barril. Cada barril de óleo cru, quando refinado, produz três tipos de produtos: gasolina, óleo diesel e querosene. A seguinte tabela indica as quantidades em barris de gasolina, óleo diesel e querosene produzidas por cada barril de cada tipo de óleo cru.

	Gasolina	Óleo Diesel	Querosene
Óleo Leve	43%	16%	33%
Óleo Pesado	35%	26%	25%

A refinaria tem contratado a entrega de 2.260.000 barris de gasolina, 1.100.000 barris de óleo diesel e 350.000 barris de querosene. Como administrador de produção, formule um modelo para determinar a quantia de cada tipo de óleo cru que se precisa comprar, de modo que minimize o custo total, ao mesmo tempo em que satisfaça a demanda.

Como vimos anteriormente, a formulação do modelo que irá resolver esse problema se dá em 4 fases que iniciam pela definição das variáveis de decisão.

Mas quais seriam as variáveis de decisão do exemplo 3.3?

A Petrobras quer saber quantos barris de óleo leve e quantos barris de óleo pesado são necessários comprar para atender a demanda. Dada essa afirmação, temos:

Variáveis de decisão:

QL = No. de barris de óleo leve a comprar

QP = No. de barris de óleo pesado a comprar

Utilizando as variáveis de decisão definidas por você e os dados do problema, pode-se construir a função objetivo. Sabendo-se que o objetivo é o de minimizar o custo total da compra, tem-se:

Função objetivo: Minimizar custo total = custo da compra do óleo leve + custo da compra do óleo pesado.

Onde:

Custo da compra do óleo leve = custo por barril de óleo leve, multiplicado pela quantidade de barris comprados (QL)

e

Custo da compra do óleo pesado = custo por barril de óleo pesado, multiplicado quantidade de barris comprados (QP)

Então:

Minimizar Custo) 25QL + 22QP

Os números 25 e 22 representam o custo de cada barril de óleo leve e pesado, respectivamente.

Com a função objetivo formulada, pode-se passar à fase da construção das restrições do problema.

As restrições serão aquelas que impõem que a quantidade de cada produto (gasolina, óleo diesel e querosene) obtida, com a compra de óleo leve e pesado, seja igual à quantidade demandada de:

- Quantidade de gasolina obtida na compra = 2.260.000 barris de gasolina;
- Quantidade de óleo diesel obtido na compra = 1.100.000 barris de óleo diesel;
- Quantidade de querosene obtido na compra = 350.000 barris de querosene.

Tem-se, então, que:

- Quantidade de gasolina obtida na compra = quantidade de gasolina existente no óleo leve comprado (%), multiplicado pela quantidade comprada de óleo leve (QL) + quantidade de gasolina existente no óleo pesado comprado (%), multiplicada pela quantidade comprada de óleo pesado (QP)

Com o exposto acima, tem-se que as restrições do modelo serão:

Gasolina) 0,43QL + 0,35QP = 2.260.000

Óleo diesel) 0,16QL + 0,26QP = 1.100.000

Querosene) 0,33QL + 0,25QP = 350.000

Modelo Final:

Minimizar Custo) 25QL + 22QP

s.a.

Gasolina) 0,43QL + 0,35QP = 2.260.000

Óleo diesel) 0,16QL + 0,26QP = 1.100.000

Querosene) 0,33QL + 0,25QP = 350.000

Observação: O valor em % deve ser transformado para número decimal, então, por exemplo, 43% = 43/100 = 0,43.

Exemplo 3.4

Um determinado cliente procurou um banco com o objetivo de investir uma quantia elevada recebida por herança. O gerente de atendimento, após receber o cliente, entrevista-o para identificar o seu perfil de risco e, no final da entrevista, fica claro que ele apresenta um perfil de risco moderado. O cliente está decidido a investir um determinado percentual de sua herança em ações e o restante em fundos. O gerente, então, com o apoio da área de pesquisa do banco, apresenta uma proposta de investimento que imagina atender às expectativas do cliente. A carteira proposta é constituída por um grupo de ações de diferentes setores e dois fundos do banco que têm apresentado um bom retorno ao investidor. O retorno e o risco de cada papel estão demonstrados na tabela abaixo.

PAPEL	RETORNO	RISCO
Ação empresa energia	42,12%	6,22%
Ação empresa varejo	51,29%	6,99%
Ação empresa petróleo e gás	41,54%	5,69%
Fundo Multimercado	60,04%	7,2%
Fundo de Renda Fixa	6,10%	0,00%

Ao analisar as propostas, o cliente faz as seguintes restrições e observações:

- o total investido deve ser de $ 2.000.000,00;
- A quantia investida na empresa de varejo e no fundo multimercado deve ser de, no máximo ,R$ 750.000,00, devido ao alto risco desses investimentos;
- Deve ser investido um mínimo de 60% do total em renda fixa e em ações com risco menor de 6;
- O investimento deve ser realizado de tal forma a maximizar o seu retorno.
- Monte o modelo que responda ao investidor quanto de seu capital deve ser investido em cada ação e em cada fundo.

2.6 Solução do problema:

Definição das variáveis de decisão:

Como foi dito anteriormente, as variáveis de decisão escolhidas devem ser aquelas que respondem à questão do problema: quanto investir em cada ação e em cada fundo.

Tem-se, então:

QE = Quantia investida em ações da empresa de energia;

QV = Quantia investida em ações da empresa de varejo;

QP = Quantia investida em ações da empresa de petróleo e gás;

QM = Quantia investida no fundo multimercado;

QF = Quantia investida no fundo de renda fixa.

Definição da função objetivo:

O objetivo do problema foi declarado como sendo: **maximizar o retorno do mesmo**. Tem-se, portanto, que a função objetivo deve ser:

Maximizar retorno do investimento = retorno obtido com as ações da empresa de energia + retorno obtido com as ações da empresa de varejo + retorno obtido com as ações da empresa de petróleo e gás + retorno obtido com o fundo multimercado + retorno obtido com o fundo de renda fixa.

Ou seja:

Maximizar retorno) 0,4212QE + 0,5129QV + 0,4154QP + 0,6004QM + 0,0610QF

Definição das restrições:

As restrições estão claramente definidas no problema, ou seja:

- o total investido deve ser de R$ 2.000.000,00;

Aqui o investidor diz que a resposta do problema não deve contemplar um investimento superior a 2 milhões:

Investimento) QE + QV + QP + QM + QF <= 2.000.000

- A quantia investida na empresa de varejo e no fundo multimercado deve ser de no máximo R$750.000,00, devido ao alto risco desses investimentos;

Máximo alto risco) QV + QM <= 750.000

- Deve ser investido um mínimo de 60% do total em renda fixa e em ações com risco menor de 6;

Mínimo baixo risco) QP + QF >= 1.200.000

O modelo final será:

Maximizar retorno) 0,4212QE + 0,5129QV + 0,4154QP + 0,6004QM + 0,0610QF
s.a.

Investimento) QE+QV+QP+QM+QF<=2.000.000

Máximo alto risco) QV + QM <= 750.000

Mínimo baixo risco) QP + QF >= 1.200.000

QE, QV, QP, QM, QF >= 0

Você finaliza agora este capítulo. Ao estudá-lo, pôde entender o que é programação linear e como ela pode auxiliar o administrador na tomada de decisão. Além disso, pôde aprender como elaborar modelos simples de programação linear.

Atividades de autoavaliação

Para praticar os conhecimentos apropriados nesta unidade, realize as seguintes atividades propostas.

1. Suponha que uma empresa tenha intenção de produzir cinco tipos de calçados diferentes (A, B, C, D e E), que poderá vender, respectivamente, por US$ 10, 12, 15, 13 e 14. O quadro abaixo mostra as quantidades de couro, tempo de máquina e couraça imperflex necessárias para produzir um par de calçado, assim como os custos por unidade e as demandas máximas pelos diferentes tipos. Sabendo que a empresa dispõe todo mês de 390 m^2 de couro, 96 m^2 de couraça imperflex e 3200 min de tempo de máquina, construa um modelo que diga ao empresário quantos pares de cada tipo de calçado ele deverá produzir mensalmente para maximizar seu lucro.

Tipos de calçados	Demanda	Tempo de máquina (min)	Couro (m^2)	Couraça imperflex (m^2)	Custo (US$)
A	390	7,5	0,13	0,0320	5,53
B	33	15	0,14	0,0377	6,64
C	20	15	0,19	0,0489	8,30
D	46	15	0,17	0,0413	7,19
E	11	15	0,18	0,0443	7,74

2. A LCL Motores Ltda. (LACHTERMACHER, 2002), fábrica de motores especiais, recebeu recentemente R$ 90.000 em pedidos de seus três tipos de motores. Cada motor necessita de um determinado número de horas de trabalho no setor de montagem e no setor de acabamento, que está descrito abaixo. A LCL pode terceirizar parte de sua produção. A tabela abaixo resume estes dados.

Modelo	1	2	3	Disponibilidade
Demanda (unidades)	3000	2500	500	-
Montagem (h/unid)	1.5	2	0.5	9000 horas
Acabamento (h/unid)	2.5	1	5	10000 horas
Custo de produção ($/unid)	45	80	120	-
Custo de compra do terceirizado	65	92	160	-

A LCL Motores deseja determinar quantos motores devem ser produzidos em sua fábrica e quantos devem ser comprados da terceirizada para atender à demanda e obter o menor custo total possível.

3.Uma metalúrgica compra ferro velho de três fornecedores diferentes: A,B e C. Cada carga do fornecedor A contém 2,0 ton de ferro, 2,0 ton. de alumínio e 1,3 ton. de cobre. O custo da carga é de R$ 400,00. Cada carga do fornecedor B contém 1,3 ton de ferro, 2,4 ton. de alumínio e 1,9 ton. de cobre. O custo da carga é de R$ 580,00. Cada carga do fornecedor C contém 0,6 ton de ferro, 3,5 ton. de alumínio e 0,9 ton. de cobre. O custo da carga é de R$ 390,00. A metalurgia precisa adquirir, para a próxima semana, pelo menos 25 toneladas de cada um dos metais citados (ferro, alumínio e cobre). Quantas cargas devem ser adquiridas de cada fornecedor para minimizar o custo de aquisição dos metais?

4. Uma associação de pescadores situada perto de Florianópolis entrega sua pesca para as empresas de processamento de peixe utilizando diferentes tipos de caminhão. Tendo fechado recentemente um contrato para começar a fornecer 1000 toneladas de peixe por mês para empresas catarinenses e, a assiciação necessita criar um frota para atender esta demanda. A companhia tem $200.000 disponíveis, obtidos de uma linha de financiamento do BNDES, para criar esta frota consistindo de três tipos diferentes de caminhões. A capacidade, custo de operação e número máximo de viagens para cada tipo de caminhão são dados na tabela abaixo:

Tipo de Caminhão	Capacidade (ton)	Custo Compra($)	Custo por viagem ($)	Nº. máximo de viagens por mês
1	6	50.000	800	20
2	3	40.000	650	25
3	2	25.000	500	30

Sabe-se que o administrador da associação de pescadores tem em mente as seguintes regras:

a. não comprar mais do que 10 caminhões;
b. ao menos 3 caminhões do tipo 3 devem ser comprados (eles são necessários para rotas de viagens curtas e demanda baixa);

Formule um modelo para determinar a composição da frota que minimiza o custo mensal de operação enquanto satisfaz a demanda, ficando dentro do orçamento e satisfazendo os outros requerimentos da companhia.

5. Determinado produtor deseja saber qual seria a melhor alocação de suas terras, de tal forma que seu lucro seja máximo. Sabe-se que suas terras estão divididas em três lotes, sendo 500, 800 e 700 hectares suas áreas. Sabe-se também que as possíveis culturas a serem implantadas seriam tomate, feijão e arroz, que oferecem lucros unitários ($/ha) de 600, 450 e 300 respectivamente e que as terras não comportam mais do que 900 ha de tomate, 700 ha de feijão e 1000 ha de arroz. Deve também ser considerado que quaisquer das três culturas podem ser implantadas em quaisquer lotes e que pelo menos 60% de cada lote deve ser utilizado. Formule um modelo que indique quanto plantar de cada tipo de cultura em cada lote de modo a maximizar o lucro do produtor.

6. HG Corretora de Investimentos, situada em São Paulo, recebe um cliente que dispõe de R$ 3 milhões. Este cliente deseja montar uma carteira de ações que lhe forneça o maior retorno esperado no próximo ano. O corretor escalado para atender este cliente lhe apresenta uma lista de ações que, segundo ele, estão em ponto de compra. Sua previsão é de que as ações irão fornecer o retorno apresentado na tabela abaixo. Seus preços unitários são também apresentados nesta tabela.

Nome das empresas	Retorno anual esperado (%)	Custo unitário das ações (R$)
Petrobrás PN	9%	40
Embraer ON	11%	54
Gerdau PN	14%	68
Votorantin PN	28%	100
Unibanco PN	18%	70
Bradesco PN	10%	51
Itaú ON	22%	90

Para a realização deste investimento, o cliente impõe duas condições:

1ª) que pelo menos R$ 500.000 sejam alocados em ações de bancos e

2ª) que pelo menos R$ 300.000 sejam alocados na Petrobrás, por saber que a mesma é uma boa pagadora de dividendos. Formule o modelo de programação linear que responda ao cliente da corretora quanto alocar em cada ativo (ações) para maximizar o retorno total esperado ao mesmo tempo em que obedece as condições impostas.

7. (Adaptado de RAMALHETE, 2000) Uma agroindústria pretende determinar as quantidades de cada ingrediente, A e B, que devem ser misturadas para formar uma ração animal balanceada em termos de carboidratos, vitaminas e proteínas a um custo mínimo. Os dados relativos ao custo de cada ingrediente, as quantidades mínimas diárias de ingredientes nutritivos básicos a fornecer a cada animal, bem como as quantidades destes existentes em A e B (g/kg) constam no quadro abaixo:

Ingredientes nutritivos	Ingrediente A	Ingrediente B	Quantidade mínima requerida (gramas)
Carboidratos (g/kg)	20	50	200
Vitaminas (g/kg)	50	10	150
Proteínas (g/kg)	30	30	210
Custo ($/kg)	10	5	

Formule o modelo de programação linear.

8. (CORRAR, THEÓFILO, 2004, modificado) Na qualidade de assessor de investimentos da Fundabanc, uma fundação de empregados de determinado banco, você foi chamado para estudar a melhor forma de aplicar os recursos disponíveis. A necessidade de limitar os riscos da empresa conduz a três tipos de aplicações: ações preferenciais, ações de companhias de utilidade pública e títulos da dívida pública. Na composição da carteira devem ser levadas em conta as restrições impostas pela legislação e normas vigentes descritas abaixo. Dado que a empresa tem disponível R$ 100.000, formule um modelo que indique à Fundabanc quanto deve ser aplicado em cada investimento de maneira a maximizar o retorno esperado, ao mesmo tempo em que obedece as restrições impostas abaixo. As taxas de retorno esperadas, em %, estão descritas na tabela abaixo.

Investimento	Símbolo	Taxa de retorno esperada (%)
Ações da Comgas	COMG	4,3
Ações da Cesp	CESP	3,7
Ações da Eletropaulo	ELP	1,8
Ações da Bematech	BEM	2,8
Títulos públicos federais	TPF	1,5
Títulos públicos municipais	TPM	2,4

Imposições:

- os títulos públicos (federais e municipais) não podem representar, juntos, menos do que R$ 30.000 dos investimentos;
- as ações preferenciais da Bematech estão limitadas a R$ 25.000 dos investimentos;
- as ações de companhias de utilidade pública devem contabilizar pelo menos R$ 30.000 dos investimentos.

9. (LACHTERMACHER, 2002) A LCL Investimentos S.A. gerencia recursos de terceiros através da escolha de carteiras de investimento para diversos clientes, com base em títulos diversos. Um de seus clientes exige que:

- não mais do que 25% do total aplicado deve ser investido em um único investimento;
- um valor superior a 50% do total aplicado deve ser investido em títulos de maturidade maiores que dez anos;
- o total aplicado em títulos de alto risco deve ser, no máximo, de 50% do total investido.

A tabela abaixo mostra os dados dos títulos selecionados. Determine qual percentual do total deve ser aplicado em cada tipo de título de maneira a maximizar o retorno anual.

	Retorno anual	Anos para vencimento	Risco
Título 1	8,7%	15	1 – Muito baixo
Título 2	9,5%	12	3 – Regular
Título 3	12%	8	4 – Alto
Título 4	9%	7	2 – Baixo
Título 5	13%	11	4 – Alto
Título 6	20%	5	5 – Muito alto

Capítulo 4

Programação linear – problemas de transporte e designação

Adaptado de Ana Lúcia Miranda Lopes

Habilidades

Ao final deste estudo, o estudante será capaz de montar o grafo que representa a rede de transporte e identificar as variáveis de decisão. Identificará a função-objetivo e as restrições para um problema de transportes e reconhecerá a rede de transporte que vai oferecer o menor custo.

Seções de estudo

Seção 1: Identificando a rede de transporte por meio de um grafo

Seção 2: Identificando as variáveis de decisão e construindo o modelo matemático

Seção 1
Identificando a rede de transporte por meio de um grafo

O primeiro passo para efetuar a modelagem de um problema de transporte é passar as informações sobre as origens e destinos para um grafo. **O grafo é uma figura que representa, por meio de nós e arcos, as origens e destinos**.

Vamos ver por meio de um exemplo como esse processo acontece.

Exemplo 4.1

Uma empresa possui três fábricas que enviam os produtos para dois depósitos localizados em cidades próximas. Dados os custos de transporte detalhados na tabela abaixo, monte o modelo matemático para definição do menor custo de transporte.

Tabela 4.1 – Custos de Transporte (R$/unidade)

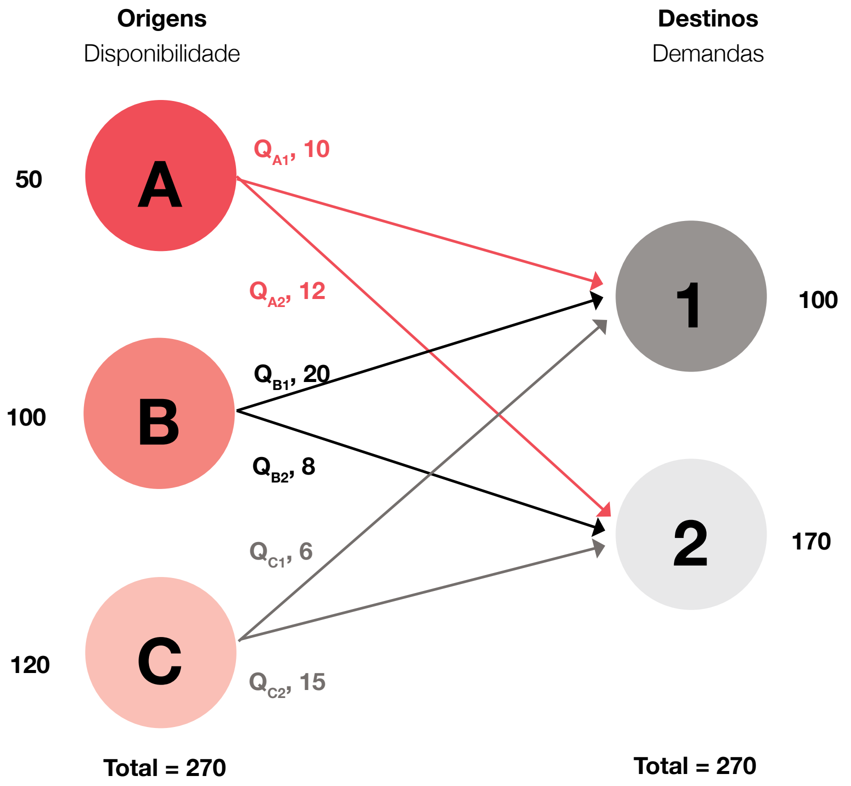
	DEPÓSITO 1	DEPÓSITO 2	CAPACIDADE DE PRODUÇÃO DAS FÁBRICAS
Fábrica A	10	12	50
Fábrica B	20	8	100
Fábrica A C	6	15	120
Demandas	100	170	

Fonte: Adaptado de Lopes e Galvão (2007).

Como já falamos anteriormente, o primeiro passo é a montagem do grafo que representa a ligação entre as unidades de produção e os depósitos.

Na figura que segue, além das ligações já aproveitamos para incluir as demais informações de custos de transporte e capacidades de produção e armazenamento.

Figura 4.1 Representação gráfica do Exemplo 4.1



Fonte: Adaptado de Lopes e Galvão (2007).

Como pode ser observado na figura, o arco representa os possíveis caminhos de entrega de produto. Neles podem ser registradas as variáveis de decisão escolhidas, assim como os custos de transporte. Como exemplo, temos os arcos que partem da fábrica A (nó A). Do nó A saem arcos representando a possibilidade de entrega de produto para os depósitos 1 e 2 a um custo de R$10,00 e R$12,00 por unidade. As variáveis que irão representar essas entregas estão representadas por Q_{A1} e Q_{A2}.

Do lado esquerdo dos nós podemos fazer constar as capacidades de cada origem (fábrica) e do lado direito registramos as demandas de cada destino (depósito).

Na seção que segue você irá aprender a identificar as variáveis de decisão e a construir o modelo matemático que representa o problema acima.

Seção 2

Identificando as variáveis de decisão e construindo o modelo matemático

Dado o grafo acima, pode-se iniciar a construção do modelo matemático que melhor representa o problema.

No modelo mais simples de transportes, como o descrito acima, deve-se modelar a situação, de maneira a obter quanto deverá ser transportado de produto ou insumo de cada região produtora para cada região consumidora, resultando, portanto, nas variáveis de decisão a seguir.

2.1 Definindo as variáveis de decisão:

Q_{A1} = número de unidades a transportar da fábrica A para o depósito 1;

Q_{A2} = número de unidades a transportar da fábrica A para o depósito 2;

Q_{B1} = número de unidades a transportar da fábrica B para o depósito 1;

Q_{B2} = número de unidades a transportar da fábrica B para o depósito 2;

Q_{C1} = número de unidades a transportar da fábrica C para o depósito 1;

Q_{C2} = número de unidades a transportar da fábrica C para o depósito 2.

Ou, de maneira mais geral:

Q_{ij} = número de unidades a transportar da fábrica i(i=A,B,C) para o depósito j (j=1,2).

As letras que irão representar a variável de decisão são de livre escolha de quem estará construindo o modelo. Q_{A2} , por exemplo, representa a quantidade transportada da fábrica A para o depósito 2, porém ,você poderia ter escolhido $\mathbf{X_{A2}}$, $\mathbf{Y_{A2}}$, ou outra qualquer.

O próximo passo será criar a função objetivo, que representará matematicamente o custo total de transporte da empresa. Isso envolverá a obtenção do custo unitário do transporte do produto ou insumo de cada unidade produtora para cada depósito.

Essa função objetivo será a soma dos custos de transportar cada unidade, de cada fábrica, até cada depósito.

2.2 Modelando a função-objetivo

Minimizar custo total de transporte = **custo de transportar da fábrica A para os depósitos 1,2 + custo de transportar da fábrica B para os depósitos 1,2 + custo de transportar da fábrica C para depósitos 1,2.**

Ou seja:

$$\textbf{Mín. Custo} = 10Q_{A1} + 12Q_{A2} + 20Q_{B1} + 8Q_{B2} + 6Q_{C1} + 15Q_{C2}$$

Com a função objetivo pronta, o próximo passo é modelar matematicamente as restrições do problema de transportes.

? Mas, quais as restrições que essa empresa enfrenta no seu dia a dia?

2.3 Duas coisas devem estar claras neste tipo de modelo:

1º) Não pode sair mais produto ou mercadoria de cada unidade produtora (origem) do que a mesma tem disponível, ou pode produzir (restrições de produção): SAÍDAS <= ou = DISPONIBILIDADE NA ORIGEM;

2º) Não se deve receber menos no ponto de destino do que foi solicitado (restrições de demanda): ENTRADAS >= ou = DEMANDAS NO PONTO DE DESTINO.

2.4 Modelando as restrições

2.4.1 Restrições de produção

CProdA) $Q_{A1} + Q_{A2} = 50$

CProdB) $Q_{B1} + Q_{B2} = 100$

CProdC) $Q_{C1} + Q_{C2} = 120$

A restrição CprodA) acima, por exemplo, pode ser entendida como: a soma das quantidades, que são transportadas da fábrica A até o depósito 1, com as quantidades que são transportadas da fábrica A até o depósito 2, deve ser igual a 50. O mesmo ocorre com as demais restrições.

2.4.2 Restrições de demanda

$$\text{DemD1) } Q_{A1} + Q_{B1} + Q_{C1} = 100$$

$$\text{DemD2) } Q_{A2} + Q_{B2} + Q_{C2} = 170$$

A restrição DemD1) impõe que tudo o que o depósito 1 recebe de A, B e C deve ser igual à demanda solicitada, 100 unidades. O mesmo acontece com a restrição DemD2), que soma tudo o que o depósito 2 recebe e iguala a 170 unidades.

2.4.3 Restrições lógicas

$$Q_{A1}, Q_{A2}, Q_{B1}, Q_{B2}, Q_{C1}, Q_{C2} >= 0$$

Essas restrições impõem que todas as variáveis assumam somente valores maiores ou iguais a zero.

2.4.4 Modelo final

Mín. Custo) $\mathbf{10Q_{A1} + 12Q_{A2} + 20Q_{B1} + 8Q_{B2} + 6Q_{C1} + 15Q_{C2}}$ Função Objetivo

s.a.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{CProdA) } Q_{A1} + Q_{A2} = 50 \\
\text{CProdB) } Q_{B1} + Q_{B2} = 100 \\
\text{CProdC) } Q_{C1} + Q_{C2} = 120 \\
\text{DemD1) } Q_{A1} + Q_{B1} + Q_{C1} = 100 \\
\text{DemD2) } Q_{A2} + Q_{B2} + Q_{C2} = 170
\end{array}\right\} \text{Restrições}$$

$$Q_{A1}, Q_{A2}, Q_{B1}, Q_{B2}, Q_{C1}, Q_{C2} >= 0 \qquad \text{Restrições lógicas}$$

Importante: As igualdades definidas nas restrições de produção e nas restrições de demanda somente foram possíveis porque a soma do que se tinha disponível nas fábricas (270 unidades) é exatamente igual à soma das demandas dos depósitos (270 unidades). Em casos em que não se tem a produção = demanda ou capacidade do depósito não se pode trabalhar com igualdades e sim com < = ou > =.

Com base no exemplo acima, é possível construir um modelo genérico que pode ser aplicado a qualquer problema de transporte de mercadorias, de seus pontos de origem até seus pontos de destino. Este modelo será:

$$\text{Mín.} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = si \quad \text{para } i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad \text{para } j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} >= 0$$

onde:

c_{ij} = custo de distribuição ou transporte de produto entre a origem i e o destino j;

x_{ij} = total a ser distribuído de i para j;

si = total produzido ou disponível;

d_j = total a ser armazenado ou demanda de cada local.

O símbolo sigma (∑t) significa somatório, assim, no Exemplo 4.1 temos:

$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} c_{ij} \times x_{ij}$ => lê-se somatório de i = 1 até 3, j = 1 até 2 de $c_{ij} \times x_{ij}$ e é igual a:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} c_{ij} \times x_{ij} = c_{11}.x_{11} + c_{12}.x_{12} + c_{21}.X_{21} + c_{22}.x_{22} + c_{31}.x_{31} + c_{32}.X_{32}$$

Onde:

c_{ij} são os custos para o transporte do produto da fábrica i para o depósito j

x_{ij} são os totais a serem transportados de i para j

Verifica-se ainda que neste exemplo i = 1, 2 e 3, que são as fábricas A, B e C, respectivamente; j = 1 e 2 são os depósitos.

O somatório funciona da seguinte forma, utiliza-se o primeiro valor de i e aplica-se a todos os valores de j, depois se atribui o segundo valor de i e novamente e aplica-se a todos de j, assim até utilizar todas as combinações possíveis.

Após a modelagem do problema, a solução será obtida por meio da utilização da ferramenta *Solver* do Excel, ou de qualquer outro *software* de resolução de modelos de programação matemática, LINDO, por exemplo.

Para que você compreenda bem a construção de um modelo de transportes, vamos trabalhar em mais **dois exemplos.**

Exemplo 1

Verifique a tabela “ Transporte” na midiateca

Exemplo 2

Um microempresário brasileiro produz artigos esportivos e possui em estoque 1500 unidades de um determinado produto em uma de suas fábricas (fábrica 1) e 1000 unidades em uma segunda fábrica (fábrica 2). O empresário recebeu pedidos desse produto proveniente de três diferentes varejistas, nas quantidades de 1000, 800 e 600 unidades, respectivamente. Os custos unitários de expedição (em reais por unidade) desde as fábricas até os varejistas são os seguintes:

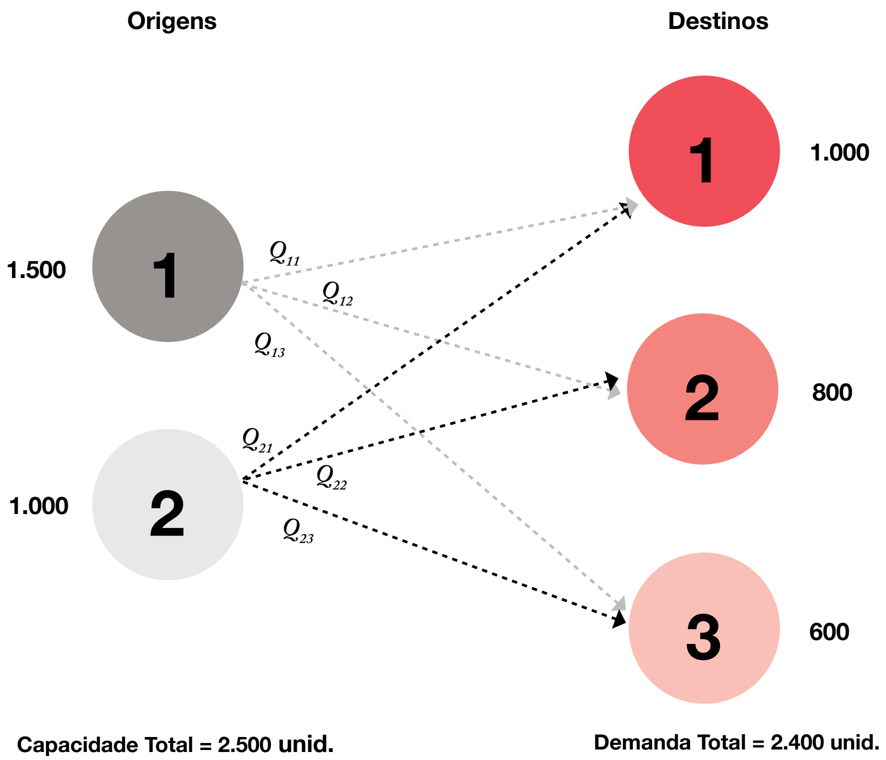
Tabela 4.2: (R$ / unidade)

Varejista / Fabrica	Varejista 1	Varejista 2	Varejista 3
Fabrica 1	4	3	1
Fabrica 2	3	3	2

Fonte: Adaptado de Lopes e Galvão (2007).

Determine o programa de expedição que atenda todas as demandas a partir do estoque disponível, a um custo mínimo.

Figura 4.2 – Representação gráfica do Exemplo 4.2



Fonte: Adaptado de Lopes e Galvão (2007).

2.5 Identificando as variáveis de decisão:

Lembre que no capítulo anterior dissemos a você que uma variável de decisão é aquilo que se quer como resposta do modelo, aquilo que se quer saber.

Vamos então pensar: o que o microempresário deseja como resposta deste modelo? O programa de expedição.

Sabendo-se que um programa de expedição significa quantas unidades devem ser expedidas de cada origem, para cada destino, tem-se:

Variáveis de decisão:

Q_{11} = quantidade expedida da fábrica 1 para o varejista 1

Q_{12} = quantidade expedida da fábrica 1 para o varejista 2

Q_{13} = quantidade expedida da fábrica 1 para o varejista 3

Q_{21} = quantidade expedida da fábrica 2 para o varejista 1

Q_{22} = quantidade expedida da fábrica 2 para o varejista 2

Q_{23} = quantidade expedida da fábrica 2 para o varejista 3

Nota: pode-se substituir todo o conjunto acima de definições pelo descrito abaixo:

Q_{ij} = quantidade expedida da fábrica i (i=1,2) para o varejista j(j=1,2,3)

2.6 Modelando a função objetivo

O objetivo declarado pelo microempresário é o de obter um plano de expedição que forneça à sua empresa o menor custo possível –-> custo mínimo

Como se sabe que o custo total de expedição é igual à soma dos custos de encaminhar o produto das origens até os destinos, tem-se a seguinte função objetivo:

Figura 4.3: Função objetivo

Fonte: Fogaça (2014)

Modelando as restrições:

Você lembra do exemplo anterior que um modelo típico de transportes tem dois conjuntos de restrições: capacidade das origens e demanda dos destinos.

Nas restrições de capacidade das origens, devem-se construir equações matemáticas as quais imponham que todo o material expedido das fábricas não exceda a capacidade delas.

Exemplo: Expedição da fábrica 1 para os varejistas 1, 2 e 3 <= 1500 unidades

Por outro lado, nas restrições de demanda, nos destinos, deve-se impor que os valores demandados sejam expedidos para os destinos.

Exemplo: expedição das fábricas 1 e 2 para o varejista 1 = 1000 unidades

Então, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fábrica 1) } Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} <= 1500 \\ \text{Fábrica 2) } Q_{21} + Q_{22} + Q_{23} <= 1000\end{array}\right\} \boxed{\text{Capacidade das origens}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Varejista 1) } Q_{11} + Q_{21} = 1000 \\ \text{Varejista 2) } Q_{12} + Q_{22} = 800 \\ \text{Varejista 1) } Q_{13} + Q_{23} = 600\end{array}\right\} \boxed{\text{Demanda nos destinos}}$$

$$Q_{11}\ Q_{12}\ Q_{13}\ Q_{21}\ Q_{22}\ Q_{23} >= 0$$

Modelo Final:

Min custo) $4Q_{11} + 3Q_{12} + 1Q_{13} + 3Q_{21} + 3Q_{22} + 2Q_{23}$

s.a.

Fábrica 1) $Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} <= 1500$

Fábrica 2) $Q_{21} + Q_{22} + Q_{23} <= 1000$

Varejista 1) $Q_{11} + Q_{21} = 1000$

Varejista 2) $Q_{12} + Q_{22} = 800$

Varejista 1) $Q_{13} + Q_{23} = 600$

$$Q_{11}\ Q_{12}\ Q_{13}\ Q_{21}\ Q_{22}\ Q_{23} >= 0$$

2.7 Problemas de designação – um caso especial do problema de transportes

Um caso especial do problema de transporte é o de designação ou atribuição. Nesse tipo de problema, pode-se identificar a melhor maneira de se distribuir um recurso à determinadas funções, tarefas ou localização, por exemplo. Um objetivo bastante comum é o de obter uma distribuição que forneça à empresa um custo mínimo com a mão de obra.

Outros problemas que podem ser resolvidos, segundo Passos (2008) são:

- distribuir trabalhadores para diferentes atividades;
- localização de máquinas e equipamentos em empresas;
- distribuição de leitos hospitalares;
- destinos em empresas de transporte;
- distribuição de pessoal de vendas etc.

Sendo esses problemas muito similares aos de transporte, pode-se pensar ainda em origens e destinos. Na construção do modelo de designação, deve-se considerar que:

- uma origem (trabalhador, por exemplo) deve ser designada a somente um destino (tarefa, por exemplo);

Exemplo 3:

Uma empresa que trabalha com vendas de produtos de valor bastante elevado tem, no momento, o problema de designar o vendedor mais adequado para visitar 4 clientes. Para isso, dispõe de 4 vendedores, dadas as diferentes localidades que se encontram os vendedores (especialistas em vendas deste tipo de produto) e a distância de cada um até os possíveis compradores. A tabela que segue mostra os custos com transporte, estada e salários dos vendedores para a visita de cada cliente. O empresário deseja determinar qual vendedor irá visitar determinado cliente e impõe-se que:

- cada vendedor deverá visitar somente 1 cliente;
- cada cliente deverá receber a visita de somente um vendedor;
- o modelo deve buscar o menor custo.

Tabela 4.3 - Custos da visita do vendedor i ao cliente j ($)

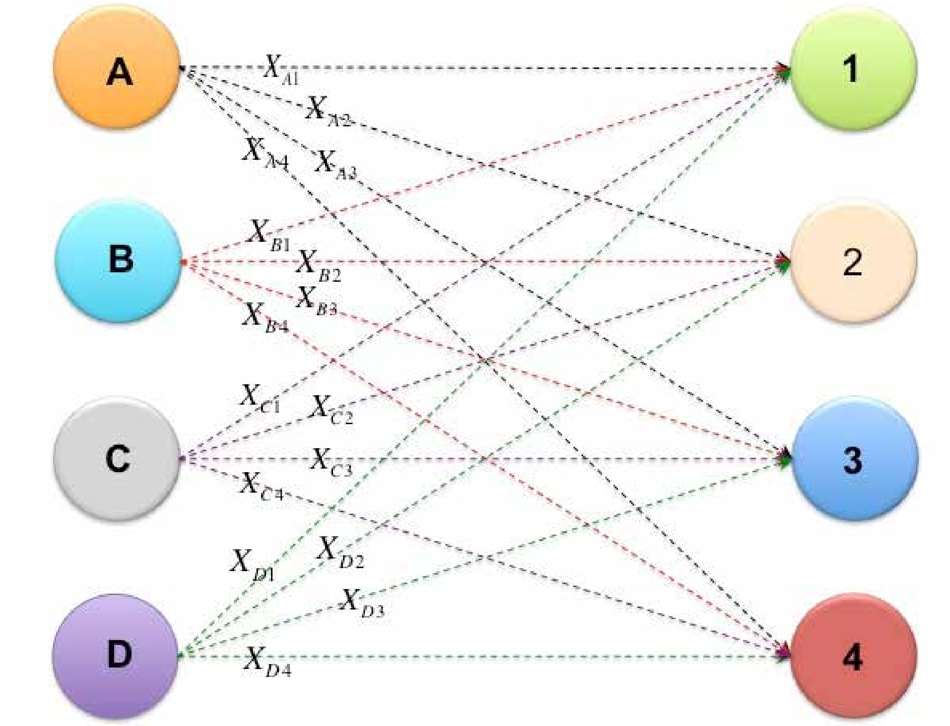
VENDEDORES/CLIENTES	1	2	3	4
A	$9000	$9000	$9000	$3000
B	$9000	$3000	$7000	$7000
C	$7000	$3000	$7000	$3000
D	$7000	$9000	$9000	$9000

Fonte: Adaptado de Lopes e Galvão (2007).

Solução:

Esse problema pode ser representado graficamente, da seguinte forma:

Figura 4.3 – Representação gráfica do Exemplo 4.3



Fonte: Adaptado de Lopes e Galvão (2007).

Definindo as variáveis de decisão:

Neste problema tem-se que determinar qual vendedor irá visitar os clientes 1, 2. 3 e 4. Podemos pensar que a resposta será:

- o vendedor A irá visitar o cliente 1 – sim ou não;
- o vendedor A irá visitar o cliente 2 – sim ou não; e assim por diante.

Quando temos variáveis que devem assumir somente dois valores (sim e não) pode-se trabalhar com os valores de **zero** para a variável ´**não**´ e **um** para a variável ´**sim**´. Tem-se, então, um modelo de programação linear binária, cujas variáveis, neste exemplo, são definidas da seguinte forma:

$$X_{ij} \left| \begin{array}{l} = 0 \rightarrow \text{o vendedor i(A,B.C.D) } \textbf{não} \text{ visitará o cliente j (1,2,3,4)} \\ = 1 \rightarrow \textbf{sim} \text{ , o vendedor i(A,B.C.D) visitará o cliente j (1,2,3,4)} \end{array} \right.$$

Construindo a função objetivo:

Min custo) $9000X_{A1} + 9000X_{A2} + 9000X_{A3} + 3000X_{A4} + 9000X_{B1} + 3000X_{B2} + 7000X_{B3} + 7000X_{B4} + 7000X_{C1} + 3000X_{C2} + 7000X_{C3} + 3000X_{C4} + 7000X_{D1} + 9000X_{D2} + 9000X_{D3} + 9000X_{D4}$

A equação acima multiplica as variáveis que representam a designação de cada vendedor a cada cliente, ao custo da visita. Como algumas variáveis assumirão o valor de 1 (um) e algumas assumirão 0 (zero), alguns custos que constam na função objetivo irão desaparecer.

Definindo as restrições:

Como restrições desse modelo temos:

- cada vendedor deverá visitar somente 1 cliente;
- cada cliente deverá receber a visita de somente um vendedor;

Lembrando que em programação binária a variável assume somente os valores zero e um, pode-se construir a restrição do vendedor A, por exemplo, da seguinte forma:

Vendedor A) $X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} = 1$

Essa restrição impõe que o vendedor A seja designado a um e somente um cliente, pois a soma dos valores das variáveis deve ser igual a 1. Por exemplo: se o vendedor A for designado ao cliente 1, todas as outras variáveis deverão assumir o valor de zero para que a soma seja um.

O mesmo irá acontecer quando estivermos olhando o cliente. A restrição que diz que cada cliente será visitado por somente um vendedor pode ser assim escrita:

Cliente 3) $X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} + X_{D3} = 1$

Essa equação cumpre exatamente o que se quer, ou seja, cada cliente deverá receber a visita de somente um vendedor. Por exemplo, se o vendedor B for designado ao cliente 3, todas as outras variáveis dessa equação deverão assumir o valor de zero para que a soma seja igual a 1.

Modelo Final:

Min custo) $9000X_{A1} + 9000X_{A2} + 9000X_{A3} + 3000X_{A4} + 9000X_{B1} + 3000X_{B2} + 7000X_{B3} + 7000X_{B4} + 7000X_{C1} + 3000X_{C2} + 7000X_{C3} + 3000X_{C4} + 7000X_{D1} + 9000X_{D2} + 9000X_{D3} + 9000X_{D4}$

s.a.

Vendedor A) $X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} = 1$

Vendedor B) $X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} = 1$

Vendedor C) $X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4} = 1$

Vendedor D) $X_{D1} + X_{D2} + X_{D3} + X_{D4} =1$

Cliente 1) $X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} + X_{D1} = 1$

Cliente 2) $X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} + X_{D2} = 1$

Cliente 3) $X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} + X_{D3} = 1$

Cliente 4) $X_{A4} + X_{B4} + X_{C3} + X_{D4} = 1$

$X_{ij} = 0$ ou 1, para i = 1,2,3,4 e j = 1,2,3,4

Ao estudar este capítulo, você aprendeu a construir um modelo matemático que representa um problema típico de programação linear: transportes. Para isso, passou pela aprendizagem da construção do grafo que representa este problema, e com auxílio desse recurso pôde identificar variáveis de decisão, restrições e função objetivo.

Atividades de autoavaliação

Para praticar os conhecimentos apropriados nesta unidade, realize as seguintes atividades propostas.

1. A empresa Natural tem três engarrafadoras de água mineral que abastecem diretamente quatro supermercados. No mês passado entregou 5.400 caixas de água para estes supermercados. O transporte é terceirizado e o seu custo no mês passado foi de R$ 24.600,00. Isto representa quase 55% do faturamento da Natural. Devido à participação muito elevada do custo com transporte no custo total da empresa, sua equipe de consultores foi chamada. A Natural quer saber se existe uma maneira de gastar menos com transporte, aumentando, então, o lucro da empresa. Observe que a hipótese de baixar os preços cobrados pela terceirizada não é uma opção. O administrador não teve êxito e concluiu que esta empresa transportadora é ainda a de menor custo para a Natural. Sua equipe, então, considera que a única maneira de baixar o custo total com transporte é repensando o plano de transporte observando, é claro, as demandas de cada supermercado e a capacidades das unidades engarrafadoras (Tabela 4.4). Os dados relativos aos custos de transporte são os descritos a seguir. Com base nestes dados formule um novo plano de transporte para o próximo mês que leve ao custo mínimo possível.

Tabela 4.4 – Custos de transporte (R$/caixa)

Engarrafadora/Supermercado	S1	S2	S3	S4	Capacidade caixa/mês
EA	5	3	2	6	1700
EB	4	7	8	10	2000
EC	6	5	3	8	1700
Demanda mês passado (caixas)	1700	1000	1500	1200	-

2. A empresa SOGRÃOS compra grãos (arroz, feijão e, etc.) em três regiões produtoras localizadas no interior de Santa Catarina e os deposita em três centros de distribuição (CD1, CD2, CD3) para posterior comercialização. Esta compra e entrega, aos centros de distribuição, tem um custo elevado para a Só Grãos e é realizada por uma empresa terceirizada. A tabela abaixo mostra os custos de transporte praticados por esta terceirizada (R$/ton transportada). A empresa precisa definir à terceirizada centro de distribuiçã, a cada semana quantas toneladas de grãos esta deve transportar de cada região produtora para cada CD, cujas capacidades de armazenagem são CD1 = 150 ton, CD2 = 380 ton e CD3 = 420 ton de grãos. É bastante claro que esta definição deve ser a que proporciona à empresa o menor custo total de transporte. Formule o modelo sabendo que as regiões produtoras A, B e C entregam à empresa no máximo 310, 500 e 200 toneladas de grãos a cada semana, respectivamente.

Tabela 4.5 - Custo de transporte em R$/toneladas transportadas

Regiões de produção/ CDs	CD1	CD2	CD3
A	7	12	14
B	8	11	13
C	6	10	9

3. A Transportadora Continental é responsável pela distribuição de produtos de uma indústria de refrigerantes que possui duas fábricas e três depósitos. A administração da distribuidora está empenhada em reduzir ao mínimo possível os custos de transporte dos produtos das fábricas para os depósitos. Visando à modelagem deste problema como um problema de programação linear, o controller da fábrica reuniu os dados constantes nas tabelas abaixo e que correspondem aos custos de transporte de cada fábrica até cada depósito. Formule o modelo que indique à administração da distribuidora quanto transportar de cada fábrica para cada depósito de maneira a minimizar o custo de transporte.

Quadro 4.6 - Dados de custos e capacidades

Fábricas/ Depósitos	1	2	3	Capacidade das fábricas (caixas)
1	\$4	\$5	\$3	1500
2	\$6	\$7	\$4	3.000
Demanda dos Depósitos (caixas)	2000	1500	1000	

4. Um intermediário abastece três feirantes que operam em cidades diferentes (A, B e C) com ovos que adquire em quatro granjeiros localizados em cidades diferentes (I, II, III e IV). Os preços pagos pelo intermediário para os granjeiros não têm diferença entre si, do mesmo modo quanto aos preços que os feirantes lhe pagam. O intermediário só consegue algum lucro fazendo com que o seu custo de transporte seja o menor possível. A tabela abaixo dá o custo de transporte entre os granjeiros e os feirantes, em R$/dúzia de ovos. A tabela também mostra as quantidades de ovos que cada granjeiro pode fornecer na próxima semana e as encomendas de ovos dos feirantes.

Tabela 4.7 – Custo de transporte (em R$/dúzias)

Granja \ Feirante	A	B	C	Oferta (dz)
I	0,35	0,27	0,33	1700
II	0,37	0,25	0,38	1100
III	0,41	0,32	0,38	2000
IV	0,36	0,22	0,39	2000
Encomendas (dz)	1250	1550	2300	****

Formule o problema de atender as encomendas a partir das ofertas de modo a minimizar o custo. Não esqueça de explicar o significado das suas variáveis.

5. Uma empresa que trabalha com vendas de produtos de valor bastante elevado tem, no momento, o problema de designar o vendedor mais adequado para tentar realizar uma venda para 4 clientes. Para isto dispõe de 4 vendedores. Dado um estudo do perfil de cada cliente e de cada vendedor tem-se a tabela abaixo que mostra as probabilidades de sucesso na venda de cada vendedor para cada cliente. Como Chefe do Setor de Vendas encontre a designação mais adequada da sua força de vendedores para maximizar a soma total das probabilidades de sucesso nas vendas (cada vendedor deverá visitar somente 1 cliente e cada cliente deverá receber a visita de somente um vendedor).

Tabela 4.8 - Probabilidades de Sucesso na Venda

Vendedores/Clientes	**1**	**2**	**3**	**4**
A	90	90	90	30
B	90	30	70	70
C	70	30	70	30
D	70	90	90	90

Capítulo 5

Programação linear, solução gráfica e algébrica

Adaptado de Ana Lúcia Miranda Lopes e Ana Lúcia Meira da Veiga Galvão

Habilidades

Ao final do capítulo, o estudante será capaz de resolver pequenos modelos de programação linear, utilizando a abordagem gráfica. Identificará a participação de cada restrição na busca de uma solução para um modelo de programação linear, analisando sua resposta.

Seções de estudo

Seção 1: Introdução

Seção 2: Resolvendo um modelo linear pelo método gráfico

Seção 3: Programas lineares inviáveis

Seção 4: Programas lineares ilimitados

Seção 1
Introdução

Neste capítulo, você aprenderá a resolver graficamente modelos pequenos de programação linear. Falamos de modelos pequenos, porque somente modelos de duas variáveis podem ser resolvidos graficamente. Para a resolução de modelos maiores você deve utilizar um *software*. Nas unidades anteriores, falamos que estes modelos podem ser resolvidos por meio de uma planilha eletrônica ou por softwares específicos como o LINDO, lembra?

Aqui você aprenderá, passo a passo, como se constrói um gráfico que representa uma restrição do problema e como encontrar a resposta do modelo analisado algebricamente. Salientamos que os pontos que representam as possíveis soluções do problema serão encontrados graficamente, enquanto que a solução propriamente dita será obtida algebricamente, por facilidade de cálculo.

Nos capítulos anteriores foi abordado o método de construção de um modelo linear. Vários modelos foram construídos e podem ser resolvidos com a utilização do software Excel (Anexo 3).

Neste capítulo, entretanto, iremos abordar a resolução de modelos de programação linear pelo método gráfico. Salienta-se que, pelo método gráfico, somente modelos lineares de duas variáveis podem ser representados.

? Mas por que devemos aprender o método gráfico se existem *softwares* que chegam à solução do problema com eficiência?

Bem, o método gráfico é importante para melhorar o entendimento do modelo linear. Por meio dele pode-se enxergar o que está acontecendo quando uma restrição está sendo adicionada ao modelo e como se chega à definição dos valores das variáveis.

Vamos lá?

Iniciando por meio de um exemplo tem-se:

Exemplo 5.1

A empresa SEMPRE PERFUMADA (SP) é uma microempresa do ramo de perfumaria com sede em Palhoça/SC. Trabalha na mistura de componentes importados para produção de vários tipos de perfumes.

Dois perfumes masculinos são os carros chefe da empresa. Um é bastante suave e o outro mais forte e duradouro. A produção dos perfumes se dá em dois setores: o de mistura e o de embalagem.

No setor de mistura, cinco funcionários trabalham em tempo integral (40h/semana) e dois em tempo parcial (15h/semana), misturando os componentes importados de acordo com as dosagens pré-determinadas.

No setor de embalagens, seis funcionários de tempo integral (40h/semana) e um funcionário parcialmente licenciado (10 h/semana) trabalham na colocação dos perfumes já prontos em seus respectivos frascos e nas respectivas caixas que serão transportadas para o depósito, para posterior entrega nos pontos de varejo.

O dono da empresa pensa que pode trabalhar com mais eficiência e, com isso, alcançar um lucro semanal maior se alterar as quantidades produzidas de seus dois produtos. Para resolver este problema levantou os dados constantes na tabela abaixo, que estabelecem o número de horas que cada litro de produto necessita nos setores de mistura e de embalagem.

Tabela 5.1 - Requerimentos (horas/litro) nos respectivos setores de produção

	PERFUME 1	PERFUME 2
Setor de mistura	2	1
Setor de embalagens	1	2

Fonte: Lopes e Galvão (2010).

A empresa tem trabalhado com estoques altos de matéria-prima sendo, portanto, o único recurso limitante à mão de obra disponível. Porém, sabe que não deve produzir mais do que 120 litros do perfume 2, pois sendo esse um perfume mais forte, a procura é baixa. A margem de lucro calculada para o perfume 1 é de R$ 3,00 por litro e do perfume 2 é de R$ 5,00 por litro. Como administrador da empresa, você necessita determinar quanto de cada tipo de perfume deve ser produzido por semana para maximizar o lucro da SP. Utilizando o processo de formulação desenvolvido no capítulo anterior tem-se:

Passo 1: Definição das variáveis de decisão

X_1 = número de litros do perfume 1 a produzir por semana

X_2 = número de litros do perfume 2 a produzir por semana

Passo 2: Identificação dos dados do problema

Tabela 5.2 - Dados do problema

VARIÁVEIS	PERFUME 1	PERFUME 2	UNIDADE	PERFUME 1	PERFUME 2	DISPONÍVEL
No de litros de perfume	X_1	X_2	litros	-	-	
Consumo de M.O. no setor de mistura	-	-	horas	2	1	5x40 + 2x15) <= 230 horas
Consumo de M.O. no setor de embalagem	-	-	horas	1	2	(6x40 + 1x10) <= 250 horas
Lucro unitário	-	-	$	3	5	-
Solicitado	> = 0	>= 0 <= 120	-	-	-	-
Lucro total	LT		$			Maximizar

Fonte: Lopes e Galvão (2010).

Passo 3: Identificação e modelagem da função objetivo

Max LT) $3_{X1} + 5_{X2}$

Passo 4: Identificação e modelagem das restrições

MOMist) $2x_1 + x_2 < = 230$

MOEmb) $x_1 + 2x_2 < = 250$

Demx$_2$) $x_2 < = 120$

Modelo final:

Max LT) 3x1 + 5x2

s.a.

R1) $2x_1 + x_2 \quad < = 230$

R2) $x_1 + 2x_2 \quad < = 250$

R3) $x_2 \quad < = 120$

R4) $x_1 \quad > = 0$

R5) $x_2 \quad > = 0$

O modelo acima pode ser assim descrito: encontre as quantidades (litros) que devem ser produzidas dos perfumes 1 e 2, de maneira a maximizar o lucro da empresa, porém, essas quantidades devem obedecer às restrições impostas. São as restrições:

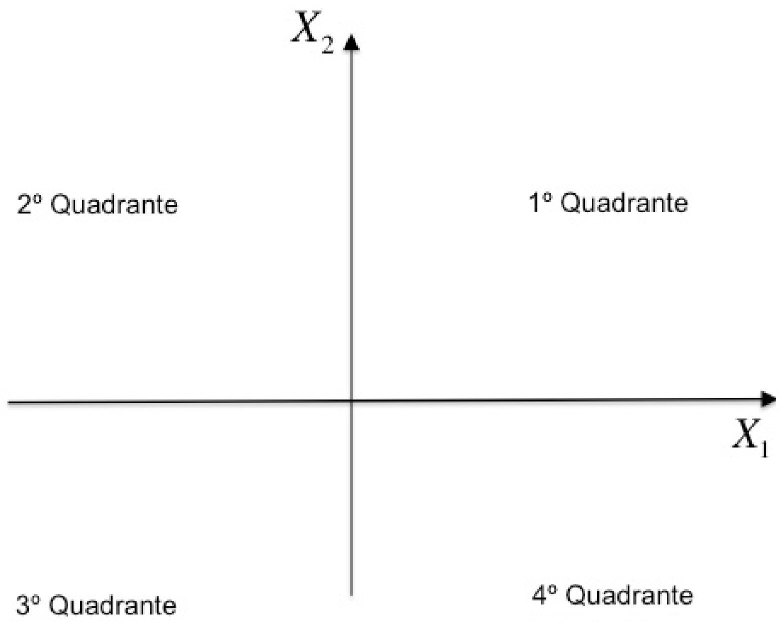
- Primeira: a mão de obra disponível no setor de mistura é de 230 horas e o resultado de 2x1 + x2 não deve ultrapassar este limite.
- Segunda: a mão de obra disponível no setor de embalagem é de 250 horas e o resultado de x1 + 2x2 não pode ultrapassar este limite.
- Terceira: a empresa não deseja produzir mais do que 120 litros do perfume 2, por não haver demanda para uma produção maior.

Seção 2
Resolvendo um modelo linear pelo método gráfico

A resolução de um modelo linear pelo método gráfico inicia-se com o traçado dos dois eixos representativos de um gráfico bi-dimensional. (Plano Cartesiano)

Para o Exemplo 5.1 anterior, esses eixos estarão representando as quantidade (em litros) dos perfumes 1 e 2 (x_1 e x_2).

Figura 5.1 - Representação gráfica de um plano cartesiano



Fonte: adaptado de Lopes e Galvão

2.1 Construindo o gráfico representativo das restrições

Normalmente se inicia a construção do gráfico representativo de um modelo linear traçando-se as restrições do problema.

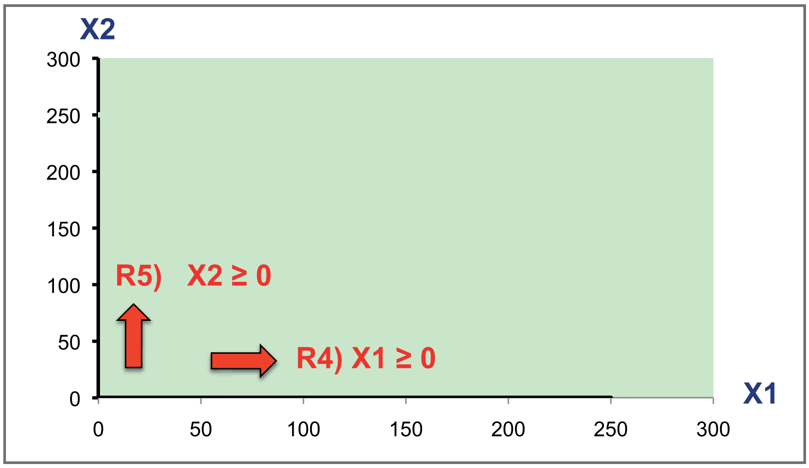
Ao representar essas restrições, estaremos trabalhando na busca de valores viáveis para cada restrição. Esses serão todos os valores que satisfazem aquela restrição em particular.

Aqueles valores que não satisfazem a restrição são chamados de valores inviáveis.

Valores viáveis
São os valores para as variáveis de decisão que satisfazem a restrição.

Para o Exemplo 5.1 pode-se representar primeiramente as restrições 4 e 5. Essas fazem com que as variáveis de decisão x_1 e x_2 assumam somente valores positivos, ou seja, $x_1 >= 0$ e $x_2 >= 0$, por isso o gráfico deve estar contido no 1° quadrante do plano cartesiano, conforme a Figura 5.2.

Figura 5.2 - Área viável segundo as restrições 4 e 5 do Exemplo 5.1



Fonte: Fogaça (2014).

Os valores viáveis, portanto, serão aqueles situados no primeiro quadrante do sistema de eixos. Excluem-se os quadrantes 2, 3 e 4, pois esses conduzem a valores negativos para as variáveis de decisão. Porém, faltam ainda três restrições a serem representadas.

Vamos, portanto, à representação gráfica da restrição 1.

2.2 Representando a primeira restrição (R1)

R1) $2x_1 + x_2 < = 230$

Para representar a restrição acima no plano cartesiano, precisamos primeiramente lembrar como se faz gráfico de uma função do 1º grau.

Lembre-se!
O gráfico de uma função do 1o grau é sempre uma reta, e para construirmos uma reta necessitamos de apenas dois pontos.

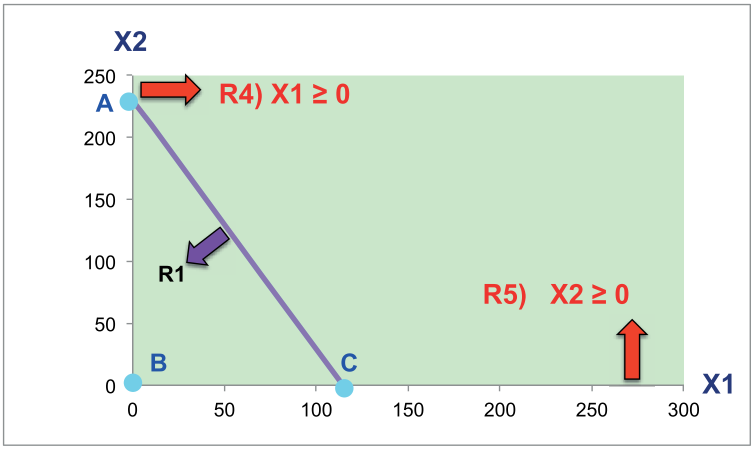
Primeiramente, transformaremos a desigualdade (<=) em uma igualdade (=), para facilitar os cálculos. Agora, vamos calcular os valores de x_1 e x_2 anulando um deles, da seguinte forma:

R1) $2x_1 + x_2 = 230$

Quando $x_1 = 0$ temos: $2.0 + x2 = 230$

$X_2 = 230$
Quando $x_2 = 0$ temos:
$2.x_1 + 0 = 230$
$2.x_1 = 230$
$x_1 = 230/2$
$x_1 = 115$
Assim, basta localizar no plano cartesiano $x_1 = 115$ e $x_2 = 230$ e unir os pontos, conforme Figura 5.3.

Figura 5.3 – Região viável baseada nas restrições 1, 4 e 5



Fonte: Fogaça (2014).

Note que, ao traçar a reta representativa da restrição 1, estaremos restringindo ainda mais nosso espaço de soluções viáveis. Como a restrição 1 é uma desigualdade e não uma igualdade, todos os valores situados sobre e abaixo da reta representativa da restrição serão valores viáveis. Quando temos uma restrição de igualdade, somente os valores situados sobre a reta serão valores viáveis.

Região viável
É aquela região que reúne um conjunto de valores viáveis para as variáveis de decisão que satisfazem **todas** as restrições do modelo de programação linear.

A região viável, neste momento, está restrita ao conjunto de valores situados no triângulo de vértice ABC (Figura 5.3).

2.3 Porém falta ainda representar as restrições 2 e 3 do modelo

Para representar as duas restrições, deve-se proceder da mesma maneira que para a restrição 1 anterior. Primeiro transforma-se a desigualdade em igualdade. Traça-se a reta e busca-se o conjunto de valores viáveis para aquela restrição. Observe que:

Em uma restrição tipo <= os valores viáveis estarão sempre sobre e abaixo da reta que representa a restrição.

Em uma restrição tipo >= os valores viáveis estarão sempre sobre e acima da reta que representa a restrição.

2.3.1 Representando a segunda restrição (R2)

R2) $x_1 + 2x_2 = 250$

Quando $x_1 = 0$ temos:

$0 + 2x_2 = 250$

$x_2 = 250/2$

$x_2 = 125$

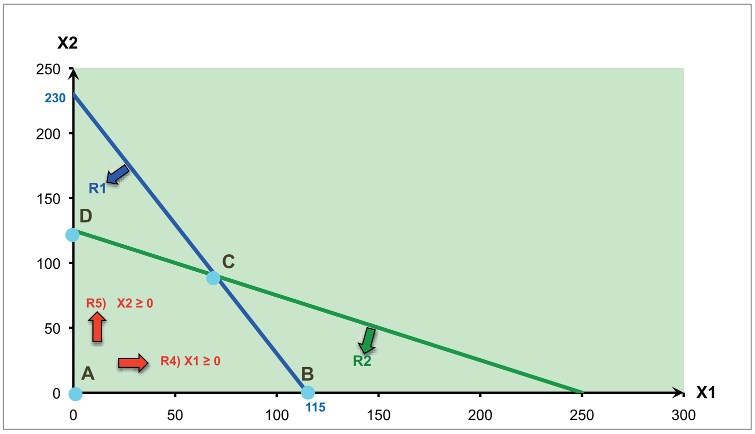
Quando $x_2 = 0$ temos:

$x_1 + 0 = 250$

$x_1 = 250$

Então, basta localizar no plano cartesiano $x_1 = 250$ e $x_2 = 125$ e juntar os pontos, conforme a Figura 5.4.

Figura 5.4 – Região viável segundo as restrições 1, 2, 4 e 5



Fonte: Fogaça (2014).

Note que ao acrescentar a restrição 2 (Figura 5.4), o espaço que contém as soluções viáveis para o modelo de Programação Linear deixa de ser um triângulo e transforma-se em um polígono de vértices ABCD. A região situada dentro e sobre o contorno do polígono é chamada de região viável e contém valores para as variáveis x_1 e x_2 que obedecem às restrições 1, 2, 4 e 5.

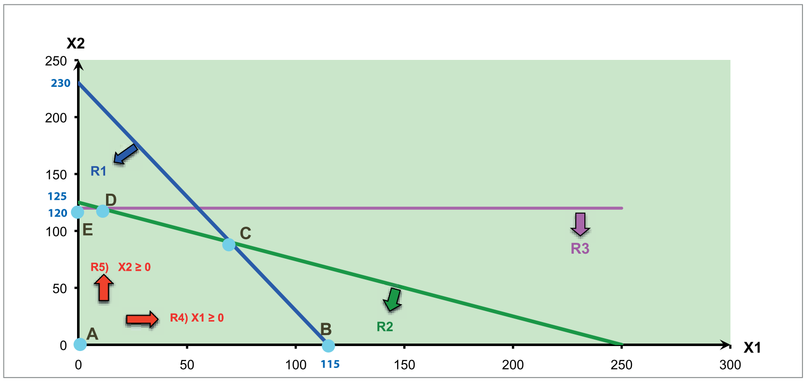
2.3.2 Representando a terceira restrição (R3)

A representação da terceira restrição é um pouquinho diferente.

R3) $x_2 <= 120$

Neste caso, precisamos apenas localizar x2 = 120 e traçar uma reta horizontal sobre este valor, e todos os valores abaixo e sobre (<=) essa reta farão parte da região de soluções viáveis. Conforme o gráfico da Figura 5.5.

Figura 5.5 – Região viável do Exemplo 5.1 para todo o conjunto de restrições



Fonte: Fogaça (2014).

A Figura 5.5 mostra como fica a região viável para o modelo do Exemplo 5.1 quando a restrição 3 é acrescida ao gráfico. A região viável agora é formada pelo polígono de vértices ABCDE. Observe que o espaço que contém a região viável vai ficando cada vez menor à medida que mais uma restrição é acrescentada. Isso é bastante evidente, pois a busca de valores para x1 e x2 que satisfaçam as restrições vai ficando cada vez mais difícil ao adicionarmos mais uma restrição.

Solução viável
Uma solução na qual as variáveis de decisão assumem valores viáveis.

2.4 Obtendo a solução ótima

Pela Figura 5.5 anterior pode-se observar que existe um conjunto grande de soluções possíveis (viáveis) formadas por todos os pontos dentro e sobre o polígono de vértices, ABCDE.

Porém, a solução ótima de um modelo de programação linear é aquela que, ao mesmo em que satisfaz todas as restrições, conduz ao melhor valor da função objetivo.

Solução ótima
É aquela solução na qual as variáveis de decisão são valores viáveis e que conduz ao **melhor** valor da função objetivo.

Existem duas maneiras de chegar-se à solução ótima de um PL por meio da abordagem gráfica. A primeira e, na maior parte das vezes, a mais fácil é a que está baseada no seguinte teorema:

Teorema 1. Se um programa linear é viável e o conjunto de todas as suas restrições resulta em um polígono convexo, então, a solução ótima se dará em um dos vértices deste polígono.

Observando a Figura 5.5 anterior, vê-se que o conjunto de restrições está representado por um polígono convexo e, portanto, pode-se fazer uso do teorema 1 para encontrar a solução ótima. O primeiro passo será o de relacionar todas as coordenadas dos pontos que definem os vértices do polígono ABCDE. O passo seguinte será o de calcular o valor da função objetivo em cada ponto e ver qual deles nos fornece o melhor valor para a função objetivo.

Aplicação do teorema 1 na figura 5.5

Para encontrar a solução do problema, vamos analisar um a um os pontos A, B, C, D e E, que são os vértices do polígono encontrado pela intersecção das retas e eixos.

PONTO A

Neste ponto, tanto o valor de x_1 quanto o valor de x_2 são nulos, portanto, temos: $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$

Qual é o lucro deste ponto?

Basta substituir os valores acima na função objetivo.

$\mathbf{LT_A = 3x_1 + 5x_2}$

LTA= 3.0 + 5.0

LTA = 0

PONTO B

Este ponto surge da intersecção entre a primeira restrição (R1) e o eixo de x_1. Sendo assim, o valor de x_2 é zero, pois o valor de x_2 é o tamanho do deslocamento vertical de um ponto. E este ponto não se deslocou, nem para cima, nem para baixo do eixo horizontal, estacionando sobre ele. Como $x_2 = 0$, basta substituir este valor em R1) $2x_1 + x_2 <= 230$ para encontrar o valor de x_1, onde o ponto B está localizado.

Para efeitos de cálculo vamos suprimir o sinal “<=”, ficando apenas com “=”. Sendo assim:

R1) $2x_1 + x_2 = 230$

$2x_1 + 0 = 230$

$x_1 = 230/2$

$x_1 =115$

Para calcular o lucro no ponto B, substituiremos $x_1 = 115$ e $x_2 = 0$ no lucro total.

$\mathbf{LTB = 3x_1 + 5x_2}$

LTB = 3.115 + 5.0

LTB = 345

PONTO C

Este ponto surge da intersecção entre a primeira restrição (R1) e a segunda (R2). Vamos precisar igualar as restrições R1) $2x_1 + x_2 <= 230$ e R2) $x_1 + 2x_2 <= 250$ para encontrar os valores de x_1 e x_2 no ponto C. Mais uma vez vamos suprimir os sinais de “<”.

R1: $2x_1 + x_2 = 230$, se isolarmos a variável x_2, teremos: $x_2 = 230$

$- 2x_1$, vamos substituir este valor de x_2 na equação da R2, aí teremos o valor de x_1 onde as duas restrições se encontram

R2: $x_1 + 2x_2 = 250$

$x_1 + 2 * (230 - 2x_1) = 250$

$x_1 + 460 - 4x_1 = 250$

$-3x_1 = 250 - 460$

$-3x_1 = -210$

$x_1 = \frac{-210}{-3}$

$x_1 = 70$

Mas $x_2 = 230 - 2x_1$, então:

$x_1 = 230 - 2 * 70$

$x_2 = 230 - 140$

$x_2 = 90$

Para calcular o lucro no ponto C, substituiremos $x_1 = 70$ e $x_2 = 90$ no lucro total.

LTC = $3x_1 + 5x_2$

LTC = 3.70 + 5.90

LTC = 210 + 450

LTC = 660

PONTO D

Este ponto surge da intersecção entre a segunda restrição (R2) e a terceira (R3). Sendo assim, vamos precisar igualar as restrições R2) $x_1 + 2x_2 <= 250$ e R3) $x_2 <= 120$, para encontrar os valores de x_1 e x_2 no ponto D. Mais uma vez vamos suprimir os sinais de “<”.

Vamos iniciar pela restrição 3, temos:

R3: $x_2 = 120$, observe que já possuímos o valor de x_2, logo basta substituirmos na restrição R2.

R2: $x_1 + 2x_2 = 250$

$x_1 + 2.120 = 250$

$x_1 + 240 = 250$

$x_1 = 250 – 240$

$x_1 = 10$

Para calcular o lucro no ponto D, substituiremos $x_1 = 10$ e $x_2 =$

120 no lucro total.

LTD = $3x_1 + 5x_2$

LTD= 3.10 + 5.120

LTD = 30 + 600

LTD = 630

PONTO E

Esse ponto surge da intersecção entre a terceira restrição (R3) e o eixo de x_2. O valor de x_1 é zero, pois o valor de x1 é o tamanho do deslocamento horizontal de um ponto, e esse ponto não se deslocou nem para direita, nem para a esquerda do eixo vertical, estacionando sobre ele. Como $x_1 = 0$, basta substituir este valor em R3) $x_2 <= 120$, suprimindo o sinal "<", ficando apenas com $x_2 = 120$.

Para calcular o lucro no ponto E, substituiremos $x_1 = 0$ e $x_2 = 120$ no lucro total.

LTE = $3x_1 + 5x_2$

LTE= 3.0 + 5.120

LTE = 600

Pode-se assim, chegar à tabela:

Tabela 5.3 - Coordenadas dos vértices do PL do Exemplo 5.1 e valores na função objetivo

Ponto	X1	X2	Valor da Função Objetivo (Função Objetivo = $3x_1 + 5x_2$)
A	0	0	0
B	115	0	345
C	70	90	660
D	10	120	630
E	0	120	600

Fonte: Lopes e Galvão (2010).

A solução que produz o maior valor da função objetivo será a solução constante do ponto C, devendo assim, produzir 70 litros de perfume do tipo 1 e 90 litros do perfume do tipo 2, para obter maior lucro (lucro total = R$ 660,00).

Uma outra maneira de obter-se graficamente o resultado de um modelo de PL é pelo traçado da reta que representa a função objetivo. Como a função objetivo é uma função aberta, e no caso do Exemplo 5.1 uma função aberta na direção da maximização, ela não será uma reta fixa no sistema de eixos como é o caso das restrições. Será uma reta que se moverá na direção da maximização.

? Mas como traçar a **Função Objetivo**?

Bem, primeiro deve-se tomar um ponto dentro da região viável (x_1,x_2).

Por exemplo: $x_1 = 50$ e $x_2 = 60$ (50,60)

Ao estabelecer-se o valor, deve-se substituí-lo na função objetivo e calcular o resultado:

FO = $3x_1 + 5x_2$

Se $x_1 = 50$ e $x_2 = 60$ temos: 3* 50 + 5* 60 = 450

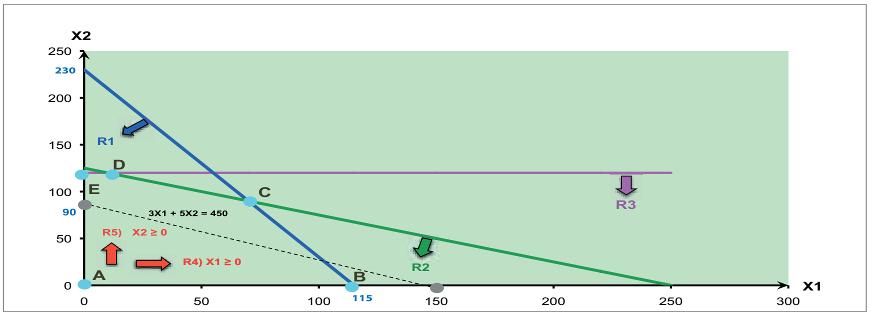
Logo após retorna-se à função objetivo original (3x1 + 5x2) e traça-se a reta que a representa naquele ponto:

$3x_1 + 5x_2 = 450$

Para traçarmos esta reta, tomam-se dois pontos: (x1 = 0 e x2 = 90) e (x2=0 e x1 = 150).

O resultado será o mostrado na Figura 5.6 que segue.

Figura 5.6 – Representação gráfica do Exemplo 5.1: busca da solução ótima (passo 1)

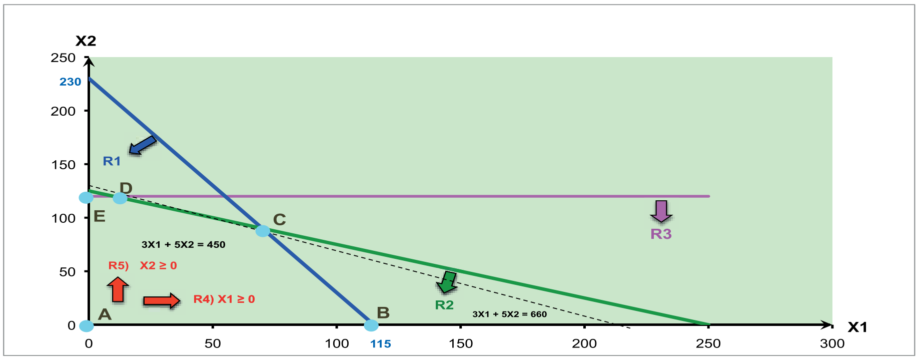


Fonte: Fogaça 2014

Após traçar a reta que representa a função objetivo naquele ponto, procede-se a busca da melhoria do valor da função objetivo, movendo-se sua reta para a direita até que ela esteja praticamente saindo do polígono. O último ponto que essa reta toca antes de sair do polígono será a solução ótima.

Observe na Figura 5.7 que o último ponto que a reta toca será o C, confirmando-o como solução ótima do modelo de programação linear do Exemplo 5.1.

Figura 5.7 – Representação gráfica do Exemplo 5.1: busca da solução ótima (passo 2)



Fonte: Fogaça 2014

Nesta seção, você aprendeu a resolver modelos de programação linear viáveis, isto é, que tem solução. Na seção seguinte irá aprender que nem todos os modelos têm solução e, graficamente, você pode chegar à conclusão de que o modelo não tem resposta e o porquê de isso ocorrer.

Seção 3
Programas lineares inviáveis

Na seção anterior trabalhou-se sobre um programa linear para o qual pôde-se obter uma única solução ótima. Porém, apesar de ser o caso mais comum, muitas vezes depara-se com outros tipos de programas lineares, como é o caso de um programa linear inviável.

3.1 Programa linear inviável

É um programa linear para o qual não existem valores para as variáveis de decisão que satisfaçam todas as restrições simultaneamente.

Normalmente, um programa linear vem a ser inviável por erros no momento da modelagem ou por imposições do administrador impossíveis de serem obedecidas no modelo.

Para exemplificar, tomamos novamente o Exemplo 5.1, mas pensemos em uma situação em que o administrador da empresa solicitasse a você que modificasse o modelo, pois a demanda do perfume 2 teve um salto grande e ele precisa produzir mais do que 150 litros desse produto por semana. O modelo modificado ficaria:

Max LT) $3x_1 + 5x_2$

s.a.

R1) $2x_1 + x_2 \quad < = 230$

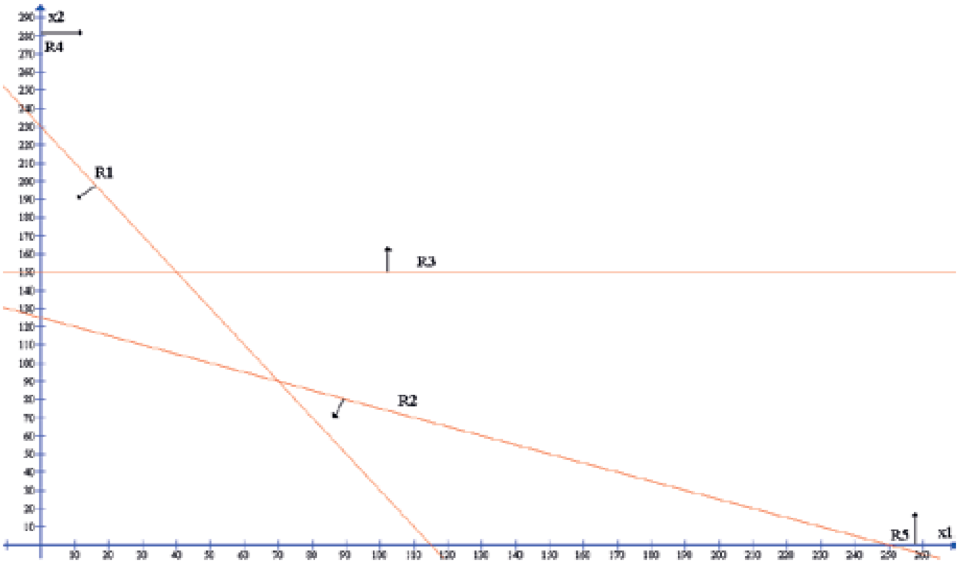
R2) $x_1 + 2x_2 \quad < = 250$

R3) $\quad\quad x_2 \quad > = 150$

R4) $x_1 \quad > = 0$

A representação gráfica deste novo modelo seria a da Figura 5.8:

Figura 5.8 – Programa linear inviável



Fonte: Lopes e Galvão (2010).

Note pela figura anterior que não existem valores possíveis para x_1 e x_2 que satisfaçam todas as restrições. Para satisfazer a restrição 1, somente valores sobre e abaixo da reta, que representa a restrição, são aceitos. Para a restrição 2 vale o mesmo. Porém, quando olharmos a região de valores viáveis para a restrição 3, pode-se observar que os valores acima da reta da R3 são viáveis para esta restrição, porém, não obedecem à restrição 2. Não existe, portanto, um único valor que possa satisfazer todas as quatro restrições do modelo.

Se olharmos mais atentamente para o modelo poderemos ver que é inviável porque não existe recurso no setor de embalagem para produzir a quantia de 150 litros do perfume 2.

Será que quando nos deparamos com um modelo inviável, a única coisa que temos a fazer é dizer que este modelo não tem resposta?

Não. Na realidade, a ausência dessa resposta deverá nos levar a pensar em algum erro de formulação. Portanto, quando nos depararmos com modelos inviáveis ou ilimitados, devemos repensar o modelo, rever as equações que representam as restrições e rever até se as imposições que decidimos colocar no modelo não o tornam inviável ou ilimitado.

Na próxima seção estudaremos programas lineares ilimitados

Seção 4
Programas lineares ilimitados

Um outro caso é o de programas lineares ilimitados. Nesse tipo de programa não existe uma solução única, pois o conjunto de restrições não forma um polígono fechado, estando aberto na direção da maximização ou minimização.

Para observarmos o que ocorre neste caso, suponhamos que o modelo do exemplo anterior tenha sido erroneamente construído com as desigualdades das restrições 1 e 2 trocadas de < para >. O modelo ficaria como abaixo e a Figura 5.9 o estaria representando graficamente.

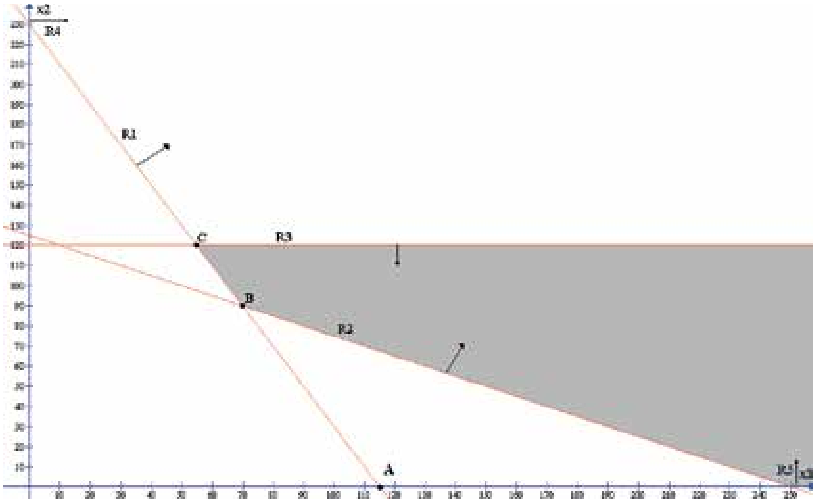
Max LT) $3x_1 + 5x_2$

s.a.

R1)	$2x_1 + x_2$	$>= 230$
R2)	$x_1 + 2x_2$	$>= 250$
R3)	x_2	$<= 120$
R4)	x_1	$>= 0$
R5)	x_2	$>= 0$

Verifique na figura que segue:

Figura 5.9 – Programa linear ilimitado



Fonte: Lopes e Galvão (2010).

Na figura anterior, a região formada, neste novo modelo, será a definida pelos vértices ABC. A região está, portanto, aberta, não formando mais um polígono fechado. Como o objetivo é de maximização, a reta da função objetivo será levada para a direita infinitamente, não encontrando uma solução.

Programa linear ilimitado
É um programa linear no qual a função-objetivo pode ser melhorada infinitamente.

Neste capítulo, você conheceu o processo para identificação de um modelo linear ilimitado e compreendeu os procedimentos para resolver modelos graficamente.

Atividades de autoavaliação

Para praticar os conhecimentos apropriados nesta unidade, realize as atividades propostas seguintes. Devido ao tamanho do espaço para a realização das atividades, sugerimos que você as faça em folhas avulsas.

1. Uma marcenaria situada em Florianópolis produz mesas e cadeiras de baixo custo. O processo de produção das mesas e cadeiras é similar e requer um certo número de horas de trabalho no setor de carpintaria e um certo número de horas de trabalho no setor de pintura. Cada mesa necessita de quatro horas de trabalho no setor de carpintaria para ficar pronta para pintura e duas horas de trabalho de pintura. Cada cadeira requer três horas na carpintaria e uma hora na pintura. Durante o atual período de produção, estão disponíveis 240 horas de trabalho no setor de carpintaria e 100 horas de trabalho no setor de pintura. O departamento de marketing está confiante de que pode vender todas as mesas que puderem ser fabricadas. Entretanto, devido a um estoque existente de cadeiras, o departamento não recomenda que sejam fabricadas mais do que 60 novas cadeiras. Cada mesa vendida tem uma margem de contribuição para o lucro de \$7, e cada nova cadeira vendida resulta em uma margem de \$5. Modele o problema que indique à empresa quantas cadeiras e quantas mesas produzir por semana de modo a maximizar o lucro. Resolva graficamente.

2. Uma importadora situada em Santa Catarina está planejando expandir seu negócio até o Rio Grande do Sul. Para fazer isto a empresa necessita saber quantos depósitos e o tamanho de cada, deverá construir para armazenar suas mercadorias. Seu objetivo e restrições são como segue:

Maximizar lucro mensal)	50DP + 20DG
s.a.	
orçamento de *marketing* disponível)	20DP + 40DG < = 400
No. de m^2 requerido)	100DP + 50DG < = 800
Máximo de depósitos pequenos)	DP < = 60
	DP >=0
	DG >=0

Onde: DP = número de depósitos pequenos a construir e DG = número de depósitos grandes a construir.

Resolva graficamente este problema.

3. Encontre as soluções dos programas lineares abaixo:

a) Maximizar lucro) x + y

s.a.

2x + y <=100

x + 2Y <=100

x, y > = 0

b) Maximizar lucro) 3x + 2y

s.a.

2x + y <=150

2x + 3Y <=300

x, y > = 0

c) Maximizar lucro) $4x + 6y$

s.a.

$$x + 2y \le 8$$
$$6x + 4y \le 24$$
$$x, y \ge 0$$

d) Maximizar $-4x_1 + 8x_2$

s.a.

$$6x_1 - 2x_2 \le 3$$
$$-2x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 24$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

e) Minimizar custo) $x + 2y$

s.a.

$$x + 3y \ge 90$$
$$8x + 2y \ge 160$$
$$3x + 2y \ge 120$$
$$y \le 70$$
$$x, y \ge 0$$

Capítulo 6

Programação de Projetos por meio do estudo de redes PERT/CPM

Adaptado de Ana Lúcia Miranda Lopes e Ana Lúcia Meira da Veiga Galvão

Habilidades

Ao final do capítulo, o estudante será capaz de identificar a diferença entre o CPM (*Critical Path Method*) e o PERT (*Project Evaluation and Review Technique*). Compreenderá um projeto como um conjunto de atividades com uma sequência lógica entre si. Identificará as atividades críticas de um projeto e o tempo mínimo de duração desse por meio do CPM.

Seções de estudo

Seção 1: Definição de PERT e CPM

Seção 2: Desenvolvendo a rede

Seção 3: Usando o CPM para gerenciar o projeto

Seção 1
Definição de PERT e CPM

Algumas organizações, em determinado momento, enfrentarão grandes e complexos projetos. Gerenciá-los é um desafio para a maioria dos administradores, especialmente quando o número de atividades envolvidas nesses projetos é elevado (RENDER,STAIR, BALAKRISHNAN, 2003). Milhões de reais têm sido gastos indevidamente devido a atrasos desnecessários que poderiam ser estimados com um bom gerenciamento de projetos.

Representar o projeto por meio de uma rede é um excelente auxiliar para os administradores e tem sido utilizado de forma intensa pelas grandes empresas brasileiras e estrangeiras, nos últimos cinquenta anos.

Essas redes podem auxiliar o administrador na obtenção das respostas para as seguintes perguntas:

- Qual é o tempo mais curto em que um projeto pode ser completado?
- Quais são as atividades críticas dentro do projeto e que devem ser monitoradas com cuidado?
- O que acontece com o tempo de duração do projeto se uma determinada atividade atrasar?

Essas e outras perguntas podem ser respondidas por meio da construção e observação de uma rede PERT ou CPM.

Segundo Mathur e Sollow (1997), as técnicas de PERT e CPM foram desenvolvidas nos anos 50. Primeiramente, a empresa Dupont criou a técnica CPM – *Critical Path Model* (1957), que foi desenvolvida para gerenciar a construção e manutenção de suas indústrias químicas.

Mais tarde, a marinha americana (US N*avy*) desenvolveu a técnica de PERT – *Project Evaluation and Review Technique* para o planejamento e controle do programa do míssil Polaris. A diferença básica entre as duas técnicas está no tempo de duração de cada atividade envolvida no projeto. Em uma rede PERT cada atividade tem três tempos diferentes que são combinados para determinar o tempo esperado de execução da atividade.

PERT é considerada uma técnica probabilística, pois os tempos de execução das atividades do projeto são probabilísticos. Já a CPM é considerada uma técnica determinística, pois o tempo de execução de cada atividade deve ser conhecido, com certeza. Esse tempo estimado é chamado normal ou padrão e é o tempo que o administrador do projeto estima que cada atividade irá levar para ser completada em condições normais.

1.1 Veja os conceitos:

CPM – *Critical Path Model*
É uma técnica de pesquisa operacional que auxilia na programação de projetos e na qual as durações de cada atividade **são** conhecidas com certeza.

PERT – *Project Evaluation and Review Technique*
É uma técnica de pesquisa operacional que auxilia na programação de projetos e na qual as durações de cada atividade **não** são conhecidas.

Segundo Winston e Albright (2000), CPM tem sido utilizado com muito sucesso em muitas aplicações, incluindo as seguintes:

- gerenciamento de projetos de construção tais como: aeroportos, prédios, hospitais, estradas etc.;
- gerenciamento de alterações de procedimentos em empresas aéreas;
- instalação de um novo sistema de informações dentro da empresa;
- desenvolvimento e propaganda de um novo produto;
- gerenciamento do processo de fusão de duas ou mais empresas etc.

Para aplicar as técnicas de PERT ou CPM, primeiramente é necessário desenvolver uma rede que represente todo o projeto, desde o início até o final. Na próxima seção, veremos como essa rede é construída.

Seção 2
Desenvolvendo a rede

Para desenvolver a rede representativa de um projeto, as seguintes etapas são importantes:

- identificar as atividades individuais que fazem parte de um projeto;
- obter o tempo estimado para a execução de cada atividade;
- identificar as relações de tempo e precedência de cada atividade.
- desenhar o diagrama de rede.

2.1 Identificando as atividades individuais

Segundo Mathur e Sollow (1997), projetos completos consistem de várias atividades individuais. Para monitorar esses projetos é necessário primeiro identificar suas atividades. Algumas atividades dentro de um projeto podem ser tão complexas que elas mesmas resultam em uma outra rede. Por exemplo, implantar o planejamento estratégico definido pela diretoria de uma empresa. Dependendo do tamanho dessa empresa, pode ser que cada setor necessite de uma rede diferente devido às suas peculiaridades.

Para identificação das atividades de um projeto algumas regras gerais podem ser seguidas (MATHUR e SOLLOW, 1997):

- cada atividade deve ter um início e um fim definidos dentro do contexto do projeto;
- a finalização de uma atividade é condição necessária, mas não suficiente para a finalização do projeto;
- o tamanho de uma atividade deve estar ao alcance de seu controle, senão essa deve ser subdividida;
- deve existir alguém responsável por cada atividade;
- **todas** as atividades necessárias para a execução do projeto devem estar listadas.

Exemplo 6.1

WK é uma empresa que organiza grandes concertos (*shows*) bem como a campanha publicitária deles. Ela foi contratada para gerenciar o show do grupo Rolling Stones, a ser realizado no Rio de Janeiro.

Para que este projeto não corra risco algum de atraso, a empresa quer construir uma rede CPM para monitorá-lo. Iniciou, então, listando as atividades necessárias para a execução do projeto, conforme descrito abaixo:

Tabela 6.1 - Projeto Rolling Stones, lista de atividades com prazo

ATIVIDADES	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES
Atividade A	Encontrar o local para o show
Atividade B	Buscar e contratar os engenheiros responsáveis pela construção das estruturas necessárias
Atividade C	Contratar o ato de abertura
Atividade D	Colocar anúncio nos rádios e redes de televisão
Atividade E	Buscar e negociar com agências e lojas para venda dos tickets

Atividade F	Preparar a parte eletrônica do concerto
Atividade G	Estudar e implementar a logística de transporte
Atividade H	Últimos detalhes

Fonte:Lopes e Galvão (2007).

2.2 Obtendo os tempos estimados para cada atividade

Como o tempo necessário para a execução do projeto todo depende da execução e finalização de cada atividade individual, torna-se necessário estabelecer um prazo para a execução de cada atividade. Esses prazos nem sempre são fáceis de serem obtidos e podem ser probabilísticos (rede PERT) ou determinísticos (rede CPM). Uma estimativa pode ser obtida da seguinte maneira:

- utilizar experiências passadas para estabelecer o tempo das atividades;
- consultar as pessoas encarregadas para cada atividade;
- usar dados históricos.

2.3 Para o exemplo 6.,1 os seguintes prazos foram determinados

Tabela 6.2 - Projeto Rolling Stones, lista de atividades com prazo

ATIVIDADES	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	TEMPO ESTIMADO (SEMANAS)
Atividade A	Encontrar o local para o *show*	3
Atividade B	Buscar e contratar os engenheiros responsáveis pela Construção das estruturas necessárias	2
Atividade C	Contratar o ato de abertura	6
Atividade D	Colocar anúncio nos rádios e redes de televisão	2
Atividade E	Buscar e negociar com agências e lojas para venda dos *tickets*	3
Atividade F	Preparar a parte eletrônica do concerto	3
Atividade G	Estudar e implementar a logística de transporte	1
Atividade H	Últimos detalhes	1,5

Fonte:Lopes e Galvão (2007).

2.4 Criando a tabela de precedências

Como descrito anteriormente, o tempo necessário para a finalização de um projeto está baseado no tempo de finalização de cada atividade individual. Porém, o prazo do projeto não é a simples soma dos prazos para a execução das tarefas individuais, pois algumas atividades podem ser executadas ao mesmo tempo em que outras. Existem também algumas atividades que só podem ser iniciadas depois do término de uma outra.

Portanto, para saber o prazo necessário para a execução de um projeto é preciso identificar quais atividades estão relacionadas com outras e qual deve ser feita antes. Deve-se, então, criar uma tabela de precedências.

Uma tabela de precedências deve conter a lista das atividades anteriormente identificadas como necessárias para a execução do projeto, bem como suas relações de precedência. Deve-se identificar, portanto, quais são as atividades predecessoras de todas as atividades.

Uma atividade é predecessora de outra quando a primeira deve ser totalmente finalizada para que a outra possa iniciar.

Para o exemplo 6.1 teríamos como tabela de precedência a seguinte.

Tabela 6.3 - Projeto Rolling Stones, tabela de precedências

ATIVIDADES	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	PREDECESSORES	TEMPO ESTIMADO (SEMANAS)
Atividade A	Encontrar o local para o *show*	-	3
Atividade B	Buscar e contratar os engenheiros responsáveis pela construção das estruturas necessárias	A	2
Atividade C	Contratar o ato de abertura	A	6
Atividade D	Colocar anúncio nos rádios e redes de televisão	C	2
Atividade E	Buscar e negociar com agências e lojas para venda dos *tickets*	A	3
Atividade F	Preparar a parte eletrônica do concerto	B	3
Atividade G	Estudar e implementar a logística de transporte	C	1
Atividade H	Últimos detalhes	F, G	1,5

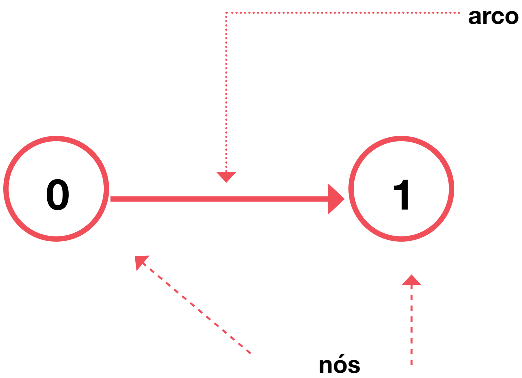
Fonte:Lopes e Galvão (2007).

2.5 Construindo a rede do projeto

Uma rede de um projeto é formada pelos nós, arcos, atividades e prazos de duração de cada atividade. Ela deve ser totalmente clara e mostrar as relações de precedência entre cada atividade. O tipo de rede de projeto mais utilizado é o chamado ***Activity on Arc Network* - AOA, ou seja, rede de atividades no arco.**

Nesse tipo de rede, um nó representa o início de uma atividade e outro representa a sua finalização. Um arco representa a atividade em si, por exemplo:

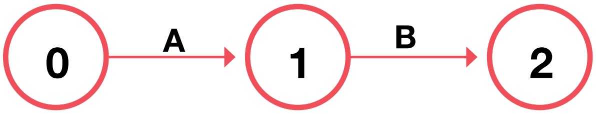
Figura 6.1 - Construção de uma rede de projeto por meio de arcos e nós



Fonte: Lopes e Galvão (2007).

Nos arcos são representadas as atividades e a rede deve mostrar as relações de precedências entre cada atividade. Para o exemplo 6.1 teremos:

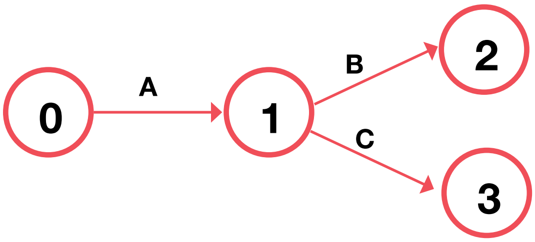
Figura 6.2 - Estabelecendo relações de precedência em uma rede de projeto



Fonte:Lopes e Galvão (2007).

A figura acima representa que a atividade B só pode ser iniciada depois que a A estiver sido finalizada. A é, portanto, predecessora de B.

Figura 6.3 - Definindo relações de precedência e atividades em paralelo

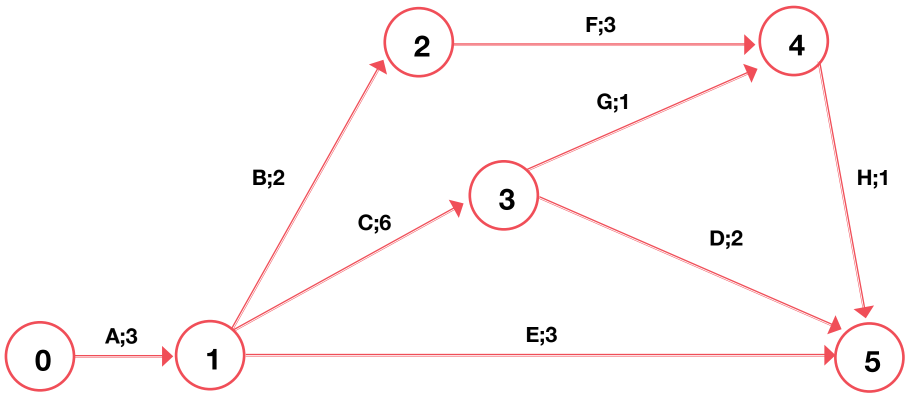


Fonte:Lopes e Galvão (2007).

Já a figura acima, indica que as atividades B e C devem ser iniciadas somente depois que a atividade A for finalizada, mas as duas (B e C) podem ser executadas em paralelo, pois uma não depende da outra.

Na rede também deve ser informado o prazo de execução de cada atividade. Para o exemplo 6.1 a rede ficará:

Figura 6.4 - Rede do exemplo 6.1



Fonte:Lopes e Galvão (2007).

Como pode ser observado na rede acima, todas as atividades do projeto "*show* dos Rolling Stones" estão representadas nela, assim como seus prazos de duração. Por exemplo: a figura mostra que as atividades G e D só podem ser iniciadas depois que a atividade C tiver sido concluída e que elas têm prazos de duração de uma e duas semanas, respectivamente. Já a atividade C tem a A como predecessora e só pode iniciar depois da conclusão.

Resumindo para você os passos necessários para a construção da rede:

- desenhe o nó 0 para representar o início do projeto;
- desenhe um arco para cada atividade que não tem predecessora;
- identifique cada arco com o símbolo da atividade e o prazo de duração;
- determine um nó terminal a cada arco, para identificar o fim daquela atividade;
- desenhe o nó 1 para representar o ponto em que a atividade anteriormente identificada é finalizada;
- veja na tabela de precedências quais atividades podem iniciar agora;
- continue com este esquema para as demais atividades.

2.6 Inserindo uma atividade *dummy* na rede do projeto

Uma atividade *dummy* é artificial, pois não faz parte do projeto e não requer tempo para sua execução. É incluída no projeto somente para assegurar a correta relação de precedência entre as atividades. A atividade *dummy* deve ser representada por uma seta pontilhada. Pode-se também trabalhar com nós *dummies*. Esse é um nó artificial incluído na rede do projeto para representar um ponto no tempo em que certas atividades são completadas e assegurar a correta relação de precedência entre as atividades.

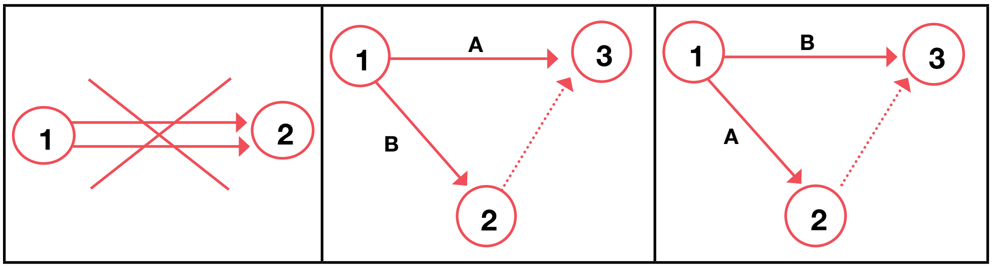
Veja os conceitos:

> Uma **atividade *dummy*** é **artificial, pois** não faz parte do projeto e não requer tempo para sua execução. É incluída no projeto somente para assegurar a correta relação de precedência entre as atividades e um **nó *dummy*** é um nó artificial incluído na rede do projeto para representar um ponto no tempo, no qual certas atividades são completadas e assegurar a correta relação de precedência entre as atividades.

Para uma boa representação da rede de um projeto, alguns aspectos devem ser assegurados:

- NÃO deve haver cruzamento de linhas;
- NÃO deve haver mais de um arco com a mesma atividade;
- arcos NÃO devem ser arredondados;
- duas atividades NÃO devem sair do mesmo nó e chegar no mesmo nó (mesma cauda e mesma cabeça). Para resolver esse problema, utiliza-se uma atividade *dummy*. (Veja Figura 6.5.)

Figura 6.5 – Utilização da atividade *dummy*



Fonte:Lopes e Galvão (2007).

Exemplo 6.2

Imagine que a empresa WK, do exemplo acima, depois de montada a rede, decidiu que não mais iria contratar uma empresa para realizar a propaganda do evento, pois ela própria teria competência e pessoal para fazê-lo.

Com essa mudança, deve-se acrescentar mais uma atividade na rede acima, pois a empresa concluiu que poderia colocar os anúncios nas rádios e televisões antes de imprimir a propaganda do evento.

Uma nova tabela foi então construída, acrescentando outra atividade – imprimir propaganda – e mudando a atividade D.

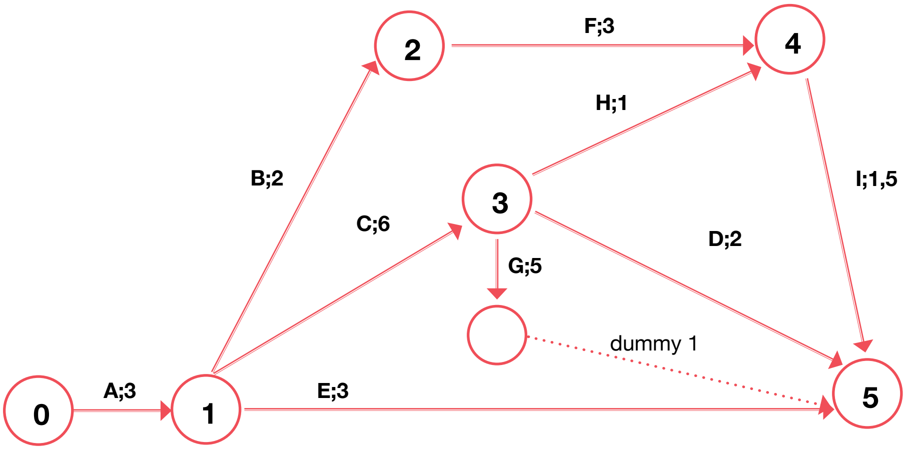
Tabela 6.4 - Projeto Rolling Stones, nova tabela de precedências

	Descrição das atividades	**Predecessores**	**Tempo estimado (semanas)**
Atividade A	Encontrar o local para o show	-	3
Atividade B	Buscar e contratar os engenheiros responsáveis pela construção das estruturas necessárias	A	2
Atividade C	Contratar o ato de abertura	A	6
Atividade D	Colocar anúncio nas rádios e redes de televisão	C	2
Atividade E	Buscar e negociar com agências e lojas para venda dos tickets	A	3
Atividade F	Preparar a parte eletrônica do concerto	B	3
Atividade G	Imprimir e distribuir propaganda escrita	C	5
Atividade H	Estudar e implementar a logística de transporte	C	1
Atividade I	Últimos detalhes	F, H	1,5

Fonte:Lopes e Galvão (2007).

2.7 Incorporando esta nova realidade à rede anterior teríamos

Figura 6.6 - Rede representativa do projeto do exemplo 6.2



Fonte:Lopes e Galvão (2007).

Deve-se notar na rede acima a inclusão de uma variável *dummy*, nesse caso, para evitar que duas atividades (D e G) saiam do mesmo nó e cheguem no mesmo nó.

Seção 3
Usando o CPM para gerenciar o projeto

Como foi definido anteriormente, o CPM é uma técnica de PO que visa a auxiliar na administração de projetos, é particularmente adequada quando temos certeza dos prazos de duração de cada atividade que compõe o projeto.

Esta técnica pode auxiliar o administrador a responder as seguintes perguntas:

- Qual é o tempo mais curto em que um projeto pode ser executado?
- Quais atividades são críticas?
- É possível antecipar certas atividades de maneira que o projeto termine mais cedo? Se sim, quais?

As **atividades críticas** de um projeto serão aquelas que **fazem parte do caminho crítico**, pois um atraso em uma delas resultará no atraso do projeto todo. O caminho crítico é aquele que determina quanto tempo o projeto vai durar, isto é, é aquele caminho em que um atraso em qualquer uma das atividades que o compõem resultará em um atraso no projeto. Como para finalizar um projeto, a empresa deve completar todos os caminhos, **o prazo do projeto é o prazo do caminho crítico**.

As atividades do caminho crítico devem ser monitoradas com cuidado, pois um atraso em uma atividade do caminho crítico aumenta o prazo do projeto.

Um atraso (aumento de prazo) em uma atividade que não faz parte do caminho crítico pode alterá-lo, modificando assim, o prazo de duração do projeto. Porém, a antecipação de uma atividade fora do Caminho Crítico não mudará o Caminho Crítico nem o prazo de duração do projeto.

Para chegar ao caminho crítico de um projeto, deve-se listar todos os possíveis caminhos que o projeto deve completar. O caminho crítico é aquele de prazo mais longo. A Tabela 6.5 mostra os caminhos trilhados para a finalização do projeto do exemplo 6.2, bem como seus respectivos prazos de duração.

Tabela 6.5 - Caminhos para a execução do projeto do show dos Rolling Stones (exemplo 6.2)

CAMINHO	PRAZO DE DURAÇÃO (SEMANAS)
ABFI	3+2+3+1,5 = 9,5
ACHI	3+6+1+1,5 = 11,5
ACG	3+6+5 = 14
ACD	3+6+2 = 11
AE	3+3 = 6

Fonte:Lopes e Galvão (2007).

Como o caminho crítico será aquele mais longo, teremos, para o exemplo 6.2, o caminho **ACG** como caminho crítico. Nas atividades que constam desse caminho, o administrador deve concentrar seus maiores esforços, pois qualquer atraso incorrerá em aumentar o prazo de execução do projeto.

Atividades de autoavaliação

Para praticar os conhecimentos apropriados nesta unidade, realize as atividades seguintes propostas. Utilize uma folha em separado para realizar as atividades.

1. Mariana, que é gerente da maior e melhor oficina mecânica de Florianópolis, está sempre muito preocupada com a satisfação dos clientes. Desse modo, decidiu mapear as etapas do processo de elaboração de orçamento para conserto de veículos. Sendo assim, ela identificou as atividades necessárias para este fim, bem como suas relações de precedência. Com base no quadro que segue, ajude Mariana a construir a rede deste processo.

Atividade	Descrição da atividade	Predecessores imediatos
A	Chegada do cliente à empresa	-
B	Atendimento ao cliente	A
C	Relatório dos problemas apresentados	B
D	Cadastro do cliente e do veículo	B
E	Orçamento	C
F	Saída do cliente da empresa	D, E

2. Cláudia, diretora de uma empresa que organiza grandes eventos, acaba de assinar um contrato para produzir uma festa de reveillon para 230 pessoas. Para que nada saia errado e que não corra o risco de atrasar este projeto, a mesma decide representá-lo através de uma rede CPM. Para tanto, levantou as seguintes atividades e relações de precedências. Com base no quadro abaixo, desenhe a rede do projeto.

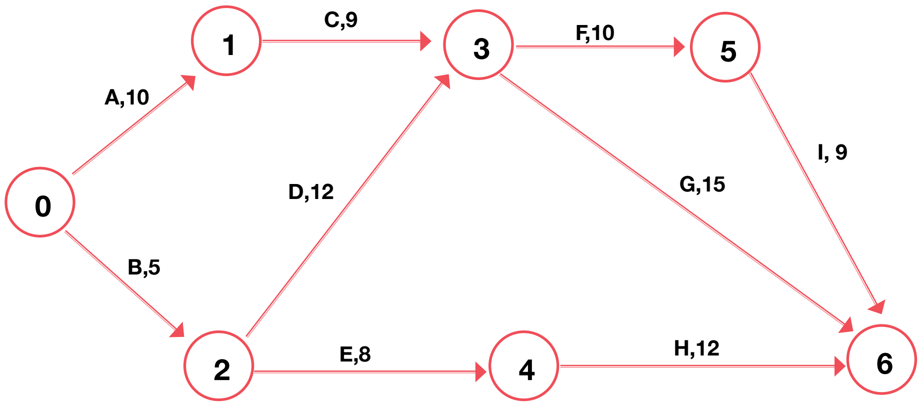
Atividade	Descrição da atividade	Predecessores imediatos
A	Buscar um local para o evento	-
B	Organizar a lista de convidados com a contratante	-
C	Decidir o cardápio com a contratante	-
D	Preparar e entregar os convites	B
E	Ligar para os convidados para obter a confirmação da presença	D
F	Encomendar o *buffet*	C
G	Contratar os garçons	F
H	Limpar e arrumar o local	A
I	Fazer a decoração	H

3. O diagrama abaixo reflete a sequência de atividades necessárias à execução de um projeto de sistema de gestão de conhecimento informatizado em uma empresa X. Sobre os arcos estão indicadas as atividades e suas durações (em semanas) pergunta-se:

a. Qual é o prazo de execução deste projeto?

b. Quais são as atividades que formam o caminho crítico?

c. Se a atividade D atrasasse três semanas, o que aconteceria com o prazo de execução do projeto?



4. A *SurfWave* é uma empresa que compra, estampa e vende camisetas na região de Florianópolis e arredores. O dono da empresa deseja construir uma rede CPM para o projeto de produção de seu produto. Este projeto inicia-se com um pedido das camisetas (matéria-prima). Após o pedido os próximos passos são a arte final na área gráfica e a produção da tela na área de produção. Com a produção da tela e a arte final pronta, a tela é gravada. Quando as camisetas chegam, iniciam-se as tarefas de separação das camisetas e colocação na máquina para estampar. Após a tela gravada, as camisetas são colocadas na máquina de estampar para fazer uma amostra. Após aprovação da amostra as camisetas podem ser estampadas. Terminada a estampagem, as camisetas são retiradas das máquinas, e enfim empacotadas. Construa a tabela de precedências e em seguida e rede do projeto.

5. A tabela abaixo contém um conjunto de atividades que são necessárias para a construção de uma casa. Mostra também, suas predecessoras e o tempo de duração de cada atividade. Desenhe a rede e calcule o seu caminho crítico.

Atividades	**Descrição**	**Predecessores**	**Duração (dias)**
Atividade A	Construção das fundações	-	5
Atividade B	Edificação das paredes e vigas	A	8
Atividade C	Construção do telhado	B	10
Atividade D	Instalação da parte elétrica	B	5
Atividade E	Colocação das janelas	B	4
Atividade F	Colocação dos materiais hidráulicos	E	6
Atividade G	Pintura da casa	C,F	3

Considerações Finais

Ao longo desta Unidade de Aprendizagem você foi desafiado a construir modelos matemáticos que, uma vez resolvidos, auxiliam o administrador a resolver problemas decisórios complexos.

Você adquiriu conhecimentos a respeito de várias técnicas de pesquisa operacional. Espero que tenha gostado e que siga seu caminho em busca de novos desafios.

Referências

ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. **Introdução à pesquisa operacional**: métodos e modelos para a análise de decisão. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

COLIN, Emerson. **Pesquisa Operacional**: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

CORRAR, Luiz J.; FUNDAÇÃO INSTITUTO DE PESQUISAS CONTÁBEIS, Atuariais e Financeiras (Coord.) **Pesquisa operacional para decisão em contabilidade e administração**: contabilometria. São Paulo: Atlas, 2004.

DOWNING, Douglas; CLARK, Jeff. **Estatística aplicada**. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

EVANS, James R.; OLSON, David L.. **Introduction to simulation and risk analysis**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.

GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L.. **Otimização combinatória e programação linear**: modelos e algoritmos. Rio de Janeiro: Campus, 2000

HARREL, Charles; MOTT, Jack; BATEMAN, Robert; BOWDEN, Royce; GOGG, Thomas. **Simulação**: otimizando os sistemas. São Paulo: Belge Simulação e Imam, 2002.

HILLIER, Frederick, LIEBERMAN, Gerald. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**: modelagem em Excel. Rio de Janeiro: Campus 2002.

LOPES, Ana Lúcia Miranda; GALVÃO, Ana Lúcia. **Introdução à pesquisa operacional**; design instrucional Lígia Maria Soufen Tumolo ; [assistente acadêmico Nágila Cristina Hinckel, Roberta de Fátima Martins]. – 3. ed. rev. e atual. – Palhoça: UnisulVirtual, 2010.

MATHUR, Kamlesh; SOLOW, Daniel **Management Science**: The art of decision making. New Jersey: Prentice Hall, 1997.

MOREIRA, Daniel A. **Pesquisa Operacional**: Curso Introdutório. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

OLSON, David; EVANS, James. **Introduction to Simulation and Risk Analysis**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

PASSOS, Eduardo Jose Pedreira Franco dos. **Programação Linear como Instrumento da Pesquisa Operacional**. São Paulo: Atlas, 2008.

POWEL, STEPHEN; BAKER, KENNETH. **A Arte da Modelagem com Planilhas**: ciência da gestão, engenharia de planilhas e arte da modelagem. Tradução Amir Kurban – Rio de Janeiro: LTC, 2006.

PRADO, Darci. **PERT/CPM**. Belo Horizonte: EDG, 1998.

PRADO, Darci. **Programação linear**. Belo Horizonte: EDG, 1998.

PRADO, Darci. **Teoria das filas e da simulação**. Belo Horizonte: EDG, 1999.

RAMALHETE, Manuel; GUERREIRO, Jorge; MAGALHÃES, Alípio. **Programação Linear**. Vol I. Lisboa: McGrawHill, 1984.

RENDER, Barry; STAIR, Ralph M.; BALAKRISHNAN, Nagraj. **Managerial decision modeling with spreadsheets**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2003.

SOBRAPO. Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional. Disponível em: <http://www.sobrapo.org.br/>. Acesso em: 04 dez. 2014.

TAYLOR, Bernard W. **Introduction to management science**. 8th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2004

WINSTON, Wayne; ALBRIGHT, Christian. **Practical management science**: Spreadsheet modeling and applications. Belmont: Duxbury Press, 1997

Sobre os Professores Conteudistas

Ana Lúcia Miranda Lopes

Engenheira civil formada pela PUC/RS, mestre e doutora em Engenharia de Produção pelo PPGEP/UFSC. É professora de Pesquisa Operacional há 8 anos e professora do Mestrado em Administração da UNISUL. Utiliza as técnicas de pesquisa operacional em suas pesquisas com o objetivo de avaliar o desempenho de organizações. Tem vários trabalhos publicados nesta área.

Ana Lúcia Meira da Veiga Galvão

É professora da Unisul Virtual e foi professora de Pesquisa Operacional no curso de graduação em Administração das Faculdades Energia/SC.

Moacir Fogaça

Possui graduação em Engenharia Operacional Eletronica Industrial pela Universidade Presbiteriana Mackenzie (1980), graduação em Tecnologia Eletrônica pela Universidade Presbiteriana Mackenzie (1980). Graduado em Tecnologia em Gestão Financeira pela Unisul em 2009. Graduado em Administração (Bacharelado) pela Unisul em 2011/1. MBA pela Fundação Getúlio Vargas (2009), Mestrado em Gestão Empresarial pela Unisul (2003). Atualmente é professor titular da Universidade do Sul de Santa Catarina e coordena o Curso Superior de Tecnologia em Logística na Unisul Virtual. Tem experiência na área de Engenharia Elétrica, com ênfase em Engenharia Eletrônica e Telecomunicações, atuando principalmente nas seguintes áreas: logística, qualidade, internet e ensino a distância. Experiência de 20 anos em Telecomunicações e em docência no ensino superior de 13 anos. Leciona Na Unisul Virtual e nos Cursos presenciais de Administração e Engenharia de Produção.

Respostas e Comentários das Atividades de Autoavaliação

Capítulo 1

1. O que é pesquisa operacional? Pesquise na internet e busque outras definições além da que foi apresentada a você.

A **Pesquisa Operacional** é uma ciência aplicada voltada para a resolução de problemas reais. Tendo como foco a tomada de decisões, aplica conceitos e métodos de outras áreas científicas para concepção, planejamento ou operação de sistemas para atingir seus objetivos. Através de desenvolvimentos de base quantitativa. A Pesquisa Operacional visa também introduzir elementos de objetividade e racionalidade nos processos de tomada de decisão, sem descuidar no entanto dos elementos subjetivos e de enquadramento organizacional que caracterizam os problemas

Fonte: **http://pt.wikipedia.org/wiki/Pesquisa_operacional**

2. **Pesquisa na internet o que é cada uma das técnicas de pesquisa operacional**:

Os **algoritmos genéticos** são uma família de modelos computacionais inspirados na evolução, que incorporam uma solução potencial para um problema específico numa estrutura semelhante a de um cromossomo e aplicam operadores de seleção e "cross-over" a essas estruturas de forma a preservar informações críticas relativas à solução do problema. Normalmentes os AG's são vistos como otimizadores de funções, embora a quantidade de problemas para o qual os AG's se aplicam seja bastante abrangente.

Fonte: **http://www.gta.ufrj.br/~marcio/genetic.html)**

As **abordagens multicritério** se constituem em formas de modelar os processos de decisão, onde entram em jogo: uma decisão a ser tomada, os eventos desconhecidos que podem afetar os resultados, os possíveis cursos de ação e os próprios resultados. Estes modelos refletem, de maneira suficientemente estável, o juízo de valores dos decisores.

Dessa forma, as abordagens multicritérios funcionam como uma base para discussão, principalmente nos casos onde há conflitos entre os decisores, ou ainda, quando a percepção do problema pelos vários atores envolvidos ainda não está totalmente consolidada[Bouyssou(1989) em Noronha(1998)]. Seu objetivo, portanto, é ajudar o decisor a analisar os dados que são intensamente complexos no campo ambiental e buscar a melhor estratégia de gestão do meio ambiente.

Fonte: **http://www.cprm.gov.br/rehi/simposio/go/Analise%20da%20Aplicacao%20de%20Metodos%20Multicriterios%20de%20Apoio%20a%20Decisao%20na%20Gestao%20de%20Recursos%20Hidricos.pdf**

Em **matemática**, a **cadeia de Markov** é um caso particular de **processo estocástico**. Com tempo discreto. E apresentando a propriedade de Markov, chamada assim em homenagem ao matemático **Andrei Andreyevich Markov**. A definição desta propriedade, também chamada de memória markoviana, é que os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido.

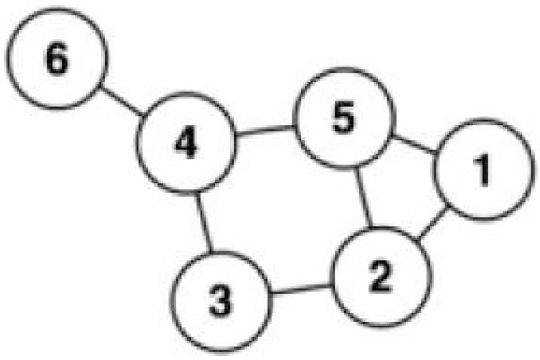
Fonte: **http://pt.wikipedia.org/wiki/Cadeias_de_Markov**

O método de **Análise por Envoltória de Dados** (DEA, do inglês *Data Envelopment Analysis*) é uma **metodologia** de análise de **eficiência** que compara uma eficiência revelada (tida como eficiência otimizada) com a eficiência das unidades analisadas estabelecendo um indicador de avaliação da eficiência da relação **insumos/produtos** dessas unidades.

A DEA utiliza-se da **programação matemática** para obter avaliações *ex post facto* da eficiência relativa dos resultados dos gestores, quer tenham sido planejados ou executado.

Fonte: **http://pt.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lise_por_envolt%C3%B3ria_de_dados**

A **Teoria dos Grafos** é o ramo da **matemática** que estuda as propriedades de **grafos**.



Um grafo com 6 vértices e 7 arestas

Um grafo é um conjunto de pontos, chamados **vértices** (ou nodos ou nós), conectados por linhas, chamadas de **arestas** (ou arcos). A nomenclatura de nodos e arcos está caindo em desuso.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_grafos

O principal objetivo do controle de estoque "é otimizar o investimento em estoques, aumentando o uso eficiente dos meios internos de uma empresa, e minimizar as necessidades de capital investido em estoque". (Marco Aurélio Dias, Administração de Materiais, 1995)

Fonte: **http://pt.wikipedia.org/wiki/Controle_de_estoque**

Programação dinâmica é um método para a construção de **algoritmos** para a resolução de problemas computacionais, em especial os de **otimização combinatória**. Ela é aplicável à problemas no qual a solução ótima pode ser computada a partir da solução ótima previamente calculada e memorizada - de forma a evitar recálculo - de outros subproblemas que, sobrepostos, compõem o problema original.

Fonte: **http://pt.wikipedia.org/wiki/Programa%C3%A7%C3%A3o_din%C3%A2mica**

Programação Linear é uma importante área da optimização por várias razões. Muitos problemas práticos em **pesquisa operacional** podem ser expressos como problemas de programação linear. Certos casos especiais de programação linear, tais como problemas de network flow e problemas de multicommodity flow são considerados importantes o suficiente para que se tenha gerado muita pesquisa em algoritmos especializados para suas soluções. Vários algoritmos para outros tipos de problemas de optimização funcionam resolvendo problemas de PL como sub-problemas. Historicamente, ideias da programação linear inspiraram muitos dos conceitos centrais de teoria da optimização, tais como dualidade, decomposição, e a importância da convexidade e suas generalizações.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Programa%C3%A7%C3%A3o_linear

Programação não-linear:

O termo otimização é empregado às vezes em referência a uma classe específica de problemas de Programação matemática não linear. No entanto, Otimização, pode ser usado para designar Programação matemática de forma tornar o significado do termo mais compreensível. Neste sentido, optamos por usar Otimização Linear, Otimização Inteira, Otimização não linear para nomear os problemas classicamente conhecidos como programação linear, programação inteira e programação não linear, respectivamente.

Fonte: **http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/socorro.rangel.pdf**

Redes neuronais (**redes neurais** no **Brasil**), ou, mais propriamente **Redes neuronais artificiais**, são sistemas computacionais baseados numa aproximação à computação baseada em ligações. Nós simples u “neurões”, “neurônios”, “processadores” ou “unidades”) são interligados para formar uma rede de nós - daí o termo “rede neuronal”. A inspiração original para esta técnica advém do exame das estruturas do **cérebro**, em particular do exame de **neurônios**.

Fonte: **http://pt.wikipedia.org/wiki/Redes_neurais**

Em computação, simulação consiste em empregar técnicas matemáticas em computadores com o propósito de imitar um processo ou operação do mundo real. Desta forma, para ser realizada uma simulação, é necessário construir um modelo computacional que corresponda à situação real que se deseja simular.

São alguns casos clássicos que justificam a simulação:

Para descrever o comportamento de um **Sistema**. A simulação pode ser usada para mostrar como um sistema funciona, ao contrário de como as pessoas acreditam que funcione;

Quando experimentar é dispensioso. Em casos em que uma experiência real seria onerosa, a simulação pode oferecer bons resultados sem a necessidade de grandes investimentos;

Quando experimentar não é adequado. Por exemplo, não é adequado experimentar o sistema de contingência de uma usina nuclear.

Fonte: **http://pt.wikipedia.org/wiki/Simula%C3%A7%C3%A3o**

Teoria da decisão é uma área de estudo da matemática discreta relacionada à e de interesse de estudiosos de todos os ramos da ciência, engenharia e atividades das ciências sociais. Ela está preocupada em como os tomadores de decisão ideais ou reais tomam ou devem tomar decisões e em como as decisões ótimas podem ser alcançadas.

Fonte: **http://en.wikipedia.org/wiki/Decision_theory**

A teoria das filas é um ramo da **probabilidade** que estuda a formação de **filas**, através de análises **matemáticas** precisas e propriedades mensuráveis das filas. Ela provê modelos para demonstrar previamente o comportamento de um sistema que ofereça serviços cuja demanda cresce **aleatoriamente**, tornando possível dimensioná-lo de forma a satisfazer os clientes e ser viável economicamente para o provedor do serviço, evitando desperdícios e gargalos.

Fonte: **http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_das_filas**

Teoria dos Jogos é um ramo da **matemática aplicada** que estuda situações estratégicas onde jogadores escolhem diferentes ações na tentativa de melhorar seu retorno. Inicialmente desenvolvida como ferramenta pra compreender **comportamento econômico** e depois por **Corporação RAND** para definir **estratégias nucleares**, a teoria dos jogos é agora usada em diversos campos acadêmicos. A partir de 1970 a teoria dos jogos passou a ser aplicada ao estudo do comportamento animal, incluindo evolução das espécies por **seleção natural**. Devido a interesse em jogos como o **dilema do prisioneiro**, no qual interesses próprios e racionais prejudicam a todos, a teoria dos jogos vem sendo aplicada na **ciência política, ética**, **filosofia** e, recentemente, no **jornalismo**, área que apresenta inúmeros e diversos jogos, tanto competitivos como cooperativos. Finalmente, a teoria dos jogos despertou a atenção da **ciência da computação** que a vem utilizando em avanços na **inteligência artificial** e **cibernética**.

Fonte: **http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_jogos**

Capítulo 2

1. Uma lanchonete encomenda uma determinada quantidade de empadas por dia. A demanda varia a cada dia mas o gerente da lanchonete tem observado esta demanda e construiu a seguinte tabela:

Distribuição de Probabilidade da demanda por empadas

Nº. de unidades vendidas por dia	Probabilidade	Probabilidade acumulada	Intervalo nºs. aleatorios
30	0,10		
40	0,27		
50	0,33		
60	0,3		

Cada empada custa à lanchonete R$ 1,00 e é vendida a R$ 2,00. As empadas que sobram em um dia são doadas a um asilo de idosos. A lanchonete compra 50 empadas por dia. Com base nestas informações desenvolva um modelo de simulação que calcule o lucro diário provável da empresa. Utilize a tabela abaixo para simular 10 dias de movimento da lanchonete.

Resposta:

Distribuição de Probabilidades de demanda por empadas			
Nº. de unidades vendidas por dia	Probabilidade	Probabilidade acumulada	Intervalo nºs. aleatórios
30	0,1	0,1	[0 - 0,1]
40	0,27	0,37	[0,1 - 0,37]
50	0,33	0,7	[0,37 - 0,7]
60	0,3	1	[0,7 - 1,0]

Preço de venda =	R$ 2,00
Custo =	R$ 1,00
Lucro por empada =	R$ 1,00

Dia	Nº aleatório	Demanda	Receita (R$)	Custo (R$)	Lucro (R$)
1	0,795429	60	120	50	50
2	0,1228	40	80	50	30
3	0,2229	40	80	50	30
4	0,4468	50	100	50	50
5	0,3055	40	80	50	30
6	0,8294	60	120	50	50
7	0,3787	50	100	50	50
8	0,7943	60	120	50	50
9	0,865	60	120	50	50
10	0,9314	60	120	50	50
Média					44
Desvio-padrão					9,66

2. O número de lâmpadas halógenas vendidas por semana em uma loja de materiais elétricos tem a seguinte distribuição de probabilidade. Mostre como usar números aleatórios para simular resultados para esta distribuição.

Resposta:

Distribuição de Probabilidades de demanda por lâmpadas			
Número de lâmpadas	Probabilidade	Probabilidade acumulada	Intervalo nºs. aleatórios
0	0,15	0,15	(0-0,15)
1	0,2	0,35	(0,15-0,35)
2	0,35	0,7	(0,35-0,7)
3	0,15	0,85	(0,7-0,85)
4	0,1	0,95	(0,85-0,95)
5	0,05	1	(0,95-1,0)

Evento	Nº.aleatório	Nº. de lâmpadas vendidas
1	0,860438	4
2	0,57595	2
3	0,5743	2
4	0,8976	4
5	0,581	2
6	0,6202	2
7	0,6819	2
8	0,3114	1
9	0,0143	0
10	0,1064	0
Média:		1,9

3. (CORRAR, THEÓFILO, 2004) Uma empresa de varejo, do ramo farmacêutico, deseja simular sua demanda diária de determinado item do estoque: vitamina C. Para isto procedeu ao levantamento de dados históricos sobre esta demanda. O relatório de vendas dos últimos 100 dias apontou o seguinte comportamento para a demanda diária de frascos de vitamina C. Com base nestes dados efetue a simulação da demanda por frascos de vitamina C (obs.: faça a sua simulação utilizando a 5ª. linha da tabela de nos. aleatório).

Resposta:

Demanda Diária (nº de frascos)	Freqüência (nº. de dias)	Probabilidade	Probabilidade Acumulada	Intervalo nºs. aleatorios
10	30	0,3	0,3	[0-0,3]
15	30	0,3	0,6	(0,3-0,6]
20	40	0,4	1	(0,6-1]
Total	100	-		

Evento	Número aleatório	Demanda
1	0,889193	20
2	0,97623	20
3	0,7441	20

4	0,6789	20
5	0,166	10
6	0,0345	10
7	0,0066	10
8	0,5449	15
9	0,085	10
10	0,6382	20
Média		15,5

4. A tabela abaixo mostra as probabilidades da distribuição de dividendos pela Usiminas (em US$ milhões) para os próximos anos. Construa uma simulação que indique quanto a Usiminas irá distribuir na forma de dividendos no próximo ano. Calcule a média e o desvio padrão dos resultados.

Dividendos US$ (milhões)	Probabilidade	Probabilidade Acumulada	Intervalo n^{os}. aleatorios
50	0,4	0,4	[0-0,4]
100	0,1	0,5	(0,4-0,5]
150	0,3	0,8	(0,5-0,8]
200	0,2	1	(0,8-1]
Evento	Número aleatório	Dividendo	
1	0,210096	R$ 50,00	
2	0,56622	R$ 150,00	
3	0,0711	R$ 50,00	
4	0,5213	R$ 150,00	
5	0,9204	R$ 200,00	
6	0,6073	R$ 150,00	
7	0,3871	R$ 50,00	
8	0,5316	R$ 150,00	
9	0,6437	R$ 150,00	
10	0,1376	R$ 50,00	
Média		R$ 115,00	

5. O gestor de uma empresa que produz cadeiras de dentista pretende controlar melhor o atendimento da demanda diária de seus produtos empregando um modelo de simulação. O relatório de vendas de um dos tipos de cadeiras comercializadas pela empresa apresentou nos últimos dois anos uma demanda mensal que varia entre 20 e 28 unidades (tabela 1). Considerando as informações desta tabela construa uma simulação e compute o número médio mensal de cadeiras a serem vendidas no próximo mês.

Demanda Mensal por cadeiras do tipo A				
Quantidade demandada de cadeiras	Número de meses no ano (frequência)	Probabilidade *	Probabilidade Acumulada	Intervalo n^{os}. aleatorios
20	3	0,13	0,13	(0 - 0,13]
22	6	0,25	0,38	(0,13 - 0,38]
24	8	0,33	0,71	(0,38 - 0,71]
26	4	0,17	0,88	(0,71 - 0,88]
28	3	0,13	1,00	(0,88 - 1]
Total	24	-		
* Probabilidade = 3/24				

Tabela 2 – Simulação (obs.: inicie a simulação na 10ª linha da tabela de números aleatórios)

Evento	No. Aleatório	Demanda
1	0,736661	26
2	0,95819	28
3	0,5568	24
4	0,1205	20
5	0,6973	24
6	0,3881	24
7	0,2172	22
8	0,0316	20
9	0,8494	26
10	0,8428	26
Média		24

6. Uma microempresa especializada na confecção de calças de jeans tem seus custos variáveis variando de acordo com alguns fatores, tais como: custo do jeans no distribuidor, custos de mão de obra, frete, entre outros. O preço de venda e a demanda são também variáveis aleatórias que variam de acordo com o preço dos competidores. As distribuições de probabilidade destas variáveis são descritas abaixo. Sabe-se que o custo fixo (CF) da microempresa é de R$900 por mês. Construa uma simulação de 10 linhas de produção e vendas e calcule o lucro médio mensal da empresa.

Tabela 1 – Demanda Mensal Observada

Volume de Vendas (demanda)	Probabilidade	Probabilidade Acumulada	Intervalo nos. aleatorios
300	0,12	0,12	[0-0,12]
400	0,18	0,3	(0,12-0,3]
500	0,2	0,5	(0,3-0,5]
600	0,23	0,73	(0,5-0,73]
700	0,17	0,9	(0,73-0,9]
800	0,1	1	(0,9-1]

Tabela 2 – Preço de Venda

Preço de Venda (R$)	Probabilidade	Probabilidade Acumulada	Intervalo nos. aleatorios
22	0,07	0,07	[0-0,07]
23	0,16	0,23	(0,07-0,23]
24	0,24	0,47	(0,23-0,47]
25	0,25	0,72	(0,47-0,72]
26	0,18	0,9	(0,72-0,9]
27	0,1	1	(0,9-1)
	1		

Tabela 3– Custos Variáveis

Custo Variável (R$)	Probabilidade	Probabilidade Acumulada	Intervalo nos aleatórios
8	0,17	0,17	[0-0,17]
9	0,32	0,49	(0,17-0,49]
10	0,29	0,78	(0,49-0,78]
11	0,14	0,92	(0,78-0,92]
12	0,08	1	(0,92-1]
	1		

Tabela 4 – Simulação (Obs.: inicie na 2ª linha da tabela de números aleatórios

Evento	Nº aleatório	Preço de Venda (Pv)	Nº aleatório	Custo Variável (Cv)	Nº aleatório	Demanda (q)	Lucro = (Pv - Cv)*q - CF
1	0,210096	R$ 23,00	0,860438	R$ 11,00	0,620942	600	R$ 6.300,00
2	0,56622	R$ 25,00	0,57595	R$ 10,00	0,47836	500	R$ 6.600,00
3	0,0711	R$ 23,00	0,5743	R$ 10,00	0,1793	400	R$ 4.300,00
4	0,5213	R$ 25,00	0,8976	R$ 11,00	0,2349	400	R$ 4.700,00
5	0,9204	R$ 27,00	0,581	R$ 10,00	0,0441	300	R$ 4.200,00
6	0,6073	R$ 25,00	0,6202	R$ 10,00	0,2918	400	R$ 5.100,00
7	0,3871	R$ 24,00	0,6819	R$ 10,00	0,5552	600	R$ 7.500,00
8	0,5316	R$ 25,00	0,3114	R$ 9,00	0,4174	500	R$ 7.100,00
9	0,6437	R$ 25,00	0,0143	R$ 8,00	0,4314	500	R$ 7.600,00
10	0,1376	R$ 23,00	0,1064	R$ 8,00	0,9456	800	R$ 11.100,00
Lucro Médio							R$ 6.450,00

7. (Traduzido e adaptado de Render, Stair e Balakrischnan, 2003) Jucélio, um estudante de graduação em Administração, tem tido problemas para prever sua renda mensal bem como a quantia que sobrará a cada mês. Jucélio recebe um salário fixo advindo de uma bolsa de pesquisa mais algum dinheiro extra que ele ganha lecionando aulas particulares de pesquisa operacional. Suas chances de várias níveis de renda são mostradas na tabela abaixo:

Renda Mensal (R$)	Probabilidade	Probabilidade Acumulada	Intervalo nºs. aleatorios
350	0,40	0,40	[0-0,4]
400	0,20	0,60	(0,4-0,6]
450	0,30	0,90	(0,6-0,9]
500	0,10	1,0	(0,9-1,0]

Gastos Mensais (R$)	Probabilidade	Probabilidade Acumulada	Intervalo nºs. aleatorios
300	0,1	0,1	[0-0,1]
400	0,45	0,55	(0,1-0,55]
500	0,3	0,85	(0,55-0,85]
600	0,15	1	(0,85-1,0]

0

Tabela para a simulação (Inicie na 5ª linha da tabela, Anexo 1):

Mês	Nº aleatório	Renda	Nº aleatório	Gastos	Saldo na conta (R$)
0	-	-		-	R$ 600,00
1	0,889193	R$ 450,00	0,284	R$ 400,00	R$ 650,00
2	0,97623	R$ 500,00	0,9382	R$ 600,00	R$ 550,00
3	0,7441	R$ 450,00	0,7199	R$ 500,00	R$ 500,00
4	0,6789	R$ 450,00	0,3808	R$ 400,00	R$ 550,00
5	0,166	R$ 350,00	0,0439	R$ 300,00	R$ 600,00
6	0,0345	R$ 350,00	0,4093	R$ 400,00	R$ 550,00
7	0,0066	R$ 350,00	0,2048	R$ 400,00	R$ 500,00
8	0,5449	R$ 400,00	0,1385	R$ 400,00	R$ 500,00
9	0,085	R$ 350,00	0,831563	R$ 500,00	R$ 350,00
10	0,6382	R$ 450,00	0,99475	R$ 600,00	R$ 200,00
11	0,633823	R$ 450,00	0,6982	R$ 500,00	R$ 150,00
12	0,98545	R$ 500,00	0,0287	R$ 300,00	R$ 350,00

8. (traduzido e adaptado de Taylor, B., 2004) O gerente da Computer World, uma loja que vende notebooks e equipamentos relacionados, está tentando determinar quantos computadores a loja deveria solicitar cada semana. Uma primeira consideração nesta decisão é o número médio de notebooks que a loja venderá por semana e a receita média gerada pela venda dos mesmos. Cada notebook é vendido por R$ 4.300,00 O (Preço de Venda: Pv). O número de notebooks vendidos por semana é uma variável randômica (aleatória) que varia de 0 a 4 unidades. Com base nos arquivos da empresa, o gerente pôde determinar a frequência da demanda por notebooks das últimas 100 semanas descrita na tabela abaixo. Com base nestes dados monte uma simulação de 10 semanas e responda ao gerente:

a. o número médio de computadores vendidos por semana;

b. a receita média obtida por semana.

Tabela 1 – Demanda Observada

Demanda de Notebooks por semana	Frequência	Probabilidade	Probabilidade Acumulada	Intervalo nºs aleatórios
0	20	0,2	0,2	[0 - 0,2]
1	40	0,4	0,6	(0,2 - 0,6]
2	20	0,2	0,8	(0,6 - 0,8]
3	10	0,1	0,9	(0,8 - 0,9]
4	10	0,1	1	(0,9 - 1]
Total	100	-		-

Tabela 2 – Simulação (observação: inicie na 5a linha da tabela de números aleatórios)

Semana	Nº. Aleatório	Demanda (q)	Receita = Pv*q
1	0,889193	3	R$ 12.900,00
2	0,97623	4	R$ 17.200,00
3	0,7441	2	R$ 8.600,00
4	0,6789	2	R$ 8.600,00
5	0,166	0	R$ -
6	0,0345	0	R$ -
7	0,0066	0	R$ -
8	0,5449	1	R$ 4.300,00
9	0,085	0	R$ -
10	0,6382	2	R$ 8.600,00
Média		1,4	R$ 6.020,00

9. (Andrade,L., 2004) Uma empresa deseja lançar um produto no mercado e para isso realizou uma pesquisa da preferência dos consumidores. Foi constatado que há uma probabilidade de 40% do produto ser bem aceito e, portanto, uma probabilidade de 60% de que a aceitação fique abaixo das expectativas. No caso de ser o produto bem aceito, poderão ocorrer lucros segundo os dados da Tabela 1. Em caso contrário, os lucros poderão ocorrer conforme a distribuição de probabilidades da Tabela 2. Qual o lucro médio a empresa pode esperar? Com base no lucro médio e no desvio-padrão avalie o risco da decisão.

Resposta:

Tabela 1 – Lucro c/ Boa Aceitação do Produto

Lucro	Probabilidade (%)	Probabilidade Acumulada	Intervalo nºs.aleatorios
10	10	0,1	[0-0,1]
12	15	0,25	(0,1-0,25]
14	20	0,45	(0,25-0,45]
16	30	0,75	(0,45-0,75]
18	15	0,9	(0,75-0,9]
20	10	1	(0,9-1,0]

Tabela 2 – Lucro c/ Má Aceitação do Produto

Lucro ($)	Probabilidade (%)	Probabilidade Acumulada	Intervalo n^{os}.aleatorios
4	10	0,1	[0-0,1]
6	20	0,3	(0,1-0,3]
8	30	0,6	(0,3-0,6]
10	20	0,8	(0,6-0,8]
12	15	0,95	(0,8-0,95]
14	5	1	(0,95-1,0]

Aceitação do Produto	Probabilidade	Probabilidade Acumulada	Intervalo N^{os}. Aleatorios
Boa	0,4	0,4	[0-0,4]
Má	0,6	1	(0,4-1,0]

Observe que primeiro temos que saber se a aceitação do produto foi boa ou má. Posteriormente deve-se sortear novos números aleatórios para chegarmos ao lucro.

Tabela 3 – Simulação (observação: inicie na 2a linha da tabela de números aleatórios)

Evento	N^0. aleatório	Aceitação	N^0. aleatório	Lucro (R$)
1	0,210096	Boa	0,860438	18
2	0,56622	Má	0,57595	8
3	0,0711	Boa	0,5742	16
4	0,5213	Má	0,8976	12
5	0,9204	Má	0,581	8
6	0,6073	Má	0,6202	10
7	0,3871	Boa	0,6819	16
8	0,5316	Má	0,3114	8
9	0,6437	Má	0,0143	4
10	0,1376	Boa	0,1064	12
Lucro Médio				R$ 11,2
Desvio-padrão				R$ 4,44

A empresa não terá prejuízo com o lançamento deste produto pois alcançará um lucro médio de R$ 11,20. Não apresenta, portanto, risco muito elevado.

Capítulo 3

1. Suponha que uma empresa tenha intenção de produzir 5 tipos de calçados diferentes: A, B, C, D e E que poderá vender, respectivamente, por US$ 10, 12, 15, 13 e 14. O Quadro abaixo mostra as quantidades de couro, tempo de máquina e couraça imperflex necessárias para produzir um par de calçado assim como os custos por unidade e as demandas pelos diferentes tipos de calçado. Sabendo que a empresa dispõe todo mês de 390 m2 de couro, 96 m2 de couraça imperflex e 3200 min de tempo de máquina construa um modelo que diga ao empresário quantos pares de cada tipo de calçado ele deverá produzir mensalmente para maximizar seu lucro.

Tipos de calçados	Demanda	Tempo de Máquina (min)	Couro (m2)	Couraça Imperflex (m2)	Custo (US$)
A	390	7,5	0,13	0,0320	5,53
B	33	15	0,14	0,0377	6,64
C	20	15	0,19	0,0489	8,30
D	46	15	0,17	0,0413	7,19
E	11	15	0,18	0,0443	7,74

Resposta:

Variáveis de decisão:

Q_A = No. de pares de calçado do tipo A produzir por mês

Q_B = No. de pares de calçado do tipo B produzir por mês

Q_C = No. de pares de calçado do tipo C produzir por mês

Q_D = No. de pares de calçado do tipo D produzir por mês

Q_E = No. de pares de calçado do tipo E produzir por mês

Modelo:

Maximizar $4{,}47Q_A + 5{,}36Q_B + 6{,}7Q_C + 5{,}81Q_D + 6{,}26Q_E$

s.a.

Lim tempo de máq) $7{,}5Q_A + 15Q_B + 15Q_C + 15Q_D + 15Q_E <= 3200$

Lim Couro) $0{,}13Q_A + 0{,}14Q_B + 0{,}19Q_C + 0{,}17Q_D + 0{,}18Q_E <= 390$

Lim Couraça) $0{,}032Q_A + 0{,}0377Q_B + 0{,}0489Q_C + 0{,}0413Q_D + 0{,}0443Q_E <= 96$

Demanda A) $Q_A <=390$

Demanda B) $Q_B <=33$

Demanda C) Q_C <=20

Demanda D) Q_D <=46

Demanda D) Q_E <=11

$Q_A, Q_B, Q_C, Q_D, Q_E >= 0$

2. A LCL Motores Ltda. (LACHTERMACHER, 2002), fábrica de motores especiais, recebeu recentemente R$ 90.000 em pedidos de seus três tipos de motores. Cada motor necessita de um determinado número de horas de trabalho no setor de montagem e no setor de acabamento, que está descrito abaixo. A LCL pode terceirizar parte de sua produção.

A tabela abaixo resume estes dados.

Modelo	1	2	3	Disponibilidade
Demanda (unidades)	3000	2500	500	-
Montagem (h/unid)	1.5	2	0.5	9000 horas
Acabamento (h/unid)	2.5	1	5	10000 horas
Custo de Produção ($/unid)	45	80	120	-
Custo de compra do terceirizado	65	92	160	-

A LCL Motores deseja determinar quantos motores devem ser produzidos em sua fábrica e quantos devem ser comprados da terceirizada para atender à demanda e obter o menor custo total possível.

Resposta:

Variáveis de decisão:

P_1 = número de motores do tipo 1 produzir

P_2 = número de motores do tipo 2 produzir

P_3 = número de motores do tipo 3 produzir

C_1 = número de motores do tipo 1 comprar

C_2 = número de motores do tipo 2 comprar

C_3 = número de motores do tipo 3 comprar

Modelo:

Minimizar $45P_1 + 80P_2 + 120P_3 + 65C_1 + 92C_2 + 160C_3$

s.a.

Horas montagem) $1,5P_1 + 2P_2 + 0,5P_3 <= 9000$

Horas acabamento) $2,5P_1 + 1P_2 + 5P_3 <= 10000$

Demanda motor 1) $P_1 + C_1 = 3000$

Demanda motor 2) $P_2 + C_2 = 2500$

Demanda motor 3) $P_3 + C_3 = 500$

$$P_1, P_2, P_3, C_1, C_2, C_3 >= 0$$

3. Uma metalúrgica compra ferro velho de três fornecedores diferentes: A,B e C. Cada carga do fornecedor A contém 2,0 ton de ferro, 2,0 ton. de alumínio e 1,3 ton. de cobre. O custo da carga é de R$ 400,00. Cada carga do fornecedor B contém 1,3 ton de ferro, 2,4 ton. de alumínio e 1,9 ton. de cobre. O custo da carga é de R$ 580,00. Cada carga do fornecedor C contém 0,6 ton de ferro, 3,5 ton. de alumínio e 0,9 ton. de cobre. O custo da carga é de R$ 390,00. A metalurgia precisa adquirir, para a próxima semana, pelo menos 25 toneladas de cada um dos metais citados (ferro, alumínio e cobre). Quantas cargas devem ser adquiridas de cada fornecedor para minimizar o custo de aquisição dos metais?

Variáveis de decisão:

Q_{FA} = número de cargas comprar do fornecedor A para atender a demanda da próxima semana;

Q_{FB} = número de cargas comprar do fornecedor B para atender a demanda da próxima semana;

Q_{FC} = número de cargas comprar do fornecedor C para atender a demanda da próxima semana;

Modelo:

Minimizar $400\ Q_{FA} + 580\ Q_{FB} + 390\ Q_{FC}$

s. a.

Ferro) $2\ Q_{FA} + 1,3\ Q_{FB} + 0,6\ Q_{FC} >= 25$

Alumínio) $2\ Q_{FA} + 2,4\ Q_{FB} + 3,5\ Q_{FC} >= 25$

Cobre) $1,3\ Q_{FA} + 1,9\ Q_{FB} + 0,9\ Q_{FC} >= 25$

$Q_{FA}, Q_{FB}, Q_{FC} >= 0$

4. Uma associação de pescadores situada perto de Florianópolis entrega sua pesca para as empresas de processamento de peixe utilizando diferentes tipos de caminhão. Tendo fechado recentemente um contrato para começar a fornecer 1000 toneladas de peixe por mês para empresas catarinenses necessita criar um frota para atender esta demanda. A companhia tem $200.000 disponíveis, obtidos de uma linha de financiamento do BNDES, para criar esta frota consistindo de três tipos diferentes de caminhões. A capacidade, custo de operação e número máximo de viagens para cada tipo de caminhão são dados na tabela abaixo:

Tipo de Caminhão	Capacidade (ton)	Custo Compra($)	Custo por viagem ($)	Nº. máximo de viagens por mês
1	6	50.000	800	20
2	3	40.000	650	25
3	2	25.000	500	30

Sabe-se que o administrador da associação de pescadores tem em mente as seguintes regras:

a. não comprar mais do que 10 caminhões;

b. ao menos 3 caminhões do tipo 3 devem ser comprados (eles são necessários para rotas de viagens curtas e demanda baixa);

Formule um modelo para determinar a composição da frota que minimiza o custo mensal de operação enquanto satisfaz a demanda, ficando dentro do orçamento e satisfazendo os outros requerimentos da companhia.

Variáveis de decisão:

Q1 = número de caminhões do tipo 1 comprar

Q2 = número de caminhões do tipo 2 comprar

Q3 = número de caminhões do tipo 3 comprar

Construção da função objetivo:

Queremos determinar a composição da frota que minimiza o custo mensal de operação, portanto devemos multiplicar o custo de cada viagem com o número de viagens mensais que cada caminhão faz, assim:

Caminhão 1 => 800 x 20 = R$ 16000

Caminhão 2 => 650 x 25 = R$ 16250

Caminhão 3 => 500 x 30 = R$ 15000

Modelo:

Minimizar 16000 Q1 + 16250 Q2 + 15000 Q3

s. a.

Dinheiro) 50000Q1 + 40000Q2 + 25000Q3 <= 200000

Capacidade x viagens) 120Q1 + 75Q2 + 60Q3 >= 1000

Regra a) Q1 + Q2 + Q3 <= 10

Regra b) Q3 >= 3

Q1, Q2,Q3 >= 0

5. Determinado produtor deseja saber qual seria a melhor alocação de suas terras, de tal forma que seu lucro seja máximo. Sabe-se que suas terras estão divididas em três lotes, sendo 500, 800 e 700 hectares suas respectivas áreas. Sabe-se também que as possíveis culturas a serem implantadas seriam tomate, feijão e arroz, que oferecem lucros unitários ($/ha) de 600, 450 e 300; e que as terras não comportam mais do que 900 ha de tomate, 700 ha de feijão e 1000 ha de arroz. Deve também ser considerado que quaisquer das três culturas podem ser implantadas em quaisquer lotes e que pelo menos 60% de cada lote seja utilizado. Formule um modelo que indique quanto plantar de cada tipo de cultura em cada lote de modo a maximizar o lucro do produtor.

Resposta:

Variáveis de Decisão:

QT1 = Quantos hectares do lote 1 plantar com tomate

QT2 = Quantos hectares do lote 2 plantar com tomate

QT3 = Quantos hectares do lote 3 plantar com tomate

QF1 = Quantos hectares do lote 1 plantar com feijão

QF2 = Quantos hectares do lote 2 plantar com feijão

QF3 = Quantos hectares do lote 3 plantar com feijão

QA1 = Quantos hectares do lote 1 plantar com arroz

QA2 = Quantos hectares do lote 2 plantar com arroz

QA3 = Quantos hectares do lote 3 plantar com arroz

Modelo:

Maximizar 600QT1 + 600QT2 + 600QT3 + 450QF1 + 450QF2 + 450QF3 + 300QA1 + 300QA2 + 300QA3

s.a.

Limite Lote 1) QT1 + QF1 + QA1 <=500

Limite Lote 2) QT2 + QF2 + QA2 <=800

Limite Lote 3) QT3 + QF3 + QA3 <=700

Lim tomate) QT1 + QT2 + QT3 <=900

Lim feijão) QF1 + QF2 + QF3 <=700

Lim arroz) QA1 + QA2 + QA3 <=1000

Utilização lote 1) QT1 + QF1 + QA1 >= 300

Utilização lote 2) QT2 + QF2 + QA2 >= 480

Utilização lote 3) QT3 + QF3 + QA3 >=420

QT1,QT2,QT3,QF1,QF2,QF3,QA1,QA2,QA3 >=0

6. HG Corretora de Investimentos situada em São Paulo recebe um cliente que dispõe de 3 milhões. Este cliente deseja montar uma carteira de ações que lhe forneça o maior retorno esperado no próximo ano. O corretor escalado para atender este cliente lhe apresenta uma lista de ações que, segundo ele, estão em ponto de compra. Sua previsão é de que as ações irão fornecer o retorno apresentado na tabela abaixo. Seus preços unitários são também apresentados nesta tabela.

Nome das Empresas	Retorno Anual Esperado (%)	Custo unitário das ações (R$)
Petrobrás PN	9%	40
Embraer ON	11%	54
Gerdau PN	14%	68
Votorantin PN	28%	100
Unibanco PN	18%	70
Bradesco PN	10%	51
Itaú ON	22%	90

Para a realização deste investimento o cliente impõe duas condições:

1. que pelo menos R$500.000,00 seja alocado em ações de bancos e;
2. que pelo menos R$ 300.000,00 seja alocado na Petrobrás por saber que a mesma é uma boa pagadora de dividendos.

Formule o modelo de programação linear que responda ao cliente da corretora quanto alocar em cada ativo (ações) para maximizar o retorno total esperado ao mesmo tempo que obedece as condições impostas.

Resposta:

Variáveis de decisão:

Q_P = Nº. de ações da Petrobrás comprar para compor a carteira do cliente

Q_E = Nº. de ações da Embraer comprar para compor a carteira do cliente

Q_G = Nº. de ações da Gerdau comprar para compor a carteira do cliente

Q_V = Nº. de ações da Votorantin comprar para compor a carteira do cliente

Q_U = Nº. de ações do Unibanco comprar para compor a carteira do cliente

Q_B = Nº. de ações do Bradesco comprar para compor a carteira do cliente

Q_I = Nº. de ações do Itaú comprar para compor a carteira do cliente

Construção da Função objetivo:

IMP: o retorno do investimento calculado na função objetivo será a taxa de retorno multiplicada pelo custo da ação.

Portanto teremos:

Petrobrás => 0,09 x 40 = 0,36

Embraer ON => 0,11 x 54 = 5,94

Gerdau PN => 0,14 x 68 = 9,52

Votorantin PN => 0,28 x 100 = 28

Unibanco PN => 0,18 x 70 = 12,6

Bradesco PN => 0,10 x 51 = 5,1

Itaú ON => 0,22 x 90 = 19,8

Modelo:

Maximizar $3{,}6Q_P + 5{,}94Q_E + 9{,}52Q_G + 28Q_V + 12{,}6Q_U + 5{,}1Q_B + 19{,}8Q_I$

s.a.

Limite recursos) $40Q_P + 54Q_E + 68Q_G + 100Q_V + 70Q_U + 51Q_B + 90Q_I <= 3000000$

Imposição Bancos) $70Q_U + 51Q_B + 90Q_I >= 500000$

Imposição Petrobrás) $40Q_P >= 300000$

$Q_E, Q_G, Q_V, Q_U, Q_B, Q_I >=0$

7. (adaptado de Ramalhete, 2000) Uma agroindústria pretende determinar as quantidades de cada ingrediente, A e B, que devem ser misturadas para formar uma ração animal balanceada em termos de carbohidratos, vitaminas e proteínas a um custo mínimo. Os dados relativos ao custo de cada ingrediente, as quantidades mínimas diárias de ingredientes nutritivos básicos a fornecer a cada animal, bem como as quantidades destes existentes em A e B (g/kg) constam no quadro abaixo:

Ingredientes nutritivos	Ingrediente A	Ingrediente B	Quantidade Mínima Requerida(gramas)
Carbohidratos(g/kg)	20	50	200
Vitaminas(g/kg)	50	10	150
Proteínas(g/kg)	30	30	210
Custo ($/kg)	10	5	

Formule o modelo de programação linear.

Resposta:

Variáveis de decisão:

Q_A = quantidade (kg) do ingrediente A utilizar na mistura

Q_B = quantidade (kg) do ingrediente B utilizar na mistura

Modelo:

Minimizar Custo) $10Q_A + 5Q_B$ s.a.

Minimo carbohidrato) $20Q_A + 50Q_B >= 200$

Minimo vitaminas) $50Q_A + 10Q_B >= 150$

Minimo proteinas) $30Q_A + 30Q_B >= 210$

$Q_A, Q_B >=0$

8. (Corrar e Theófilo, 2004, modificado) Na qualidade de assessor de investimentos da Fundabanc, uma fundação de empregados de determinado banco, você foi chamado para estudar a melhor forma de aplicar os recursos disponíveis. A necessidade de limitar os riscos da empresa conduz a três tipos de aplicações: ações preferenciais, ações de companhias de utilidade pública e títulos da dívida pública. Na composição da carteira devem ser levadas em conta, as restrições impostas pela legislação e normas vigentes descritas abaixo.

Dado que a empresa tem disponível R$ 100.000,00 formule um modelo que indique à Fundabanc quanto deve ser aplicado em cada investimento de maneira a maximizar o retorno esperado ao mesmo tempo que obedece as restrições impostas abaixo. As taxas de retorno esperadas, em %, estão descritas na tabela abaixo.

Investimento	Símbolo	Taxa de retorno esperada (%)
Ações da Comgas	COMG	4,3
Ações da Cesp	CESP	3,7
Ações da Eletropaulo	ELP	1,8
Ações da Bematech	BEM	2,8
Títulos públicos federais	TPF	1,5
Títulos públicos municipais	TPM	2,4

Imposições:

- os títulos públicos (federais e municipais) não podem representar, juntos, menos do que R$ 30.000 dos investimentos;
- as ações preferenciais da Bematech estão limitadas a R$ 25.000,00 dos investimentos;
- as ações de companhias de utilidade pública devem contabilizar pelo menos R$ 30.000 dos investimentos.

Resposta:

Variáveis de decisão:

QCO = Quanto (R$) investir nas ações da Comgás

QCE = Quanto (R$) investir nas ações da Cesp

QEL = Quanto (R$) investir nas ações da Eletropaulo

QBE = Quanto (R$) investir nas ações da Bematech

QTF = Quanto (R$) investir em títulos públicos federais

QTM = Quanto (R$) investir em títulos públicos municipais

Modelo:

Maximizar retorno) 0,043QCO + 0,037QCE + 0,018QEL + 0,028QBE +0,015 QTF + 0,024QTM

s.a.

Limite recursos) QCO + QCE + QEL + QBE+ QTF +QTM <= 100000

Imposição títulos) QTF + QTM > = 30000

Imposição Bematech) QBE < = 25000

Imposição utilidade pública) QCO + QCE + QEL >= 30000

QCO, QCE, QEL, QBE, QTF, QTM > = 0

9. (Lachtermacher, 2002) A LCL Investimentos S.A. gerencia recursos de terceiros através da escolha de carteiras de investimento para diversos clientes, baseados em títulos diversos. Um de seus clientes exige que:

- não mais do que 25% do total aplicado deve ser investido em um único investimento;
- um valor superior a 50% do total aplicado deve ser investido em títulos de maturidade maiores que dez anos;
- o total aplicado em títulos de alto risco deve ser, no máximo, de 50% do total investido.

A tabela abaixo mostra os dados dos títulos selecionados. Determine qual percentual do total deve ser aplicado em cada tipo de título de maneira a maximizar o retorno anual.

	Retorno anual	Anos para vencimento	Risco
Título 1	8,7%	15	1 – Muito Baixo
Título 2	9,5%	12	3 – Regular
Título 3	12%	8	4 – Alto
Título 4	9%	7	2 – Baixo
Título 5	13%	11	4 – Alto
Título 6	20%	5	5 – Muito Alto

Resposta:

Variáveis de decisão:

T_1 = percentual da aplicação alocada no título 1

T_2 = percentual da aplicação alocada no título 2

T_3 = percentual da aplicação alocada no título 3

T_4 = percentual da aplicação alocada no título 4

T_5 = percentual da aplicação alocada no título 5

T_6 = percentual da aplicação alocada no título 6

Modelo:

Maximizar retorno) $0{,}087T_1 + 0{,}095T_2 + 0{,}12T_3 + 0{,}09T_4 + 0{,}13T_5 + 0{,}20T_6$

s.a.

Limite título 1) $T_1 <= 0{,}25$

Limite título 2) $T_2 <= 0{,}25$

Limite título 3) $T_3 <= 0{,}25$

Limite título 4) $T_4 <= 0{,}25$

Limite título 5) $T_5 <= 0{,}25$

Limite título 6) $T_6 <= 0{,}25$

Mínimo maturidade) $T_1 + T_2 + T_5 > = 0{,}50$

Máximo risco) $T_3 + T_5 + T_6 <= 0{,}50$

T1, T2, T3, T4, T5, T6 >=0

Capítulo 4

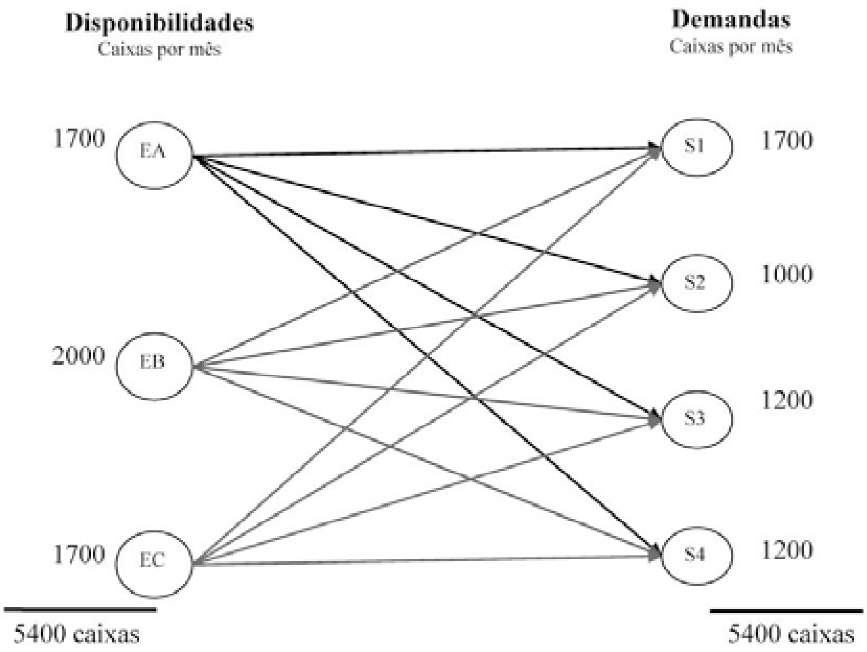
1. A empresa Natural tem 3 engarrafadoras de água mineral que abastecem diretamente quatro supermercados. No mês passado entregou 5.400 caixas de água para estes supermercados. O transporte é terceirizado e o seu custo no mês passado foi de R$24.600,00. Isto representa quase 55% do faturamento da Natural. Devido à participação muito elevada do custo com transporte no custo total da empresa sua equipe de consultores foi chamada. A Natural quer saber se existe uma maneira de gastar menos com transporte aumentando, então, o lucro da empresa. Observe que a hipótese de baixar os preços cobrados pela terceirizada não é um opção. O administrador não teve êxito e concluiu e que esta empresa transportadora é ainda a de menor custo para a Natural. Sua equipe, então, considera que a única maneira de baixar o custo total com transporte é repensando o plano de transporte observando, é claro, as demandas de cada supermercado e capacidades das unidades engarrafadoras (Tabela 4.4). Os dados relativos aos custos de transporte são os descritos abaixo. Com base nestes dados formule um novo plano de transporte para o próximo mês que leve ao custo mínimo possível.

Tabela 4.4 – Custos de Transporte (R$/caixa)

Depósito/Engarrafadora	D1	D2	D3	D4	Capac em cx/mês
EA	5	3	2	6	1700
EB	4	7	8	10	2000
EC	6	5	3	8	1700
Demanda mês passado (caixas)	1700	1000	1500	1200	-

Resposta:

Desenhando o Grafo



Definindo as Variáveis de Decisão:

XA_1 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora A para o supermercado 1;

XA_2 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora A para o supermercado 2;

XA_3 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora A para o supermercado 3;

XA_4 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora A para o supermercado 4;

XB_1 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora B para o supermercado 1;

XB_2 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora B para o supermercado 2;

XB_3 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora B para o supermercado 3;

XB_4 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora B para o supermercado 4;

XC_1 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora C para o supermercado 1;

XC_2 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora C para o supermercado 2;

XC_3 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora C para o supermercado 3;

XC_4 = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora C para o supermercado 4.

Ou, de maneira mais geral:

Xij = número de caixas de água mineral transportar da engarrafadora i (i=A,B,C) para o supermercado j (j=1,2,3,4).

Modelando a Função Objetivo

Minimizar Custo Total de Transporte = Custo de transportar caixas da engarrafadora A para os supermercados 1,2,3,4 + custo de transportar caixas da engarrafadora B para os supermercados 1,2,3,4 + custo de transportar caixas da engarrafadora C para os supermercados 1,2,3,4

Ou seja:

Min Custo = $5XA_1 + 3XA_2 + 2XA_3 + 6XA_4 + 4XB_1 + 7XB_2 + 8XB_3 + 10XB_4 + 6XC_1 + 5XC_2 + 3XC_3 + 8XC_4$

Modelando as Restrições:

<u>Restrições de Produção</u>:

ProdEA) $XA_1 + XA_2 + XA_3 + XA_4 = 1700$

ProdEB) $XB_1 + XB_2 + XB_3 + XB_4 = 2000$

ProdEC) $XC_1 + XC_2 + XC_3 + XC_4 = 1700$

<u>Restrições de Demanda</u>:

DemD1) $XA_1 + XB_1 + XC_1 = 1700$

DemD2) $XA_2 + XB_2 + XC_2 = 1000$

DemD3) $XA_3 + XB_3 + XC_3 = 1500$

DemD4) $XA_4 + XB_4 + XC_4 = 1200$

<u>Restrições Lógicas</u>:

$XA_1 , XA_2 , XA_3 , XA_4 , XB_1 , XB_2 , XB_3 , XB_4 , XC_1 , XC_2 , XC_3 , XC_4 > = 0$

Modelo Final:

Min Custo) $5XA_1 + 3XA_2 + 2XA_3 + 6XA_4 + 4XB_1 + 7XB_2 + 8XB_3 + 10XB_4 + 6XC_1 + 5XC_2 + 3XC_3 + 8XC_4$

s.a.

ProdEA) $XA_1 + XA_2 + XA_3 + XA_4 = 1700$

ProdEB) $XB_1 + XB_2 + XB_3 + XB_4 = 2000$

ProdEC) $XC_1 + XC_2 + XC_3 + XC_4 = 1700$

DemD1) $XA_1 + XB_1 + XC_1 = 1700$

DemD2) $XA_2 + XB_2 + XC_2 = 1000$

DemD3) $XA_3 + XB_3 + XC_3 = 1500$

DemD4) $XA_4 + XB_4 + XC_4 = 1200$

$XA_1 , XA_2 , XA_3 , XA_4 , XB_1 , XB_2 , XB_3 , XB_4 , XC_1 , XC_2 , XC_3 , XC_4 > = 0$

O interessante neste exercício é que existe mais de uma combinação possível para chegar ao custo mínimo de R$ 23.100,00

2. A empresa SOGRÃOS compra grãos (arroz, feijão, etc.) em 3 regiões produtoras localizadas no interior de Santa Catarina e os deposita em três centros de distribuição (CD1,CD2,CD3) para posterior comercialização. Esta compra e entrega aos centros de distribuição tem um custo elevado para a Só Grãos e é realizada por uma empresa terceirizada. A tabela abaixo mostra os custos de transporte praticados por esta terceirizada (R$/ton transportada).

A empresa precisa definir à terceirizada quantas toneladas de grãos esta deve transportar de cada região produtora para cada Centro de Distribuição, a cada semana cujas capacidades de armazenagem são CD1 = 150 ton. , CD2 = 380 ton. e CD3 = 420 toneladas de grãos. É bastante claro que esta definição deve ser a que proporciona à empresa o menor custo total de transporte. Formule o modelo sabendo que as região produtoras A, B e C entregam à empresa no máximo 310, 500 e 200 toneladas de grãos a cada semana, respectivamente.

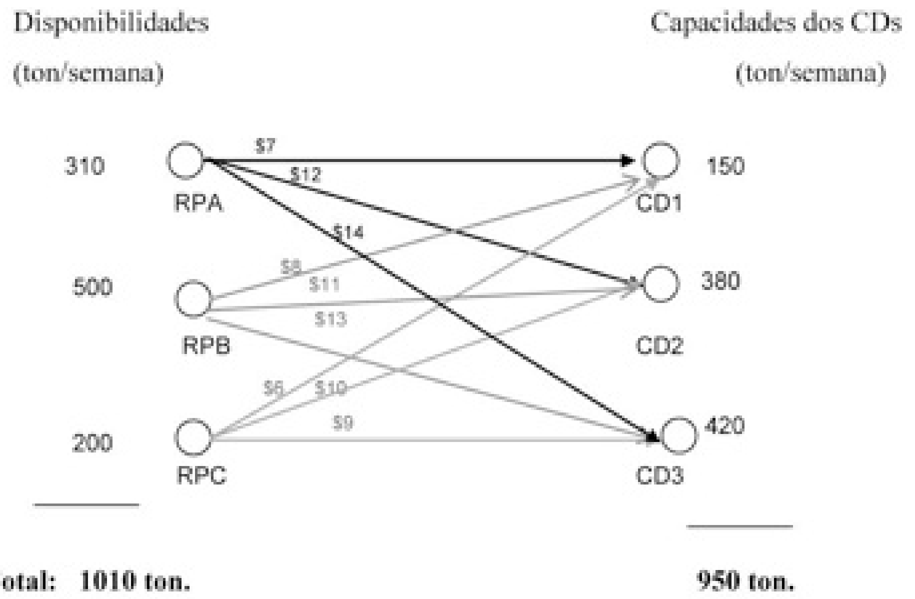
Tabela 4.5. – Custo de Transporte em R$/toneladas transportadas

Regiões de Produção/ CDs	CD1	CD2	CD3
A	7	12	14
B	8	11	13
C	6	10	9

Resposta:

Para a construção de um modelo de transportes pode-se iniciar pelo grafo que representa este problema, como segue:

Representação Gráfica da Atividade de Autoavaliação 2



Definindo as variáveis de decisão:

QA_1=Quantidade, em toneladas, a ser transportada da região produtora A para o centro de distribuição 1

QA_2=Quantidade, em toneladas, a ser transportada da região produtora A para o centro de distribuição 2

QA_3=Quantidade, em toneladas, a ser transportada da região produtora A para o centro de distribuição 3

QB_1=Quantidade, em toneladas, a ser transportada da região produtora B para o centro de distribuição 1

QB_2=Quantidade, em toneladas, a ser transportada da região produtora B para o centro de distribuição 2

QB_3=Quantidade, em toneladas, a ser transportada da região produtora B para o centro de distribuição 3

QC_1=Quantidade, em toneladas, a ser transportada da região produtora C para o centro de distribuição 1

QC_2=Quantidade, em toneladas, a ser transportada da região produtora C para o centro de distribuição 2

QC_3=Quantidade, em toneladas, a ser transportada da região produtora C para o centro de distribuição 3

Ou:

Qij =Quantidade, em toneladas, a ser transportada da região produtora i (i=A,B,C) para o centro de distribuição j (1,2,3)

Modelando a Função Objetivo:

O objetivo da empresa SG é o de obter o menor custo possível com o transporte de grãos das três regiões produtoras para os três CDs. Tem-se, então:

Min Custo) $7QA_1 + 12QA_2 + 14QA_3 + 8QB_1 + 11QB_2 + 13QB_3 + 6QC_1 + 10QC_2 + 9QC_3$

Modelando as restrições:

As restrições que representam o problema do exemplo 3.2 devem obedecer as seguintes regras:

1. Não pode sair mais produto (toneladas de grãos) das regiões produtoras do que elas tem disponível;
2. Os centros de distribuição devem receber (toneladas de grãos) tudo que lhes é possível armazenar.

Então:

<u>Restrições de produção</u>:

CapRPA) $QA_1 + QA_2 + QA_3 <= 310$

CapRPB) $QB_1 + QB_2 + QB_3 < = 500$

CapRPC) $QC_1 + QC_2 + QC_3 < = 200$

<u>Restrições de capacidade de armazenagem</u>:

CapCD1) $QA_1 + QB_1 + QC_1 = 150$

CapCD2) $QA_2 + QB_2 + QC_2 = 380$

CapCD3) $QA_3 + QB_3 + QC_3 = 420$

<u>Restrições Lógicas</u>:

$QA_1 , QA_2 , QA_3 , QB_1 , QB_2 , QB_3 , QC_1 , QC_2 , QC_3 > = 0$

Modelo Final:

Min Custo) $7QA_1 + 12QA_2 + 14QA_3 + 8QB_1 + 11QB_2 +13QB_3 + 6QC_1 + 10QC_2 + 9QC_3$

s.t.

CapRPA) $QA_1 + QA_2 + QA_3 <= 310$

CapRPB) $QB_1 + QB_2 + QB_3 < = 500$

CapRPC) $QC_1 + QC_2 + QC_3 < = 200$

CapCD1) $QA_1 + QB_1 + QC_1 = 150$

CapCD2) $QA_2 + QB_2 + QC_2 = 380$

CapCD3) $QA_3 + QB_3 + QC_3 = 420$

$QA_1 , QA_2 , QA_3 , QB_1 , QB_2 , QB_3 , QC_1, QC_2 , QC_3 > = 0$

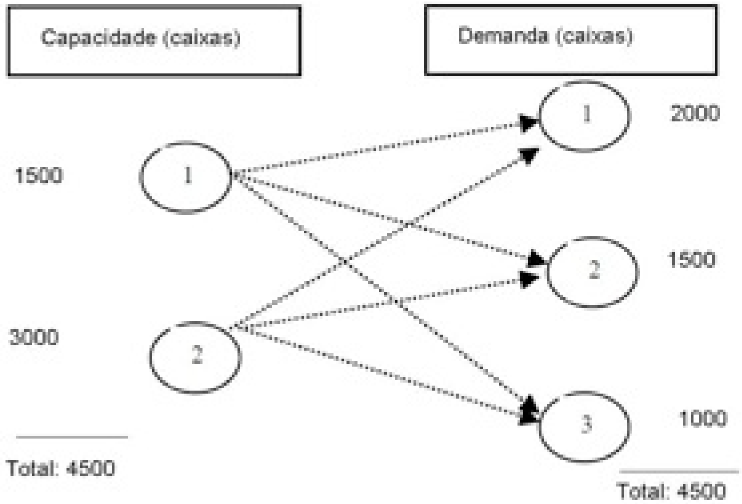
3. A Transportadora Continental é responsável pela distribuição de produtos de uma indústria de refrigerantes que possui duas fábricas e três depósitos. A administração da distribuidora está empenhada em reduzir ao mínimo possível os custos de transporte dos produtos das fábricas para os depósitos. Visando à modelagem deste problema como um problema de programação linear o *controller* da fábrica reuniu os dados constantes das tabelas abaixo e que correspondem aos custos de transporte de cada fábrica até cada depósito. Formule o modelo que indique à administração da distribuidora quanto transportar de cada fábrica para cada depósito de maneira a minimizar o custo de transporte.

Tabela 4.6 – Dados de custo e capacidades

		Depósitos			Capac. Fábricas (caixas)
Fábricas		1	2	3	
	1	$4	$5	$3	1500
	2	$6	$7	$4	3.000
Demanda dos Depósitos (caixas)		2000	1500	1000	

Resposta:

Para a construção de um modelo de transporte pode-se iniciar pelo grafo que representa este problema:



Variáveis de Decisão:

Q_{11} = número de caixas transportar da fábrica 1 para o depósito 1

Q_{12} = número de caixas transportar da fábrica 1 para o depósito 2

Q_{13} = número de caixas transportar da fábrica 1 para o depósito 3

Q_{21} = número de caixas transportar da fábrica 2 para o depósito 1

Q_{22} = número de caixas transportar da fábrica 2 para o depósito 2

Q_{23} = número de caixas transportar da fábrica 2 para o depósito 3

Modelo:

Minimizar custo) $4Q_{11} + 5Q_{12} + 3Q_{13} + 6Q_{21} + 7Q_{22} + 4Q_{23}$

s.a.

Capacidade fab 1) $Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} <= 1500$

Capacidade fab 2) $Q_{21} + Q_{22} + Q_{23} <= 3000$

Capacidade dep 1) $Q_{11} + Q_{21} = 2000$

Capacidade dep 2) $Q_{12} + Q_{22} = 1500$

Capacidade dep 3) $Q_{13} + Q_{23} = 1000$

$Q_{11},Q_{12},Q_{13},Q_{21},Q_{22},Q_{23} >=0$

4. Um intermediário abastece três feirantes que operam em cidades diferentes (A, B e C) com ovos que adquire em quatro granjeiros localizados em cidades diferentes (I,II,III e IV). Os preços pagos pelo intermediário para os granjeiros não tem diferença entre si, do mesmo modo quanto aos preços que os feirantes lhe pagam. O intermediário só consegue algum lucro fazendo com que o seu custo de transporte seja o menor possível. O quadro abaixo dá o custo de transporte entre os granjeiros e os feirantes, em R$/dúzia de ovos. O quadro também mostra as quantidades de ovos que cada granjeiro pode fornecer na próxima semana e as encomendas de ovos dos feirantes:

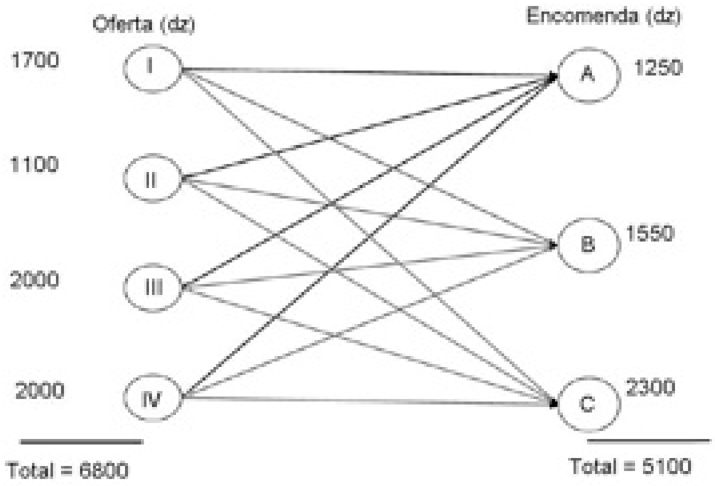
Tabela 4.7 – Custo de transporte (R$/dúzia)

Granja \ Feirante	A	B	C	Oferta (dz)
I	0,35	0,27	0,33	1700
II	0,37	0,25	0,38	1100
III	0,41	0,32	0,38	2000
IV	0,36	0,22	0,39	2000
Encomendas (dz)	1250	1550	2300	****

Formule o problema de atender as encomendas a partir das ofertas de modo a minimizar o custo. Não esqueça de explicar o significado das suas variáveis !

Resposta:

Para a construção de um modelo de transporte pode-se iniciar pelo grafo que representa este problema:



Variáveis de decisão:

Q_{ij} = Nº. de dúzias de ovos transportar da granja i(i=I,II,III,IV) para o feirante j(j=A,B,C)

Modelo:

Minimizar custo) $0{,}35Q_{IA} + 0{,}27Q_{IB} + 0{,}33Q_{IC} + 0{,}37Q_{IIA} + 0{,}25Q_{IIB} + 0{,}38Q_{IIC} + 0{,}41Q_{IIIA} + 0{,}32Q_{IIIB} + 0{,}38Q_{IIIC} + 0{,}36Q_{IVA} + 0{,}22Q_{IVB} + 0{,}39Q_{IVC}$

s.a.

Oferta Granja I) $Q_{IA} + Q_{IB} + Q_{IC} <= 1700$

Oferta Granja II) $Q_{IIA} + Q_{IIB} + Q_{IIC} <= 1100$

Oferta Granja III) $Q_{IIIA} + Q_{IIIB} + Q_{IIIC} <= 2000$

Oferta Granja IV) $Q_{IVA} + Q_{IVB} + Q_{IVC} <= 2000$

Demanda feirante A) $Q_{IA} + Q_{IIA} + Q_{IIIA} + Q_{IVA} >= 1250$

Demanda feirante B) $Q_{IB} + Q_{IIB} + Q_{IIIB} + Q_{IVB} >= 1550$

Demanda feirante C) $Q_{IC} + Q_{IIC} + Q_{IIIC} + Q_{IVC} >= 2300$

$Q_{ij} >= 0$

Capítulo 5

1. Uma marcenaria situada em Florianópolis produz mesas e cadeiras de baixo custo. O processo de produção das mesas e cadeiras é similar e requer um certo número de horas de trabalho no setor de carpintaria e um certo número de horas de trabalho no setor de pintura. Cada mesa necessita de quatro horas de trabalho no setor de carpintaria para ficar pronta para pintura e duas horas de trabalho de pintura. Cada cadeira requer três horas na carpintaria e uma hora na pintura. Durante o atual período de produção, estão disponíveis 240 horas de trabalho no setor de carpintaria e 100 horas de trabalho no setor de pintura. O departamento de marketing está confiante de que pode vender todas as mesas que puderem ser fabricadas. Entretanto, devido a um estoque existente de cadeiras, o departamento não recomenda que sejam fabricadas mais do que 60 novas cadeiras. Cada mesa vendida tem uma margem de contribuição para o lucro de $7, e cada nova cadeira vendida resulta em uma margem de $5. Modele o problema que indique à empresa quantas cadeiras e quantas mesas produzir por semana de modo a maximizar o lucro. Resolva graficamente.

Resposta

Variáveis de decisão:

QM = Quantidade de mesas produzir semanalmente

QC = Quantidade de cadeiras produzir semanalmente

Modelo:

Maximizar Lucro) 7QM + 5QC

s.a.

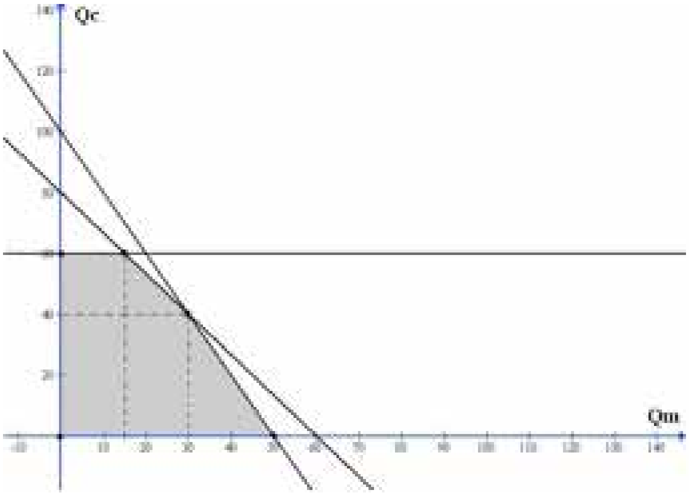
Limite horas carpintaria) 4QM + 3QC <= 240

Limite horas pintura) 2QM + 1QC <= 100

Limite Demanda) QC <= 60

QM,QC>=0

Gráfico:



Resultado:

QM = 30

QC = 40

Lucro = $410

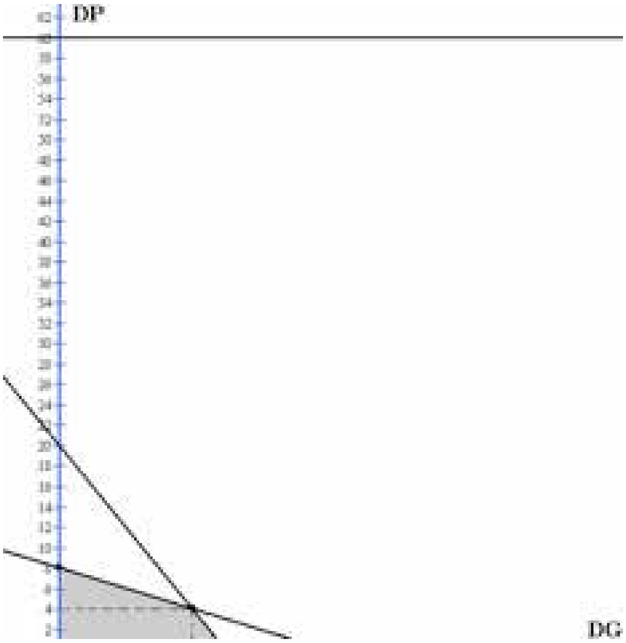
Uma empresa que trabalha com vendas de produtos de valor bastante elevado tem, no momento, o problema de designar o vendedor mais adequado para tentar realizar uma venda para 4 clientes. Para isto dispõe de 4 vendedores. Dado um estudo do perfil de cada cliente e de cada vendedor tem-se a tabela abaixo que mostra as probabilidades de sucesso na venda de cada vendedor para cada cliente. Como Chefe do Setor de Vendas encontre a designação mais adequada da sua força de vendedores para maximizar a soma total das probabilidades de sucesso nas vendas (cada vendedor deverá visitar somente 1 cliente e cada cliente deverá receber a visita de somente um vendedor).

Tabela 4.7 – Custo de transporte (R$/dúzia)

Vendedores/Clientes	1	2	3	4
A	90	90	90	30
B	90	30	70	70
C	70	30	70	30
D	70	90	90	90

Resposta:

Para a construção de um modelo de transporte pode-se iniciar pelo grafo que representa este problema:



Variáveis de decisão:

Xij =

Construindo a função objetivo:

Modelo:

Max probabilidade de sucesso de venda) 90XA1 + 90XA2 + 90XA3 + 30XA4 + 90XB1 + 30XB2 + 70XB3 + 70XB4 + 70XC1 + 30XC2 + 70XC3 + 30XC4 + 70XD1 + 90XD2 + 90XD3 + 90XD4

s.a.

Vendedor A) XA1 + XA2 + XA3 + XA4 = 1

Vendedor B) XB1 + XB2 + XB3 + XB4 = 1

Vendedor C) XC1 + XC2 + XC3 + XC4 = 1

Vendedor D) XD1 + XD2 + XD3 + XD4 = 1

Cliente 1) XA1 + XB1 + XC1 + XD1 = 1

Cliente 2) XA2 + XB2 + XC2 + XD2 = 1

Cliente 3) XA3 + XB3 + XC3 + XD3 = 1

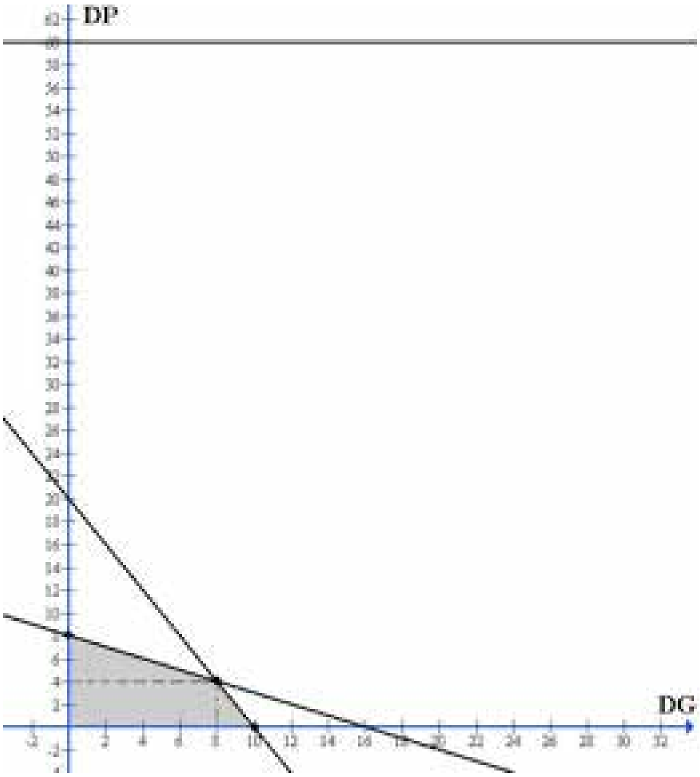
Cliente 4) XA4 + XB4 + XC3 + XD4 = 1

Xij = 0 ou1, para i = 1,2,3,4 e j = 1,2,3,4

2. Uma importadora situada em Santa Catarina está planejando expandir seu negócio até o Rio Grande do Sul. Para fazer isto a empresa necessita saber quantos depósitos de cada tamanho deverá construir para armazenar suas mercadorias. Seu objetivo e restrições são como segue:

Resposta:

Gráfico:



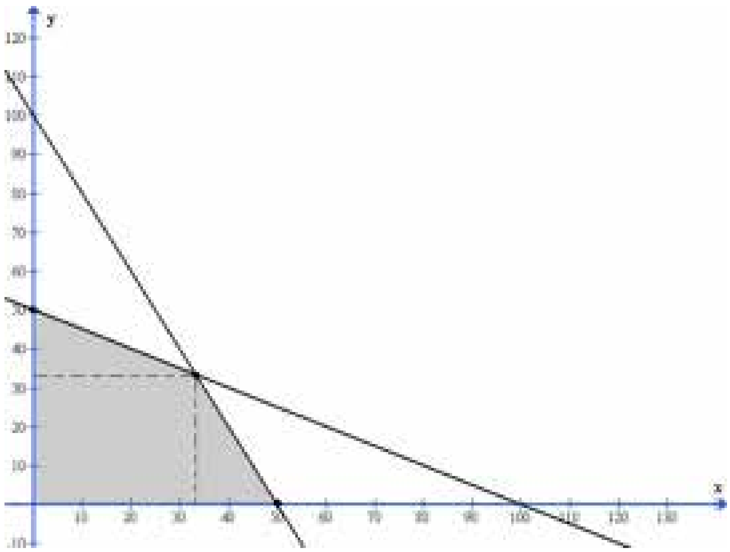
DP = 8

DG = 0

Lucro = $400

3. Encontre as soluções dos programas lineares abaixo: Resposta

3a)
Gráfico:



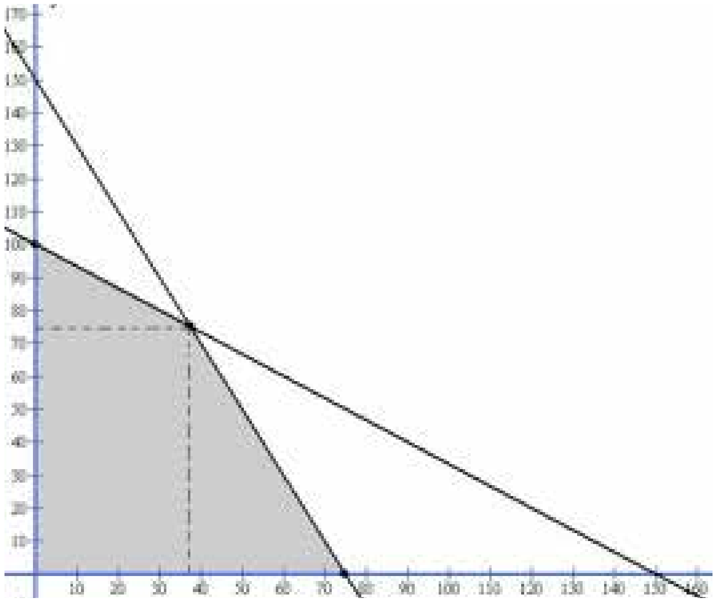
x = 33,33

y = 33,33

Lucro = $ 66,67

3b)

Gráfico:

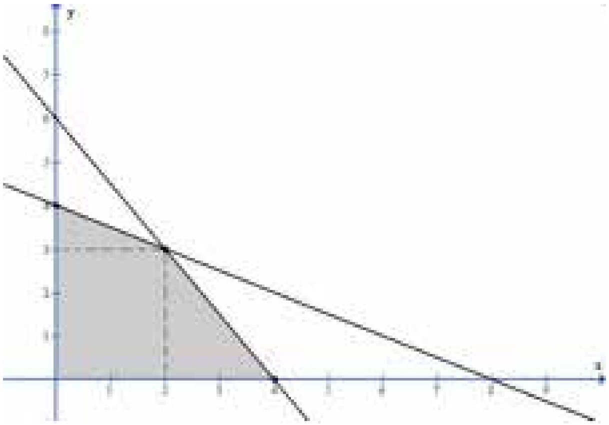


x = 37,5

y = 75

Lucro = $262,5

3c)
Gráfico:

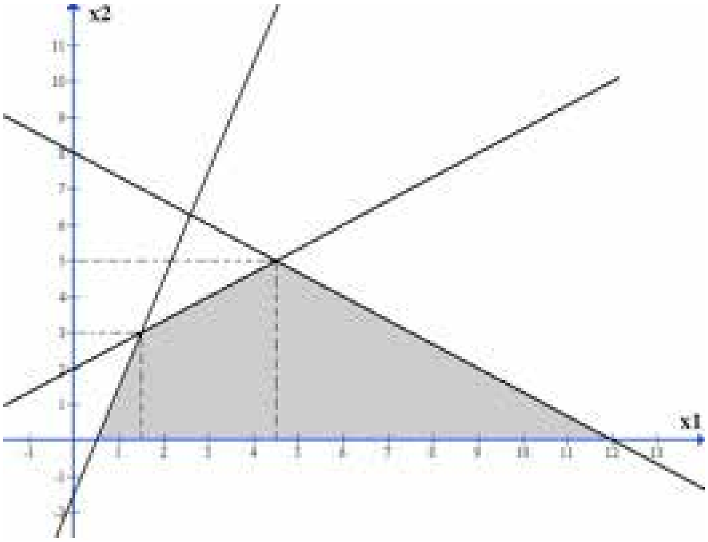


x = 2

y = 3

Lucro = $26

3d)
Gráfico

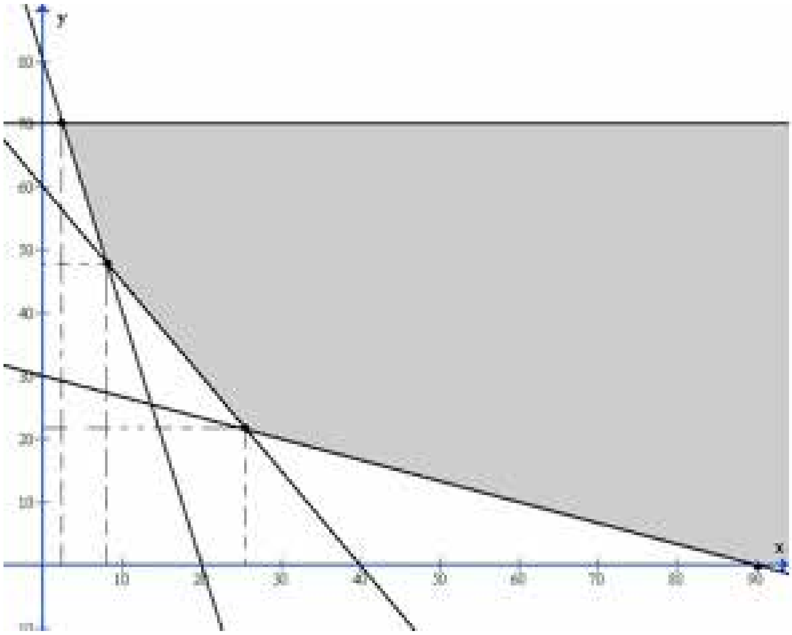


x = 4,5

x_2 = 5 Lucro

= $ 22

3e)
Gráfico:



x = 25,7

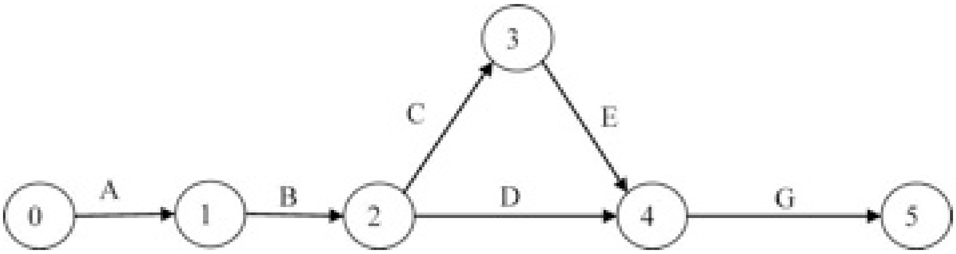
y = 21,42

Objetivo = 68,57

Capítulo 6

1. Mariana, que é gerente da maior e melhor oficina mecânica de Florianópolis está sempre muito preocupada com a satisfação dos clientes. Desse modo decidiu mapear as etapas do processo de elaboração de orçamento para conserto de veículos. Para este acompanhamento ela identificou as atividades necessárias para este fim bem como suas relações de precedência. Com base na tabela abaixo ajude Mariana a construir a rede deste processo.

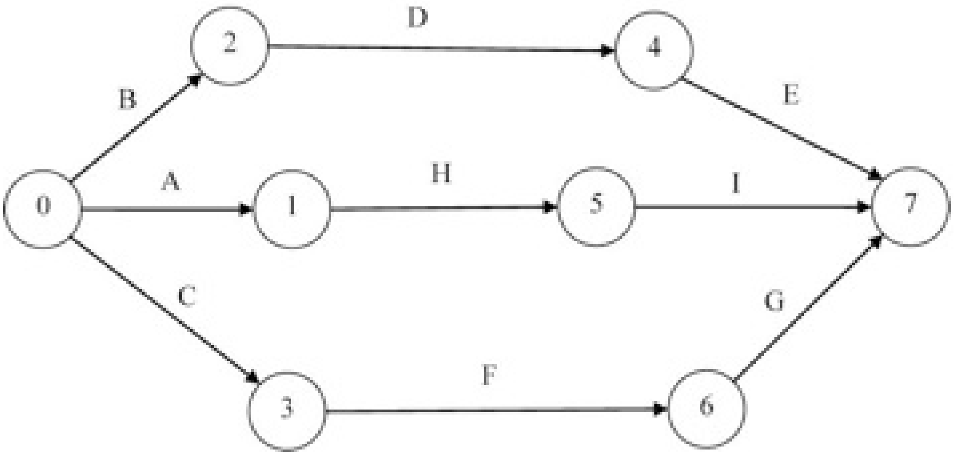
Atividade	Descrição da Atividade	Predecessores Imediatos
A	Chegada do cliente à empresa	-
B	Atendimento ao cliente	A
C	Relatório dos problemas apresentados	B
D	Cadastro do cliente e do veículo	B
E	Orçamento	C
F	Saída do cliente da Empresa	D,E



2. Cláudia, diretora de uma empresa que organiza grandes eventos acaba de assinar um contrato para produzir uma festa de Reveillon para 230 pessoas. Para que nada saia errado e que não corra o risco de atrasar este projeto a mesma decide representá-lo através de uma rede CPM. Para tanto levantou as seguintes atividades e relações de precedências. Desenhe a rede.

Atividade	Descrição da Atividade	Predecessores Imediatos
A	Buscar um local para o evento	-
B	Organizar a lista de convidados com a contratante	-
C	Decidir o cardápio com a contratante	-
D	Preparar e entregar os convites	B
E	Ligar para os convidados para obter a confirmação da presença	D
F	Encomendar o buffet	C
G	Contratar os garçons	F
H	Limpar e arrumar o local	A
I	Fazer a decoração	H

Resposta:

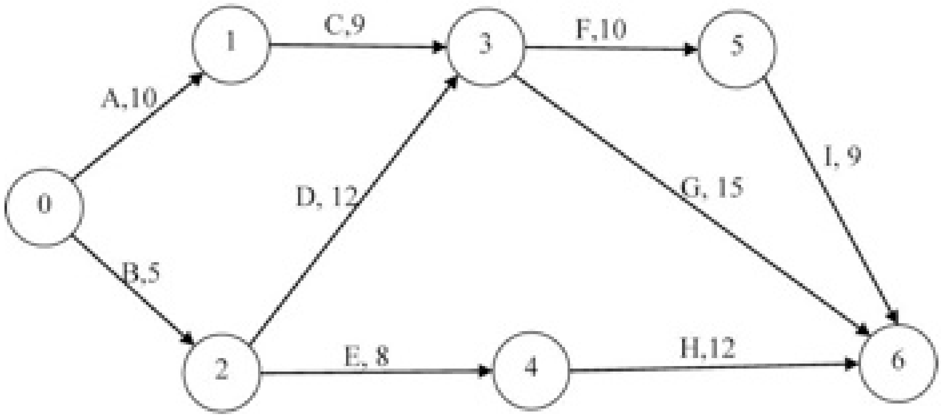


3. O diagrama abaixo reflete a seqüência de atividades necessárias à execução de um projeto de sistema de gestão de conhecimento informatizado em uma certa empresa X. Sobre os arcos estão indicadas as atividades e suas durações (em semanas) Pergunta-se:

a. Qual é o prazo de execução deste projeto?

b. Quais são as atividades que formam o caminho crítico?

c. Se a atividade D atrasasse 3 semanas, o que aconteceria com o prazo de execução do projeto?



Exercício resolvido:

Caminhos existentes	Duração das atividades	Tempo total do caminho
ACFI	10+9+10+9	38 semanas
ACG	10 + 9 + 15	34 semanas
BDFI	5+12+10+9	36 semanas
BDG	5+12+15	32 semanas
BEH	5+8+12	25 semanas

a. O prazo de execução deste projeto é de no mínimo 38 semanas.

Este tempo é calculado a partir do caminho com maior duração, que indica que não há como fazer em um tempo menor.

b. O caminho crítico é o ACFI, pois tem a maior duração e qualquer atraso nas atividades deste caminho vai provocar um atraso no projeto como um todo.

c)

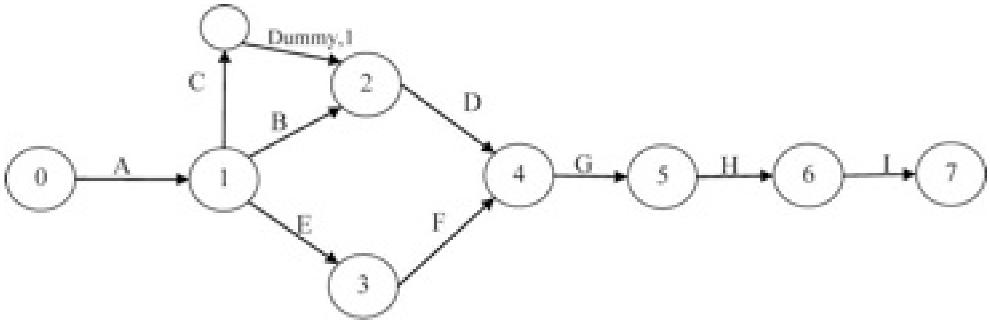
Caminhos existentes	Duração das atividades	Tempo total do caminho
ACFI	10+9+10+9	38 semanas
ACG	10 + 9 + 15	34 semanas
BDFI	5+15+10+9	39 semanas
BDG	5+15+15	35 semanas
BEH	5+8+12	25 semanas

Se a atividade D atrasasse três semanas o prazo de execução do projeto passaria a ser de 39 semanas. Embora a atividade D não faça parte do caminho crítico, o atraso dela comprometeu o prazo final de execução do projeto porque foi maior do que a folga que havia no caminho que ela faz parte.

4. A SurfWave é uma empresa que compra, estampa e vende camisetas na região de Florianópolis e arredores. O dono da empresa deseja construir uma rede CPM para o projeto de produção de seu produto. Este projeto inicia-se com um pedido das camisetas (matéria-prima). Após o pedido os próximos passos são a arte final na área gráfica e a produção da tela na área de produção. Com a produção da tela e a arte final pronta a tela é gravada. Quando as camisetas chegam iniciam-se as tarefas de separação das camisetas e colocação na máquina para estampar. Após a tela gravada as camisetas são colocadas na máquina de estampar para fazer uma amostra. Após aprovação da amostra as camisetas podem ser estampadas. Terminada a estampagem as camisetas são retiradas das máquinas e enfim empacotadas. Construa a tabela de precedências e em seguida e rede do projeto.

Exercício resolvido:

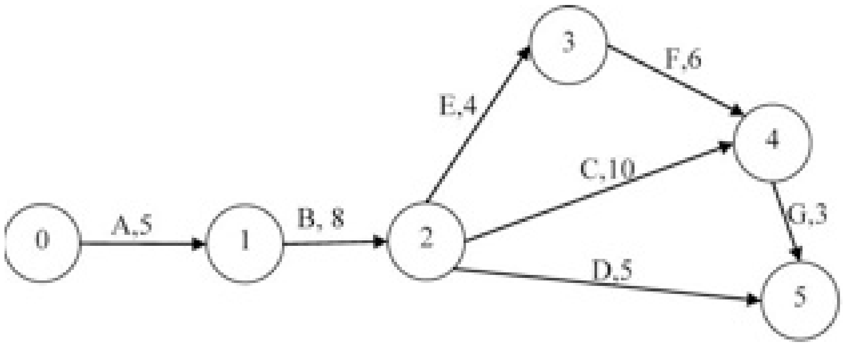
Atividade	Descrição da Atividade	Predecessores Imediatos
A	Pedido de camiseta	
B	Fazer arte-final	A
C	Produção da tela	A
D	Gravação da tela	B e C
E	Recepção das camisetas	A
F	Separação das camisetas / colocação da camiseta na máquina	E
G	Fazer amostra	D e F
H	Aprovar amostra	H
I	Estampagem e embalagem das camisetas	H



5. A tabela abaixo contém um conjunto de atividades que são necessárias para a construção de uma casa. Mostra também suas predecessoras e o tempo de duração de cada atividade. Desenhe a rede e calcule o seu caminho crítico.

Atividades	Descrição	Predecessores	Duração (dias)
Atividade A	Construção das fundações	-	5
Atividade B	Edificação das paredes e vigas	A	8
Atividade C	Construção do telhado	B	10
Atividade D	Instalação da parte elétrica	B	5
Atividade E	Colocação das janelas	B	4
Atividade F	Colocação dos materiais hidráulicos	E	6
Atividade G	Pintura da casa	C,F	3

Exercício resolvido:



Caminhos existentes	Duração das atividades	Tempo total do caminho
ABEFG	5+8+4+6+3	26 dias
ABCG	5+8+10+3	26 dias
ABD	5+8+5	18 dias

Os caminhos ABEFG e ABCG são críticos, pois têm a maior duração. Qualquer atraso nas atividades destes caminhos vai provocar um atraso no projeto como um todo.

Anexos

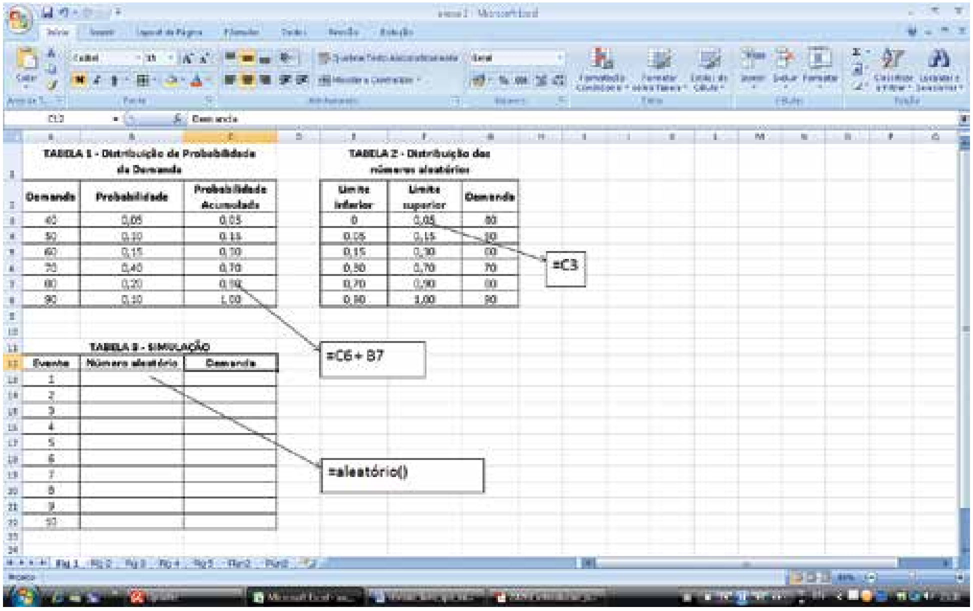
ANEXO 1: Tabela de Números Aleatórios

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,796616	0,09071	0,0866	0,3795	0,5467	0,5771	0,4673	0,9292	0,7404	0,5539
2	0,210096	0,56622	0,0711	0,5213	0,9204	0,6073	0,3871	0,5316	0,6437	0,1376
3	0,860438	0,57595	0,5743	0,8976	0,581	0,6202	0,6819	0,3114	0,0143	0,1064
4	0,620942	0,47836	0,1793	0,2349	0,0441	0,2918	0,5552	0,4174	0,4314	0,9456
5	0,889193	0,97623	0,7441	0,6789	0,166	0,0345	0,0066	0,5449	0,085	0,6382
6	0,633823	0,98545	0,284	0,9382	0,7199	0,3808	0,0439	0,4093	0,2048	0,1385
7	0,831563	0,99475	0,6982	0,0287	0,3462	0,7649	0,9844	0,1964	0,2811	0,3724
8	0,946132	0,17451	0,1003	0,5033	0,7422	0,2454	0,0746	0,5752	0,8522	0,7538
9	0,339908	0,44785	0,5463	0,2696	0,1088	0,6333	0,414	0,6526	0,3057	0,5227
10	0,736661	0,95819	0,5568	0,1205	0,6973	0,3881	0,2172	0,0316	0,8494	0,8428
11	0,567891	0,46648	0,5487	0,8976	0,4637	0,1761	0,6178	0,769	0,4673	0,7072
12	0,541017	0,53469	0,383	0,5969	0,3706	0,9677	0,901	0,3517	0,3705	0,925
13	0,210732	0,81331	0,766	0,8489	0,1153	0,3877	0,3024	0,0739	0,1889	0,2922
14	0,795429	0,1228	0,2229	0,4468	0,3055	0,8294	0,3787	0,7943	0,865	0,9314
15	0,965871	0,02761	0,3473	0,7582	0,0483	0,4641	0,7929	0,3263	0,5549	0,4273
16	0,675253	0,8697	0,5801	0,6115	0,2637	0,8242	0,9141	0,5492	0,8811	0,2412
17	0,46076	0,33455	0,8411	0,4419	0,0884	0,9831	0,8827	0,7881	0,8188	0,2485
18	0,825295	0,4362	0,1207	0,2411	0,9469	0,1573	0,3666	0,1643	0,4109	0,4261
19	0,588643	0,27789	0,3889	0,9579	0,6038	0,4279	0,3648	0,9236	0,5856	0,9967
20	0,054579	0,23188	0,4643	0,8212	0,6492	0,0698	0,6094	0,0679	0,6953	0,273
21	0,425046	0,58716	0,6889	0,0072	0,4111	0,5488	0,3362	0,6026	0,5088	0,4416
22	0,534387	0,42944	0,744	0,7304	0,0299	0,9332	0,7613	0,7567	0,1265	0,2431
23	0,089115	0,40728	0,1543	0,144	0,5777	0,6533	0,887	0,1419	0,5545	0,9193
24	0,218284	0,97775	0,726	0,406	0,2539	0,4918	0,4158	0,3694	0,8952	0,3295
25	0,8773	0,17311	0,3637	0,4515	0,3551	0,4655	0,3522	0,0614	0,7512	0,7835
26	0,453585	0,86941	0,644	0,7445	0,4057	0,0185	0,9662	0,7171	0,7929	0,2389
27	0,981961	0,04948	0,1578	0,3764	0,0472	0,4307	0,7189	0,1544	0,8164	0,7406
28	0,893144	0,78246	0,7318	0,7959	0,1386	0,9505	0,1036	0,5494	0,2598	0,7408
29	0,072608	0,29879	0,6073	0,6624	0,6333	0,9052	0,5897	0,9787	0,0267	0,9088
30	0,997908	0,66189	0,6409	0,2742	0,1714	0,8889	0,2082	0,762	0,449	0,0736
31	0,441741	0,54971	0,8827	0,102	0,1	0,0851	0,4076	0,4107	0,2692	0,6643
32	0,916656	0,68571	0,5591	0,4047	0,7313	0,1629	0,6509	0,3326	0,6339	0,0749
33	0,782098	0,19475	0,8955	0,4423	0,6784	0,409	0,5473	0,0377	0,9308	0,6985
34	0,514714	0,21744	0,6671	0,7729	0,7872	0,1576	0,8857	0,4038	0,3948	0,1844
35	0,99709	0,62824	0,1814	0,6058	0,9007	0,8442	0,1425	0,4326	0,1143	0,0464
36	0,61225	0,12292	0,3619	0,2296	0,8102	0,8552	0,1617	0,6173	0,6084	0,4967
37	0,561609	0,7754	0,4493	0,9933	0,4847	0,7405	0,4819	0,1315	0,8397	0,1506
38	0,434193	0,42439	0,1679	0,1996	0,1036	0,0746	0,2037	0,6307	0,0435	0,0911
39	0,878908	0,96521	0,5433	0,5763	0,7149	0,4713	0,5724	0,7679	0,3273	0,5207
40	0,878034	0,38429	0,3559	0,6013	0,5395	0,1129	0,7702	0,1565	0,5627	0,3976

ANEXO 2: Simulação em Excel

EXEMPLO de simulação no Excel:

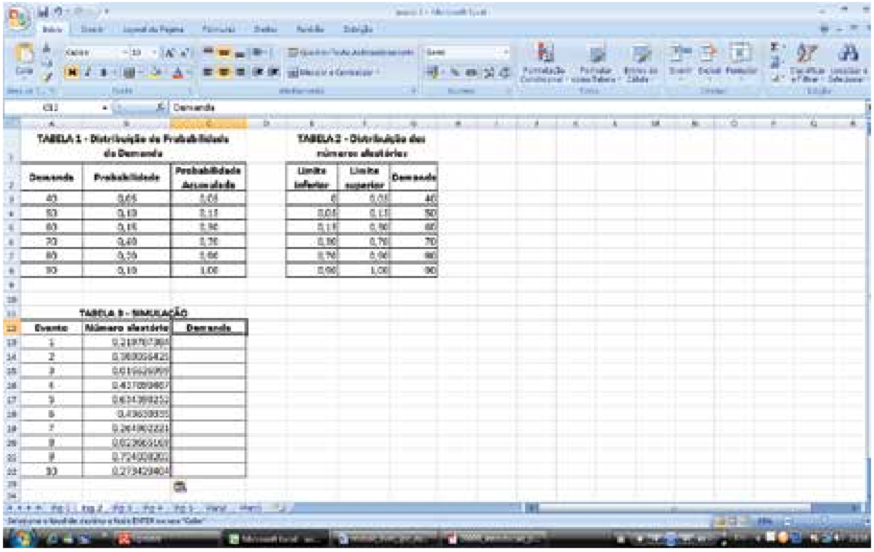
O exemplo que segue pretende simular a demanda de determinado produto dada a distribuição de probabilidade do mesmo (tabela 1).



Para começar a construção de seu modelo de simulação no Excel você deverá digitar os dados da distribuição de probabilidade da sua variável aleatória, conforme Tabela 1. Para construir a probabilidade acumulada lembre que a mesma será a soma da célula de cima (C6, no exemplo) com a do lado (B7). Lembre que a probabilidade acumulada da primeira linha (C3) será a soma do valor contido na célula ao lado (B3) com zero, isto é, o próprio valor da célula ao lado.

Pode-se agora construir a tabela de distribuição dos números. Aleatórios (tabela 2), onde os limites superiores serão a própria probabilidade acumulada.

Com as tabelas prontas inicia-se a simulação introduzindo a função **aleatório()** na tabela 3. O resultado será o da planilha abaixo aonde o Excel sorteará vários números aleatórios.

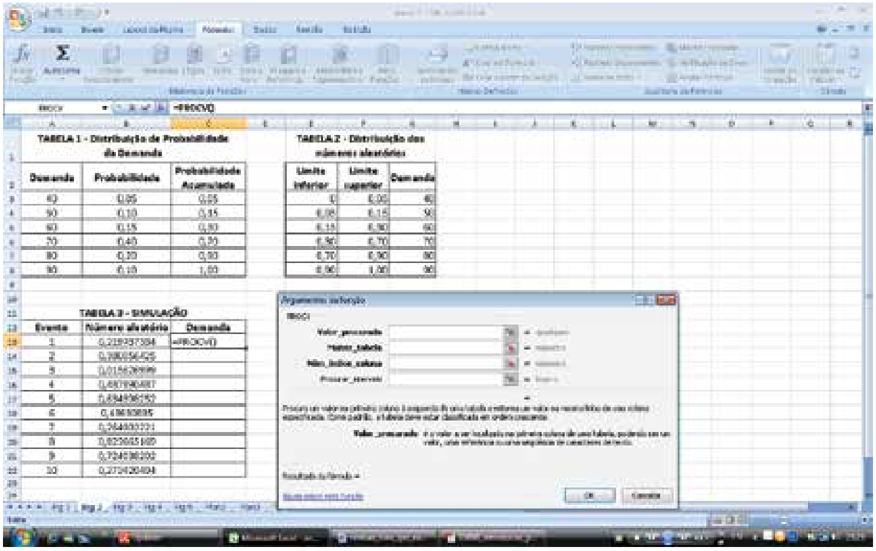


Para realizar a simulação buscando a demanda correspondente ao número aleatório daquela linha iremos utilizar a função PROCV do Excel, conforme explicação que segue:

FUNÇÃO PROCV

Como chamar esta função?

Você irá no menu do Excel e escolherá Inserir/função. Dentre todas as funções que estarão disponíveis você irá selecionar a PROCV. Ao selecionar esta função a janela abaixo abrirá e você poderá, então, inserir os argumentos da função.

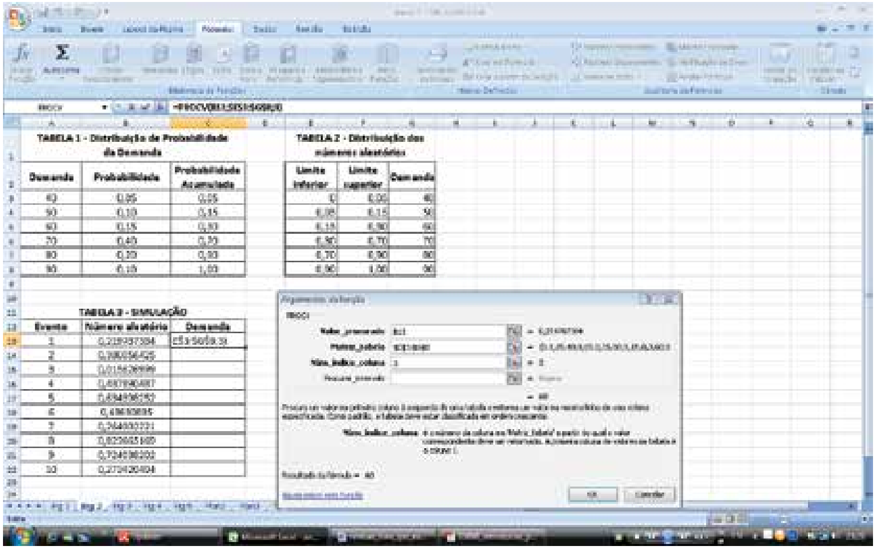


Argumentos da função PROCV

= PROCV(valor_procurado, matriz tabela, num_índice_coluna)

Para a simulação o valor procurado será o endereço da coluna que contém o número aleatório gerado pela função ALEATORIO(). No caso deste exemplo será a célula B13.

A matriz tabela será o endereço da matriz que contém os limites inferior e superior e o valor a ser atribuído à variável (demanda). No nosso exemplo a matriz tabela está no endereço $E$3:$G$8.

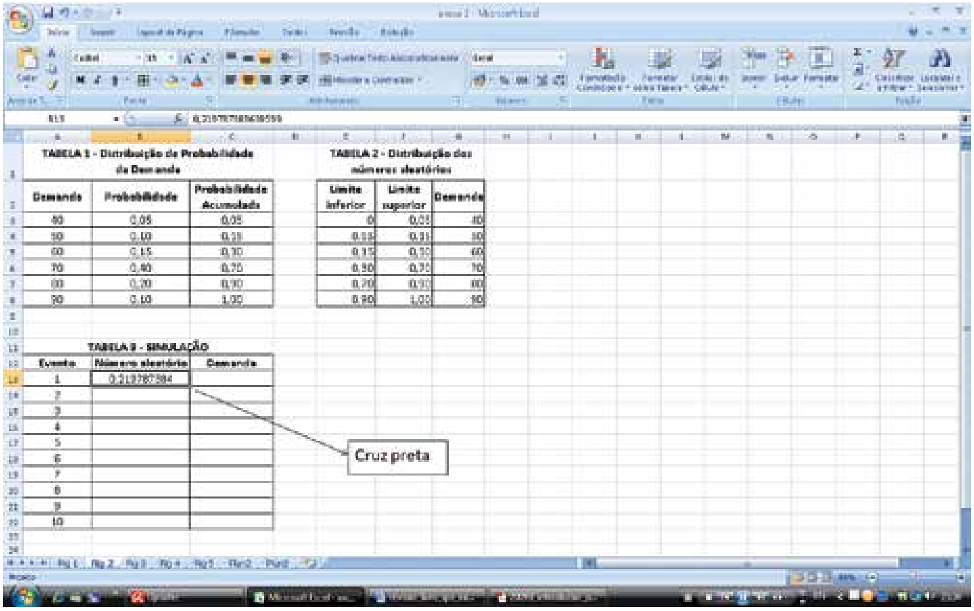


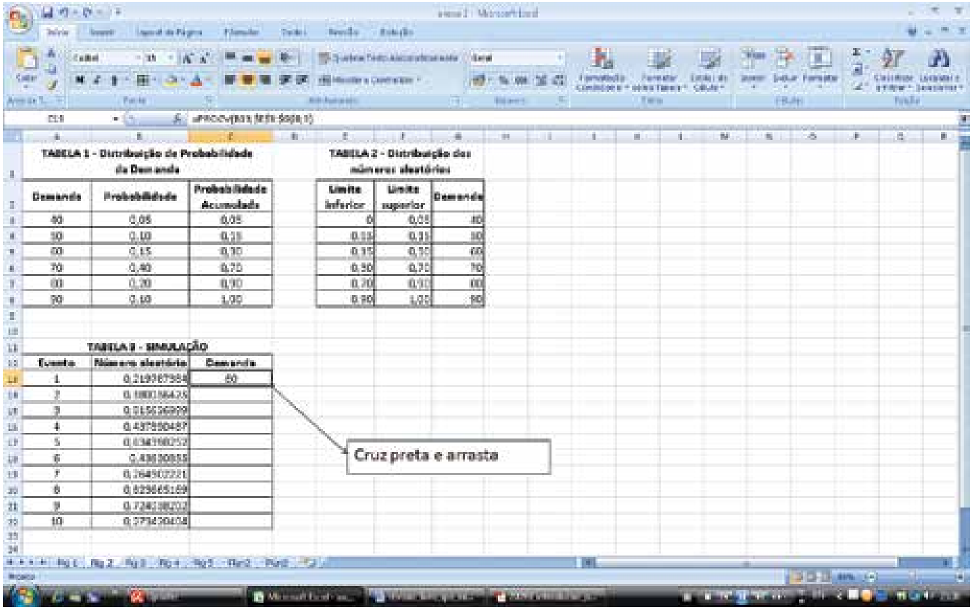
O que a função PROCV faz?

Ela pega o no. aleatório que está em B3, por exemplo, e o busca no intervalo da matriz tabela que está no endereço $E$3:$G$8. A função vê que o número 0,2197 está no intervalo entre 0,15 e 0,30 e, na célula que contém a função PROCV o Excel escreverá o valor (demanda) que está na 3ª. Coluna da matriz tabela. O argumento número índice coluna deverá sempre vir preenchido com o valor 3. Por quê? Porque é nesta coluna da matriz tabela que estaremos escrevendo o valor que desejamos simular, neste caso Demanda (Tabela 2).

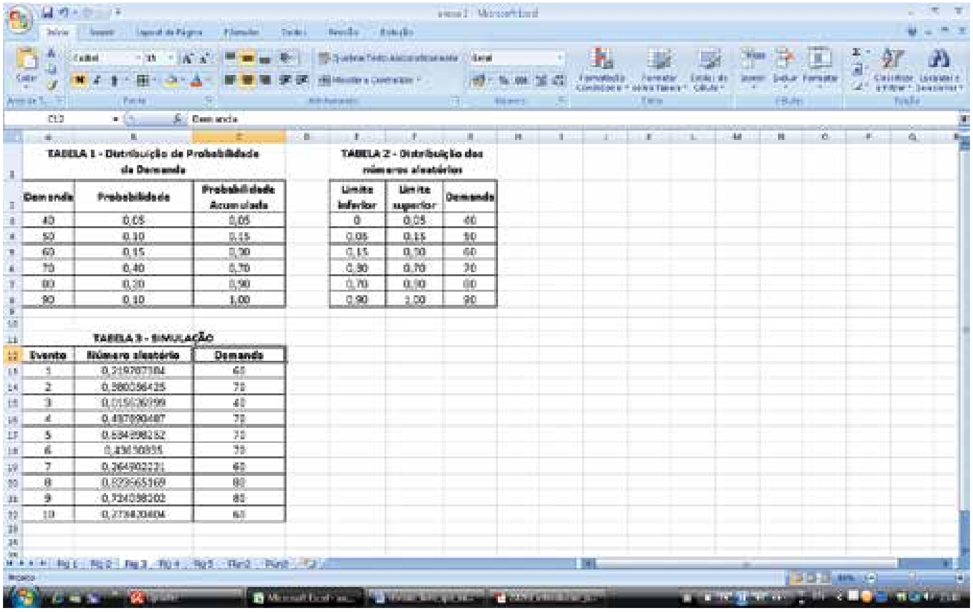
É importante salientar que o endereço da matriz tabela deve sempre vir acompanhado do $ pois o mesmo deve ser fixo. O cifrão ($) faz exatamente isso, fixa endereço de células.

Mas, o que fazer com as funções que foram criadas na 1ª. Linha da tabela de simulação (Tabela 3)? Para que não precisemos criar novamente as funções aleatório() e Procv a cada nova linha de simulação podemos utilizar um recurso fantástico do Excel que diminui em muito o nosso trabalho. O recurso é o seguinte. Você clica na célula que contém a função que você quer copiar (aleatório(), por exemplo) e vai com o cursor até o canto direito inferior. Quando aparecer uma cruz preta você segura no botão esquerdo do mouse e arrasta esta célula até a última linha da sua simulação.



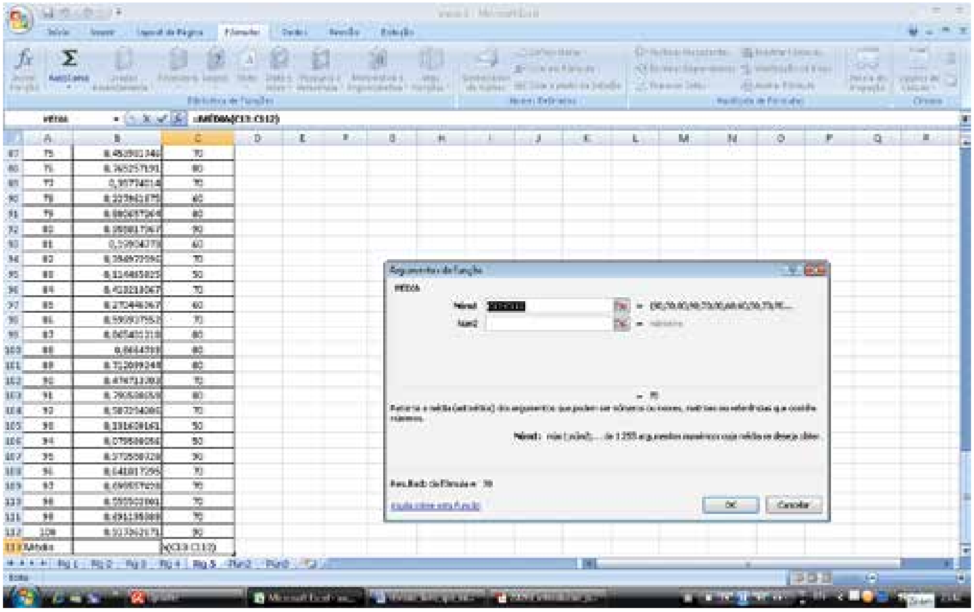


O resultado da simulação será o da planilha que segue, mas lembre que para uma simulação produzir bons resultados precisaremos no mínimo 100 linhas de simulação. É por este motivo que teremos que aprender a construir nossas simulações em uma planilha eletrônica (Excel, por exemplo).



Com 100 linhas de simulação você poderá calcular média e desvio-padrão utlizando as funções MÉDIA do Excel. O argumento das funções média serão somente o endereço das células que você deseja utilizar para o cálculo das medidas estatísticas. No nosso exemplo será o endereço C13:C112, conforme figura que segue.

Para aprender e praticar mais acesse o EVA da nossa disciplina, este exemplo estará lá pronta em uma planilha Excel.



ANEXO 3: Como utilizar o Solver/Excel para resolver problemas de programação linear (PL)

Para mostrar a você como utilizar o Solver do Excel para a resolução de modelos de programação linear, vamos relembrar o exemplo 3.1. da Capítulo 3 de nosso livro. Acesse esta planilha de cálculos na Midiateca.

Exemplo 3.1
Só Bicicletas (SB) é uma empresa nacional que atua no ramo de produção de bicicletas. A empresa acaba de lançar 2 novos modelos de bicicletas infantis (1 para menino e 1 para menina) que está fazendo o maior sucesso entre a garotada. O sucesso dos novos modelos é tanto que tudo que for produzido será vendido e o departamento de marketing recomenda que ao menos 250 bicicletas de cada modelo sejam produzidos. O lucro unitário na produção e venda da bicicleta feminina é de $50 e da bicicleta masculina é de $30. A empresa conta para a produção destes dois novos modelos com 200 trabalhadores no departamento de fabricação e 100 trabalhadores no departamento de montagem. A empresa trabalha em três turnos e cada funcionário trabalha 8 horas por dia. O modelo feminino necessita de 4 horas de mão de obra no departamento de fabricação e de 2 horas no departamento de montagem. O modelo masculino necessita de 4 horas de mão de obra no departamento de fabricação e de 1 hora no departamento de montagem. Formule um modelo que informe à SB o plano de produção diário que maximiza seu lucro.

Modelando este problema como um problema de programação linear, teremos:

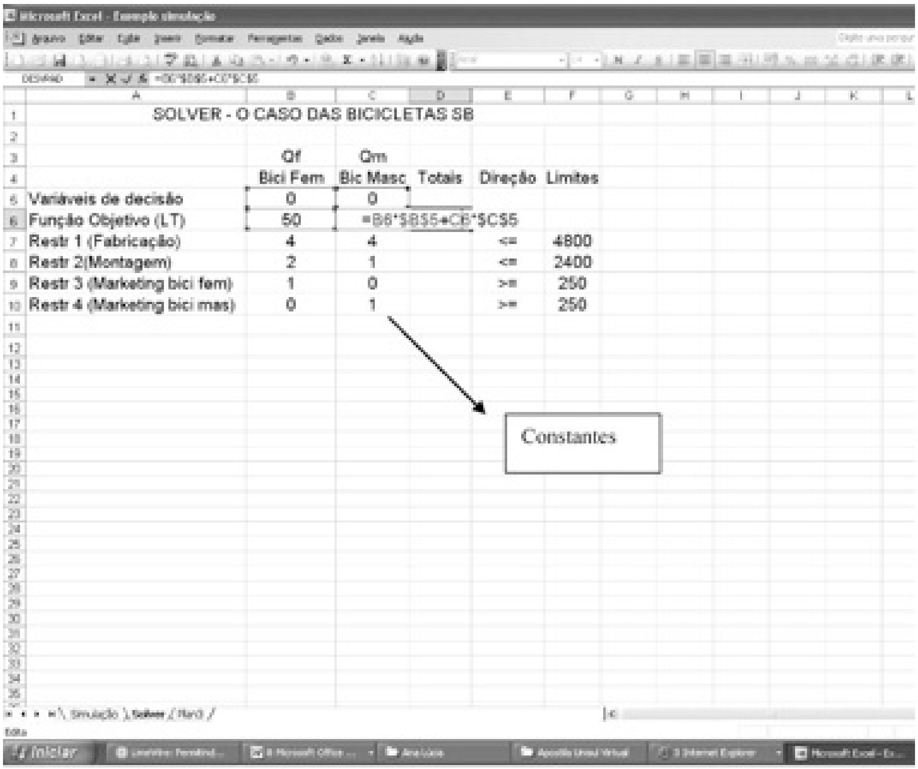
Max Lucro)	$50Qf + 30Qm$
s.t.	
Restr 1 (Fabricação)	$4Qf + 4Qm <= 4800$
Restr 2(Montagem)	$2Qf + Qm <= 2400$
Restr 3 (Marketing bici fem)	$Qf >= 250$
Restr 4) (Marketing bici masc)	$Qm >= 250$

Para resolvermos este modelo no Excel, primeiro deveremos digitá-lo, no software, em forma de planilha conforme a Figura 1 que segue, aonde:

- na coluna A teremos os cabeçalhos, ou seja, o nome das restrições.
- nas colunas de B até F teremos as informações do modelo. Devemos informar em B e C quais são as constantes que, no modelo, estão multiplicando as variáveis Qf e Qm.

- Na coluna D deveremos colocar, para cada restrição a fórmula, ou seja, a função, que a representa. Por exemplo:

Figura 1 – Colocando os dados do modelo na planilha Excel



Na célula D6 teremos a função que o objetivo da empresa, ou seja 50Qf + 30Qm. Como no Excel uma função é informada através do endereço das células teremos a constante 50 substituída pelo endereço em que ela se encontra B6, a variável Qf substituída pelo endereço B5, a outra constante 30 pelo endereço C6 e a variável Qm por C5.

Antes de cada fórmula devemos inserir o símbolo de igualdade (=).

= B6 * B5 + C6*C5

Na célula D7 teremos a função que representa o consumo de mão de obra no departamento de fabricação, ou seja: 4Qf + 4Qm.

Teremos, então, a constante 4 substituída pelo endereço em que ela se encontra B7, a variável Qf substituída pelo endereço B5, a outra constante 4 pelo endereço C7 e a variável Qm por C5.

Teremos, então:

=B7*B5+ C7*C5

Para a restrição de montagem, que está uma linha abaixo teremos:

= B8*B5 + C8 * C5

A mesma coisa deve ser feita para as demais restrições.

Note que tanto as restrições quanto a função objetivo estarão sempre se referindo aos endereços B5 e C5 as quais deverão conter as quantidades de Qf e Qm.

Poderemos, então, utilizar novamente o recurso do Excel de copiar a função arrastando-a. Na célula D6 escreveremos:

=B6*B$5 + C6 * C$5

Note que o $ fixa o endereço da célula e, portanto, quando arrastarmos esta função teremos nas células abaixo.

=B7*B$5 + C7 * C$5

=B9*B$5 + C8 * C$5

=B9*B$5 + C9 * C$5

=B10*B$5 + C10 * C$5

Veja que o Excel variou o número da linha daquelas funções que não contém o $ e manteve fixo os demais.

Depois de construídas todas as funções na coluna “totais” deveremos informar, para cada restrição, se a mesma é <=, =, ou >= na coluna E.

Na coluna F teremos ainda os valores dos lados direitos de cada restrição (RHS).

Com o modelo pronto, é só chamar o Solver através de

Ferramentas/Solver, conforme Figura 4.

Saiba que se você abrir o menu Ferramentas no Excel e o

Solver não estiver disponível você poderá acioná-lo através de

Ferramentas/Suplementos como mostra a seguir.

Figura 2 – Adicionando o Solver ao Menu Ferramentas

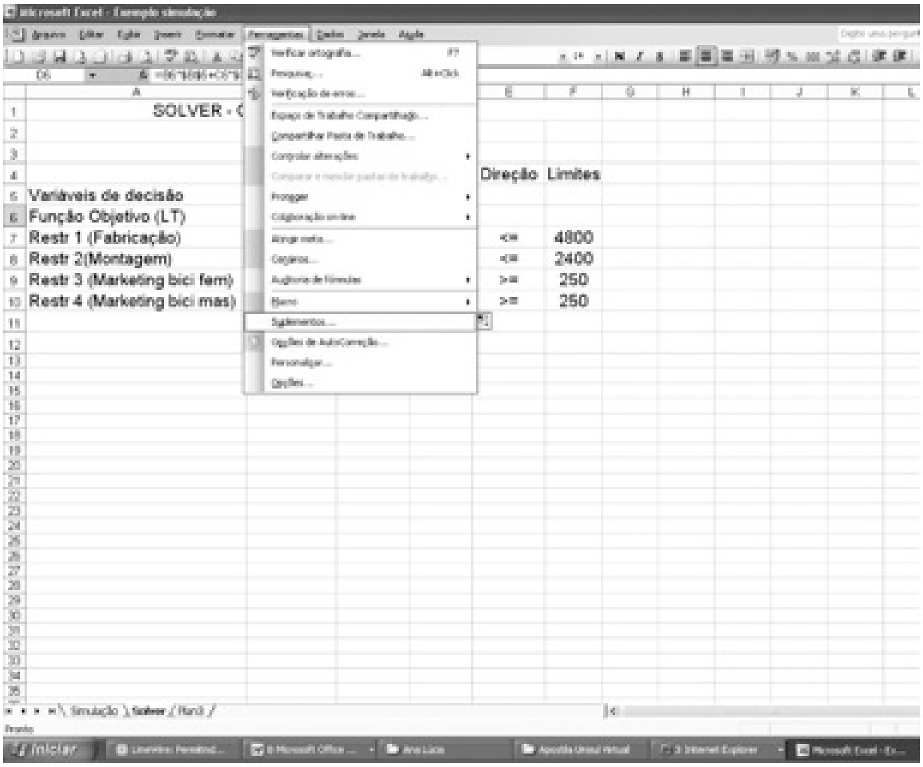
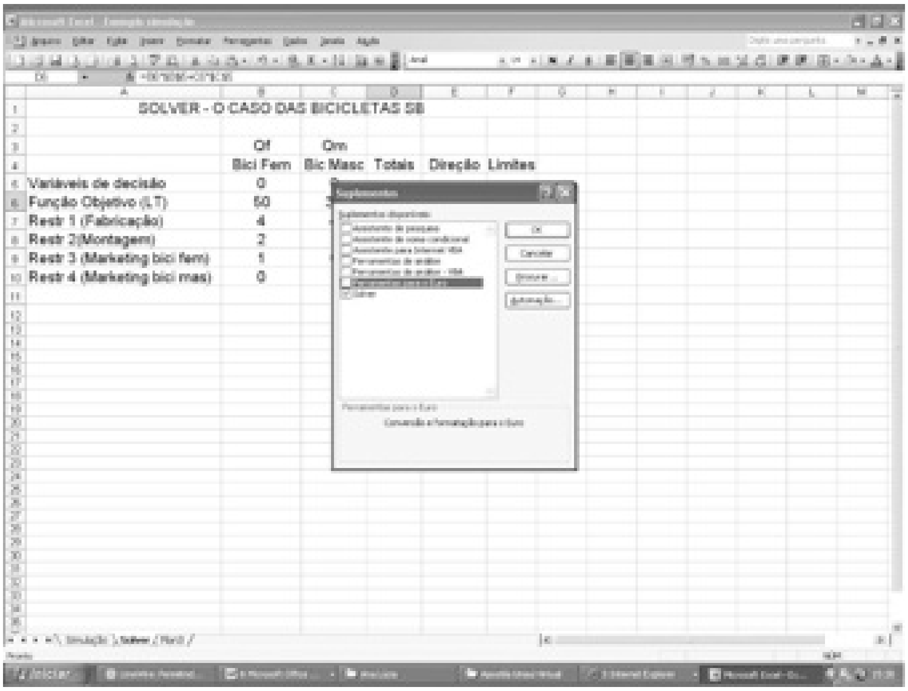
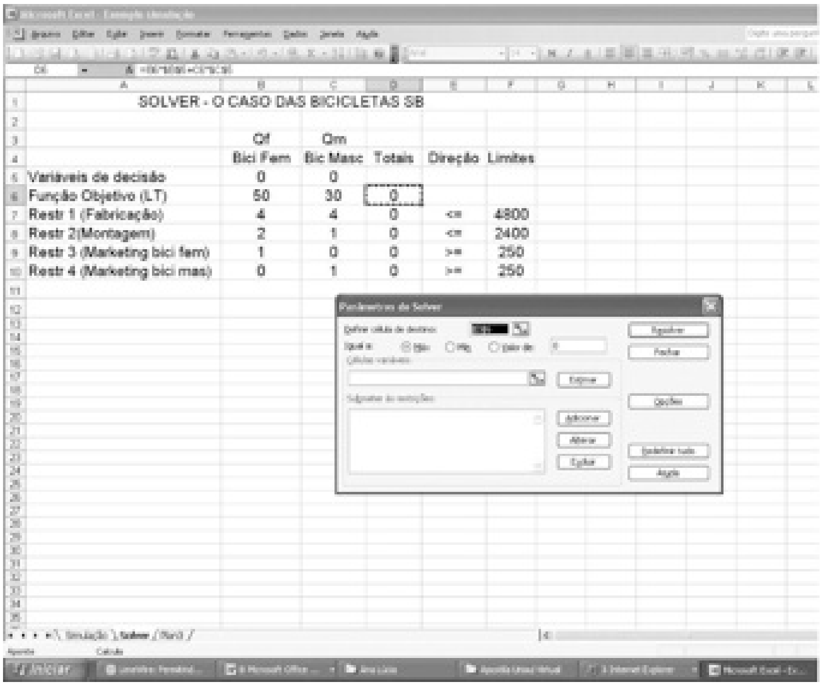


Figura 3 – Adicionando o Solver



Agora você poderá chamar o Solver no menu Ferramentas como mostra a Figura 4

Figura 4 – Definindo célula de destino



Após o solver ser ativado (Ferramentas/Solver) a janela da Figura 4 se abrirá. Nesta estaremos informando o modelo que queremos resolver.

Passos a serem seguidos:

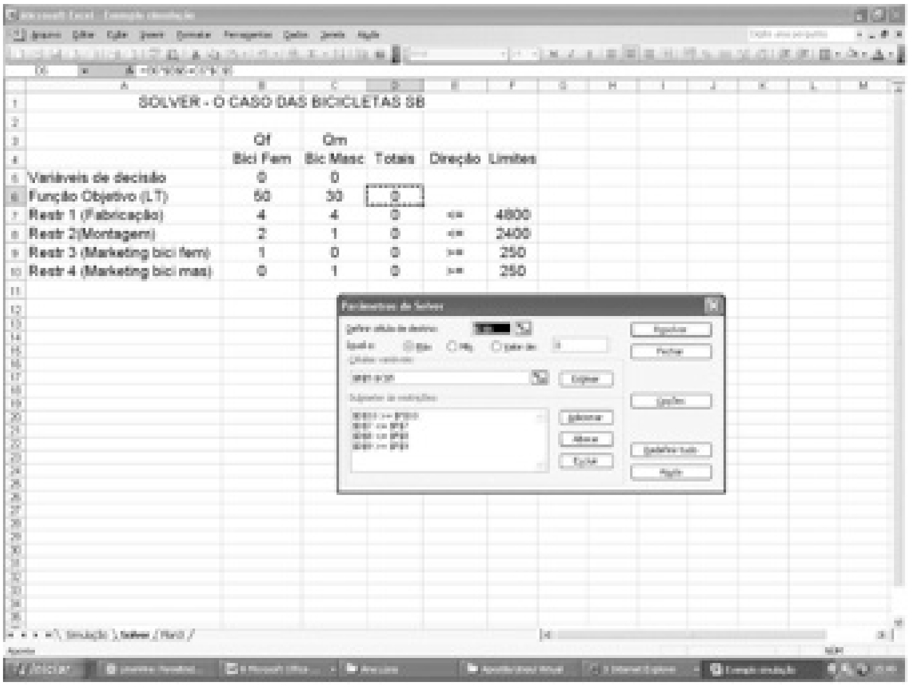
1º) Definir célula de destino: a célula de destino será sempre a que contém a função que representa a minha função objetivo, ou seja, D6;

2º) Informar se o modelo é de maximização ou minimização clicando no lugar correspondente;

3º) Informar as células variáveis, conforme figura 5 abaixo.: estas serão aquelas que estamos buscando, ou seja, os valores de Qf e Qm(células B5 a C5),

4º) adicionar as restrições do modelo clicando no botão Adicionar que abrirá a janela adicionar restrição, Figura 6;

Figura 6 – Adicionando uma restrição



5º) na janela da Figura 6 tem-se: referência de célula, orientação da restrição e restrição. Em referência de célula devemos indicar a função que está na colula D clicando no endereço correspondente. Na orientação da restrição deve-se indicar se a restrição é do tipo = ou >= ou <= e em restrição deveremos informar os limites (coluna F), por exemplo:

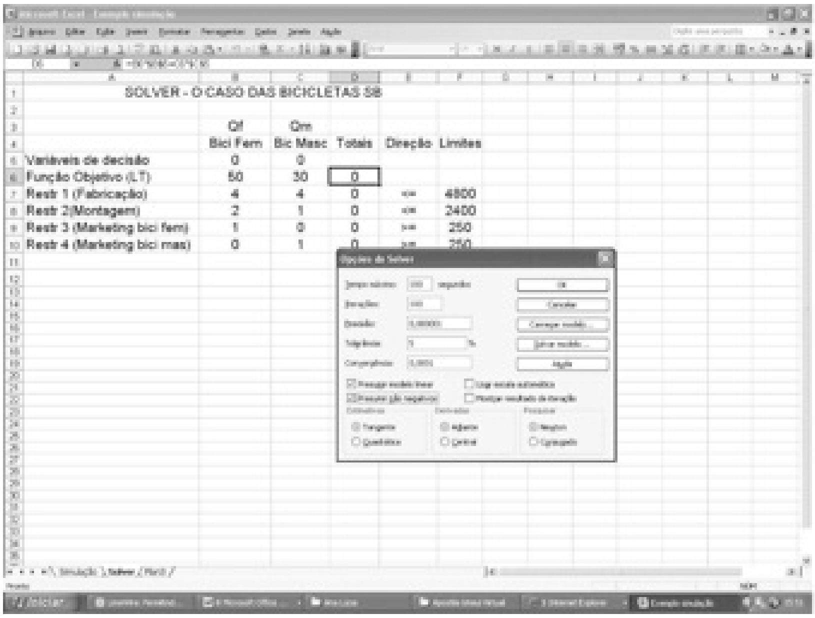
Para a restrição de mão de obra no departamento de fabricação iremos informar que a solução encontrada deve respeitar a seguinte imposição: o valor que está em D7 (consumo de mão de obra neste departamento.) deve ser <= ao valor que está em F7 (máximo de horas de mão de obra disponível).

Todas as funções devem ser inseridas nesta janela clicando adicionar após a inserção. No final clica-se em Ok e tem-se a janela planilha abaixo.

Figura 7 – Modelo quase pronto

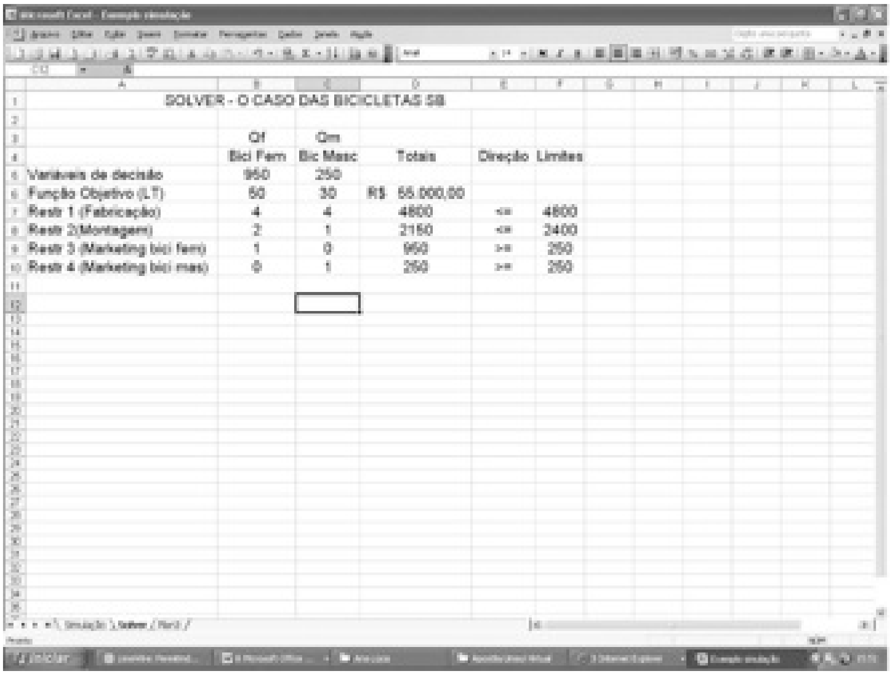
6º) depois que introduzirmos todas as restrições voltamos à janela inicial e clicamos em **Opções**. Desta maneira a janela da figura 8 se abrirá e clicaremos em: ***presumir modelo linear e presumir não negativos***.

Figura 8 – Escolhendo opções do Solver



7º) Depois de todos estes passos executados poderemos resolver o modelo clicando em OK e Resolver. A resposta será a mostrada na Figura 9.

Figura 9 – Resultados do Solver



Você agora tem seu modelo resolvido. Conforme mostra a Figura 9 o resultado será produzir 950 bicicletas femininas (indicado na célula B5), 250 bicicletas masculinas ((indicado na célula C5) com um lucro de R$ 55.000,00(indicado na célula B5). Resultados adicionais do Solver são que toda a mão de obra do departamento de fabricação foi consumida com esta solução (mostrado na célula D7). Das 2400 horas de mão de obra disponíveis no departamento de montagem somente 2150h foram consumidas (célulaD8) e que os resultados das restrições 3 e 4 foram 950 e 250 (células D9 e D10).

Agora você já sabe como resolver modelos de programação linear no Excel.

ANEXO 4: Cálculo do desvio padrão

Acesse esta planilha de cálculos na Midiateca.

CÁLCULO DO DESVIO PADRÃO

NO EXCEL

	D
	360
	180
	180
	300
	300
	300
	300
	360
	360
	300
	240
	300
	180
	300
	360
	300
	300
	300
	300
	180
Desvio padrão	61,17

DESVPAD	61,17
MÁQUINAS EM PORTUGUES	
STDEV.S	61,17274935
MÁQUINAS EM INGLÊS	

NO "BRAÇO"

	D	D-Dm	(D-Dm)2	Σ(D-Dm)2	n-1	÷	σ =
	360	75	5625				
	180	-105	11025				
	180	-105	11025				
	300	15	225				
	300	15	225				
	300	15	225				
	300	15	225				
	360	75	5625				
	360	75	5625				
	300	15	225				
	240	-45	2025				
	300	15	225				
	180	-105	11025				
	300	15	225				
	360	75	5625				
	300	15	225				
	300	15	225				
	300	15	225				
	300	15	225				
	180	-105	11025				
Dm	285			**71100**	**19**	3742,11	61,17

NA CALCULADORA

HP-12C			
1	ENTER	360	Σ+
2	ENTER	180	Σ+
3	ENTER	180	Σ+
4	ENTER	300	Σ+
5	ENTER	300	Σ+
6	ENTER	300	Σ+
7	ENTER	300	Σ+
8	ENTER	360	Σ+
9	ENTER	360	Σ+
10	ENTER	300	Σ+
11	ENTER	240	Σ+
12	ENTER	300	Σ+
13	ENTER	180	Σ+
14	ENTER	300	Σ+
15	ENTER	360	Σ+
16	ENTER	300	Σ+
17	ENTER	300	Σ+
18	ENTER	300	Σ+
19	ENTER	300	Σ+
20	ENTER	180	Σ+
	G	TECLAR	
	S		
	61,17		

σ ⇨ DESVIO PADRÃO, FÓRMULA PARA O CÁLCULO

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(D - Dm)^2}{n-1}}$$

Onde:

D ⇨ Demanda

Dm ⇨ Demanda média

n ⇨ número de períodos

Pesquisa Operacional

A logística assume cada vez mais o importante papel de transferir mercadorias e ou serviços entre as áreas de produção e as áreas de consumo. Más condições na infraestrutura do País podem inclusive inviabilizar negócios, pois os custos logísticos podem tornar a negociação impraticável. Um dos grandes méritos ao se estudar ou trabalhar com logística consiste principalmente em equilibrar os custos com o nível de serviço ao cliente. Estes e outros temas referentes a pesquisa operacional serão trabalhados neste livro.

UNISUL

www.unisul.br