UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

PABLO SANTOS TORRES

# USO DA GEOMETRIA DIFERENCIAL E DO CÁLCULO VETORIAL PARA ESTUDAR AS EQUAÇÕES TRADICIONAIS DA FÍSICA NO DESLOCAMENTO DE UMA PARTÍCULA EM $R^3$ SOBRE UMA CURVA REGULAR.

Rio de Janeiro

2021

**PABLO SANTOS TORRES**

# USO DA GEOMETRIA DIFERENCIAL E DO CÁLCULO VETORIAL PARA ESTUDAR AS EQUAÇÕES TRADICIONAIS DA FÍSICA NO DESLOCAMENTO DE UMA PARTÍCULA EM $R^3$ SOBRE UMA CURVA REGULAR.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Bacharelado da Universidade do Sul de Santa Catarina como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Christian Wagner.

Rio de Janeiro

2021

**PABLO SANTOS TORRES**

# USO DA GEOMETRIA DIFERENCIAL E DO CÁLCULO VETORIAL PARA ESTUDAR AS EQUAÇÕES TRADICIONAIS DA FÍSICA NO DESLOCAMENTO DE UMA PARTÍCULA EM $R^3$ SOBRE UMA CURVA REGULAR.

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado à obtenção do título de Bacharel e aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Rio de Janeiro, 18 de novembro de 2021.

_____

Professor e orientador Christian Wagner, Ms.
Universidade do Sul de Santa Catarina

_____

Profa. Kelen Regina Salles Silva, Ms.
Universidade do Sul de Santa Catarina

_____

Prof. Kelser de Souza Kock, Dr.
Universidade do Sul de Santa Catarina

À minha esposa Ligia, pelo apoio e companhia nesta jornada.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Professor Christian Wagner, pelas incontáveis mensagens e troca de ideias no processo de amadurecimento desta pesquisa.

Agradeço a todos os professores e profissionais os quais tive contato nas disciplinas de meu curso e àqueles os quais, mesmo não tendo contato, elaboraram os materiais didáticos e formaram a base pedagógica do curso de Matemática.

Agradeço à minha família, pelas conversas calorosas aos finais de semana sobre Física, Matemática, Engenharia e áreas afins.

“A ciência é muito mais que um corpo de conhecimentos. É uma maneira de pensar.” (CARL SAGAN).

## RESUMO

A presente pesquisa consiste em explorar o uso da geometria diferencial e do cálculo vetorial para estudar as equações tradicionais da física no deslocamento de uma partícula em $R^3$ sobre uma curva regular. O objetivo geral é comparar a modelagem do deslocamento de um objeto no espaço tridimensional, em uma trajetória definida por uma curva regular, nos parâmetros espaço, velocidade e aceleração no contexto da geometria diferencial com equações tradicionais da física. Para alcançar tal objetivo, foi realizada uma pesquisa bibliográfica de caráter exploratório, utilizando livros e bases de dados virtuais indexadas para a obtenção do embasamento teórico necessário para a seleção e comparação dos modelos descritivos que integrem a grade de cursos introdutórios de Física. Para se buscar uma descrição do fenômeno cinemático de uma partícula sob o enfoque do Cálculo Vetorial e da Geometria Diferencial, a presente pesquisa adotou a abordagem qualitativa. Com o resultado obtido na revisão bibliográfica, foi proposta a aplicação dos modelos em dois casos: no deslocamento em uma trajetória retilínea e em uma trajetória circular. A pesquisa alcançou como resultado que ambas as abordagens são equivalentes no movimento retilíneo e circular. Entretanto, a abordagem do fenômeno no enfoque da Física Cinemática exige o uso de equações específicas para cada caso, enquanto com o uso de Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial, é possível a modelagem mais geral. Todavia, quando a partícula não se encontra em repouso no momento inicial, o uso das equações do Cálculo Vetorial e da Geometria Diferencial se mostrou complexo devido à grande quantidade de variáveis envolvidas. Por fim, sugere-se que, no ensino dos conceitos de Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial, os conceitos da Cinemática sejam desenvolvidos em conjunto para maior contextualização dos conceitos matemáticos com o mundo real, desenvolvendo exemplos de generalizações da modelagem de um fenômeno cinemático sob novo enfoque.



Palavras-chave: Cinemática. Geometria Diferencial. Cálculo Vetorial.

## ABSTRACT

The present research consists of the development of the use of differential geometry and vector calculus to study traditional physics equations in the displacement of a particle in $R^3$ on a regular curve. The main objective is to compare the modeling of the displacement of an object in three-dimensional space, in a trajectory defined by a regular curve, in the parameters space, velocity and acceleration in the context of differential geometry and traditional physics equations. To achieve this objective, exploratory bibliographical research was carried out, using indexed books and virtual databases to obtain the necessary theoretical basis for the selection and to compare the descriptive models that integrate the grid of introductory physics courses. To search for a description of the kinematic phenomenon of a particle under the focus of Vector Calculus and Differential Geometry, this research adopted a qualitative approach. With the result obtained in the literature review, it was proposed to apply the models in two cases: in displacement in a straight path and in a circular path. The research achieved as a result that both approaches are equivalent in straight and circular motion. However, the approach of the phenomenon in the Kinematic Physics approach requires the use of specific equations for each case, while with the use of Vector Calculus and Differential Geometry, a more general modeling is possible. However, when the particle is not at rest at the initial moment, the use of the Vector Calculus and Differential Geometry equations proved to be complex due to the large number of variables involved. Finally, it is suggested that, in the teaching of the concepts of Vector Calculus and Differential Geometry, the concepts of Kinematics must be developed together for greater contextualization of mathematical concepts with the real world, developing examples of generalizations of modeling a kinematic phenomenon under a new focus.



Keywords: Kinematics. Differential Geometry. Vector Calculus.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Movimento de um Projétil ..... 13
Figura 2 – Representação do vetor posição ..... 19
Figura 3 – Vetor deslocamento ..... 20
Figura 4 – Vetores atuantes em um movimento circular uniforme ..... 28
Figura 5 – Exemplo de curva ..... 31
Figura 6 – Curva com ponto anguloso ..... 32
Figura 7 – Diferença entre a função e o traço ..... 33
Figura 8 – Curva não plana ..... 34
Figura 9 – Curva Plana ..... 34
Figura 10 – Reta secante à uma função f(t) ..... 36
Figura 11 – Tangente obtida pelo pela derivada de f(t). ..... 36
Figura 12 – Comprimento do Arco ..... 38
Figura 13 – Triedro de Frenet ..... 42
Figura 14 – Plano Osculador ..... 43
Figura 15 – Plano Normal ..... 44
Figura 16 – Plano Retificante ..... 44
Figura 17 – Plano osculador da curva plana ..... 48

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Estrutura do trabalho..... 17
Quadro 2 – Reparametrização por comprimento do arco. ..... 39
Quadro 3 – Exemplo de reparametrização por comprimento do arco. ..... 40

**SUMÁRIO**


**1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS ..... 12**
1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA ..... 12
1.2 PROBLEMATIZAÇÃO ..... 12
1.3 JUSTIFICATIVAS ..... 14
1.4 OBJETIVOS ..... 16
**1.4.1 Objetivo Geral ..... 16**
**1.4.2 Objetivos Específicos ..... 16**
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO ..... 16
**2 FUNDAMENTAÇÃO TÉORICA ..... 18**
2.1 CINEMÁTICA ..... 18
**2.1.1 Vetor Posição ..... 18**
**2.1.2 Vetor Velocidade ..... 20**
**2.1.3 Vetor aceleração ..... 22**
**2.1.4 Cinemática unidimensional ..... 23**
**2.1.5 Equações da Cinemática Unidimensional ..... 24**
**2.1.6 Movimento unidimensional com aceleração constante ..... 25**
**2.1.7 Movimento tridimensional com aceleração constante ..... 26**
**2.1.8 Movimento circular uniforme ..... 28**
2.2 CONCEITOS DE CURVAS ..... 31
**2.2.1 Curva Parametrizada ..... 33**
**2.2.2 Comprimento de Arco ..... 35**
**2.2.3 Reparametrização de curvas ..... 38**
2.3 TEORIA LOCAL DAS CURVAS ..... 40
2.4 APLICAÇÕES DA GEOMETRIA DIFERENCIAL NA CINEMÁTICA DA PARTÍCULA ..... 46
**3 DELIMITAÇÃO METODOLÓGICA ..... 49**
3.1 TIPO DA PESQUISA ..... 49
3.2 DESCRIÇÃO DO OBJETO DE ESTUDO ..... 50
3.3 COLETA DE DADOS ..... 50
**3.3.1 Instrumentos para a coleta de dados ..... 50**
**3.3.2 Procedimentos para a coleta de dados ..... 51**

3.4 TRATAMENTO DOS DADOS ..... 51
**4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS ..... 52**
4.1 DESLOCAMENTO DE UMA PARTÍCULA EM UMA TRAJETÓRIA RETA ..... 52
**4.1.1 Resolução conforme a Física Cinemática ..... 53**
**4.1.2 Resolução conforme o Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial ..... 53**
4.2 DESLOCAMENTO DE UMA PARTÍCULA EM UMA TRAJETÓRIA CIRCULAR. 56
**4.2.1 Resolução conforme a Física Cinemática ..... 56**
**4.2.2 Resolução conforme o Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial ..... 57**
4.3 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS ..... 59
**5 CONSIDERAÇÕES FINAIS ..... 61**
**REFERÊNCIAS ..... 62**

# 1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Esta seção trata do tema abordado e sua delimitação, além de apresentar a problematização dentro da qual o estudo se contextualiza, a justificativa e os objetivos gerais e específicos.

## 1.1 TEMA E DELIMITAÇÃO DO TEMA

Comparação da modelagem do movimento de uma partícula em $R^3$, por meio das equações tradicionais da física e da geometria diferencial e do cálculo vetorial.

## 1.2 PROBLEMATIZAÇÃO

A geometria diferencial é uma disciplina da matemática que trata os entes geométricos sob a ótica do cálculo, que, conforme Pereira Jr e Lemos (2011) possui um papel fundamental na física teórica contemporânea. A geometria diferencial tem aplicações nos campos da mecânica clássica, relatividade geral, na física das partículas elementares, entre outros exemplos.

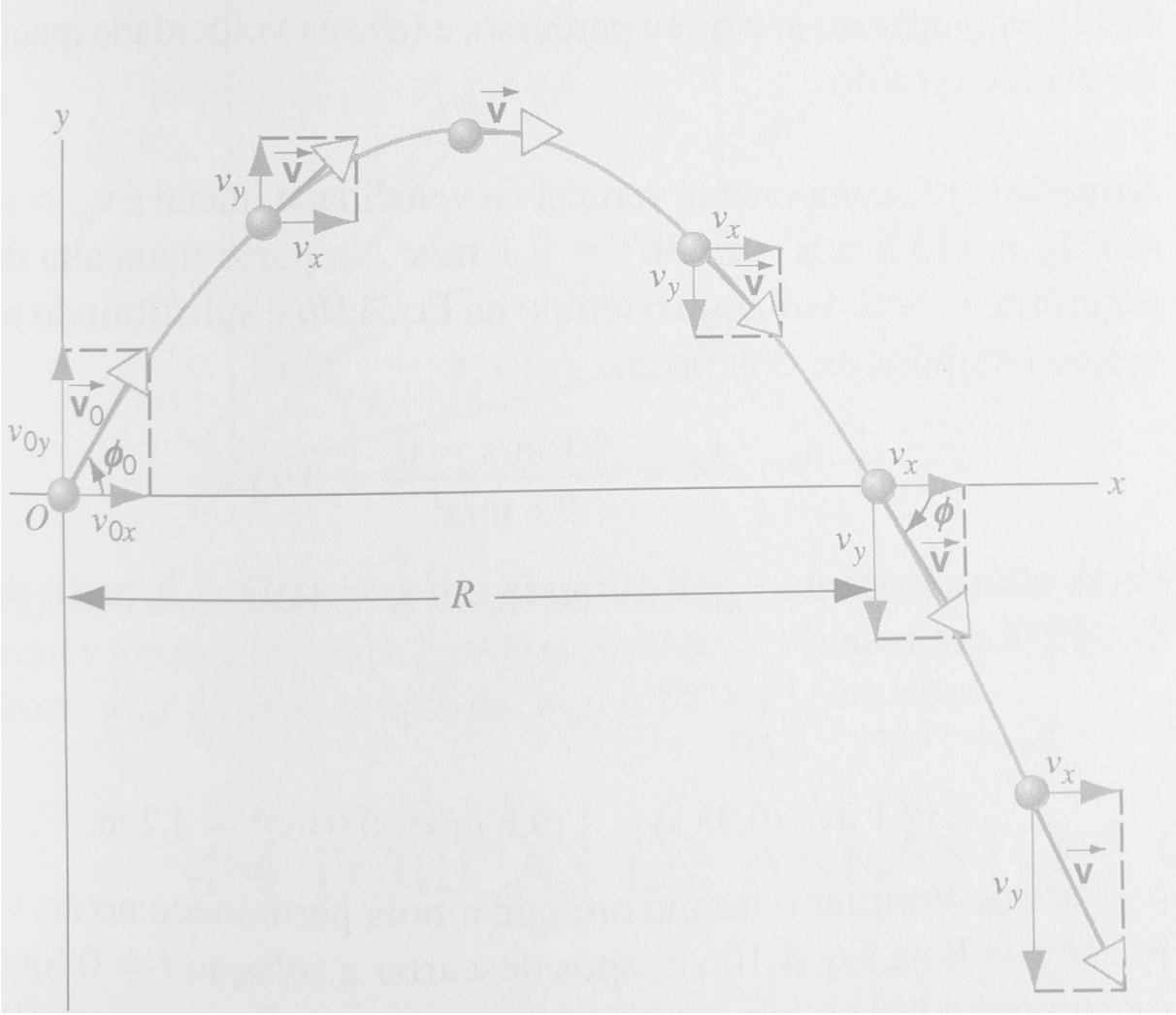
No campo da mecânica clássica, cursos introdutórios de física, como em Resnick, Halliday e Krane (2014) e Nussenzveig (2013), os temas são abordados pela decomposição dos vetores pelas relações do triângulo retângulo e os cálculos são realizados de forma unidimensional.

Devido à aparente desconexão existente nos cursos introdutórios de física quanto à aplicação da geometria diferencial, esta pesquisa buscará estudar a modelagem do deslocamento e dos parâmetros velocidade e aceleração de uma partícula no espaço ($R^3$), no contexto da geometria diferencial, comparando com os resultados obtidos pelo conteúdo abordado em cursos introdutórios de Física.

Nos cursos introdutórios de Física, como em Resnick, Halliday e Krane (2014) e Nussenzveig (2013) o ramo da cinemática é tipicamente apresentado com suas equações já definidas e suas aplicações indicadas. No intuito de promover uma nova abordagem ao assunto, utilizando a modelagem matemática para a solução de problemas, se apresenta a ideia de descrever o movimento de um objeto no espaço tridimensional (ou $R^3$) a partir dos conceitos abordados pela geometria diferencial e cálculo vetorial.

As equações da cinemática do movimento presentes em Resnick, Halliday e Krane (2014) e Nussenzveig (2013), abordam a modelagem do movimento pela decomposição dos vetores. A partir da relação obtida de um triângulo retângulo, decompõe-se os vetores de forma a reduzir o modelo de uma abordagem tridimensional para unidimensional, como exemplificado na Figura 1.

Figura 1 – Movimento de um Projétil




Fonte: Resnick, Halliday e Krane, 2014.

Entretanto, ao se modelar uma curva no espaço, como em Gonçalves e Flemming (2007), por analogia, pode-se inferir que a grandeza escalar que mede o espaço percorrido por um objeto em uma trajetória, de acordo com as equações da Física, pode ser obtida pela medição do comprimento da curva que o objeto traça ao realizar o seu deslocamento, considerando o traço gerado como a união dos infinitos pontos que definem a curva. Em consequência, a velocidade e a aceleração se relacionam com a forma que a curva é traçada.

Conforme Volina, Pylypaka, Nesvidomin, Pavlov e Dranoska (2021), o uso da geometria diferencial, particularmente o Triedro de Frenet – Serret e as fórmulas de Frenet – Serret, possibilita a modelagem do movimento de uma curva regular não apenas em relação ao tempo, como variável independente. Com parametrização da curva pelo comprimento do arco, pode-se modelar o movimento de uma partícula em relação à distância que a partícula percorreu na curva.

Por outro lado, Gusella (2020), aborda o caso da modelagem em curvas não regulares, que indica a possibilidade de utilizar o operador diferencial de Riccati, no domínio complexo, para tratar as irregularidades. Neste caso, a aleatoriedade das imperfeições é descrita pela aleatoriedade obtida na curvatura e na torção, podendo ser modeladas por funções homogêneas.

Portanto, surge a questão: Qual é o modelo mais adequado para descrever o movimento de uma partícula, em uma trajetória definida por uma curva regular, nos parâmetros relacionados à posição, velocidade e aceleração, em $R^3$, em cursos introdutórios de Física?

## 1.3 JUSTIFICATIVAS

Na busca por tornar o conhecimento nas ciências exatas mais intuitivo, apresenta-se a aplicação do ensino com o foco na modelagem matemática, de forma que a aprendizagem não seja apenas a repetição das equações fornecidas pelos livros. Assim, o aprendiz passa a ver o mundo com os olhos de pesquisador e pode, a partir de ferramentas matemáticas, modelar os fenômenos que ocorrem ao seu redor e buscar soluções para as suas dúvidas.

Nos cursos introdutórios de Física, costuma-se remeter às equações prontas, induzindo os alunos a decorar, dificultando aos mesmos visualizar como as equações se

comportam de forma dinâmica e como cada variável influencia e descreve o comportamento do objeto em estudo.

Conforme Resnick, Halliday e Krane (2014) e Nussenzveig (2013), a abordagem tridimensional do movimento baseia-se na decomposição de vetores, para a consequente análise unidimensional. Este artifício isola a análise do movimento da sua real natureza, pois dificulta a visualização da dinâmica, onde um efeito ocorrido em um eixo poderá alterar os demais.

Esta pesquisa tem importância teórica, ao buscar novas formas de abordar a semiótica da cinemática de partículas, diferentes das apresentadas aos alunos em cursos introdutórios de Física. De forma complementar, o desenvolvimento de uma nova abordagem no ensino contribui para a docência dos conceitos e indica a possibilidade de inovação em um ramo da física, trabalhando de forma multidisciplinar e integrada com a modelagem matemática.

A motivação da pesquisa se dá pela carência de formas alternativas de exposição de conceitos matemáticos e físicos no ensino tradicional. Por vezes, o aluno pode se deparar com dificuldades em seu aprendizado, motivado pela falta de uma abordagem mais intuitiva e não fixa a conceitos “impostos”. Logo, busca-se incentivar a curiosidade e a participação do discente no processo ensino-aprendizagem, pelo espírito de descoberta que uma pesquisa pode proporcionar.

Neste contexto, a presente pesquisa tem por objetivo utilizar a modelagem matemática, em especial a geometria diferencial, para descrever o movimento de uma partícula no espaço tridimensional e comparar com os resultados obtidos pelas equações tradicionais apresentadas em livros de Física.

A intenção é buscar uma forma alternativa de abordar os assuntos de cinemática nos cursos introdutórios de Física, como forma de despertar a curiosidade dos discentes da dinâmica dos fenômenos físicos e auxiliar com novas ideias no ensino de Física. Ainda, pela apresentação de uma nova forma de modelagem, busca-se o desenvolvimento de uma mentalidade de dinamismo no desenvolvimento de soluções por discentes.

Em uma pesquisa bibliográfica inicial sobre o assunto, foram encontrados diversos assuntos que tratam a modelagem do movimento de partículas de forma isolada e em casos específicos, como em Pereira Jr e Lemos (2011), Volina, Pylypaka, Nesvidomin, Pavlov e Dranoska (2021) e Gusella (2021). Todavia, não foram encontrados artigos que comparem métodos tradicionais, como os apresentados em Resnick, Halliday e Krane (2014) e Nussenzveig (2013), com outros que possam ser modelados pelos conceitos de geometria diferencial.

## 1.4 OBJETIVOS

### 1.4.1 Objetivo Geral

Comparar a modelagem da trajetória de um objeto no espaço tridimensional, em uma trajetória definida por uma curva regular, nos parâmetros espaço, velocidade e aceleração no contexto da geometria diferencial com equações tradicionais da física.

### 1.4.2 Objetivos Específicos

Pesquisar os conceitos de cinemática apresentados em livros de cursos introdutórios de Física;

Pesquisar os conceitos que norteiam a geometria diferencial e o cálculo vetorial;

Relacionar os conceitos de cinemática com as definições do cálculo vetorial;

Modelar o deslocamento de um objeto em $R^3$ com base no cálculo vetorial;

Exemplificar a aplicação dos modelos em deslocamentos na reta e na circunferência;

Comparar os resultados obtidos na modelagem matemática com as equações da cinemática.

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

A pesquisa se estruturará conforme a descrição do quadro abaixo.

Quadro 1 – Estrutura do trabalho

| Capítulo | Aspectos abordados |
|---|---|
| Capítulo 1 – Metodologia | - Metodologia a ser utilizada na pesquisa;<br>- Justificativa da pesquisa; e<br>- Objetivos Geral e Específicos. |
| Capítulo 2 – Fundamentação Teórica | - Conceitos da geometria diferencial; e<br>- Conceitos da cinemática. |
| Capítulo 3 – Apresentação e Discussão dos Resultados | - Equivalência de conceitos abordados pela geometria diferencial e a cinemática.- Desenvolvimento dos modelos conforme a geometria diferencial e a física, nos casos específicos da reta e da circunferência. |
| Capítulo 4 – Considerações Finais | - Discussão dos resultados obtidos no Capítulo 3, em busca de uma resposta ao problema de pesquisa. |

Fonte: Elaboração do autor, 2021.

# 2 FUNDAMENTAÇÃO TÉORICA

Esta seção apresentará os referenciais teóricos utilizados como base para o desenvolvimento do trabalho e como fonte de informações sobre o tópico.

## 2.1 CINEMÁTICA

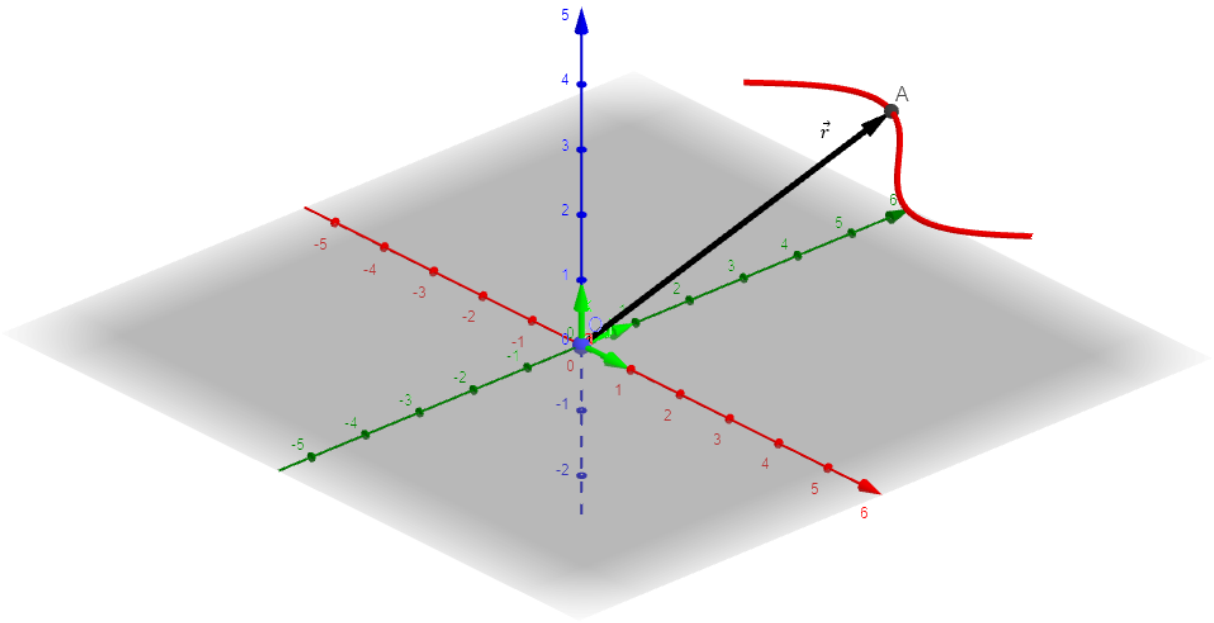
A cinemática, de acordo com Resnick, Halliday e Krane (2014), é o estudo do movimento dos objetos, seus parâmetros descritores, como posição, velocidade e aceleração, e como os parâmetros se relacionam. Na obra de Resnick, Halliday e Krane (2014) e Nussenzveig (2013), o objeto estudado é modelado como uma partícula. Uma partícula é conceituada como um ponto único, com suas partes se movimentando de maneira uniforme, isto é, sem movimentos internos, como rotações e vibrações.

### 2.1.1 Vetor Posição

No campo da cinemática, descreve-se o movimento de uma partícula por vetores que podem especificar a posição, a velocidade e a aceleração. Uma partícula que se desloca em $R^3$, pode ser localizada pelo vetor posição. O vetor posição é definido pela decomposição nas coordenadas relacionadas aos eixos coordenados, considerando os vetores unitários $\vec{\imath}, \vec{\jmath} \; e \; \vec{k}$ respectivamente a *x,y* e *z*. Assim, o vetor posição é dado por:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Figura 2 – Representação do vetor posição

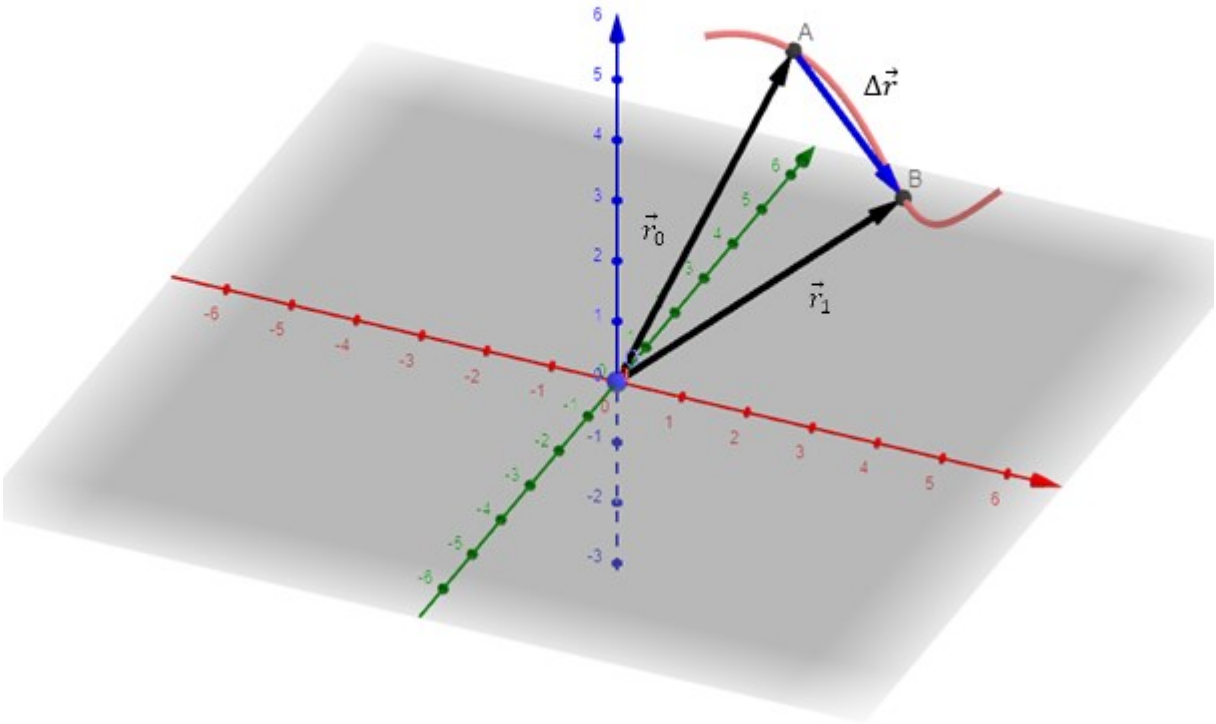



Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Supondo que, no tempo $t_0$, a partícula se encontra na posição $\overrightarrow{r_0}$ , identificada pelo ponto A da Figura 3, e, no intervalo entre $t_0$ $e$ $t_1$, a partícula se deslocará na trajetória até a posição $\overrightarrow{r_1}$, identificada pelo ponto B na Figura 3, o vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$ é definido por:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

Figura 3 – Vetor deslocamento




Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Resnick, Halliday e Krane (2014) concluem que o vetor deslocamento depende apenas do ponto inicial e final, independente da trajetória percorrida.

### 2.1.2 Vetor Velocidade

A velocidade média ($\vec{v}_{med}$) é a relação entre o deslocamento e o intervalo de tempo $\Delta t$ necessário para o deslocamento ocorrer. A velocidade média é obtida por:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Da mesma forma que o deslocamento, a velocidade depende somente da posição inicial e final da partícula, não sendo influenciado pelo o que ocorrer durante o deslocamento.

A velocidade instantânea pode variar, podem ocorrer reversões no sentido do movimento, mas a velocidade média não será afetada.

A velocidade média é útil para se obter um comportamento geral de uma partícula em um intervalo de tempo. Todavia, para se obter mais detalhes de seu movimento, deve se utilizar o conceito de velocidade instantânea, dada por:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Por definição, a direção de $\vec{v}$ é tangente à trajetória da partícula. Em consequência, a velocidade instantânea pode ser obtida por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (2.1.2.1)$$

Portanto, o vetor velocidade é composto de três componentes, relacionadas aos eixos coordenados:

$$Velocidade\ no\ eixo\ x\text{: } v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$Velocidade\ no\ eixo\ y\text{: } v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$Velocidade\ no\ eixo\ z\text{: } v_z = \frac{dz}{dt}$$

A intensidade da velocidade, por exemplo marcada em um velocímetro de automóvel, é dada pelo módulo do vetor velocidade. A intensidade da velocidade é um escalar, não contendo informações relacionadas à direção. (RESNICK, HALLIDAY, KRANE, 2014)

### 2.1.3 Vetor aceleração

Quando a partícula em movimento sofre variações em intensidade e direção da velocidade em um intervalo de tempo, a partícula sofreu a ação de uma aceleração. A aceleração média é dada por:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

De forma análoga à velocidade média, a aceleração média não é influenciada quando há variação na velocidade, considerando o mesmo percurso e o intervalo de tempo, pois a aceleração média representará a média da variação da velocidade. A aceleração instantânea é obtida por:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Como a aceleração instantânea é uma medida da taxa de variação da velocidade, ela pode ser obtida de acordo com a derivada:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \qquad (2.1.3.1)$$

As componentes do vetor aceleração são obtidas por:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

Resnick, Halliday e Krane (2014) destacam que a separação dos vetores em suas componentes simplifica a notação e facilita o entendimento da não interferência entre componentes de eixos distintos, como consequência da ortogonalidade dos mesmos.

Destaca-se ainda o fato de a direção da aceleração não possuir relação com a direção de $\vec{v}$. É possível que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{v}$ possuam qualquer ângulo entre eles. Uma variação na

direção do vetor velocidade provoca alteração no vetor aceleração, mesmo quando sua intensidade se mantém constante. Em consequência, um movimento com velocidade constante pode ser um movimento acelerado. Um exemplo é o movimento em trajetória circular. (RESNICK, HALLIDAY, KRANE, 2014).

### 2.1.4 Cinemática unidimensional

As equações e cálculos da cinemática unidimensional consideram apenas uma dimensão, portanto, apenas uma componente é analisada por vez. Resnick, Halliday e Krane (2014) destacam que, nesta abordagem, uma partícula pode variar o módulo e o sentido de seu deslocamento, mas o seu movimento sempre será sobre uma reta.

Uma partícula em repouso ocupa a mesma posição *A* para qualquer instante de tempo *t*. Considerando uma partícula que se desloca no eixo *x*, a equação que modela o deslocamento é dada por:

$$x(t) = A$$

Considerando o eixo *x* como referencial, uma partícula que se desloca com velocidade constante, possui velocidade positiva $v_x$ se a partícula se desloca no sentido positivo do eixo *x*, e possui velocidade negativa quando se desloca em sentido oposto ao eixo *x*. No movimento com velocidade constante, o deslocamento é expresso por:

$$x(t) = A + v_x t$$

A partícula, quando sofre variação em sua velocidade, se desloca em movimento acelerado. Conforme destaque de Resnick, Halliday e Krane (2014), dois exemplos de movimento acelerados são apresentados, onde *A* e *D* são constantes e $\omega$ representa um ângulo:

$$x(t) = A + v_x t + a_x t^2$$

$$x(t) = D cos \omega t$$

### 2.1.5 Equações da Cinemática Unidimensional

Uma partícula se desloca da posição inicial $x_1$ no tempo $t_1$ para o ponto $x_2$ no tempo $t_2$. O intervalo de tempo é expresso por $\Delta t = t_2 - t_1$ e o deslocamento é expresso por $\Delta x = x_2 - x_1$. A velocidade média é expressa por:

$$V_{med,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.1.5.1}$$

A velocidade média possui informações sobre o comportamento geral da partícula no intervalo $\Delta t$, dependendo apenas das posições inicial e final da partícula, não dependendo da trajetória. Definindo $\Delta t > 0$, se $V_{med,x} > 0$ então a partícula se desloca no sentido positivo do eixo. Se $V_{med,x} < 0$, a partícula se desloca no sentido negativo do eixo.

A velocidade instantânea é obtida por:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

A partícula se movendo com velocidade $v_{1,x}$ no instante $t_1$ e no instante $t_2$ com velocidade $v_{2,x}$, a aceleração média é obtida por:

$$a_{med,x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \tag{2.1.5.2}$$

A aceleração média é influenciada pela diferença da velocidade inicial e final no intervalo $\Delta t$, não sendo influenciada por variações da velocidade durante o deslocamento de $x_1$ a $x_2$.

A aceleração instantânea é dada por:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

Nussenzveig (2013), destaca que a aceleração instantânea, por ser obtida pela derivada da velocidade, pode ser obtida pela segunda derivada da equação do espaço:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

A aceleração pode ter sinal positivo ou negativo independente do comportamento do vetor velocidade. Quando a aceleração e a velocidade possuem sinais opostos e a velocidade está diminuindo, pode-se afirmar que a partícula está sofrendo desaceleração. Por outro lado, quando a aceleração e a velocidade possuem sinais iguais, pode-se afirmar que a partícula está sofrendo aceleração.

### 2.1.6 Movimento unidimensional com aceleração constante

Considere uma partícula de deslocando na direção positiva do eixo *x*. A componente do vetor aceleração é definida por $a_x$. A velocidade inicial em $t_0 = 0$ é $v_{0,x}$ e sua posição inicial é $x_0$. A partir da equação (2.1.5.2) da aceleração média se obtém: (RESNICK, HALLIDAY, KRANE, 2014).

$$a_x = a_{med} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{0,x}}{t - 0}$$

$$v_x = v_{0,x} + a_x t \qquad (2.1.6.1)$$

No caso do movimento com aceleração constante, a velocidade média de uma partícula pode ser obtida pela média das velocidades inicial e final em $\Delta t$:

$$v_{med,x} = \frac{v_x + v_{0,x}}{2} \qquad (2.1.6.2)$$

Combinando as equações (2.1.5.1), (2.1.6.1) e (2.1.6.2), obtém-se:

$$\frac{x - x_0}{t - 0} = \frac{2v_{0,x} + a_x t}{2}$$

$$2(x - x_0) = 2v_{0,x}t + a_x t^2$$

$$x(t) = x_0 + v_{0,x} + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad (2.1.6.3)$$

A equação (2.1.6.3) modela a posição *x* da partícula para qualquer instante *t*, quando a aceleração é constante.

Nussenzveig (2013) apresenta uma forma alternativa de se obter a velocidade no movimento uniformemente variado sem depender do tempo, pela combinação das equações (2.1.6.1) e (2.1.6.3), conhecida como equação de Torricelli:

$$t - t_0 = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x - x_0 = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

### 2.1.7 Movimento tridimensional com aceleração constante

No movimento tridimensional, se considera que a partícula se move livremente no espaço $R^3$, equivalendo a modelar a representação dos vetores deslocamento, velocidade e aceleração em termos dos eixos *x*, *y* e *z*. Portanto, em um movimento com aceleração constante, o vetor $\vec{a}$ é representado por:

$$a_x: de\ valor\ constante\ e\ em\ relação\ ao\ eixo\ x$$

$$a_y: de\ valor\ constante\ e\ em\ relação\ ao\ eixo\ y$$

$$a_z: de\ valor\ constante\ e\ em\ relação\ ao\ eixo\ z$$

O vetor deslocamento, em sua posição inicial no tempo $t = 0$ é descrito por:

$$\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$$

A velocidade inicial no tempo $t = 0$ é descrita por:

$$\overrightarrow{v_0} = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

No espaço tridimensional, a equação (2.1.6.1) é descrita de forma unidimensional por:

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$v_z = v_{0z} + a_z t$$

Na forma vetorial, a equação da velocidade é dada por:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{a}t$$

A equação do deslocamento é dada por:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad (2.1.7.1)$$

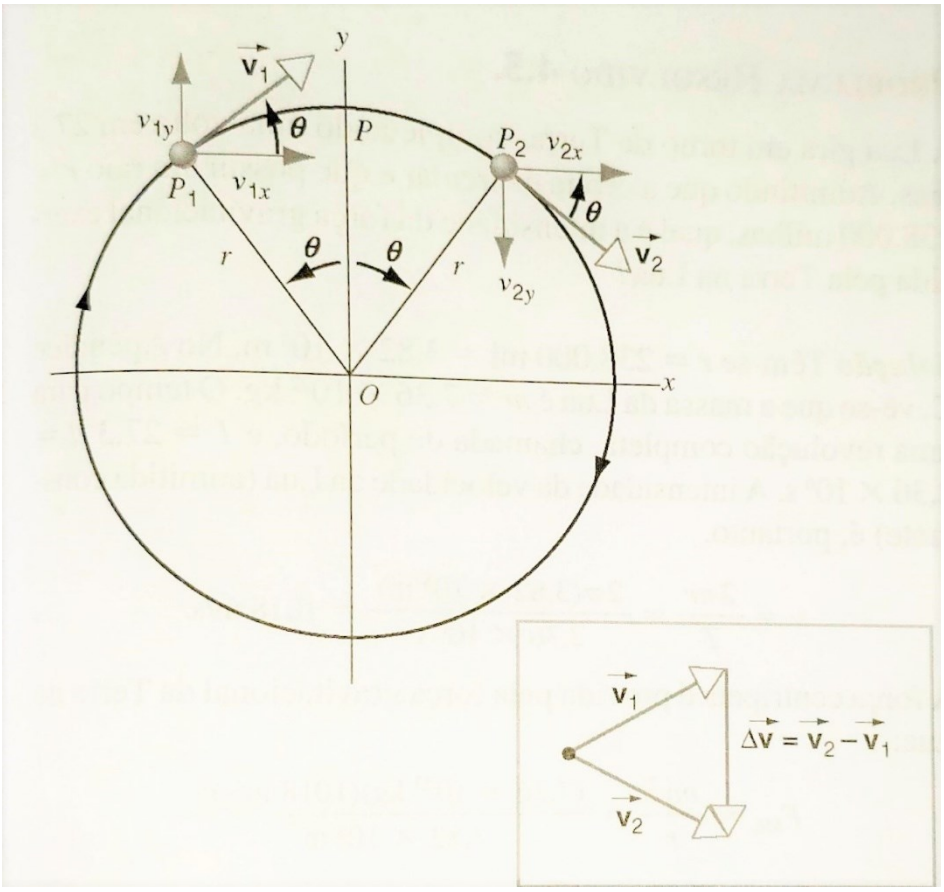
Nussenzveig (2013) define, de forma similar à cinemática unidimensional, a aceleração instantânea como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

### 2.1.8 Movimento circular uniforme

O movimento circular uniforme é um movimento bidimensional com velocidade de intensidade constante em uma trajetória circular. Para se modelar os vetores atuantes neste tipo de movimento, deve-se decompor os vetores, conforme a figura 4 abaixo:

Figura 4 – Vetores atuantes em um movimento circular uniforme




Fonte: Resnick, Halliday e Krane, 2014.

Observando a figura 4, e, conforme Resnick, Halliday e Krane (2104), para a partícula se manter em uma trajetória circular, atua sobre ela uma força na direção do centro da circunferência. Esta força é denominada força centrípeta. Esta força possui intensidade constante e varia sua direção conforme a partícula se desloca em sua trajetória. Em um sistema ideal, a força centrípeta é a única que atua. Logo, a aceleração também aponta para o centro da circunferência, chamada de aceleração centrípeta.

No caso particular do movimento circular uniforme, a partícula possui velocidade constante, mesmo com a atuação de uma aceleração no sistema. Esta aceleração atua na mudança da direção da velocidade e não em sua intensidade.

Observando a figura 4, onde uma partícula se move do ponto $P_1$ para o ponto $P_2$, a velocidade em $P_1$ é denominada $\overrightarrow{v_1}$ e no ponto $P_2$ a velocidade é $\overrightarrow{v_2}$. Os pontos estão distribuídos de forma simétrica por um ângulo $\theta$. A intensidade de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são constantes e de intensidade idênticas ($v_1 = v_2 = v$), mas possuem direções diferentes. As componentes da velocidade são dadas por: (RESNICK, HALLIDAY, KRANE, 2014)

$$v_{1x} = +v\cos\theta$$

$$v_{1y} = +v\mathit{sen}\theta$$

$$v_{2x} = +v\cos\theta$$

$$v_{2y} = -v\mathit{sen}\theta$$

A partícula, ao se deslocar pelo arco do ponto $P_1$ até $P_2$, percorre a distância de $2r\theta$, onde $\theta$ é expresso em radianos. Se essa distância é percorrida no intervalo de tempo $\Delta t$, logo a velocidade média é dada por: (RESNICK, HALLIDAY, KRANE, 2014)

$$v_{med} = \frac{2r\theta}{\Delta t}$$

A aceleração média no eixo x é dada por:

$$a_{med,x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{\Delta t} = \frac{v\cos\theta - v\cos\theta}{\Delta t} = 0$$

Como as velocidades $v_1$ e $v_2$ possuem a mesma intensidade e direção no eixo *x*, a aceleração média no eixo *x* é nula. Em relação ao eixo *y*, a aceleração média é dada por:

$$a_{med,y} = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{\Delta t} = \frac{-vsen\theta - vsen\theta}{\Delta t} = \frac{2vsen\theta}{\frac{2r\theta}{v}}$$

$$a_{med,y} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{sen\theta}{\theta}\right) \qquad (2.1.8.1)$$

A partir da equação (2.1.8.1), a aceleração instantânea no eixo *y* pode ser obtida por:

$$a_y = \lim_{\theta \to 0}\left[-\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{sen\theta}{\theta}\right)\right] = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\lim_{\theta \to 0}\left(\frac{sen\theta}{\theta}\right)$$

Resnick, Halliday e Krane (2014) destaca que em pequenos ângulos, o $sen\theta \approx \theta$, para $\theta$ em radianos, resultando no limite tendendo a 1. Logo:

$$a_y = -\frac{v^2}{r}$$

O sinal negativo indica que a direção de $a_y$ é oposta ao eixo *y*, isto é, em direção ao centro da circunferência. Como foram utilizados pontos arbitrários, pode-se afirmar que $a_y$ representa a aceleração centrípeta para qualquer ponto *P* em movimento circular uniforme, e sua intensidade é dada por: (RESNICK, HALLIDAY, KRANE, 2014).

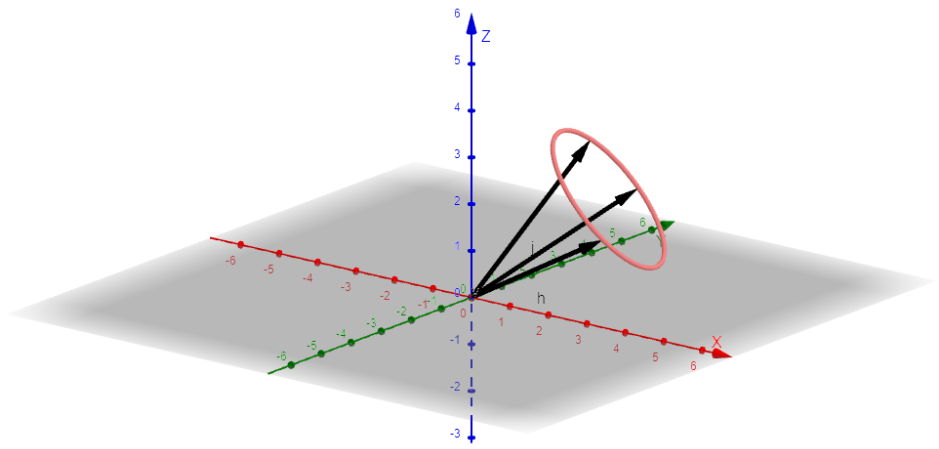
$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad (2.1.8.2)$$

## 2.2 CONCEITOS DE CURVAS

Conforme Gonçalves e Flemming (2007), a partir de uma função vetorial, onde $t \in I$, I um intervalo definido, define-se uma curva como sendo o lugar geométrico de todos os pontos P do espaço que atendam ao vetor posição $\vec{f}(t)$, $t \in I$:

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath} + f_3(t)\vec{k}$$

Figura 5 – Exemplo de curva



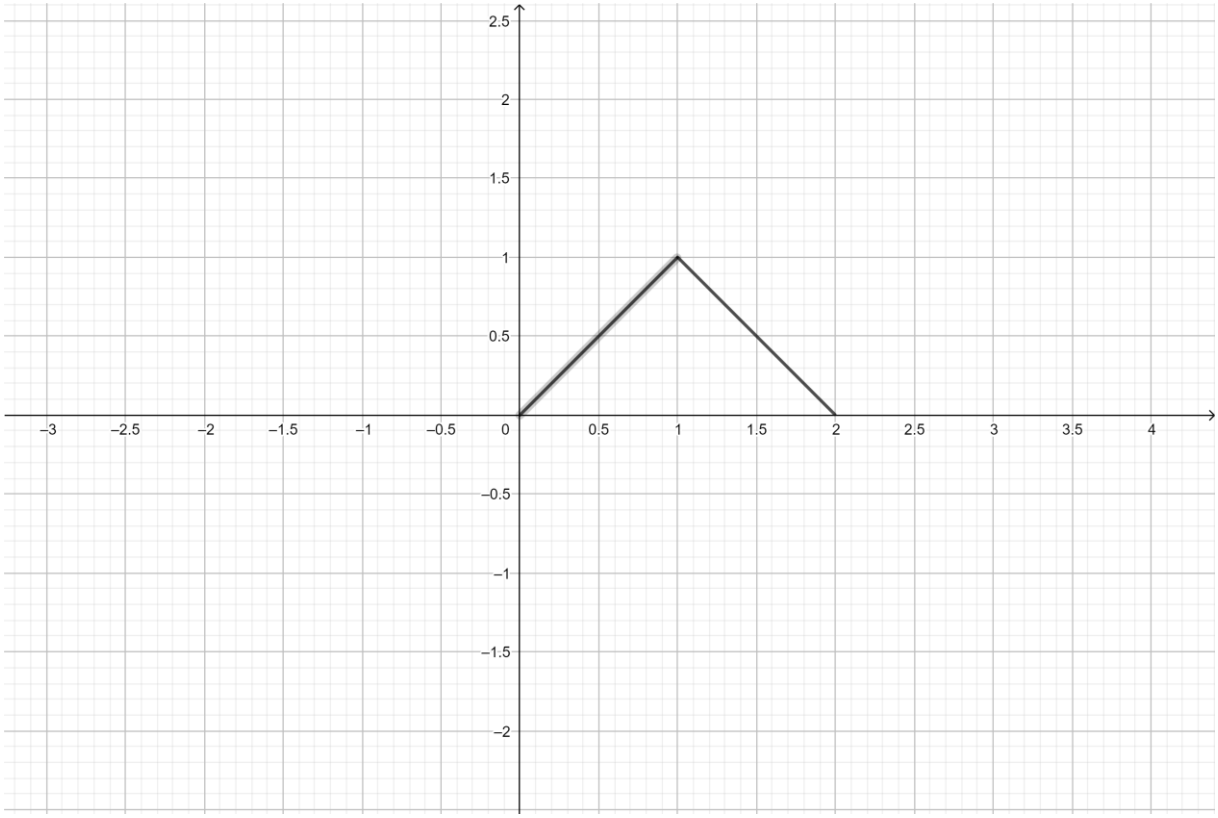

Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Gonçalves e Flemming (2007) afirmam que se a função $\vec{f}(t)$ representa o vetor posição de um objeto em movimento, então a curva definida coincidirá com a trajetória do objeto.

As curvas podem ou não apresentarem pontos angulosos, onde a derivada da função $\vec{f}(t)$ não existe. Um exemplo de função com ponto anguloso pode ser observado na sequência e ilustrado na figura 6.

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} (t, t); t \in [0; 1] \\ (t, -t + 2); t \in [1; 2] \end{cases}$$

Figura 6 – Curva com ponto anguloso




Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Gonçalves e Flemming (2007) define uma curva regular pela ausência de pontos angulosos. Em consequência, para cada ponto pertencente à curva, existe uma tangente única que é dinâmica com a curva.

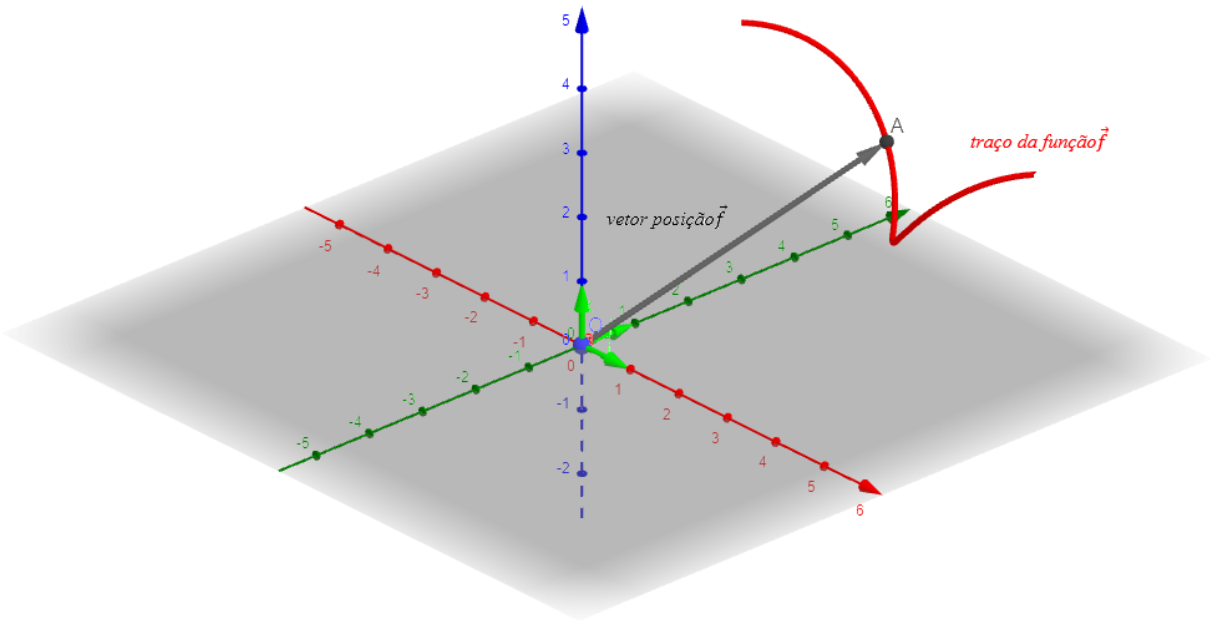
Formalmente, a curva regular C deve admitir uma parametrização do tipo $\vec{f}(t)$, onde $t \in I \subset R$, com derivada contínua e $\vec{f}'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Caso a curva C possua pontos angulosos, pode-se dividir a curva em um número finito de curvas regulares, utilizando as propriedades por intervalo. No exemplo demonstrado na figura 6, pode-se considerar que a curva $\vec{f}(t)$ é regular por partes, respeitando o intervalo $t \in [0,1) \cup (1,2]$.

### 2.2.1 Curva Parametrizada

Uma curva parametrizada, definida em um espaço real do tipo $R^n$, é uma função do tipo $f:(a,b) \to R^n$ para o intervalo $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Uma variável $t \in (a,b)$ é definida como o parâmetro da curva.

O conjunto de vetores posição de $\vec{f}(t)$, onde o parâmetro $t \in (a,b) \subset R$, determina um subconjunto de pontos em $R^n$ conforme o parâmetro $t$ varia. O subconjunto de todos os pontos obtidos em $R^n$ pela função $f$ é denominado traço da curva. Na prática, em uma função dependente de várias variáveis, a parametrização simplifica a descrição ao reescrever a aplicação como dependente de apenas uma variável. Na figura 7 abaixo se exemplifica um vetor posição de uma função $\vec{f}$ e sua relação com o traço da curva.

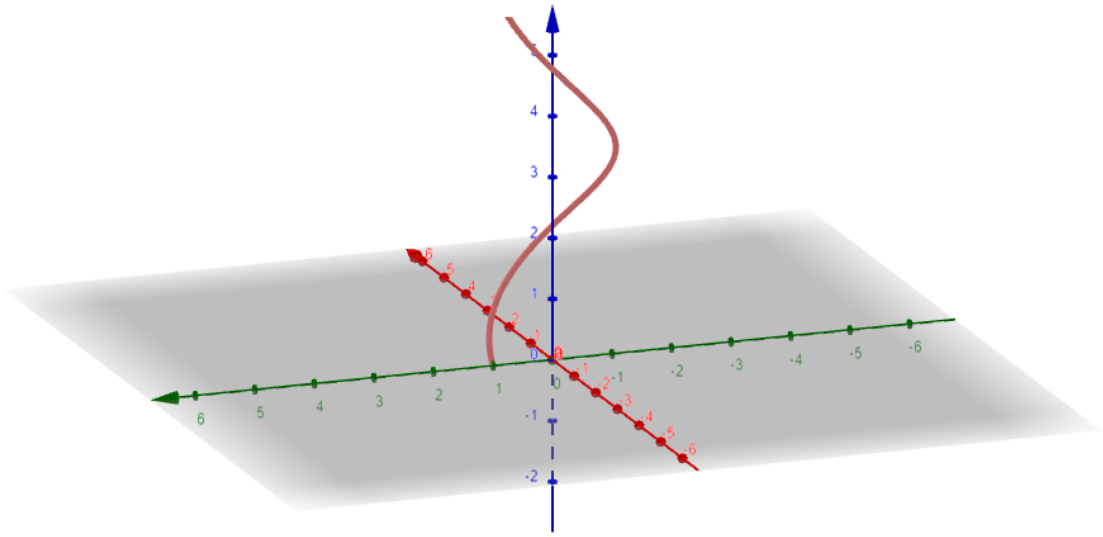
Figura 7 – Diferença entre a função e o traço




Fonte: Elaboração do autor, 2021.

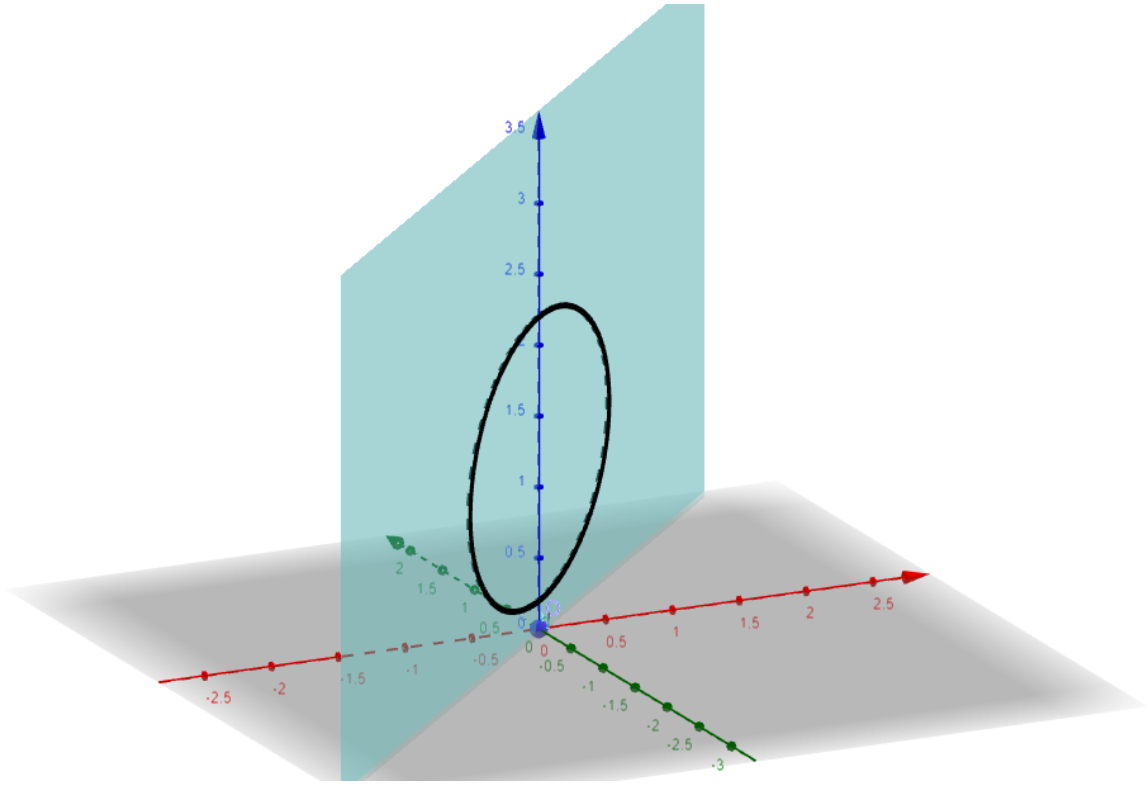
Uma curva parametrizada pode ser classificada como uma curva plana se existe um plano em $R^3$ que contenha a curva.

Figura 8 – Curva não plana



Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Figura 9 – Curva Plana



Fonte: Elaboração do autor, 2021.

### 2.2.2 Comprimento de Arco

Partindo da aplicação do tipo $f:(a,b) \rightarrow R^n$ para o intervalo $-\infty \leq a < b \leq \infty$, a derivada de *f* em relação a *t* é definida por

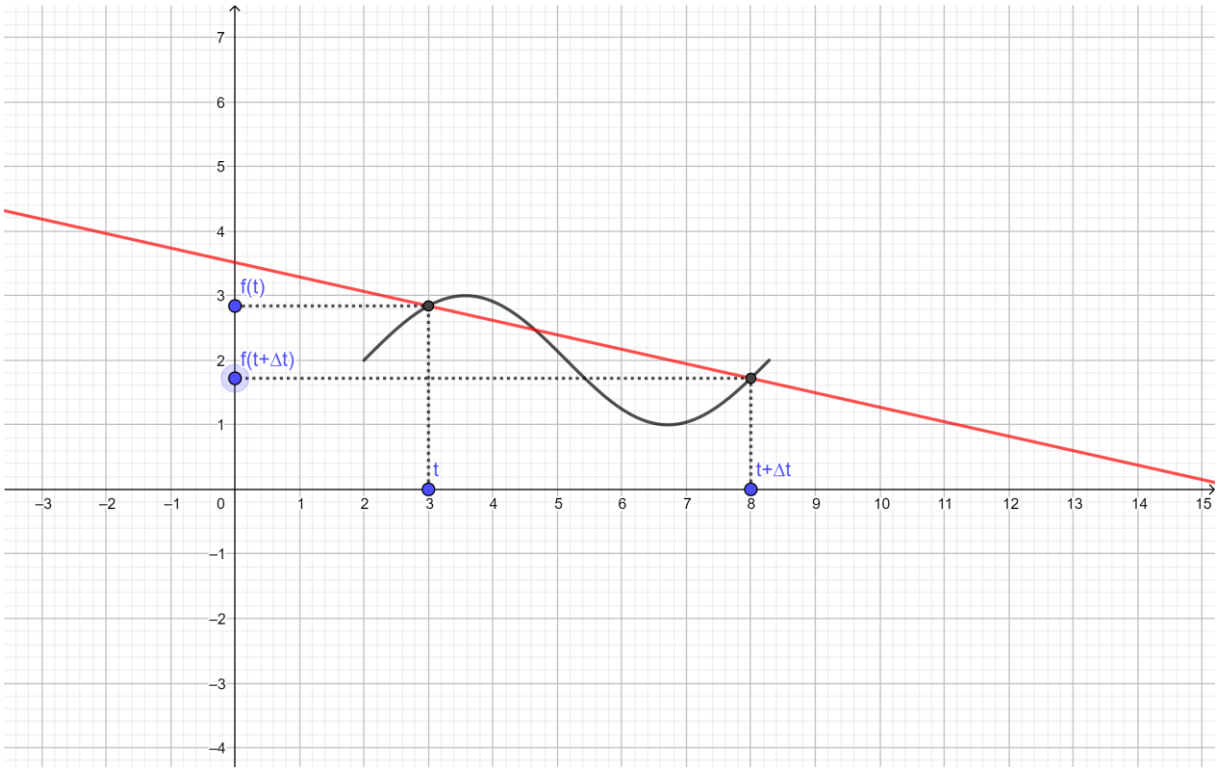
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{f}}{dt}$$

Em consequência, a derivada de $\vec{f}(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big)$ é definida pela derivada de suas componentes. Uma curva $\vec{f}(t)$ é derivável se suas componentes são deriváveis. As derivadas de ordem superior são obtidas da mesma forma.

$$\vec{f}^n = (f_1^n, f_2^n, \dots, f_m^n)$$

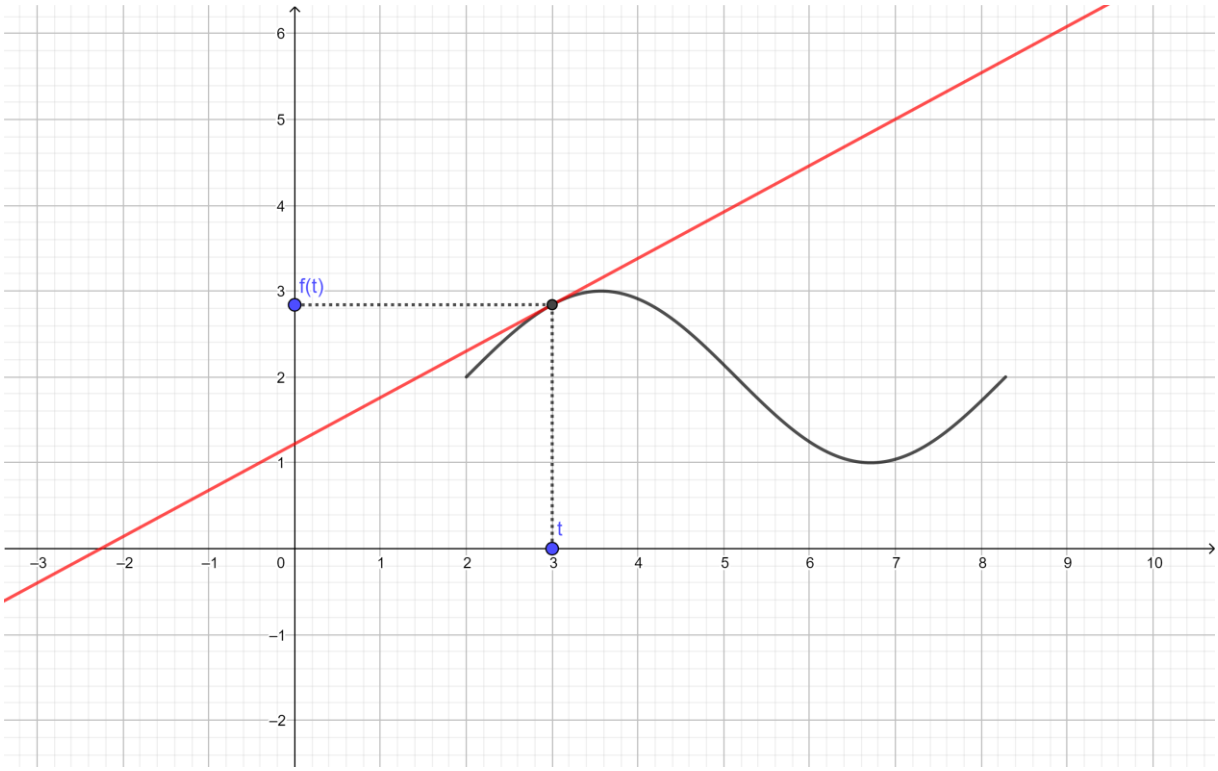
Dada uma curva $\vec{f}(t)$ parametrizada e os parâmetros *t* e $t + \Delta t$, define-se reta secante à curva $\vec{f}(t)$ como a reta definida por dois pontos $\big(t, f(t)\big)$ e $\big(t+\Delta t, f(t+\Delta t)\big)$, conforme a figura 10. Quando $\Delta t \rightarrow 0$, a reta secante se aproximará da reta tangente no ponto $\big(t, f(t)\big)$, conforme a figura 11. A primeira derivada da curva $\vec{f}(t)$, representada por $\vec{f}'(t)$, é obtida geometricamente pelo vetor que define a direção e o sentido da reta tangente de $\vec{f}(t)$ no ponto $\big(t, f(t)\big)$.

Figura 10 – Reta secante à uma função $\vec{f}(t)$




Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Figura 11 – Tangente obtida pelo pela derivada de $\vec{f}(t)$.




Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Dada uma curva parametrizada diferenciável $\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), t \in I \subset R$, o vetor tangente da curva $\vec{f}(t)$ para $t \in I$ é o vetor $\vec{f}'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$. Lembrando que a curva será regular quando $\vec{f}'(t) \neq 0, \forall t \in I$.

A reta tangente à curva regular $\vec{f}(t)$ no ponto $P(t_0), t_0 \in I$ é a reta que passa em $P(t_0)$ na direção do vetor tangente $\vec{f}'(t)$ sendo expresso por:

$$\vec{r}(x) = P(t_0) + x\big(\vec{r}'(t_0)\big) \ , \text{x} \in \text{R}$$

O comprimento do arco formado por uma curva regular parametrizada por $\vec{f}(t), a \leq t \leq b$, é dado por:

$$l = \int_a^b \big|\vec{f}'(t)\big| dt$$

Ainda, se a função $\vec{f}(t)\colon (a, b) \to R^n$ representa uma curva parametrizada regular, e tomarmos um $t \in (a, b), a \leq t \leq b$, a função comprimento do arco da curva C, no intervalo $(a,t]$, se dá por:

$$s(t) = \int_a^t \big|\vec{f}'(t^*)\big| dt^*$$

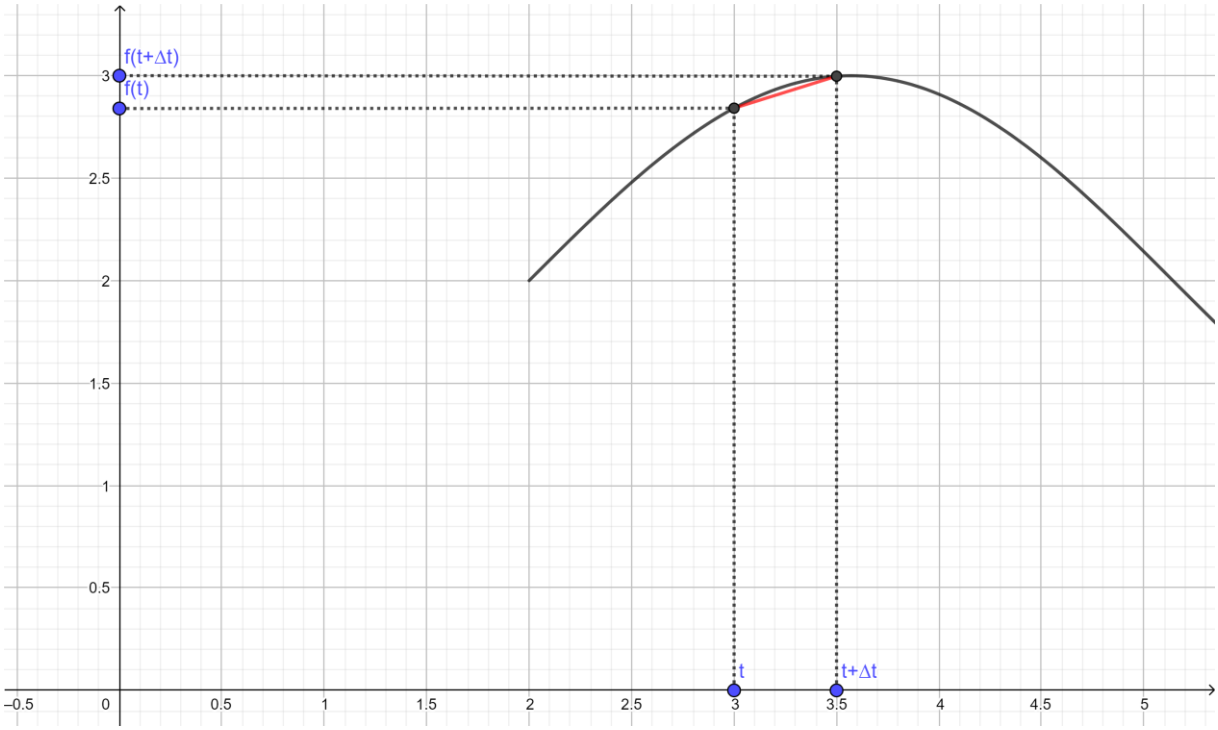
Onde:

$$\big|\vec{f}'(t)\big| = \sqrt{\big(f_1{}'(t)\big)^2 + \big(f_2{}'(t)\big)^2 + \cdots + (f_n{}'(t))^2}$$

Analisando geometricamente o comprimento do arco, dada uma curva parametrizada regular $\vec{f}(t)$, para um $\Delta t$ pequeno, os pontos da curva $\vec{f}(t)$ e $\vec{f}(t + \Delta t)$ podem ser ligados por um segmento de reta que se aproxima do formato da curva. O comprimento do segmento de reta é dado por:

$$\big|\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)\big|$$

Figura 12 – Comprimento do Arco




Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Para um $\Delta t$ pequeno, por definição, o limite abaixo é próximo a $\vec{f}'(t)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t}$$

O comprimento de arco pode ser obtido pela divisão da curva em pequenos segmentos e, depois, soma-se os resultados. Quando $\Delta t \to 0$, a soma se torna *s(t)*.

### 2.2.3 Reparametrização de curvas

Uma reparametrização de uma curva $f: (a, b) \to R^n$ é definida por uma curva parametrizada $\bar{f}: (\bar{a}, \bar{b}) \to R^n$ se existe uma aplicação diferenciável e bijetiva, do tipo $\varphi: (\bar{a}, \bar{b}) \to (a, b)$, de tal forma que sua inversa $\varphi^{-1}: (a, b) \to (\bar{a}, \bar{b})$ é diferenciável e $\bar{f}(\bar{t}) = f(\varphi(\bar{t})), \forall \bar{t} \in (\bar{a}, \bar{b})$.

Por extensão, $f$ é uma reparametrização de $\bar{f}$:

$$\bar{f}\left(\varphi^{-1}(t)\right) = f\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(t)\right)\right) = f(t), \forall t \in (a, b)$$

A partir dos conceitos, toma-se uma curva parametrizada $f(t)$ e uma reparametrização dada por $\bar{f}(\bar{t})$. Logo, $t = \varphi(\bar{t})$ e $\bar{t} = \varphi^{-1}(t)$. Diferenciando $\varphi\left(\varphi^{-1}(t)\right) = t$:

$$\frac{d\varphi}{d\bar{t}} \frac{d\varphi^{-1}}{dt} = 1 \rightarrow \frac{d\varphi}{d\bar{t}} \neq 0$$

Pela definição, $\bar{f}(\bar{t}) = f\left(\varphi(\bar{t})\right)$, logo:

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{t}} = \frac{df}{dt} \frac{d\varphi}{d\bar{t}}$$

Assim, como a curva parametrizada é regular, ou seja, $f'(t) \neq 0$, então a derivada da curva reparametrizada também será $\bar{f}'(\bar{t}) \neq 0$. Em consequência, toda a curva parametrizada regular possui o módulo do vetor tangente não nulo.

A orientação de uma curva regular $\vec{f}(t)$ é o sentido de percurso do traço da curva $\vec{f}(t)$. Conforme Tenenblat (2014), uma reparametrização $\bar{f}$ de $f$ tem orientação igual à de *f* se a mudança de parâmetro é estritamente crescente.

A reparametrização de uma curva pelo comprimento do arco se dá pela função inversa de *s(t)*, conforme quadro abaixo:

Quadro 2 – Reparametrização por comprimento do arco.

| Cálculo de *s(t)* | Encontrar a função inversa | Reescrever a função |
|---|---|---|
| $s(t) = \int_a^t \left\|\vec{f}'(t^*)\right\| dt^*$ | $t = t(s); 0 \leq s \leq t$ | $\vec{h} = \vec{r}\left(t(s)\right) =$ $x\left(t(s)\right)\vec{i} + y\left(t(s)\right)\vec{j} + z\left(t(s)\right)\vec{k}$ $0 \leq s \leq l$ |

Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Um exemplo de uma parametrização pelo comprimento do arco pode ser acompanhado no quadro a seguir:

Quadro 3 – Exemplo de reparametrização por comprimento do arco.

| Etapa | Cálculo |
|---|---|
| Curva a ser reparametrizada | $\vec{f}(t) = (cost, sent, t), 0 \leq t \leq 2\pi$ |
| Norma da primeira derivada da curva | $\vec{f}'(t) = (-sent, cost, 1)$ $\left\|\vec{f}'(t)\right\| = \sqrt{(-sent)^2 + (cost)^2 + (1)^2}$ $\left\|\vec{f}'(t)\right\| = \sqrt{2}$ |
| Encontrar a função comprimento de arco *s(t)* | $s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\, dt^* = \sqrt{2}t$ |
| Encontrar a função inversa *t=t(s)* | $s = \sqrt{2}t$ $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$ |
| Reparametrização pelo comprimento do arco | $\vec{h}(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), sen\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ $0 \leq s \leq 2\pi\sqrt{2}$ |

Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Tenenblat (2014) enuncia a condição exclusiva que uma curva regular $\vec{f}(t)$ está parametrizada pelo comprimento do arco, se e somente se para $\forall t \in I \subset R, \left|\vec{f}'(t)\right| = 1$.

## 2.3 TEORIA LOCAL DAS CURVAS

Dada uma aplicação do tipo $\alpha: I \to R^3, I \subset R$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco, a curvatura de $\alpha$ , representada por *k*, quantifica a velocidade que as retas tangentes mudam de direção (TENENBLAT, 2014). Logo, define-se a curvatura por:

$$k(s) = |\alpha''(s)| \tag{2.3.1}$$

Segue abaixo um exemplo de aplicação apresentado por Tenenblat (2014), onde *a* representa uma constante:

$$\alpha(s) = \left(\text{acos}\frac{s}{a}, asen\frac{s}{a}, 0\right), s \in R$$

$$k(s) = \frac{1}{a}, \forall s \in R$$

Em consequência, em um segmento de reta $\beta(I), I \in R^3$, como não há variação da reta tangente, sua curvatura é nula. Tenenblat (2014) demonstra:

$$\beta(s) = p + vs$$

$$\forall s \in I \rightarrow \beta'(s) = v \rightarrow \beta''(s) = 0$$

$$k(s) = |\beta''(s)| = 0$$

Conforme enunciado anteriormente, dada uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco $\alpha: I \rightarrow R^3$ , tem-se $|\alpha'(s)| = 1$ (o vetor tangente é unitário), e isto implica que $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$. Por exemplo:

$$\alpha(s) = (\cos s\,, sen\ s, 0)$$

$$\alpha'(s) = (-sen\ s, \cos s\,, 0) \rightarrow |\alpha'(s)| = 1$$

$$\alpha''(s) = (-\cos s\,, -sen\ s, 0)$$

$$\alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = sen\ s.\cos s - sen\ s.\cos s + 0 = 0$$

$$(condição\ de\ ortogonalidade\ \alpha.\beta = 0)$$

Logo, para $\forall s \in I$ onde $k(s) \neq 0$, ou, $\alpha''(s) \neq 0$ pode se definir um vetor unitário na direção de $\alpha''(s)$ denominado vetor normal a curva $\alpha(s)$ (TENENBLAT, 2014).

$$\vec{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)} \qquad (2.3.2)$$

A reta normal a curva $\alpha$ em um ponto definido por $s_0 \in I$, como na reta tangente, é a reta que passa pelo ponto $\alpha(s_0)$ na direção do vetor normal $\vec{n}(s_0)$.

Definindo o vetor tangente por $\vec{t}(s)$ como o vetor unitário $\alpha'(s)$ e pelo fato de $\vec{t}(s)$ e $\vec{n}(s)$ serem ortonormais, reorganizando a equação (2.3.2):

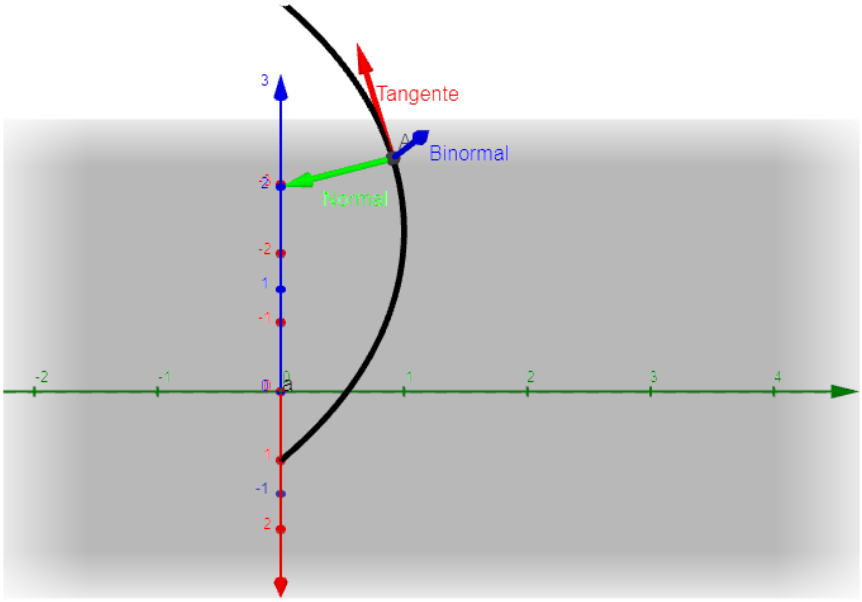
$$\vec{t}'(s) = k(s)\vec{n}(s)$$

Ainda, considerando a mesma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco $\alpha: I \to R^3$, com $k(s) > 0$, o vetor binormal a $\alpha$ em s é dado por:

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$$

Os vetores $\vec{t}(s), \vec{n}(s)$ e $\vec{b}(s)$ formam o referencial do triedro de Frenet da curva $\alpha$ em *s*.

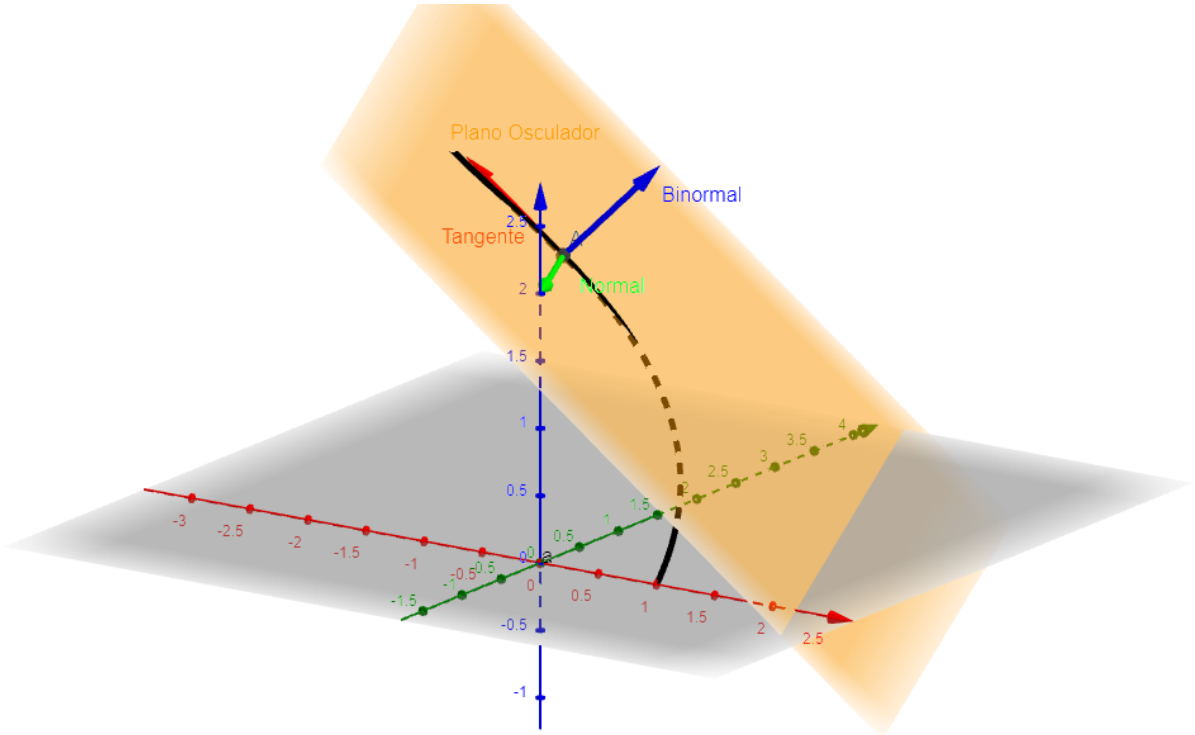
Figura 13 – Triedro de Frenet




Fonte: Elaboração do autor, 2021.

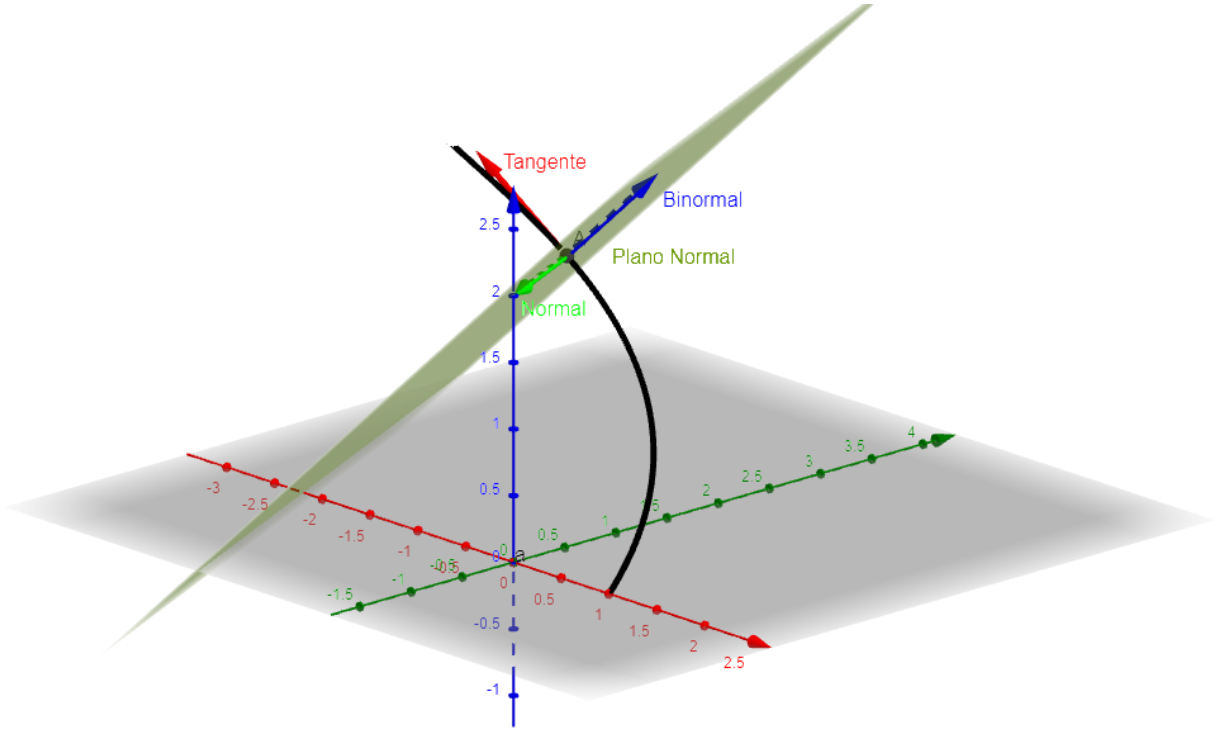
Cada par de vetores define um plano. O plano definido pelos vetores normal e binormal é denominado plano normal. O plano definido pelos vetores normal e tangente é denominado plano osculador. O plano definido pelos vetores tangente e binormal é denominado plano retificante.

Figura 14 – Plano Osculador



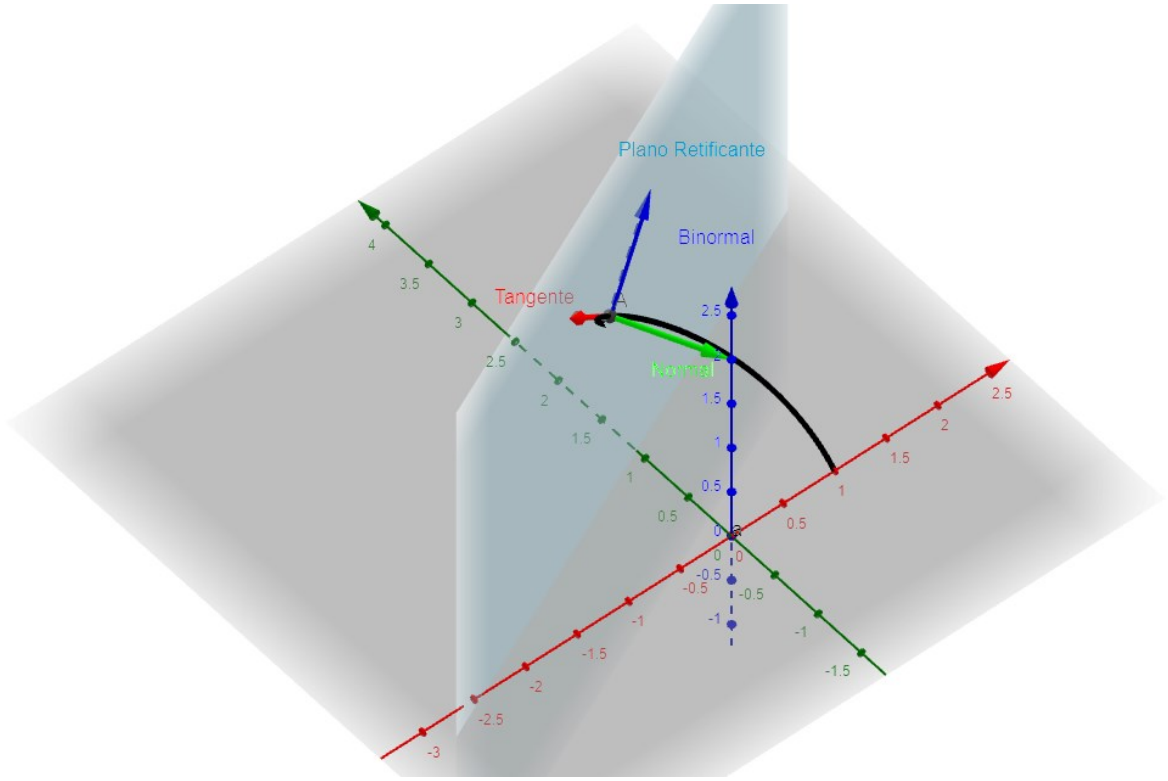

Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Figura 15 – Plano Normal




Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Figura 16 – Plano Retificante




Fonte: Elaboração do autor, 2021.

Outro parâmetro que pode ser obtido a partir do Triedro de Frenet é a torção. A torção é definida como o número real $\tau(s)$ obtido pelo seguinte produto por escalar:

$$\vec{b}'(s) = \tau(s)\vec{n}(s) \tag{2.3.3}$$

De acordo com Tenenblat (2014), o módulo da torção indica a velocidade com que o plano osculador varia.

Como a curva $\alpha: I \to R^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, e $k(s) > 0, \forall s \in I$, logo o triedro de Frenet da curva $\alpha$ em *s* é um referencial ortonormal de $R^3$. Em consequência, os vetores $\vec{t}'(s), \vec{n}'(s)$ e $\vec{b}'(s)$ podem ser obtidos como combinação linear de $\vec{t}(s), \vec{n}(s)$ e $\vec{b}(s)$. (TENENBLAT, 2014).

Temos que:

$$t'(s) = k(s)n(s) \tag{2.3.4}$$

$$b'(s) = \tau(s)n(s) \tag{2.3.5}$$

Obtém-se $\vec{n}'(s)$ derivando $\vec{n}(s)$:

$$\vec{n}(s) = \vec{b}(s) \times \vec{t}(s)$$

$$\vec{n}'(s) = \vec{b}'(s) \times \vec{t}(s) + \vec{b}(s) \times \vec{t}'(s) \tag{2.3.6}$$

Substituindo as equações (2.3.4) e (2.3.5) em (2.3.6), obtemos:

$$\vec{n}'(s) = -\tau(s)\vec{b}(s) - k(s)\vec{t}(s) \tag{2.3.7}$$

Logo, dada uma curva $\alpha$ regular parametrizada pelo comprimento do arco, onde $k(s) > 0, \forall s \in I$, então o triedro de Frenet satisfaz as equações (2.3.4), (2.3.5) e (2.3.7), denominadas fórmulas de Frenet.

Tenenblat (2014) destaca que, em curvas regulares com parametrização diferente do comprimento do arco, a curvatura e a torção de uma curva $\alpha: I \to R^3$ de parâmetro *t* é obtida por:

$$k\big(\alpha(t)\big) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \tag{2.3.8}$$

$$\tau\big(\alpha(t)\big) = \frac{< \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) >}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}$$

## 2.4 APLICAÇÕES DA GEOMETRIA DIFERENCIAL NA CINEMÁTICA DA PARTÍCULA

Seguindo a notação de Pereira Jr. e Lemos (2011) para o vetor tangente $\vec{t}$, vetor normal $\vec{n}$, vetor binormal $\vec{b}$, módulo da velocidade *v*, vetor velocidade $\vec{v}$, vetor aceleração $\vec{a}$, módulo da aceleração *a* e curvatura *k*.

Seja o vetor posição $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ da partícula em um instante *t*, da definição de comprimento de arco, têm-se:

$$s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(t)| dt \tag{2.4.1}$$

Em consequência da equação (2.4.1) e pela definição da intensidade da velocidade $v = \frac{ds}{dt}$ obtemos:

$$v = \frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \tag{2.4.2}$$

Como a relação obtida na equação (2.4.2) é invertível, portanto:

$$\frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \frac{1}{v} \tag{2.4.3}$$

Pela definição de vetor tangente $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ , a definição do vetor velocidade $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, e o resultado obtido na equação (2.4.3) obtemos:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{v} \cdot \vec{v} \tag{2.4.4}$$

Utilizando o resultado obtido nas equações (2.4.3) e (2.4.4), obtemos:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{1}{v}\left(\frac{d\vec{t}}{dt}\right) \tag{2.4.5}$$

A partir da equação (2.4.4), desenvolve-se a sua derivada:

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot v - \vec{v} \cdot \frac{dv}{dt}\right) \tag{2.4.6}$$

Utilizando a definição de $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e aplicando o resultado obtido na equação (2.4.6) na equação (2.4.5):

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{v^3}\left(\vec{a} \cdot v - \vec{v} \cdot \frac{dv}{dt}\right) = \frac{\vec{a}}{v^2} - \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v^3} \tag{2.4.7}$$

Utilizando o resultado obtido na equação (2.4.7) e comparando com a 1ª Equação de Frenet (2.3.4), obtém-se a relação:

$$\frac{\vec{a}}{v^2} - \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v^3} = k\vec{n} \tag{2.4.8}$$

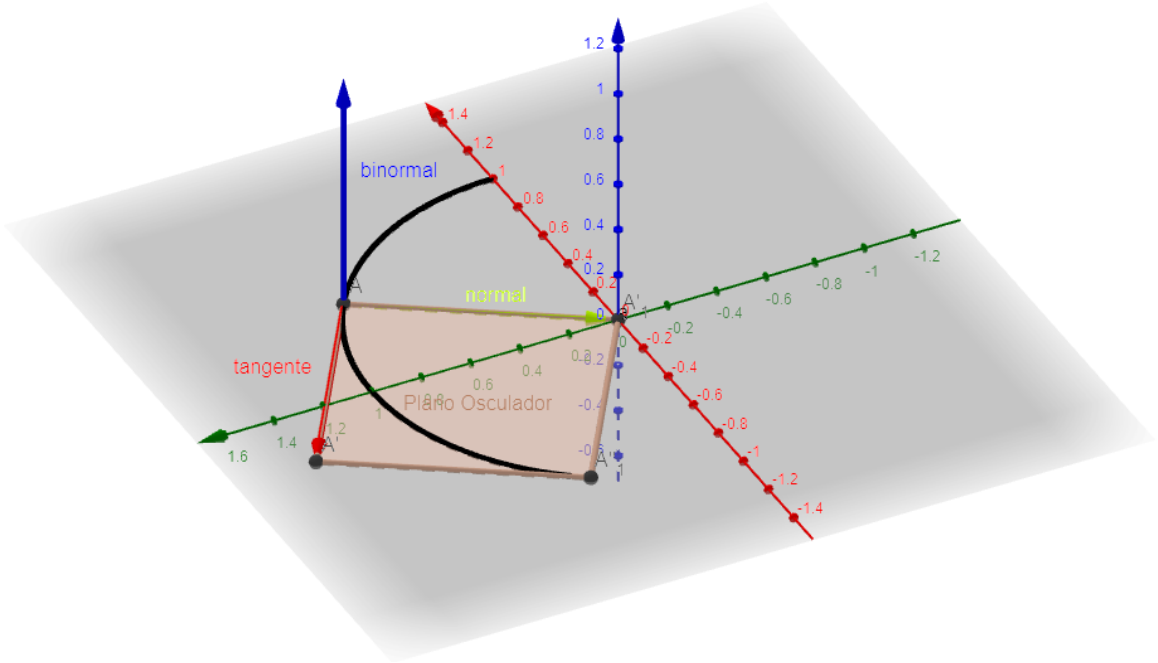
Evidenciando o vetor aceleração $\vec{a}$ da equação (2.4.8) resulta na expressão:

$$\vec{a} = v'\vec{t} + v^2 k\vec{n} \tag{2.4.9}$$

A equação (2.4.9) apresenta a aceleração decomposta em componentes tangencial, paralela a $\vec{t}$ e componente normal, paralela a $\vec{n}$. A componente tangencial tem intensidade $v'$ e a componente normal, ou aceleração centrípeta, tem módulo $v^2/r$, onde $r=1/k$ representa o raio de curvatura. (PEREIRA JR, LEMOS, 2011).

Volina, Pylypaka, Nesvidomin, Pavlov e Dranoska (2021) destacam que se a trajetória de uma partícula estiver em $R^3$, o padrão formado pelo Triedro de Frenet depende somente da curvatura e da torção da curva. Uma condição necessária e suficiente para uma curva ser plana é ter o valor de sua torção nula. Neste caso, o plano osculador coincidirá com o plano que a curva pertence.

Figura 17 – Plano osculador da curva plana




Fonte: Elaboração do autor, 2021.

# 3 DELIMITAÇÃO METODOLÓGICA

Esta unidade trata da metodologia utilizada para o estudo da modelagem do deslocamento de uma partícula em $R^3$.

## 3.1 TIPO DA PESQUISA

A pesquisa qualitativa busca a interpretação maior do objeto de estudo e do contexto do objeto. Pode se destacar as principais características como:

> (...) objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências. (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 32)

A presente pesquisa possui o caráter qualitativo, pois busca uma nova descrição e compreensão para o fenômeno Físico da cinemática de uma partícula sob o enfoque do Cálculo Vetorial e da Geometria Diferencial.

Para se alcançar o resultado, será utilizada a estratégia da pesquisa bibliográfica, que se caracteriza por:

> A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta. (FONSECA, 2002, apud GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 37).

Para se alcançar o objetivo de pesquisa será necessária a coleta sólida de referências teóricas em publicações indexadas e livros referência no assunto. Para assegurar a importância dos modelos selecionados, serão considerados os exemplos propostos pelos autores das obras, contextualizando sua aplicação.

## 3.2 DESCRIÇÃO DO OBJETO DE ESTUDO

Os dados necessários para a comparação dos modelos foram obtidos a partir do estudo de bibliografias sobre Cálculo Vetorial, Geometria Diferencial e Física Cinemática.

Para a análise dos modelos escolhidos foram selecionados os critérios de abrangência, limitações, dificuldade de aplicação, praticidade e relevância para a descrição da cinemática do deslocamento de uma partícula em $R^3$.

## 3.3 COLETA DE DADOS

Esta seção trata da descrição do processo de coleta de dados para a realização do estudo.

### 3.3.1 Instrumentos para a coleta de dados

Para a obtenção dos dados, foram utilizados livros e bases de dados virtuais indexadas, que permitiram o acesso a obras de outros pesquisadores, servindo de subsídio para a obtenção do embasamento teórico necessário para a seleção e comparação dos modelos descritivos.

### 3.3.2 Procedimentos para a coleta de dados

A bibliografia coletada foi analisada e selecionada de modo a contemplar de forma abrangente o Cálculo Vetorial, a Geometria Diferencial e a Física Cinemática que integrem a grade de cursos introdutórios, servindo de guia para o desenvolvimento da pesquisa.

Os critérios para a seleção de dados (obras) foram: relação do tema da obra com o Cálculo Vetorial, Geometria Diferencial e Física Cinemática; relevância das obras de Física em cursos introdutórios de Física; aplicabilidade dos métodos propostos; e a análise de obras com até 5 anos de publicação ou a última edição encontrada quando não for possível atender ao critério temporal.

## 3.4 TRATAMENTO DOS DADOS

A partir da revisão bibliográfica, foram selecionadas equações que modelem o deslocamento de uma partícula em $R^3$, com o foco na cinemática, a partir da Física Cinemática e do Cálculo Vetorial, de forma a ampliar a quantidade de informações sobre o fenômeno na pesquisa. Com o resultado obtido na revisão bibliográfica, foi proposta a aplicação dos modelos em dois casos: no deslocamento em uma trajetória retilínea e em uma trajetória circular.

Quanto ao objetivo, a pesquisa se caracteriza pela abordagem exploratória, que, de acordo com Gerhardt e Silveira (2009, p. 35) consiste em “proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses”.

A pesquisa se constituirá no desenvolvimento dos conceitos de Física Cinemática, Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial com o foco em proporcionar uma comparação de metodologia de modelagem de um mesmo fenômeno, proporcionando interpretações diferentes sobre o mesmo.

# 4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo serão comparados os conceitos da Cinemática abordados na seção 2.1 com os conceitos do Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial abordados na seção 2.4. Devido à complexidade dos desenvolvimentos algébricos, no decorrer das discussões neste capítulo será considerado $\overrightarrow{v_0} = \vec{0}$, isto é, a partícula iniciará em repouso.

## 4.1 DESLOCAMENTO DE UMA PARTÍCULA EM UMA TRAJETÓRIA RETA

O movimento retilíneo uniformemente variado, descrito pela equação (2.1.7.1), onde $\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{v_0} = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ e $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ se desenvolve em uma reta parametrizada que modela o deslocamento de uma partícula:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\vec{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})t + \frac{1}{2}t^2(a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{r}(t) = \left(x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2, y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2, z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2\right)$$

Como se considera $\overrightarrow{v_0} = \vec{0}$, a equação se desenvolve em:

$$\vec{r}(t) = \left(x_0 + \frac{1}{2}a_x t^2, y_0 + \frac{1}{2}a_y t^2, z_0 + \frac{1}{2}a_z t^2\right) \quad (4.1.1)$$

### 4.1.1 Resolução conforme a Física Cinemática

De acordo com a equação (2.1.2.1), o vetor velocidade $\vec{v}$ é obtido pela derivada da curva $\vec{r}(t)$ , conforme a equação (4.1.1):

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (a_x t, a_y t, a_z t) \tag{4.1.1.1}$$

A partir do resultado obtido na equação (4.1.1.1) e utilizando o conceito de vetor aceleração $\vec{a}$ da equação (2.1.3.1) em relação à curva $\vec{r}(t)$ obtemos:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = (a_x, a_y, a_z) \tag{4.1.1.2}$$

Em resumo, uma partícula que se desloca na curva $\vec{r}(t)$, descrita pela equação (4.1.1), possui vetor velocidade conforme a equação (4.1.1.1) e vetor aceleração (4.1.1.2).

$$\vec{r}(t) = \left(x_0 + \frac{1}{2}a_x t^2, y_0 + \frac{1}{2}a_y t^2, z_0 + \frac{1}{2}a_z t^2\right)$$

$$\vec{v}(t) = (a_x t, a_y t, a_z t)$$

$$\vec{a}(t) = (a_x, a_y, a_z)$$

### 4.1.2 Resolução conforme o Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial

Retomando a reta modelada pela equação (4.1.1) e adotando a definição do vetor velocidade $\vec{v}$ da equação (2.1.2.1) temos de forma análoga à resolução de acordo com a Física Cinemática:

$$\vec{r}(t) = \left(x_0 + \frac{1}{2}a_x t^2, y_0 + \frac{1}{2}a_y t^2, z_0 + \frac{1}{2}a_z t^2\right) \tag{4.1.2.1}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (a_x t, a_y t, a_z t) \qquad (4.1.2.2)$$

Para a definição do vetor aceleração $\vec{a}$ de acordo com o cálculo vetorial, conforme a equação (2.4.9), faz-se necessário encontrar o valor da curvatura *k* da curva $\vec{r}(t)$, utilizando a equação (2.3.8)

$$\vec{r}''(t) = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x t & a_y t & a_z t \\ a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \left(a_y a_z t - a_y a_z t\right)\vec{i} + (a_x a_z t - a_x a_z t)\vec{j} + (a_x a_y t - a_x a_y t)\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \vec{0}$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = 0$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(a_x t)^2 + \left(a_y t\right)^2 + (a_z t)^2} = t\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

Aplicando os resultados na equação (2.3.8), obtemos a curvatura *k*:

$$k(t) = \frac{0}{\left(t\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)^3} = 0 \qquad (4.1.2.3)$$

O resultado de $k(t) = 0$ obtido na equação (4.1.2.3) é consequência direta da curva $\vec{r}(t)$ modelar uma reta.

De acordo com a definição na seção (2.3) do vetor tangente como sendo unitário, o vetor tangente $\vec{t}(t)$ é encontrado por:

$$v = |\vec{r}'(t)| = t\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} \tag{4.1.2.4}$$

$$t(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v} = \frac{(a_x t, a_y t, a_z t)}{t\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}$$

$$t(t) = \left(\frac{a_x t}{t\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_y t}{t\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_z t}{t\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\right)$$

$$t(t) = \left(\frac{a_x}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}, \frac{a_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}\right) \tag{4.1.2.5}$$

Utilizando os resultados obtidos nas equações (4.1.2.3), (4.1.2.4) e (4.1.2.5) e aplicando na equação (2.4.9) do vetor aceleração $\vec{a}$ obtemos:

$$\vec{a}(t) = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}.\left(\frac{a_x}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}, \frac{a_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}\right)$$

$$\vec{a}(t) = (a_x, a_y, a_z) \tag{4.1.2.6}$$

Comparando os resultados obtidos pela Física Cinemática nas equações (4.1.1.1) e (4.1.1.2) com os resultados obtidos pelo Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial nas equações (4.1.2.2) e (4.1.2.6) observa-se que os resultados são idênticos, mesmo oriundos de caminhos e interpretações diferentes.

## 4.2 DESLOCAMENTO DE UMA PARTÍCULA EM UMA TRAJETÓRIA CIRCULAR

Uma circunferência de centro $O = (x_0, y_0, z_0)$, raio $a$, paralela ao plano $xy$ pode ser modelada por:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + acost, y_0 + asent, z_0) \quad 0 \leq t \leq 2\pi \tag{4.2.1}$$

### 4.2.1 Resolução conforme a Física Cinemática

De acordo com a equação (2.1.2.1), o vetor velocidade tangencial $\vec{v}$ é obtido pela derivada da curva $\vec{r}(t)$ , conforme a equação (4.2.1):

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (-asent, acost, 0) \tag{4.2.1.1}$$

A partir do resultado obtido na equação (4.2.1.1) e utilizando o conceito de aceleração centrípeta $a_c$ da equação (2.1.8.2) em relação à curva $\vec{r}(t)$ obtemos:

$$v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-asent)^2 + (acost)^2 + (0)^2} = a$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{a^2}{a} = a \tag{4.2.1.2}$$

Pela característica do movimento circular uniforme, a velocidade tangencial não sofre aceleração, portanto a aceleração tangencial é nula. Ainda, em relação ao referencial normal, como não há deslocamento, a velocidade normal é nula. A velocidade tangencial não

sofre influência da aceleração normal (ou centrípeta). A aceleração centrípeta atua na mudança de direção do vetor velocidade tangencial.

Portanto, uma partícula que se desloca na curva $\vec{r}(t)$, descrita pela equação (4.2.1), possui vetor velocidade tangencial conforme a equação (4.2.1.1) e aceleração centrípeta (4.2.1.2).

$$\vec{r}(t) = (x_0 + acost, y_0 + asent, z_0), t \in [0,2\pi]$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (-asent, acost, 0)$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = a$$

### 4.2.2 Resolução conforme o Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial

Retomando a circunferência modelada pela equação (4.2.1) e adotando a definição do vetor velocidade $\vec{v}$ da equação (2.1.2.1) temos de forma análoga à resolução de acordo com a Física Cinemática:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + acost, y_0 + asent, z_0), t \in [0,2\pi] \qquad (4.2.2.1)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (-asent, acost, 0) \qquad (4.2.2.2)$$

Para a definição do vetor aceleração $\vec{a}$ de acordo com o cálculo vetorial, conforme a equação (2.4.9), faz-se necessário encontrar o valor da curvatura *k* da curva $\vec{r}(t)$, utilizando a equação (2.3.8)

$$\vec{r}''(t) = (-acost, -asent, 0)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -asent & acost & 0 \\ -acost & -asent & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + (a^2 sen^2 t + a^2 cos^2 t)\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = (0,0,a^2)$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (a^2)^2}$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = a^2$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-asent)^2 + (acost)^2 + (0)^2} = a$$

Aplicando os resultados na equação (2.3.8), obtemos a curvatura *k*:

$$k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a} \qquad (4.2.2.3)$$

De acordo com a definição na seção (2.3) do vetor tangente como sendo unitário, o vetor tangente $\vec{t}(t)$ é encontrado por:

$$v = |\vec{v}(t)| = a \qquad (4.2.2.4)$$

$$\vec{t}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v} = (-sent, cost, 0) \qquad (4.2.2.5)$$

O vetor normal $\vec{n}$ pode ser obtido por:

$$\vec{n}(t) = \frac{\vec{t}'(t)}{|\vec{t}'(t)|} = (-cost, -sent, 0) \qquad (4.2.2.6)$$

Utilizando os resultados obtidos nas equações (4.2.2.3), (4.2.2.4), (4.2.2.5) e (4.2.2.6) e aplicando na equação (2.4.9) do vetor aceleração $\vec{a}$ obtemos:

$$\vec{a}(t) = v'\vec{t} + v^2 k\vec{n}$$

$$\vec{a}(t) = 0.(-sent, cost, 0) + a^2.\frac{1}{a}.(-cost, -sent, 0)$$

$$\vec{a}(t) = (-acost, -asent, 0) \qquad (4.2.2.7)$$

A partir do resultado obtido na equação (4.2.2.7) obtém-se a intensidade da aceleração:

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(-acost)^2 + (-asent)^2 + (0)^2}$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{a^2(sen^2 t + cos^2 t)}$$

$$|\vec{a}(t)| = a_c = a \qquad (4.2.2.8)$$

Comparando os resultados obtidos pela Física Cinemática nas equações (4.2.1.1) e (4.2.1.2) com os resultados obtidos pelo Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial nas equações (4.2.2.2) e (4.2.2.8) observa-se que os resultados são iguais, mesmo oriundos de caminhos e interpretações diferentes.

## 4.3 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS

A resolução das situações do deslocamento da partícula em uma trajetória reta e em uma trajetória circular, apresentadas nas seções 4.1 a 4.4, utilizando as equações da Física Cinemática apresentaram um resultado mais rápido para se obter os parâmetros velocidade e aceleração.

Entretanto, as equações utilizadas se aplicam apenas a casos específicos e em situações particulares. Por exemplo, caso houvesse a necessidade de se encontrar o vetor aceleração no movimento circular, não seria possível aplicar apenas a equação (2.1.8.1).

Na abordagem da Física Cinemática, seria necessário o uso de um formulário contendo as equações a serem utilizadas para cada caso particular. Para se iniciar a pesquisa ou o ensino deste tipo de fenômeno, o uso de formulários se apresenta adequado. Porém, esta abordagem exige uma maior contextualização por parte do discente, com o uso de gravuras e esquemas, para o entendimento global do fenômeno com seu dinamismo e a interdependência das variáveis.

Apresenta-se adequada a retomada dos assuntos da cinemática a partir da abordagem do cálculo vetorial e da geometria diferencial assim que o discente ou o pesquisador tenha conhecimento dos conceitos. O aprendizado conjunto dos conceitos matemáticos é facilitado pela contextualização proporcionada pela Física. Entretanto, a modelagem considerando $\overrightarrow{v_0}$ não nulo mostrou-se complexa, sugerindo que nestes casos a modelagem Física é mais indicada.

Concluindo, a modelagem do deslocamento de uma partícula pela Física Cinemática é adequada, porém é limitada por algumas condições de contorno, exigindo o uso de um formulário para se adequar cada situação ao seu uso particular. A abordagem sob a luz dos conceitos do Cálculo Vetorial e da Geometria Diferencial possibilita uma modelagem mais geral do fenômeno físico, porém limitada aos casos onde $\overrightarrow{v_0}$ é nulo, ou seja, a partícula inicia em repouso.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os conceitos de Física Cinemática abordados nesta pesquisa são importantes para a introdução de novos conceitos para o aluno. Entretanto, no desenvolvimento desta pesquisa, mostrou-se que a abordagem pelas fórmulas da Física apresentadas em cursos introdutórios se mostra limitada às condições ambientais e do deslocamento em si. Mudanças em características do movimento de uma partícula, como a sua trajetória, exigem a apresentação de um novo cabedal de fórmulas para a sua modelagem.

Com o uso das ferramentas do Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial foi possível apresentar uma equação que relacione a aceleração e a velocidade para trajetórias representadas por curvas suaves, onde os parâmetros vetor normal, vetor tangente e curvatura cumprem o papel de ajustar o movimento da partícula a diversas trajetórias. Porém esta abordagem se mostrou limitada aos casos onde a partícula inicia em repouso. Esta modelagem tem potencial aplicação em ramos da Engenharia, em estudo da estática e dinâmica de estruturas, assim como na Física, na área de cinemática e dinâmica.

Dada a característica desta pesquisa ser bibliográfica, não foram abordados outros aspectos do movimento, como energia cinética, momento linear e inércia, sendo necessária a descrição da torção da curva. Portanto, sugere-se em pesquisas futuras a relação entre a torção de uma curva e demais grandezas dinâmicas, como energia cinética, momento linear e inércia, assim como a generalização da modelagem pelo Cálculo Vetorial e Geometria Diferencial nos casos onde a partícula não se encontra em repouso no momento inicial.

# REFERÊNCIAS

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de Pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GONÇALVES, Miriam Buss; FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo B:** Funções de Várias Variáveis, Integrais Múltiplas, Integrais Curvilíneas e de Superfície. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

GUSELLA, Vittorio. Geometrical Uncertainty in Mechanics and Random Curves in Space. **Probabilistic Engineering Mechanics**. Perugia, v. 62, 2020. DOI: https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2020.103102. Acesso em: 31 jul. 2021.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física Básica 1:** Mecânica. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2013.

PEREIRA JR, Antônio Duarte; LEMOS, Nivaldo A. Geometria Diferencial de Curvas e Dinâmica da Partícula. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. Osasco, v. 33, n. 2, p. 2306 – 2306-7, 2011. DOI: https://doi.org/10.1590/S1806-11172011000200007. Acesso em: 26 jul. 2021.

RESNICK, Robert; HALLIDAY, David; KRANE, Kenneth S. **Física 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

TENENBLAT, Keti. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. rev. São Paulo: Blucher, 2014.

VOLINA, Tatiana; PYLYPAKA, Serhii; NESVIDOMIN, Victor; PAVLOV, Aleksandr; DRANOVSKA, Svitlana. The Possibility to Apply the Frenet Trihedron and Formulas for The Complex Movement of a Point on a Plane With the Predefined Plane Displacement. **Eastern-European Journal of Enterprise Technologies**. v. 3, n. 7 (111), p. 45-50, 2021. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.232446. Acesso em: 28 jul. 2021.